arXiv:2302.03527v1 [cs.LO] 7 Feb 2023

结构稀疏图类上的一阶模型检测

JanDreier NikolasM¨ahlmann SebastianSiebertz维也纳工业大学 不来梅大学 不来梅大学 dreier@ac.tuwien.ac.at maehlmann@uni-bremen.de siebertz@uni-bremen.de

摘要

如果一个图类可以通过对某个处处稀疏类进行一阶转导构造出来，则称其为结构上处处稀疏类。结构上处处稀疏类极大地推广了处处稀疏类，并构成单子稳定类的重要实例。我们证明，一阶模型检验问题在每个结构性 nowhere dense 图类上都是固定参数可处理的。

我们的结果建立在近期提出的单子稳定图类的博弈论刻画之上。作为另一项具有独立价值的关键成果，我们提供了一种多项式时间算法，用于近似弱邻域覆盖（适用于一般图）。我们将这两种工具结合起来，得到一种递归的基于局部性的模型检测算法。对于所有具有翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖的单子稳定图类，该算法都是高效的；翻转封闭性是一项较弱的附加假设。由此，在单子稳定类上实现高效的一阶模型检测，就归结为证明这些类存在翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖——这是一个纯粹的组合问题。最后，我们通过证明结构上处处稀疏类存在所需的覆盖，补全了这一图景：我们证明，每个结构上处处稀疏类都可以通过收缩局部顶点集进行稀疏化，从而使我们能够将稀疏类中覆盖存在性的结论推广到这些类。

目录

1 引言 **1**

2 技术概述 **5**

3 预备知识 **9**

3.1 图.9 3.2 逻辑.10 3.3 稳定性.11 3.4 Flipper 博弈.12 3.5 弱邻域覆盖.14

4 受限公　　式与局部类型 14

4.1 受限公式.14 4.2 博弈.15 4.3 局部博弈.16 4.4 局部博弈决定全局博弈.16 4.5 局部博弈与局部类型.19 4.6 带保护集的博弈与类型.20

5 模型检测 **22**

5.1 设置.22 5.2 计算带守卫公式.23 5.3 缩减求值半径.29 5.4 主要结果.32 5.5 关于 $f(|\varphi|)$ 可计算性的注记.33

6 弱邻域覆盖的近似 **34**

6.1 线性规划.34 6.2 整数线性规划公式.35 6.3 分数弱邻域覆盖.36 6.4 随机采样.37 6.5 最小成员数集合覆盖归约.38

7 结构稀疏类中的弱邻域覆盖 40

7.1 局部收缩与弱邻域覆盖.40 7.2 结构稀疏图背景.41 7.3 结构上处处稀疏类的准丛分解.44 7.4 准丛林中的兄弟收缩.46 7.5 收缩过程概述.48 7.6 第一阶段：消除衣架.52 7.7 第二阶段：界定入集与出集.54 7.8 收缩的稀疏性.59 7.9 总结.62

1 引言

逻辑为描述算法问题提供了一种灵活而优雅的形式体系。例如，k-可着色问题（对每个固定的 k）和哈密顿路径问题可以用单子二阶逻辑（MSO）表述，而 k-独立集问题、k-支配集问题以及许多其他问题则可以用一阶逻辑（FO）表述。因此，若某种逻辑的模型检测问题具有可处理性——也就是说，对于给定的结构和公式，判定该公式在该结构中是否为真——那么一整类问题都具有可处理性，即所有可用该逻辑定义的问题均如此。正因如此，逻辑的模型检测结果通常称为算法元定理。得益于图论所提供的丰富结构理论，许多算法元定理都是针对图提出的，但其中大多数都可以轻松推广到一般的关系结构。下文因此将讨论范围限定于（带颜色的）图和图类。或许最著名的算法元定理是 Courcelle 的著名定理：任何可用 MSO 定义的图性质，都能在每个树宽有界的图类上用线性时间判定 [Cou90]。由于算法元定理具有普遍性且适用范围广，因此在当代研究中受到广泛关注。相关综述可参见 [Gro08, GK11, Kre11]。

对于量词秩为 q 的任意固定一阶公式，都可以通过一种直接的递归算法，在时间 $n^{\mathcal{O}(q)}$ 内对 n顶点图进行检验。一般而言，不能指望进一步改进这一运行时间。例如，假设指数时间假设（ETH）成立 [IP01, IPZ01],，则对于任意函数 f， k-独立集问题无法在时间$f(k) \cdot n^{o(k)}$内解决；而 k-独立集问题可以用量词秩为 k的一阶公式表达。这引出了一个问题：如何对图类进行分类，使得我们能够在时间 $f(\varphi) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$内求出一阶公式 φ 的真值，其中 f是某个函数？用参数化复杂性理论的术语来说，这个问题是：在哪些图类上，一阶逻辑模型检测问题是固定参数可处理[1]的？尽管可处理的 MSO 模型检测分类基本上已经完成 [GHL+14, KT10],，但我们距离全面分类可处理的一阶逻辑模型检测还相去甚远。

针对稀疏图类进行此类分类的出发点，是 Seese 的一项结果：对于有界度的每个图类，图上的每个一阶逻辑性质都可以在线性时间内判定 [See96]。他的结果后来被推广到越来越一般的稀疏图类 [FG01a, FG01b, DGK07, DKT10, Kre11, GKS17]。Grohe、Kreutzer 和 Siebertz 的最新结果 [GKS17] 表明，对于每个处处稀疏的图类，图上每个一阶逻辑可定义性质都可以在近线性时间内判定。处处稀疏图类是非常一般的稀疏图类，并且事实证明，它们构成了单调图类上进行一阶逻辑模型检测的可处理性屏障（也就是说，这类图对取子图运算封闭）：如果一个单调图类并非处处稀疏，那么对于来自该图类的输入，检验一阶性质与处理一般图一样困难 [DKT10, Kre11]。

因此，单调类上的可处理一阶逻辑模型检测分类已告完成，这促使研究重点转向遗传图类（即对取诱导子图封闭的类），在这类图中，稀疏类之外也可能实现模型检测。对于稠密图类，一个重要结果是将 Courcelle 定理从 MSO 扩展到团宽度有界的图 [CMR00], ，这也意味着在局部有界团宽度的类上，一阶逻辑模型检测是可处理的，例如在地图图上 [EK17]。对于一些通过几何方法定义的稠密图类，也取得了正面结果，例如区间图的受限子类 [GHK+13]，以及圆弧图、圆图、盒图、圆盘图和多边形可见图的受限子类 [HPR17]。最近的一项突破将许多关于稠密图类的结果推广开来：研究表明，对于每个

[1]当函数 f 不可计算时，也会称其为 *non-uniform fixed-parameter tractability*。我们将在第 5.5 节讨论结果的统一性。

孪生宽度有界的类 [BKTW21]，如果将一条可证明其满足条件的收缩序列作为额外输入给出，则一阶逻辑模型检测是固定参数可处理的。事实上，研究发现，在考虑有序图类时，孪生宽度有界的类恰好界定了高效一阶逻辑模型检测的可处理性边界 [BGOdM+22]。

为了将基于稀疏性的方法扩展到稠密图类，研究人员考察了结构上稀疏的图类，它们被定义为稀疏图类的一阶转导，参见 [GKN+20、NdM16]。直观地说，一阶转导通过对 G 的顶点进行着色，将边关系替换为一阶可定义边关系，最后将顶点集限制为一个可定义子集，从图 G （其顶点是图 G 的顶点的一个子集） H构造出一个图。我们称二元关系 R 在图 G 中是可定义的，如果存在一个公式 $\eta(x,\ y)$，使得 $(u,\ v) \in R \Leftrightarrow G \models \eta(u,\ v)$。类似地，如果存在一个公式 $\nu(x)$，使得$v \in U \Leftrightarrow G \models \nu(v)$，则称集合 U是可定义的。我们将在第 3 节正式定义转导。一阶转导的简单例子包括图补运算和固定图幂。转导的另一个基本且尤为重要的例子是翻转。给定两个集合 $A,\ B \subseteq V(G)$，它们分别被标记为一种颜色，翻转会对 A 与 B 中顶点之间的邻接关系取补，这可以通过一个原子公式轻松定义。若存在一个处处稠密类 $\mathscr{C}$，使得 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}$ 的一阶转导，我们就称图类 $\mathscr{D}$ 是结构上处处稀疏的。注意，结构上处处稀疏类比处处稀疏类广泛得多，尤其包括稠密图类。另一方面，结构上处处稀疏类与具有有界孪生宽度的类互不包含。

由于处处稀疏类位于可处理稀疏类层次的顶端，结构上处处稀疏类可以说是最一般的结构稀疏类，人们有望在这些类上实现高效的模型检测。直到现在，还没有迹象表明如何解决哪怕像 Independent Set 问题这样的特殊情形，更不用说在这些类上解决完整的一阶逻辑模型检测问题了。在这项工作中，我们通过证明以下定理，为这一研究方向树立了一个里程碑。

定理 1. 对于每个结构上处处稀疏类 $\mathscr{C}$，都存在一个函数 $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得给定一个图 $G \in \mathscr{C}$和一个句子 φ，可以在时间 $f(|\varphi|) \cdot |V(G)|^{11}$内判定 $G \models \varphi$是否成立。

直到现在，高效的模型检测算法只能从可处理的基础类推广到有界度类的转导 [GHO+20]，以及有界局部团宽度类的转导 [BDG+22]。后一结果中的多项式运行时间的次数并非统一，而是取决于所考虑的类。对于结构上有界扩张的类（每个有界扩张类都是处处稀疏的，但处处稀疏这一概念严格比有界扩张更一般），如果输入还附带特殊着色 [GKN+20]，则可以实现高效的模型检测。我们还指出，在无序图的有界孪生宽度类上，模型检测算法也需要额外输入所谓的收缩序列；截至目前，这仍只是一个有条件的结果 [BKTW21]。

在此我们想强调，我们的算法不依赖于输入中额外提供的任何着色或分解，其运行时间为多项式，且多项式的次数与类 $\mathscr{C}$ 无关。这使其区别于现有的、适用于具有有界孪生宽度、结构上有界扩张的类以及有界局部团宽度类的转导的算法。

我们的结果建立在经典模型论的概念之上。正如 [AA14]，所指出的，一个单调图类是稳定的，当且仅当它处处稠密。稳定性是模型论中区分野性与驯良理论最重要的界线之一 [She90]。另一个重要概念是 不具有独立性（NIP），它涵盖的图类甚至更广。令人惊讶的是，事实证明，对于单调类而言，依赖性、稳定性和处处稠密性这三个概念

等价。稳定类和 NIP 类的重要子类是单子稳定 类和单子 *NIP* 类。对该类中的图添加任意数量的一元谓词（颜色）后，这些类仍然保持稳定性/NIP。本工作中涉及的所有概念都将在第 3 节中正式定义。

所有已知其模型检验问题可固定参数处理的遗传类，都是单子 NIP 的。这促使人们提出猜想: 图的遗传类能够进行固定参数可处理的模型检验，当且仅当它是单子 NIP 的，参见例如 [war16, GPT22]。事实证明，有序图的遗传类是 NIP 的，当且仅当其孪生宽度有界 [BGOdM$^+$22]。此外，遗传图类稳定/NIP，当且仅当它是单子稳定/NIP [BL22], ，这进一步凸显了这些概念对于遗传图类的重要性。每个结构上处处稀疏类都是单子稳定的 [PZ78, AA14]；事实上，人们还猜想单子稳定性与结构上的处处稀疏性这两个概念等价，参见例如 [GPT22]。

下面简要概述我们证明定理 1 的方法，并借此介绍更多贡献。根据 Gaifman 局部性定理 [Gai82], ，判断一阶句子 φ 在图中是否为真的问题，可以化简为: 先检验图中其他局部公式是否为真，再求解着色变体的（距离为 d 的）独立集问题。独立集问题本身也可以化简为在图的一种着色中求值局部公式。局部公式可以在图的有界半径邻域中求值，其中半径仅取决于 φ。因此，只要一个类 $\mathscr{C}$ 中的图的局部邻域能够高效地进行模型检测，就可以立即得到一个高效的模型检验算法，用于 $\mathscr{C}$。这一技术最早由 [FG01b] 采用，也是 [GKS17] 在处处稠密图类上提出的模型检验算法的基础。在这些图类中，一个关键要素是通过一种称为 Splitter 博弈的博弈来递归分解局部邻域，从而刻画这些图类 [GKS17]。由于 Splitter 博弈只能分解稀疏图，我们在算法中以一种近期提出的刻画单子稳定类的方法取而代之，该方法通过所谓的 Flipper 博弈来刻画 [GMM$^+$23]。下文将给出更详细的技术概述，尤其会着重说明我们的方法与 [GKS17] 的方法之间的诸多重要差异。

[GKS17] 的算法思想是将公式 φ 的求值归约为在局部邻域中求值公式，并利用 Splitter 博弈分解来引导递归进入局部邻域。若直接这样做，分支度将达到 n ，运行时间为 $\Omega(n^\ell)$，其中递归深度 ℓ 随 φ增长。 [GKS17]提出的解法是使用公式的保秩范式，将彼此接近的邻域聚类，并通过所谓的稀疏 r-邻域覆盖，在一次递归调用中一并处理这些邻域。图 G 的一个r-邻域覆盖，其度为 d 、扩展度为 s ，是由 $V(G)$ 的若干子集组成的族 $\mathcal{X}$ ；这些子集称为簇，并满足: 每个顶点的 r-邻域都包含在某个簇中；每个簇的半径至多为 s；每个顶点至多出现在 d 个簇中。若对每个 r 和 $\varepsilon > 0$ ，都存在常数 $c(r,\varepsilon)$ 和 $\sigma(r)$，使得每个 $G \in \mathscr{C}$ 都有一个扩展度至多为 $\sigma(r)$、度至多为 $c(r,\varepsilon) \cdot |G|^\varepsilon$ 的 r-邻域覆盖，我们就称类 $\mathscr{C}$ 具有稀疏邻域覆盖。 [GKS17] 证明了，每个无处稠密图类都具有稀疏邻域覆盖。通过适当缩放 ε ，即可在所需的固定参数可处理运行时间内构造模型检测所需的递归数据结构。

邻域覆盖是一种重要工具，在分布式算法的设计等领域有着广泛应用。关于稀疏邻域覆盖的应用与构造的详细背景，请参见 [Pel00]。如上所述，处处稀疏图类存在稀疏邻域覆盖 [GKS17], ；事实上，对于单调类而言，稀疏邻域覆盖的存在性刻画了处处稀疏

类 [GKR$^+$18]。另一方面，已知一般图类不一定存在稀疏邻域覆盖：对于任意 r 和 $s \geq 3$，都存在无穷多个图 G，使得每个扩展度至多为 s 的 r-邻域覆盖的度均为 $\Omega(|G|^{1/s})$ [TZ05]。对于单子稳定类，我们既不知道是否存在稀疏 r-邻域覆盖，也不知道如果存在，如何高效地计算它们。

对于我们的模型检测算法，可以放宽对邻域覆盖的假设，转而考虑弱邻域覆盖。图 G 的一个弱 r-邻域覆盖，其度为 d、扩展度为 s，是由 $V(G)$ 的子集组成的一个族 $\mathcal{X}$，这些子集也称为簇，并满足以下条件：每个顶点的 r-邻域都包含在某个簇中；每个簇都是图 G 中某个 s-邻域的子集（但其自身的半径不一定至多为 s）；并且每个顶点至多出现在 d 个簇中。若对每个 r 和 $\varepsilon > 0$，都存在常数 $c(r,\varepsilon)$ 和 $\sigma(r)$，使得每个 $G \in \mathscr{C}$ 都有一个弱 r-邻域覆盖，其扩展度至多为 $\sigma(r)$，度至多为 $c(r,\varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}$，则称图类 $\mathscr{C}$ 具有稀疏弱邻域覆盖。修改 [TZ05] 的证明即可轻易说明，一般的图类不具有稀疏弱邻域覆盖。不过请注意，[TZ05] 中展示的图类并不具有单子 NIP。尽管我们仍无法证明单子稳定类存在稀疏弱邻域覆盖，但作为一项本身具有独立价值的主要成果，我们证明了一般情况下可以高效地近似弱 r-邻域覆盖。我们证明如下定理。

定理 10. 存在一种算法，以一个 n 顶点图 G 以及数字 r、$s \in \mathbb{N}$ 为输入，并在 $\mathcal{O}(n^{9.8})$ 时间内计算出一个弱 r 邻域覆盖，其度为 $\mathcal{O}(\log(n)^2+1)d^*$，扩展度为 s。其中，d^* 是满足 G 存在度为 d^*、扩展度为 s 的弱 r 邻域覆盖的最小数字。

请注意，当我们的目标是获得度为 $\mathcal{O}(n^{\varepsilon})$ 的邻域覆盖时，对数因子可以忽略。因此，根据该定理，如果一个图类存在稀疏弱邻域覆盖，那么这些覆盖就可以高效地计算出来。定理 10 得证后，我们为将可处理的模型检测推广到所有单子稳定图类指明了一条清晰的路径，具体如下述定理所述。

定理 5. 设 $\mathscr{C}$ 是一个存在翻转闭稀疏弱邻域覆盖的单子稳定图类。存在一个函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得给定一个图 $G \in \mathscr{C}$ 和一个句子 φ，可以在 $f(|\varphi|) \cdot |V(G)|^{11}$. 时间内判定 $G \models \varphi$ 是否成立。

这里，翻转封闭性是一种较弱的封闭条件，要求对来自 $\mathscr{C}$ 的图进行 ℓ 次翻转后得到的每个类 $\mathscr{C}_\ell$，都存在稀疏弱邻域覆盖，且其扩展度上界与 $\mathscr{C}$ 相同。我们预期这一封闭性质会自然满足，因为我们主要关注在转导下封闭的图类的性质，因此这些图类也在任意常数次翻转下封闭。根据定理 5，单子稳定图类上的高效模型检测问题可归结为一个纯粹的组合问题：稀疏弱邻域覆盖是否存在。我们猜想，即使对于单子 NIP 类，所需的邻域覆盖也存在。

猜想 1. E 每个单子 *NIP* 类都具有翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖。

我们由定理 5 和下述定理推出定理 1；该定理证明了结构上处处稀疏的类具有翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖。

定理 11。设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏的图类。对于任意 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $c(r,\varepsilon)$，使得对于任意 $G \in \mathscr{C}$，都存在一个弱 r-邻域覆盖，其度至多为 $c(r,\varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}$，扩展度至多为 $34r$。特别地，$\mathscr{C}$ 具有翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖。

我们认为，用于证明定理 11 的方法本身也很有价值。我们称将任意一个（甚至可能不连通的）顶点子集 A 收缩为单个顶点的操作为 k-收缩，如果存在一个顶点 v，使得 A 包含于 k邻域中。图的 k-收缩是通过同时对两两不相交的集合执行 k-收缩得到的。注意， k-收缩可以吸收图中的局部稠密部分，同时近似保持距离。特别地，如果图 G 的一个 k-收缩具有弱 r-邻域覆盖，那么 G 也具有弱 r-邻域覆盖，且度相同、扩展度稍大（取决于 k）。我们证明，对于每个结构上处处稀疏的类 $\mathscr{C}$ 和每个 $G \in \mathscr{C}$，都可以找到 G 的一个 8-收缩 G'，使得所有 G'构成的类几乎处处稀疏。我们将通过所谓的广义着色数来形式化几乎处处稀疏性的概念。图 G的弱 r-着色数的正式定义（记作 $\mathrm{wcol}_r(G)$）将在第 7.2 节给出。正如 [GKS17], 所证明的，每个图都具有一个r-邻域覆盖，其扩展度为 $2r$，度为 $\mathrm{wcol}_{2r}(G)$，因此，定理 11 几乎可直接由以下定理推出。

定理 12。设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏的图类。对于每个 $G \in \mathscr{C}$，都存在 G的 8-收缩 $\mathrm{contract}(G)$，其稀疏性如下：对于每个 $\varepsilon > 0$ 和$r \in \mathbb{N}$，都存在 $c(r, \varepsilon)$，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$

$$\mathrm{wcol}_r(\mathrm{contract}(G)) \leq c(r, \varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}.$$

2 技术概述

在本节中，我们将对证明作更为详细的技术概述。为便于说明，我们假设读者具备图论和逻辑方面的一些背景知识。下面的第 3 节将给出所有形式化定义。

如上文所述，Grohe、Kreutzer 和 Siebertz [GKS17] 针对处处稀疏类所采用的方法，建立在一阶逻辑的局部性之上。根据 Gaifman 局部性定理 [Gai82],，判断一个一般一阶句子 φ 在图中是否为真这一问题，可以归约为检验其他局部 公式在图中是否为真。为了计算局部公式，我们可以将范围限制在图的有界半径邻域内，其中半径仅取决于 φ。

正如 [GKS17], 所证明的，来自处处稀疏类的图中顶点的 r-邻域具有良好的性质，这一点可由一种基于博弈的处处稀疏图类刻画来体现，该博弈称为***Splitter*** 博弈。在半径为r 的 Splitter 博弈中，两位玩家 Connector 和 Splitter 在一张图上进行对局，从而递归地分解局部邻域。以输入图 G为起点，在接下来的每一轮中，Connector 选择当前博弈图的一个半径至多为 r 的子图，Splitter 则从该图中删除一个顶点。博弈在得到的图上继续进行，直至空图出现时结束。当且仅当对于每个 r，都存在 ℓ，使得 Splitter 能在 ℓ 轮内赢得半径为r 的 Splitter 博弈时，一个图类才是处处稀疏的。

尽管这种博弈刻画表明，处处稀疏类中的图具有简单的邻域，但它并不能立即导出高效的模型检验算法。我们需要克服两个核心挑战：

- 第一个问题是，算法需要在局部邻域上递归调用；在递归过程中，图会在 Splitter 博弈的引导下通过删除顶点而变得越来越简单。删除一个顶点可以通过对该顶点的邻点着色来编码，这样便可将公式改写为等价公式；然而，这些公式还必须在每个递归步骤中再次进行

局部化。若直接再次应用 Gaifman 定理，就会导致量词秩增加，进而使公式的局部性半径增大，以至于无法再以原来的半径进行 Splitter 博弈。在对局过程中，禁止增大博弈的半径。[GKS17] 通过为一阶公式建立保持秩的局部标准形，解决了这个问题；借助这种标准形，可以进行局部化而不增加量词秩。

- 如前所述，第二个问题随之出现：不能简单地递归分支到所有局部邻域中，因为在最坏情况下，这将导致分支度为 n，运行时间为 $\Omega(n^\ell)$，其中 ℓ 是递归深度。因此，研究者将彼此邻近的邻域聚成簇，并使用稀疏的 r-邻域覆盖，在一次递归调用中统一处理它们。正如 [GKS17] 所证明的，对于每个无处稠密图类 $\mathscr{C}$、每个 r 和 $\varepsilon > 0$，都存在一个常数 $c(r,\ \varepsilon)$，使得每个 $G \in \mathscr{C}$ 都具有一个扩展度至多为$2r$ 且度至多为 $c(r,\ \varepsilon)\cdot|G|^\varepsilon$的 r-邻域覆盖。经过一些技术处理，公式也被纳入邻域覆盖中。最后，通过设定 $\rho = \varepsilon/\ell$ 并从一个度为 $c(r,\ \rho)\cdot|G|^\rho$的 r-邻域覆盖开始，可以在 $c(r,\ \rho)\cdot|G|^{1+\varepsilon}$内构建完整的递归数据结构。

最近，基于翻转宽度 [DMST22], 这一概念，单子稳定图类被刻画为一种博弈，称为***Flipper*** 博弈 [GMM+23]，其思路与 Splitter 博弈相似。在半径为-r 的 Flipper 博弈中，两名玩家 Connector 和 Flipper 在一张图上进行对局，并递归地分解局部邻域。以输入图 G为起点，在接下来的每一轮中，Connector 选择当前博弈图的一个半径至多为 r 的子图，Flipper 则选择两个顶点集 A 和 B，并翻转这两个集合中顶点之间的邻接关系。博弈在得到的图上继续进行。一旦得到只含一个顶点的图，Flipper 即获胜。当且仅当对于每个 r，都存在 $\ell(r)$，使得 Flipper 能在 $\ell(r)$ 轮内赢得半径为-r 的 Flipper 博弈时，一个图类才是单子稳定的。这一新的刻画表明，可以像处理处处稀疏类那样来研究模型检验问题，只需将 Splitter 博弈替换为 Flipper 博弈即可。然而，在稠密图上，上述两个挑战都会带来额外的困难：

- [GKS17] 算法中迄今为止最复杂的部分，是引入一种保持秩的局部标准形，以便在每一步局部化过程中维持量词秩不变。若要将保秩范式从适用于顶点删除改为适用于翻转，则会遇到更多问题。例如，在 [GKS17], 的构造中，为避免引入新的量词，必须用已删除元素周围的颜色来编码一些局部距离。具体而言，当删除一个顶点 v 时，会为所有与 v 距离为i 的顶点 $i \le k$ 着上谓词 D_i所对应的颜色。然后，可以使用公式 $\mathrm{dist}(x,y) \le d \ \vee \bigvee_{i+j\le d} D_i(x) \wedge D_j(y)$ 查询 $d \le k$ 在 $G - v$ 中是否满足 $\mathrm{dist}(x,y) \le d$。请注意，如果我们处理的是 A 与 B之间的翻转，这个技巧就行不通，因为 A 和 B 可能任意大，而且我们必须为 $A \cup B$中的每个元素引入一个距离原子。我们完全避开了保秩范式带来的这一问题及其他问题，转而利用局部类型构建一种简单得多、功能更强的保秩机制，稍后将对此作出解释。

- 对于处处稀疏图类，可以优雅地利用所谓广义着色数的一个上界，证明稀疏邻域覆盖的存在性，并构造相应算法。这些论证专用于处处稀疏类，无法推广到更一般的类。在接下来的几页中，我们将说明如何克服这一问题。

算法概述。 一阶逻辑的局部性是研究一阶逻辑表达能力以及基于逻辑的应用的一项关键工具。对于一个图 G, $v \in V(G)$ 和 $q \in \mathbb{N}$，我们将所有量词秩至多为 q 且满足 $G \models \varphi(v)$ 的公式 $\varphi(x)$的集合称为 v 在 G中的 q-类型 。我们用 $N_r[v]$ 表示 v 在 G中的闭 r-邻域。根据 Gaifman 局部性定理 [Gai82]，存在一个函数 $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得以下结论成立：若两个顶点 $u, v \in V(G)$在 $G[N_{7^q}[u]]$ 和 $G[N_{7^q}[v]]$中分别具有相同的 $g(q)$-类型，那么它们在 G中具有相同的 q-类型。例如，[EF99]中的引理 1.5.2 的证明明确陈述了这一结论。

Gaifman 定理的证明中，量词秩从 q 增至 $g(q)$ 的一个显而易见的原因是，需要引入新的量词来表示距离。通过引入距离原子可以避免这一点，由此在 [GKS17] 中提出了用于一阶逻辑的技术性保秩范式。量词秩增加的另一个不那么显而易见的原因是，局部邻域重叠的邻近元素必须以非平凡的组合方式处理；在 Gaifman 定理中，这导致局部性半径为 7^q。这并不令人满意，因为众所周知，带有 q 个量词的一阶逻辑只能表示不超过 2^q 的距离。

这一观察引出了局部类型的概念，该概念最初由 [GPPT22] 在孪生宽度的背景下提出。具有 φ 个自由变量的公式 φ 的局部化 ，是一个具有相同自由变量的公式：其中每个量词秩为 k 的子公式 $\exists x\, \psi(x, \bar{y})$ 都替换为 $\exists x \in N_{2^{k-1}}[\bar{y}]\, \psi(x, \bar{y})$ 。同样，每个量词秩为 k 的子公式 $\forall x\, \psi(x, \bar{y})$ 都替换为 $\forall x \in N_{2^{k-1}}[\bar{y}]\, \psi(x, \bar{y})$ 。如果一个公式是某个公式的局部化结果，我们就称它为局部公式。$v \in V(G)$ 的局部q-类型是所有满足 $G \models \varphi(v)$ 的局部公式 $\varphi(x)$ 构成的集合。注意，语法上的局部化不会增加公式的量词秩，因为 ψ 的量词秩为 $k-1$，而用这么多个量词就能表示不超过 2^{k-1} 的距离。

我们沿用 [GPPT22] 的方法，关联局部类型与 Ehrenfeucht- Fra¨ıss´e 博弈的一个局部变体，并扩展 [GPPT22] 的结果，从而对一阶逻辑的局部性进行细粒度分析。我们证明（定理 4）：对于任意两个集合 U_1，$U_2 \subseteq V(G)$，如果它们的局部邻域看起来相同，且彼此距离足够远，那么若我们找到一个满足一阶性质 $\varphi(x)$ 的元素$a \in U_1$ ，也能找到另一个满足相同性质的元素 $b \in U_2$ 。

我们现在引入一种优雅的模型检测方法中的思想 [GGK20], ，该方法表明，一阶逻辑模型检测可以归约为判定两个顶点是否具有相同的 q-类型。在这种方法中，只保留有界数量的代表顶点，从而精简递归求值树。我们对这一思想的技术实现独立于 [GGK20]，而是基于受限公式，其定义自然如下。给定一组一元谓词 $\mathcal{U}$，如果一个公式中的每个量词都具有 $\exists x \in U$或$\forall x \in U$ 的形式（其中 $U \in \mathcal{U}$），我们就称该公式是 $\mathcal{U}$-受限的。显然，在求值守卫句子时，我们可以忽略守卫集之外的所有顶点。接下来，我们计算常数个 t 代表守卫集 U_1、.....、U_t，其中 t 仅取决于 φ 和类 $\mathscr{C}$。虽然 U_i 可以包含任意多个顶点（这也是我们与 [GGK20] 方法不同之处），但每个 U_i 都包含在输入图的一个局部邻域中。U_i 的候选集源自对稀疏弱邻域覆盖中簇的类型进行递归计算，而递归过程由 Flipper 博弈引导。正如我们之前证明的，对于两个集合 U_1、$U_2 \subseteq V(G)$，如果它们的局部邻域看起来相同且彼此相距甚远，那么只要我们找到一个满足一阶性质 $\varphi(x)$ 的元素 $a \in U_2$，就能找到另一个满足同一性质的元素 $b \in U_2$ ，从而将问题归约为有界数量的代表集。通过对剩余的 U_i 进行恰当分组，我们将模型检验问题归约为一个局部问题，并使局部性半径在整个递归过程中保持稳定。

我们的方法避免了 [GKS17] 模型检验算法中保持秩的局部标准形这一复杂构造，也大大简化了局部公式与邻域覆盖之间的相互作用。我们认为，我们的结果具有超出本文范围的意义。在与 Szymon Toru´nczyk 的讨论中，我们萌生了将局部类型与邻域覆盖结合起来用于稀疏图模型检测的想法。我们也在与 Szymon 合著的配套论文中探讨了这一方法，并给出了处处稀疏类上模型检测的简化证明 [AT]。我们感谢 Szymon 与我们进行的诸多有益讨论。

贡献：邻域覆盖的构造。我们模型检验算法所缺少的关键环节，是构造稀疏邻域覆盖。作为本文的第二项主要贡献，我们在定理 10 中证明，一般图上的弱 r-邻域覆盖可以被高效近似。

为证明该定理，我们给出了弱 r-邻域覆盖的稳健整数线性规划公式。随后，可以将线性规划松弛的一个解高效地转化为分数弱 r-邻域覆盖。它是由覆盖簇构成的集合，每个簇都附有一个介于 0 和 1 之间的实数值；直观而言，这些值可以理解为一种概率分配，使得每个待覆盖邻域对应的值之和至少为 1。至关重要的是，所构造的分数弱 r-邻域覆盖至多包含 $\mathcal{O}(n^2)$ 个簇。这样，我们就不必考虑 s-邻域的所有子集（其数量呈指数级增长），而只需在至多 $\mathcal{O}(n^2)$ 个簇中寻找 r-邻域覆盖。通过随机舍入，我们将分数弱 r-邻域覆盖转化为弱 r-邻域覆盖，其度至多大一个对数因子。该算法可以用标准方法去随机化。该过程的运行时间——实际上也是整个模型检验算法的运行时间——主要取决于求解线性规划所需的时间。

我们想强调，我们基于整数线性规划公式和随机舍入的算法简单易懂。这与此前针对处处稀疏图类的算法形成鲜明对比，后者依赖于这些图类的结构理论。

贡献：结构上处处稀疏图类。最后，我们证明结构上处处稀疏图类具有翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖，从而确立了在这些图类上进行一阶逻辑模型检测的固定参数可处理性，即定理 1。

为了证明结构上处处稀疏图类存在稀疏弱邻域覆盖，我们深入研究这些图类的结构理论，并再次开发出我们认为在本文范围之外也颇有意义的工具。为了说明我们的贡献，我们先直观地概述处处稀疏类和结构上处处稀疏类。处处稀疏图类是非常一般的稀疏图类。它们最初被定义为满足以下条件的类 $\mathscr{C}$：对每个半径 $r \in \mathbb{N}$，都存在某个图 H_r，使其作为深度r 小拓扑 被排除在 $\mathscr{C}$ 中的图之外。直观地说，图的深度-r 小拓扑是通过将若干两两不相交、半径至多为 r 的连通子图收缩为单个顶点而得到的。请注意，对于任意固定的 r，处处稠密这一类性质在取深度-r 小拓扑时仍得以保持。处处稀疏图类已得到充分研究，并具有许多组合刻画。特别是，处处稀疏图类存在稀疏邻域覆盖。如前所述，这些类的稀疏邻域覆盖的构造基于通过广义着色数 $\mathrm{wcol}_r(G)$得到的刻画。正如 [GKS17], 所证明的，每个图都存在一个 r-邻域覆盖，其扩展度为 $2r$，度为 $\mathrm{wcol}_{2r}(G)$。

在构造邻域覆盖时，我们使用局部收缩，而非有界深度小拓扑。请注意，k-收缩不一定保持处处稠密这一类性质；但是，它们会使距离至多按因子 $(2k+1)$ 改变，因此仍能保持存在稀疏弱邻域覆盖这一性质。特别是，可以将图 G 的 k-收缩 H 上的邻域覆盖提升到原图 G 上，度保持不变，而扩展度至多增加因子 $(2k+1)$。使用 k-收缩是为了将图中的局部稠密部分收缩为单个顶点。作为一项关键成果，我们得到以下定理。

定理 12。 设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏图类。对于每个 $G \in \mathscr{C}$，存在 G的一个 8-收缩 $\operatorname{contract}(G)$，其按以下意义是稀疏的：对于每个 $\varepsilon > 0$ 和$r \in \mathbb{N}$，存在 $c(r,\varepsilon)$，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$

$$\operatorname{wcol}_r(\operatorname{contract}(G)) \leq c(r,\varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}.$$

注意，该定理仅断言存在性，并且对于给定的图 G，我们无法高效地构造 8-收缩 contract(G)。尽管如此，该定理深入揭示了结构上处处稀疏类中的图的结构；如上所述，我们随后可以推导出这些类中的图存在稀疏弱 r-邻域覆盖。由于结构上的处处稀疏性在翻转下保持不变，并且由定理 12 可以推导出存在扩展度仅取决于 r 而不取决于图类的弱邻域覆盖，因此我们自然可以推导出结构上处处稀疏类存在翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖，即定理 11。

证明定理 12 的关键在于通过准灌木 [DGK+22a]，对结构上处处稀疏图类进行结构刻画。准灌木的形式是一棵有界深度的树，附加的连接定义了分解后图的边。此外，结构上处处稀疏类的准灌木具有有界的弱 r着色数。所要寻找的 k收缩将通过仔细收缩准灌木的某些子树来获得。

3 预备知识

我们用 $\mathbb{N}$表示自然数集 $\{1,2,\ldots\}$。对于 $m \in \mathbb{N}$，我们令 $[m] = \{1,\ldots,m\}$。我们用 $\bar{x}$，$\bar{y}$、...表示变量元组，并用 $\bar{a}$，b，$\bar{v}$，$\bar{w}$、.....表示元素元组，通常由上下文确定元组的长度。我们使用下标访问元组中的元素，即 $\bar{x} = x_1 x_2 \ldots x_{|\bar{x}|}$。

3.1 图

本文中的所有图都是有限的、无环的，并且顶点带颜色。更准确地说，图 G 是一个有限论域 V（G）上的关系结构，其有限签名 Σ 由二元自反的边关系 E 和有限个一元颜色谓词组成。请注意，我们不要求来自 Σ 的颜色由互不相交的集合解释，也就是说，顶点可以带有多种颜色。大多数情况下，签名 Σ 可从上下文中清楚得知，因此我们不会明确提及它。我们通常会给图添加额外的颜色。对于签名为 Σ 的图 G 及其顶点的子集 $W \subseteq V$（G），我们用 $G\langle X \mapsto W\rangle$ 表示签名为 $\Sigma \cup \{X\}$ 的图 G，其中 X 被解释为 W；也就是说，在 G 中，我们用新颜色 X 给 W 中的顶点着色。我们将 $G\langle W\rangle$ 作为 $G\langle W \mapsto W\rangle$ 的简写，这里稍微滥用了记号，将关系符号与其解释视为相同。对于 V（G）的子集族 $\mathcal{U} = \{U_1,\ldots,U_t\}$，我们用 $G\langle\mathcal{U}\rangle$ 或 $G\langle U_1,\ldots,U_t\rangle$ 作为 $G\langle U_1\rangle \ldots \langle U_t\rangle$ 的简写。

除非另有明确说明，图都是无向的，也就是说，我们假设 E 被解释为对称且自反的关系。我们通常用 $\{u, v\}$ 表示 u 与 v 之间的无向边，用 (u, v) 表示从 u 指向 v 的有向边，我们称之为弧。我们用 E（G）表示图 G 的边集，用 $|G|$ 表示其顶点数。我们采用 Diestel 的教科书 [Die12]，中图论的标准记号，并以自然的方式将其扩展到带色图。

诱导子图。对于顶点集 $X \subseteq V(G)$，我们用 $G[X]$ 表示由 X诱导的 G的子图，并用 $G - X$ 表示由 $V(G) - X$诱导的 G 的子图。如果一个图类对于取诱导子图封闭，我们就称它是遗传的 。

距离和邻域。设 G 是一个图。对于两个顶点 $u, v \in V(G)$，我们用 $\mathsf{dist}(u, v)$ 表示 u 与 v之间的距离；如果 u 与 v 在 G中不连通，则该距离定义为 ∞ 。
如果 $\bar{a}$ 和 b 是顶点元组（或集合），我们用 $\mathsf{dist}(\bar{a}, b)$ 表示某个 $a \in \bar{a}$ 与某个 $b \in b$之间的最小距离。
对于 $r \in \mathbb{N}$ 和 $v \in V(G)$，我们用 $N_r[v] := \{u \in V(G) \mid \mathsf{dist}(u, v) \leq r\}$ 表示 v 在 G中的（闭） r-邻域；更一般地，对于元组（或集合） $\bar{a}$ ，我们令 $N_r[\bar{a}] := \bigcup_{a \in \bar{a}} N_r[a]$。

3.2 逻辑

我们采用模型论中的标准术语，并推荐参阅 [Hod97] 以了解详尽的背景知识。本文中的每个公式都是一阶公式。不过，如果公式所表达的性质显然可以用公式表示，我们通常不会明确写出这些公式。例如， $x \in N_r[\bar{y}]$表示表达 x 包含在 $\bar{y}$ 的 r-邻域中的一阶公式。对于颜色谓词 P，我们也常用 $\exists x \in P\ \varphi$作为 $\exists x\ P(x) \wedge \varphi$ 的简写，并用 $\forall x \in P\ \varphi$作为 $\forall x\ P(x) \rightarrow \varphi$ 的简写。对于公式 φ，我们用 $\mathsf{free}(\varphi)$ 表示 φ 中出现的自由变量的集合，并用 $\varphi(\bar{x})$ 表示 φ 的自由变量属于 $\bar{x}$。

每个公式 $\eta(x, y)$ 在图 G 上定义关系 $\eta(G) := \{(u, v) \in V(G)^2 \mid G \models \eta(u, v)\}$。类似地，公式 $\nu(x)$ 定义集合 $\{v \in V(G) \mid G \models \varphi(v)\}$。如果公式 $\eta(x, y)$ 在所有图上定义的关系都是对称且反自反的，我们就称该公式是对称且反自反的。

规范化。对于每个有限签名 Σ、量词秩 q 和自由变量元组 $\bar{x}$，在等价关系意义下，关于 Σ 、量词秩至多为 q 的不同公式 $\varphi(\bar{x})$ 只有有限多个。一阶公式的等价性判定是不可判定的。不过，给定一个公式，我们可以有效地计算出一个与之等价且量词秩相同的规范化公式；同样，关于 Σ 、量词秩至多为 q 的不同规范化公式 $\varphi(\bar{x})$ 只有有限多个。特别地，关于 Σ 、量词秩为 q 的规范化公式 $\varphi(\bar{x})$ 的长度仅取决于 $|\bar{x}|$、 q 和 Σ。规范化过程通过重命名量化变量、将布尔组合重排为合取范式，以及删除合取式和析取式中的重复项来完成。本文中，我们始终假设所有出现的公式均已规范化。这也包括我们自行构造的公式：规范化总是作为构造的最后一步隐式执行。

类型。设 G 为一个图， $\bar{a} \in V(G)^{|\bar{a}|}$ 为 G中的一个元组。我们用 $\mathsf{tp}_q(G, \bar{a})$ 表示所有满足 $|\bar{x}| = |\bar{a}|$ 且量词秩不超过 q 的规范化公式 $\varphi(\bar{x})$ 所构成的有限集合；这些公式是在 G 的签名上定义的，并满足 $G \models \varphi(\bar{a})$。我们将 $\mathsf{tp}_q(G) := \mathsf{tp}_q(G, \varnothing)$ 记作所有在 G中成立且量词秩不超过 q 的规范化句子的集合。

3.3 稳定性

二分图 $(\{a_1,\dots,a_\ell\},\ \{b_1,\dots,b_\ell\},\ E)$，其中 $a_ib_j \in E(G)$ 当且仅当 $i \le j$，称为序为 ℓ的半图。序为 5 的半图如图 1 所示。

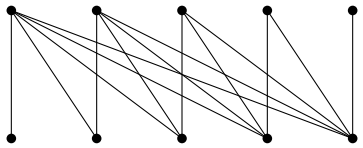


图 1：阶为 5 的半图。

半图在图论中相当于线性序。直观地说，单子稳定图类是指不能对任意大的半图进行编码的图类。编码的精确定义将采用转导。转导是一种运算，它将具有签名 Σ 的输入图映射为具有相同签名[2]的一组输出图。每个转导 T 都由签名 $\Sigma \uplus \Gamma$上的两个一阶公式 $\nu(x)$ 和 $\eta(x,\ y)$ 构成，其中包含无限多个颜色谓词 Γ，且 η 是对称且自反的。输出图集合 $\mathsf{T}(G)$ 从输入图 G 按如下方式生成。

1. G 被映射为其 Γ-着色的（无限）集合。
2. 每个着色图 G^+ 都被映射为具有签名 Σ 的图 H，
   - 其顶点集 $\{v \in V(G^+) \mid G^+ \models \nu(v)\}$ 由 ν 定义，
   - 其边集 $\{\{u,v\} \mid G^+ \models \eta(u,\ v)\ u,\ v \in V(H)\}$ 由 η定义，并且
   - 其中，Σ中的颜色谓词按照 G中的方式进行解释。

由于 η 和 ν 只能引用有限个颜色，因此得到的输出图集合也是有限的。由于 η 是对称且反自反的，每个输出图都是无向且无自环的。

转导的定义可推广到图类：若存在一个固定的转导 T，能够从 $\mathscr{D}$ 中生成 $\mathscr{C}$的所有图，也就是说，$\mathscr{D} \subseteq \bigcup_{G\in\mathscr{C}} \mathsf{T}(G)$，则称类 $\mathscr{D}$ 是类 $\mathscr{C}$ 的转导。若类 $\mathscr{D}$ 是某个处处稀疏类 $\mathscr{C}$的转导，则称其为结构上处处稀疏。单子稳定性的概念最初是用更一般的解释来定义的。然而，根据 [BS85] 的结果，我们可以用转导来定义它们。若所有半图组成的类不能转导到 $\mathscr{C}$中，则称类 $\mathscr{C}$ 为单子稳定。每个结构上处处稀疏类也都是单子稳定的 [PZ78, AA14]。对此概念加以推广，若所有图组成的类不能转导到 $\mathscr{C}$中，则称类 $\mathscr{C}$ 为单子 *NIP*。

转导可以复合，因此，对于类 $\mathscr{C}$、$\mathscr{D}$、$\mathscr{E}$，如果 $\mathscr{E}$是 $\mathscr{D}$的转导，且 $\mathscr{D}$是 $\mathscr{C}$的转导，那么 $\mathscr{E}$也是 $\mathscr{C}$的转导。结合存在一种转导可生成输入图的所有诱导子图这一事实，从现在起，我们不失一般性地假设所有结构上处处稀疏类和单子稳定类都是遗传的。

[2]转导也可以采用任意（且彼此不同）的输入和输出签名来定义，并可包含复制操作。不过，我们不需要这种灵活性。

3.4 Flipper 博弈

翻转 $\mathsf{F} = (A, B)$ 是一对顶点集。我们用 $G \oplus \mathsf{F}$ 表示以 G 的顶点集为顶点集的图，其中 A 与 B 中的顶点之间的邻接关系取反，也就是说，当且仅当 $\{u, v\} \in E(G)$ xor $(u, v) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ 时，有 $\{u, v\} \in E(G \oplus \mathsf{F})$。根据这个定义，我们有 $G \oplus (A, B) = G \oplus (A \cap V(G)\ B \cap V(G))$，因此无需要求 A, B 是 $V(G)$ 的子集。这对于处理诱导子图很有用。对于一组翻转 $F = \{\mathsf{F}1, \ldots, \mathsf{F}_n\}$，我们用 $G \oplus F$ 表示图 $G \oplus \mathsf{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{F}_n$。注意，执行翻转的顺序无关紧要。

我们将使用 e*Flipper* 博弈，它由 [GMM+23] 引入，定义如下 .

定义 1（Flipper 博弈）。固定一个半径 r。半径-r ***Flipper*** 博弈 由两名玩家$Flipper$ 和$Connector$在图 G 上进行，规则如下。初始时，令集合 $G_0 := G$。在第 i 轮，对 $i > 0$，博弈按如下方式进行。

- 如果 $|G_{i-1}| = 1$，那么 Flipper 获胜。
- Connector 选择 $G_{\mathrm{loc}i-1}$ 作为 G_{i-1} 的子图，该子图由 G_{i-1} 中一个半径为 r 的邻域内的子集[3] 所诱导。
- Flipper 选择一个翻转 F，并将其应用以得到 G_i，即 $G_i = G_{\mathrm{loc}_{i-1}} \oplus \mathsf{F}$。

我们将利用这样一个事实：在单子稳定类中进行对局时，Flipper 拥有一种高效的算法策略，能够在有界轮数内赢得 Flipper 博弈。我们将通过定义策略及其对应的运行时间，来形式化这一事实。

策略。固定一个图类 $\mathscr{C}$ 和一个半径 $r \in \mathbb{N}$。半径-r ***Connector*** 策略是一个函数

$$\mathsf{con} : (G_i) \mapsto (G_i^{\mathrm{loc}})$$

它将第 i 轮的图 G_i 映射到由 G_i中某个 r-邻域的子集所诱导的图 G_i^{loc}。半径-r ***Flipper*** 策略是一个函数

$$\mathsf{flip} : (G_i^{\mathrm{loc}}, \mathcal{I}_i) \mapsto (\mathsf{F}, \mathcal{I}_{i+1})$$

它将 Connector 在第 i 轮的行动 G_{i-1}^{loc} 映射为一个翻转 F。此外，Flipper 还会接收一个内部状态 $\mathcal{I}_i$，并在计算过程中将其更新为后继状态 $\mathcal{I}_{i+1}$。在算法语境中，这是一种便捷的抽象，区别于通常基于游戏历史定义策略的方式。我们不会精确定义内部状态的形式，因为它属于实现细节，可能因不同的 Flipper 策略而异。Flipper 可以利用内部状态，例如将其作为记忆来存储 Connector 过去的行动，或为未来回合预先计算翻转。在 Flipper 博弈开始时，将根据初始图计算初始状态 $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_0$（翻转 G）。

给定半径为 r 的 Connector 和 Flipper 策略 con 和 flip，以及一个图 $G \in \mathscr{C}$，翻转者对局序列 $\mathcal{R}$(con,flip G) 是局面的无限序列

$$\mathcal{R}(\mathsf{con}, \mathsf{flip}, G) = (G_0, \mathcal{I}_0), (G_1, \mathcal{I}_1), (G_2, \mathcal{I}_2), (G_3, \mathcal{I}_3), \ldots$$

[3]在 [GMM+23] 给出的 Flipper 博弈定义中，Connector 必须选择 v 的整个 r-邻域作为 G_{i-1}^{loc}。本文定义的版本在 [GMM+23] 中称为 *Induced-Subgraph-Flipper game*。不过，这一区别无关紧要。利用 [GMM+23] 中提供的算法策略，Flipper 在单子稳定类中能够赢得这两个版本的博弈。为简洁起见，我们将始终把诱导子图 Flipper 博弈称为 Flipper 博弈。

使得 $G_0 = G$ 且 $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_0(\mathsf{flip}\ G)$，并且对于所有 $i \geq 0$，我们有

$$(G_{i+1} = G_i^{\mathrm{loc}} \oplus \mathsf{F}, \mathcal{I}_{i+1}) \text{ where } G_i^{\mathrm{loc}} = \mathsf{con}(G_i) \text{ and } (\mathcal{I}_{i+1}, \mathsf{F}) = \mathsf{flip}(\mathcal{I}_i, G_i^{\mathrm{loc}}).$$

若 G_i 仅包含一个顶点，则元组（G_i，$\mathcal{I}_i$）是一个获胜位置。如果对于每个 $G \in \mathscr{C}$ 以及每个半径为 r 的 Connector 策略 con，序列 $\mathcal{R}(\mathsf{con}, \mathsf{flip}\ G)$ 的第 ℓ 个局面都是获胜位置，那么半径为 r的 Flipper 策略 flip 就是 ℓ- 获胜的。请注意，虽然 $\mathcal{R}(\mathsf{con}, \mathsf{flip}\ G)$ 是一个无限序列，但一旦到达获胜位置，之后的局面也都将是获胜位置。

运行时间。设 $\mathscr{C}$ 是一个图类，设 $r \in \mathbb{N}$，并设 flip 是一个半径为 r 的 Flipper 策略。对于图 $G \in \mathscr{C}$ 和半径为 r 的 Connector 策略 con，令 $t_0(\mathsf{con}\ G)$ 表示计算初始内部状态 $\mathcal{I}_1(\mathsf{flip}\ G)$ 所需的时间。对于 $i \geq 0$，令 $t_{i+1}(\mathsf{con}\ G)$ 表示在输入 $\mathsf{con}(G_i)$ 和 $\mathcal{I}_i$ 时计算 flip 输出所需的时间，其中（G_i，$\mathcal{I}_i$）是序列 $\mathcal{R}(\mathsf{con}, \mathsf{flip}\ G)$ 中的第 $i+1$ 个局面。flip 在 $\mathscr{C}$ 上的运行时间 是由 f 定义的函数

$$f(n) = \max_{G \in \mathscr{C}, |G| \leq n} \sup_{\substack{\text{radius-}r \text{ Connector} \\ \text{strategy } \mathsf{con}}} \sup_{i \geq 0} t_i(\mathsf{con}, G).$$

换言之，$f(n)$ 是 Flipper 在来自类 $\mathcal{C}$的图上进行博弈的任意一局对局中计算一次行动所需的最大时间。

我们现在已经准备好 陈述以下定理，这是 [GMM+23] 的主要结果之一 .

定理 2 （[GMM+23，定理 11。2]）。对于每个单子稳定类 $\mathscr{C}$，都存在一个函数 $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于每个半径 $r \in \mathbb{N}$，都存在 $\ell \in \mathbb{N}$ 以及一个 ℓ 获胜的半径为 r 的 ***Flipper*** 策略 $\mathsf{flip}^\star$，其运行时间为 $f(r) \cdot n^2$。

对于每个单子稳定类 $\mathscr{C}$ 和半径 $r \in \mathbb{N}$，定理 2 给出的算法策略 $\mathsf{flip}^\star$ 是本文中始终采用的策略。我们将 $\mathsf{game\text{-}depth}(\mathscr{C}, r)$ 定义为：对于来自 $\mathscr{C}$的任意图，Flipper 遵循 $\mathsf{flip}^\star$时，赢得半径为 r 的 Flipper 博弈所需回合数的上界。若位置序列 $\mathcal{H} = (G_0, \mathcal{I}_0) \ldots, (G_\ell, \mathcal{I}_\ell)$ 是某个半径为 r的 Connector 策略 con 与某个图 $G_0 \in \mathscr{C}$对应的 Flipper 对局序列 $\mathcal{R}(\mathsf{con}, \mathsf{flip}^\star, G_0)$ 的前缀，我们就称其为长度为 ℓ的 $(\mathscr{C}, r)$-历史。请注意，根据定义，计算 Flipper 下一步行动 $\mathsf{flip}^\star(G_\ell^{\mathrm{loc}} = \mathsf{con}(G_\ell)\ \mathcal{I}_\ell)$ 所需的时间取决于 G_0 的大小，而非 G_ℓ的大小（后者可能小得多）。还请注意，为了应用 $\mathsf{flip}^\star$，我们只要求 G_0包含于 $\mathscr{C}$。当前输入图 G_ℓ^{loc}可能不包含于 $\mathscr{C}$；事实上，通常确实如此，因为 G_ℓ^{loc}是从 G_0 经过 ℓ 轮翻转（及局部化）得到的。然而，由于有限轮数的局部化与翻转可以通过转导表达，如果 $\mathscr{C}$ 是单子稳定的（结构上处处稀疏），那么 G_ℓ^{loc}也将属于一个仍然单子稳定（结构上处处稀疏）的类。

3.5 弱邻域覆盖

图 G 的一个弱 r-邻域覆盖，其度为 d、扩展度为 s，是由 $V(G)$ 的子集构成的族 $\mathcal{X}$，这些子集称为簇，并满足

- 每个簇都是 G中某个 s邻域的子集；也就是说，对每个 $X \in \mathcal{X}$，都存在一个顶点中心 center(X) $\in V(G)$，使得 $X \subseteq N_s[\text{center}(X)]$,
- 每个顶点的 r邻域都包含在某个簇中；也就是说，对每个 $w \in V(G)$，都存在簇 cluster(w) $\in \mathcal{X}$，使得 $N_r[w] \subseteq$cluster(w)，并且
- 每个顶点至多出现在 d 个簇中；也就是说，对所有 $v \in V(G)$，我们有

$$|\{X \in \mathcal{X} \mid v \in X\}| \leq d.$$

我们注意到，上述定义是对更常见的（非弱）r-邻域覆盖概念的放宽。在该概念中，对于每个簇 X，都要求其诱导子图 $G[X]$ 的半径至多为 s。

定义 2. 如果存在函数 $g(r,\varepsilon)$ 和 $\sigma(r) \geq r$，使得对于每个 $r \in \mathbb{N}$、每个 $\varepsilon > 0$，每个 n顶点图 $G \in \mathscr{C}$ 都存在一个弱 r邻域覆盖，其度为 $g(r,\varepsilon) \cdot n^{\varepsilon}$，扩展度为 $\sigma(r)$，则称图类 $\mathscr{C}$ 具有稀疏弱邻域覆盖。

当 $\mathscr{C}$ 是一个图类且 $\ell \in \mathbb{N}$时，我们将包含所有可通过对来自 $\mathscr{C}$的图至多进行 ℓ 次翻转而得到的图的类记为 $\mathscr{C}_\ell$。下述定义将是我们在 Flipper 博弈对局中将图分解为其局部邻域的关键。

定义 3. 图类 $\mathscr{C}$ 若存在函数 $g(r,\ \varepsilon,\ \ell)$ 和 $\sigma(r) \geq r$，使得对于每个 $r \in \mathbb{N}$、每个 $\varepsilon > 0$和每个 $\ell \in \mathbb{N}$，每个 n 顶点图 $G \in \mathscr{C}_\ell$ 都存在一个度为 $g(r,\ \varepsilon,\ \ell) \cdot n^{\varepsilon}$ 且扩展度为 $\sigma(r)$ 的弱 r-邻域覆盖，则称其具有对翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖。

在上述定义中，至关重要的是扩展度界 σ 不依赖于 ℓ。

4 守卫公式与局部类型

4.1 受限公式

给定一组一元谓词 $\mathcal{U}$，如果一个公式的每个量词都具有 $\exists x \in U$ 或 $\forall x \in U$ 的形式，其中 $U \in \mathcal{U}$，我们就称该公式为 $\mathcal{U}$-守卫的。我们的模型检测算法关键依赖于一个简单的观察：在求值守卫句子时，可以忽略守卫集之外的所有顶点。

观察 1。 给定一个图 G 和一个子集族 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_t\}$，其成员为 $V(G)$。将 $U \in \mathcal{U}$ 中的每个集合解释为一个一元谓词，对于每个 $\mathcal{U}$-守卫句子 φ，我们有

$$G\langle U_1, \ldots, U_t\rangle \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad G\langle U_1, \ldots, U_t\rangle[U_1 \cup \ldots \cup U_t] \models \varphi.$$

我们的目标是计算一个保护集的代表集 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_t\}$，使得我们能够将输入公式 φ 转换为等价的 $\mathcal{U}$-守卫公式。关键在于，集合 t 的大小 $\mathcal{U}$ 只取决于 φ（最终还取决于递归在 $\mathscr{C}$上的深度）。暂且假设我们已经通过递归计算出一个较大的候选守卫集合 $\{V_1, \ldots, V_m\}$。接着，集合 $\mathcal{U}$ 的选取基于以下关键定理，我们将在本节余下部分证明该定理。

定理 4. 设 G 为一个图，且 A、$B \subseteq V(G)$ 为顶点集，使得 $dist(A,B) > 2^k$ 且 $tp_k(G\langle X \mapsto A\rangle\,[N_{2^{k-1}-1}[A]]) = tp_k(G\langle X \mapsto B\rangle\,[N_{2^{k-1}-1}[B]])$。设 $\bar{w} \in V(G)^{|\bar{y}|}$ 为顶点，且 $dist(\bar{w}, A\cup B) \geq 2^k$。那么，对于 G 的签名中任意量词秩至多为 $k-1$ 的公式 $\varphi(\bar{y}, x)$，均有 $G\langle A\rangle \models \exists x \in A\ \varphi(\bar{w}, x) \iff G\langle B\rangle \models \exists x \in B\ \varphi(\bar{w}, x)$。

直观地说，该定理说明如下。给定一个图 G 以及两个集合 A 和 B，它们的邻域看起来相同，且彼此相距很远。如果我们找到一个元素 $a \in A$ 满足一阶性质 $\varphi(x)$，那么也能找到一个元素 $b \in B$ 满足相同的性质，从而可以将量化限制在适当选取的守卫集上。

请注意，该定理中的局部性半径自然对应于能够用 $k-1$ 个量词表达的距离。该定理的证明基于局部类型这一概念，它由 [GPPT22]引入。图上的局部类型优美地刻画了一阶逻辑的局部性：它将语义上对 2^{k-1}-邻域的限制，与一阶逻辑能够在句法上表达这些限制的能力对应起来。我们指出，本节的结果不能直接推广到元数大于 2 的关系结构，因为在此类结构的（盖夫曼图）中定义距离可能需要使用额外的量词。本节中的部分结果已采用不同记法在 [GPPT22] 以及 Szymon Toruńczyk [Tor22], 的讲义中证明；而一些引理，尤其是本节的主要定理——定理 4，则是新的。为确保一致性和完整性，我们给出所有证明。

我们对定理 4 的证明如下展开。在第 4.2 节，我们回顾 Ehrenfeucht–Fraïssé 博弈（简称 EF 博弈）的概念；这是（有限）模型论中用于理解一阶逻辑表达能力的经典工具。我们在第 4.3 节引入这些博弈的一个局部变体，其中所有行动都限制在此前进行过行动的元素的局部邻域内。经典情况下，EF 博弈可以在两个不同的结构上进行。在第 4.4 节，我们证明，在同一个图上进行博弈时，局部博弈可以确定全局博弈。我们在第 4.5 节将局部博弈与局部类型联系起来。到目前为止，大多数结果都已以类似形式出现在 [GPPT22] 中。为了证明定理 4，我们现在扩展这一框架，并在第 4.6 节将保护集纳入局部博弈。

4.2 博弈

EF 博弈由两名玩家在两个结构上进行，他们分别称为 破坏者 和 复制者 。破坏者的目标是区分这两个结构，而复制者则希望表明这两个结构无法被区分。一阶逻辑与此的联系如下：当且仅当两个结构满足所有量词秩至多为 q 的句子时，复制者在这两个结构上的 q 轮 EF 博弈中拥有获胜策略。在本文中，我们只考虑在同一个图上进行、但具有不同指定顶点 $\bar{a}$ 和 b 的博弈。关于 EF 博弈的详细背景，可参阅相关文献，例如教科书 [Lib04]。

博弈的每个局面都是一个五元组 $(G, \bar{a}, b, k)$，其中 G 是一个图（在整个博弈过程中保持不变）、两个长度相等且非空的顶点元组 $\bar{a}$，b 以及一个计数器 $k \in \mathbb{N}$（用于记录尚待进行的回合数）组成。博弈从某个局面 $(G, \bar{a}_0, b_0, q)$ 开始。如果当前局面为 $(G, \bar{a}, b, k)$，那么博弈的一轮按如下方式进行。

- 破坏者从 G 中选取一个顶点，作为 a_k（他进行一次 a-行动），或者作为 b_k（他进行一次 b-行动）。
- 如果破坏者进行了 a-行动，那么复制者必须以一次 b-行动回应，也就是从 G 中选取一个顶点作为 b_k；如果他进行了一次 b-行动，那么她必须以一次 a-行动回应，也就是从 G 中选取一个顶点作为 a_k。
- 博弈在位置（G，$\bar{a}a_k$，bb_k，$k-1$）继续。

当 $k=0$ 时，博弈终止。假设到达最终位置（$G,\ a_\ell,\ \ldots,\ a_1,\ b_\ell,\ \ldots,\ b_1,\ 0$）（$\ell = k+|\bar{a}|$）。如果（$a_\ell,\ \ldots,\ a_1,\ b_\ell,\ \ldots,\ b_1$）在 G 上定义了一个部分自同构，也就是说，对于所有 $1 \le i,\ j \le \ell$，我们称这是复制者的获胜位置。

- $a_i = a_j \iff b_i = b_j$,
- a_i 和 b_i 在 G中具有相同的颜色，并且
- $(a_i, b_j) \in E(G) \iff (a_i, b_j) \in E(G)$.

我们称复制者从某个位置出发拥有获胜策略，如果无论破坏者如何对局，她都能设法到达复制者的获胜位置。否则，我们称破坏者拥有获胜策略。如果复制者从位置 $(G,\ \bar{a},\ b,\ k)$ 出发拥有获胜策略，我们记作 $(G,\ \bar{a}) \cong_k (G,\ b)$。以下经典结果的证明可见于例如 [Lib04, 定理 3.9]。

引理 1. $(G, \bar{a}) \cong_k (G, b)$ 当且仅当 $\mathrm{tp}_k(G, \bar{a}) = \mathrm{tp}_k(G, b)$。

4.3 局部博弈

众所周知，一阶逻辑只能表达图的局部性质。具体而言，对于每个 k 和 $d \le 2^k$，都存在一个量词秩为 k 的公式，能够判断两个元素之间的距离是否恰好为 d；而不存在含有 k 个量词的公式，能够区分严格大于 2^k的距离。这一事实促使我们给出局部博弈的下一个定义。关键观察是，在一个位置 $(G,\ \bar{a},\ \bar{b},\ k)$ 中，当破坏者选择一个与 $\bar{a}$ 的距离至多为 2^{k-1} 的元素 a_k时，复制者必须以一个与 b的距离完全相同的元素 b_k 作答（反之亦然），否则破坏者就可以改变策略，只需指出距离上的差异。另一方面，这些局部性意味着破坏者绝不会选择一个与 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$的距离都大于 2^{k-1} 的元素，因为复制者只需照搬该元素即可。

在局面（$G,\ \bar{a},\ b,\ k$）中，我们称（破坏者或复制者的）行动为局部的，当且仅当它是一个 a-行动且包含于 $N_{2^{k-1}}[\bar{a}]$，或者是一个 b-行动且包含于 $N_{2^{k-1}}[b]$。我们将局部 *EF* 博弈定义为要求双方只能进行局部行动的 EF 博弈。为与局部博弈相区分，我们称常规 EF 博弈为全局博弈。若复制者从局面（$G,\ \bar{a},\ b,\ k$）出发，在局部博弈中拥有获胜策略，则记作（$G,\ \bar{a}$）$\cong_k^{\mathrm{local}}$（$G,\ \bar{b}$）。

4.4 局部博弈决定全局博弈

我们将论证，当从满足 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 的距离大于 2^{k+1} 的局面（$G,\ \bar{a},\ \bar{b},\ k$）出发时，局部 EF 博弈与全局 EF 博弈等价。为此，我们将正式证明上述观察结果。首先，我们注意到，复制者必须以自己的局部行动回应破坏者的局部行动。

引理 2（参见 [Tor22]的引理 9.2）。考虑处于位置 $(G, \bar{a}, b, k)$ 时的全局游戏。假设破坏者进行了一次局部 a行动 $a_k \in N_{2^{k-1}}[\bar{a}]$，例如 $a_k \in N_{2^{k-1}}[a_j]$（针对 $a_j \in \bar{a}$），而复制者以一次 b行动 $b_k \notin N_{2^{k-1}}[b_j]$作答；或者对称地，破坏者进行了一次局部 b行动 $b_k \in N_{2^{k-1}}[b]$，例如 $b_k \in N_{2^{k-1}}[b_j]$（针对某个 $b_j \in b$），而复制者以一次 a行动 $a_k \notin N_{2^{k-1}}[\bar{a}_j]$作答。那么破坏者从位置 $(G, \bar{a}a_k, bb_k, k-1)$开始，在剩余的全局游戏中有获胜策略。特别是，如果复制者对局部行动以非局部行动作答，她就会输掉这场游戏。

证明。我们对 k进行归纳来证明该断言。由对称性，不妨假设破坏者进行了一次 a行动。对于 $k=1$，该断言成立，因为 $a_1 \in N_1[a_j] \Leftrightarrow b_1 \in N_1[b_j]$ 是使$(\bar{a}a_1,\ bb_1)$成为部分自同构所必需的。

现在假设 $k>1$。由于 $a_k \in N_{2^{k-1}}[a_j]$，破坏者可以把 $a_{k-1} \in N_{2^{k-2}}[a_k] \cap N_{2^{k-2}}[a_j]$ 作为下一步行动。由于 $b_k \notin N_{2^{k-1}}[b_j]$，无论复制者选择哪个 b_{k-1} 作为回应，都有$b_{k-1} \notin N_{2^{k-2}}[b_k]$ 或 $b_{k-1} \notin N_{2^{k-2}}[b_j]$。如果 $b_{k-1} \notin N_{2^{k-2}}[b_k]$，那么根据应用于局面 $(G, a_k, b_k, k-1)$ 的归纳假设，破坏者从局面 $(G, a_k a_{k-1}, b_k b_{k-1}, k-2)$ 出发获胜。如果 $b_{k-1} \notin N_{2^{k-2}}[b_j]$，那么根据应用于局面 $(G, a_j, b_j, k-1)$ 的归纳假设，破坏者从局面 $(G, a_j a_{k-1}, b_j b_{k-1}, k-2)$ 出发获胜。由于增加更多预先选定的顶点只会对破坏者有利，因此他尤其能在局面 $(G, \bar{a}a_k a_{k-1}, b\bar{b}_k, b_{k-1}, k-2)$ 开始的剩余博弈中获胜。 □

引理 *3*（参见 [*GPPT*22] 中的引理*3.5*）。设图 G 中有顶点元组 $\bar{a}$、$\bar{a}'$、b、b'，满足 $\mathit{dist}(\bar{a},\bar{a}') > 2^k$ 且 $\mathit{dist}(\bar{b},\bar{b}') > 2^k$。当且仅当 $(G,\bar{a}) \cong_k^{\mathrm{local}} (G,\bar{b})$ 且 $(G,\bar{a}') \cong_k^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}')$ 时，$(G,\bar{a}\bar{a}') \cong_k^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}\bar{b}')$。

证明。我们对 k 作归纳来证明该结论。对于 $k=0$，注意到 $\mathsf{dist}(\bar{a},\ \bar{a}')$，$\mathsf{dist}(b,\ b') > 2^0 = 1$，因此 G 中 $\bar{a}$ 与 $\bar{a}'$ 之间以及 $\bar{b}$ 与 $\bar{b}'$ 之间均没有边。这意味着，当且仅当 $(\bar{a},\ b)$ 和 $(\bar{a}',\ b')$ 都是部分自同构时，$(\bar{a}\bar{a}',\ \bar{b}\bar{b}')$ 才是部分自同构。这就证明了结论对 $k=0$ 成立。接下来，假设结论对 $k-1$ 成立，并证明它对 k 也成立。

假设 $(G,\bar{a}) \cong_k^{\mathrm{local}} (G,\bar{b})$ 且 $(G,\bar{a}') \cong_k^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}')$。特别要注意，$(G,\bar{a}') \cong_{k-1}^{\mathrm{local}} (G,b')$。我们考虑位置 $(G,\bar{a}\bar{a}',bb',k)$ 处的局部博弈，并证明复制者有获胜策略。由对称性，不失一般性地设破坏者首先进行一次 a-行动 $a_k \in N_{2^{k-1}}[\bar{a}]$。复制者按照位置 $(G,\bar{a},\bar{b},k)$ 处局部博弈的获胜策略作出回应，得到 $b_k \in N_{2^{k-1}}[\bar{b}]$，使得 $(G,\bar{a}a_k) \cong_{k-1}^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}b_k)$。根据假设，$\mathsf{dist}(\bar{a},\bar{a}') > 2^k$，且 $\mathsf{dist}(\bar{b},\bar{b}') > 2^k$，因此 $\mathsf{dist}(\bar{a}a_k,\bar{a}') > 2^{k-1}$，且 $\mathsf{dist}(\bar{b}b_k,\bar{b}') > 2^{k-1}$。由归纳法，因为 $(G,\bar{a}a_k) \cong_{k-1}^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}b_k)$ 且 $(G,\bar{a}') \cong_{k-1}^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}')$，所以 $(G,\bar{a}a_k\bar{a}') \cong_{k-1}^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}b_k\bar{b}')$。由于我们没有对破坏者的局部移动作任何假设，这就意味着 $(G,\bar{a}\bar{a}') \cong_k^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}\bar{b}')$。

反过来，假设 $(G,\bar{a}) \ncong_k^{\mathrm{local}} (G,\bar{b})$。我们考虑位置 $(G,\bar{a}\bar{a}',\bar{b}\bar{b}',k)$ 上的局部博弈。破坏者根据其在位置 $(G,\bar{a},\bar{b},k)$ 的获胜策略选择 $a_k \in N_{2^{k-1}}[\bar{a}]$。根据引理 2，复制者以 $b_k \in N_{2^{k-1}}[\bar{b}]$ 作出回应，这是位置 $(G,\bar{a},\bar{b},k)$ 上局部博弈中的有效回合。由于破坏者在该位置按照其获胜策略行动，我们有 $(G,\bar{a}a_k) \ncong_{k-1}^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}b_k)$。同样，我们有 $\mathsf{dist}(\bar{a}a_k,\bar{a}') > 2^{k-1}$，且 $\mathsf{dist}(\bar{b}b_k,\bar{b}') > 2^{k-1}$，并且根据归纳，我们有 $(G,\bar{a}a_k\bar{a}') \ncong_{k-1}^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}b_k\bar{b}')$。由于我们没有对复制者的局部移动作任何假设，这意味着 $(G,\bar{a}\bar{a}') \ncong_k^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}\bar{b}')$。 □

定理 3（见 [Tor22] 中的引理 9.4）。考虑一个图 G，其元组为 $\bar{a}, b$，满足 $\mathrm{dist}(\bar{a},b) > 2^{k+1}$。那么

$$(G,\bar{a}) \cong_k (G,\bar{b}) \quad\Longleftrightarrow\quad (G,\bar{a}) \cong_k^{\mathrm{local}} (G,\bar{b}).$$

证明。正向很容易。当破坏者只进行局部移动时，复制者在全局游戏中的获胜策略也是局部博弈中的获胜策略，因为根据引理 2，她的获胜策略无论如何都会对局部移动作出局部回应。

我们通过对 k 归纳来证明反向。对于 $k=0$，全局游戏和局部博弈相同，因此结论成立。假设结论对 $k-1$ 成立，我们将证明它对 k 也成立。我们先证明以下断言。

断言 1. 如果复制者在位置$(G,\bar{a},b,k)$ 进行第一轮为局部、其余回合为全局的博弈时拥有获胜策略，那么她在位置$(G,\bar{a},b,k)$进行全局游戏时也拥有获胜策略。

¯证明。 我们将给出复制者在位置 $(G, \bar{a}, b, k)$ 进行全局游戏时的获胜策略。不失一般性，我们可以假设破坏者以一次 a 行动开始游戏。如果破坏者以一次局部移动开始，那么复制者可以根据她在该位置所拥有的先局部后全局的获胜策略作出应对并赢得游戏。

因此，我们可以假设破坏者以一次非局部移动 $a_k \notin N_{2^{k-1}}[\bar{a}]$开局。我们首先论证存在一个元素 $b_k \notin N_{2^{k-1}}[\bar{b}]$ ，使得 $(G, a_k) \cong^{\text{local}}_{k-1} (G, b_k)$：如果 $a_k \notin N_{2^{k-1}}[\bar{b}]$，¯，那么我们可以选择 $b_k = a_k$ ，问题便已解决。因此，假设 $a_k \in N_{2^{k-1}}[b]$。我们将采用一种角色-¯互换论证：如果破坏者曾将局部元素 $a_k \in N_{2^{k-1}}[b]$ 作为一次 b-行动（以 b_k之名）来行动，那么，复制者在先局部后全局博弈中的获胜策略会依据引理 2，以一个元素 $b_k \in N_{2^{k-1}}[\bar{a}]$ 作为一次 a-行动（以 a_k之名）作出回应。复制者将¯赢得剩余的 $(k-1)$ 轮全局游戏，换言之，$(G, ba_k) \cong_{k-1} (G, \bar{a}b_k)$。根据定理的正向（已在上文证明），也有 $(G, \bar{b}a_k) \cong^{\text{local}}_{k-1}(G, \bar{a}b_k)$。特别地，我们还有 $(G, a_k) \cong^{\text{local}}_{k-1}(G, b_k)$。由于 $b_k \in N_{2^{k-1}}[\bar{a}]$ 且 $\text{dist}(\bar{a}, \bar{b}) > 2^{k+1} > 2^k$，我们有 $b_k \notin N_{2^{k-1}}[\bar{b}]$。由此得到所需的 $b_k \notin N_{2^{k-1}}[\bar{b}]$ ，使得 $(G, a_k) \cong^{\text{local}}_{k-1}(G, b_k)$。

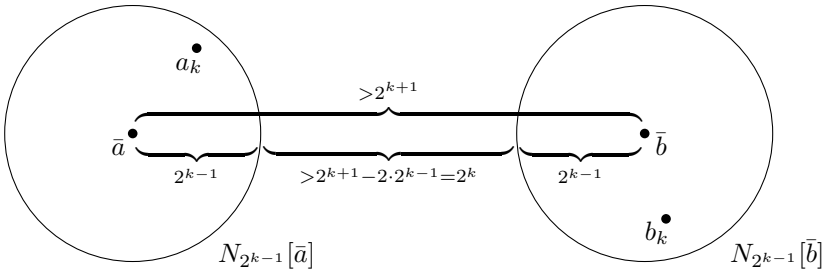
现在，复制者用 b_k回应破坏者的行动 a_k k。由于复制者在以预选元组 $\bar{a}, b$ ¯进行的博弈中拥有获胜策略，该博弈有 k 轮，第一轮为局部博弈，其余各轮为全局博弈，因此她尤其对这些元组拥有 $(k-1)$ 轮的获胜策略，也就是说，$(G, \bar{a}) \cong_{k-1} (G, \bar{b})$，从而根据定理的正向，$(G, \bar{a}) \cong^{\text{local}}_{k-1}(G, \bar{b})$。由于$a_k \notin N_{2^{k-1}}[\bar{a}]$, $b_k \notin N_{2^{k-1}}[\bar{b}]$，我们有 $\text{dist}(\bar{a}, a_k) > 2^{k-1}$，且 $\text{dist}(\bar{b}, b_k) > 2^{k-1}$。因此，我们可以对元组 $\bar{a}, a_k, \bar{b}, b_k$应用关于 $k-1$ 的引理 3：由于 $(G, a_k) \cong^{\text{local}}_{k-1}(G, b_k)$ 且 $(G, \bar{a}) \cong^{\text{local}}_{k-1}(G, \bar{b})$，可知 $(G, \bar{a}a_k) \cong^{\text{local}}_{k-1}(G, \bar{b}b_k)$。根据归纳假设，我们有 $(G, \bar{a}a_k) \cong_{k-1} (G, \bar{b}b_k)$。由于我们没有对破坏者的第一步行动作任何假设，复制者在从位置 $(G, \bar{a}, b, k)$ 开始的¯全局博弈中拥有获胜策略。

□

我们现在可以证明该命题的反向。假设 $(G,\ \bar{a}) \cong^{\text{local}}_{k}(G,\ \bar{b})$。根据前面的断言，只需证明从位置 $(G,\ \bar{a},\ b,\ k)$ 开始的博弈中，复制者具有获胜策略，其中第一轮为局部博弈，剩余各轮为全局博弈。因此，令$a_k \in N_{2^{k-1}}[$¯

$a]$ 成为破坏者的一次局部 a-行动。我们令 $b_k \in N_{2^{k-1}}[b]$ 为复制者的回应，即她在局部博弈中会采取的获胜行动，也就是说，我们有 $(G,\ \bar{a}a_k) \cong^{\text{local}}_{k-1}(G,\ \bar{b}b_k)$。

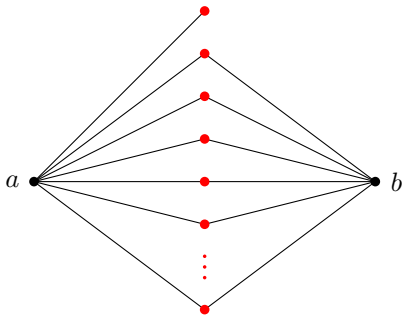
由于 $\text{dist}(\bar{a},\ \bar{b}) > 2^{k+1}$，且 $a_k \in N_{2^{k-1}}[\bar{a}]$、 $b_k \in N_{2^{k-1}}[\bar{b}]$，因此可推出 $\text{dist}(\bar{a}a_k,\ \bar{b}b_k) > 2^k$（见图 2）。



¯图 2：从下方界定 $\text{dist}(\bar{a}a_k, bb_k)$。

¯根据归纳假设，我们有 $(G,\ \bar{a}a_k) \cong_{k-1} (G,\ bb_k)$。由于第一步是任意的局部$a$-行动，因此这就为位置 $(G,\ \bar{a},\ b,\ k)$ 处的博弈给出了复制者的获胜策略，其中第一轮是局部的，其余回合是全局的。根据前面的论断，$(G,\ \bar{a}) \cong_{k} (G,\ b)$。 □

虽然我们没有证明定理 3 中的距离要求 $\mathrm{dist}(\bar{a},\ \bar{b})\ >2^{k+1}$ 是否紧致，但图 3 中的例子说明，要使该定理成立，某种形式的距离要求是必要的。设 $k=1$。那么 $(G,\ a)\ \cong_k^{\mathrm{local}}(G,\ b)$。然而，$(G,\ a)\ \ncong_k (G,\ b)$，因为在全局游戏中，破坏者可以选择最上方的红色元素作为全局 b-行动。复制者无法用一个不与 a 相邻的红色元素作出回应，因此输掉了博弈。



Figu图 3：说明定理 3 中为何需要距离约束的示例 .

4.5 局部博弈与局部类型

现在我们来确立局部博弈与局部一阶逻辑之间的联系。与 Gaifman 局部性定理不同，在局部化公式时，我们不会提高量词秩。

设 G 是一个图，$\bar{a}$ 是 G的一个顶点元组。众所周知，$\mathrm{tp}_q(G,\bar{a})\ =\mathrm{tp}_q(G,b)$ 当且仅当且仅当 $(G,\bar{a})\ \cong_q(G,b)$。含有自由变量的公式 φ 的局部化，是一个具有与 φ 相同自由变量的公式，其中每个子公式 $\exists x\ \psi(x,\bar{y})$ 都替换为 $\exists x\in N_{2^{k-1}}[\bar{y}]\ \psi(x,\bar{y})$（更准确地说，是 $\exists x\ x\in N_{2^{k-1}}[\bar{y}]\wedge\psi(x,\bar{y})$）。类似地，每个子公式 $\forall x\ \psi(x,\bar{y})$ 都替换为 $\forall x\in N_{2^{k-1}}[\bar{y}]\ \psi(x,\bar{y})$（更准确地说，是 $\forall x\ x\in N_{2^{k-1}}[\bar{y}]\to\psi(x,\bar{y})$）。

如果某个公式是某一公式的局部化，我们就称它为局部的。如下引理所示，可以用 $k-1$ 个量词表达 $x\in N_{2^{k-1}}[\bar{y}]$，因此局部化不会改变公式的量词秩。

引理 4. 存在一个量词秩为 k 且自由变量为 $x\bar{y}$ 的公式，可以表达$x\in N_{2^k}[\bar{y}]$。

证明。 我们可以通过无量词公式 $\bigvee_{y\in\bar{y}}E(x,\ y)\ \vee x=y$来检验 $x\in N_{2^0}[\bar{y}]$。对于 $k>0$，注意到 $x\in N_{2^k}[\bar{y}]$ 当且仅当 $\exists z(z\in N_{2^{k-1}}[x]\wedge z\in N_{2^{k-1}}[\bar{y}])$。 □

设 G 是一个图，且 $\bar{a}\in V(G)^{|\bar{a}|}$ 是 G中的一个元组。我们将签名 G 下所有（规范化的）局部公式 $\varphi(\bar{x})$（满足 $|\bar{x}|=|\bar{a}|$ 且量词秩至多为 q）组成的有限集合划分为集合 $\mathrm{tp}_q^{\mathrm{local}}(G,\bar{a})$ 和 $\mathrm{tp}_q^{\mathrm{local}}(G,\bar{a})$，使得 $\varphi(\bar{x})\ \in\mathrm{tp}_q^{\mathrm{local}}(\overline{G},\bar{a})$ 当且仅当 $G\models\varphi(\bar{a})$，反之亦然：$\varphi(\bar{x})\ \in\mathrm{tp}_q^{\mathrm{local}}(G,\bar{a})$ 当且仅当 $G\not\models\varphi(\bar{a})$。我们称 $\mathrm{tp}_q^{\mathrm{local}}(G,\bar{a})$ 为 $\bar{a}$ 在 G中的局部 q-类型。

接下来，我们将局部类型与局部博弈联系起来。

引理 5。 如果 $\mathrm{tp}_k^{\mathrm{local}}(G,\ \bar{a})\ =\mathrm{tp}_k^{\mathrm{local}}(G,\ \bar{b})$，那么 $(G,\ \bar{a})\cong_k^{\mathrm{local}}(G,\ \bar{b})$。

证明。 我们通过对 k 归纳来证明这一断言。对于 $k=0$，$\mathrm{tp}_k^{\mathrm{local}}(G,\ \bar{a})$ 和 $\mathrm{tp}_k^{\mathrm{local}}(G,\ \bar{b})$ 已知分别是 $\bar{a}$ 和 b的原子型。当且仅当映射 $\bar{a}\mapsto b$ 是部分同构时，这两个原子型相等；而这又等价于 $(G,\ \bar{a})\cong_0^{\mathrm{local}}(G,\ \bar{b})$。

假设该命题对 $k-1$ 成立，并证明它对 k也成立。考虑位置 $(G,\ \bar{a},\ b,\ k)$ 处的局部博弈。不失一般性，破坏者先以 a行动 $a_k \in N_{2^{k-1}}(\bar{a})$ 开始博弈。令

$$\tau(\bar{y},x) = \bigwedge_{\varphi(\bar{y}x)\in \mathrm{tp}^{\mathrm{local}}_{k-1}(G,\bar{a}a_k)} \varphi(\bar{y}x) \wedge \bigwedge_{\varphi(\bar{y}x)\in \overline{\mathrm{tp}}^{\mathrm{local}}_{k-1}(G,\bar{a}a_k)} \neg\varphi(\bar{y}x)$$

是精确刻画 $\mathrm{tp}^{\mathrm{local}}_{k-1}(G,\bar{a}a_k)$ 的局部公式。更准确地说，对于每个元组 $\bar{a}'a'_k \in V(G)^{|a|+1}$，我们有 $\mathrm{tp}^{\mathrm{local}}_{k-1}(G,\bar{a}'a'_k) = \mathrm{tp}^{\mathrm{local}}_{k-1}(G,\bar{a}a_k)$ 当且仅当 $G \models \tau(\bar{a}',a'_k)$。

公式 $\psi(\bar{y}) = \exists x \in N_{2^{k-1}}[\bar{y}]\ \tau(\bar{y}x)$ 是一个量词秩为 k 的局部公式，因此它包含在 $\mathrm{tp}^{\mathrm{local}}_{k}(G,\bar{a})$ 中，这可通过将 x 实例化为 a_k 来证明。根据局部 k-类型相等这一假设，我们还可得出 $\psi(\bar{y}) \in \mathrm{tp}^{\mathrm{local}}_{k}(G,\bar{b})$，因此存在一个元素 $b_k \in N_{2^{k-1}}(\bar{b})$，使得 $\mathrm{tp}^{\mathrm{local}}_{k-1}(G,\bar{b}b_k) = \mathrm{tp}^{\mathrm{local}}_{k-1}(G,\bar{a}a_k)$。复制者选择 b_k 作为她的回应。接下来的博弈从位置 $(G,\bar{a}a_k,\bar{b}b_k,k-1)$ 继续。由于 $\mathrm{tp}^{\mathrm{local}}_{k-1}(G,\bar{b}b_k) = \mathrm{tp}^{\mathrm{local}}_{k-1}(G,\bar{a}a_k)$，根据归纳假设，复制者获胜。 □

不难证明，引理的逆命题也成立；不过，由于后续论证中不需要用到这一点，我们就不再给出证明。

4.6 带保护集的博弈与类型

定理 3 和引理 5 已经共同表明，对于距离足够大的元组，局部类型相等意味着全局类型相等。对于带有特定标记顶点集的图，我们需要一个更强的结论。为此，我们引入特殊的起始位置 (G,A,B,k)，其中 $A,B \subseteq V(G)$ 是顶点集（分别用于全局和局部 EF 博弈），我们称之为保护集。破坏者和复制者按照通常方式选择元素 a_k and b_k，但须满足约束$a_k \in A$和 $b_k \in B$；随后，（全局或局部）博弈照常从局面 $(G,a_k,b_k,k-1)$ 开始。因此，对于全局和局部博弈，集合 A 和 B 的作用都仅仅是限制（保护）第一轮的选择。若复制者在从局面 (G,A,B,k) 开始的全局或局部博弈中有获胜策略，我们分别记作 $(G,A) \cong_k (G,B)$ 或 $(G,A) \cong^{\mathrm{local}}_k (G,B)$。

首先，我们将引理 5 扩展到新的起始局面。请注意，下面的定理不再提及局部类型，而是提及邻域的全局类型。回想一下，$G\langle X \mapsto W\rangle$ 表示图 G，其中额外的颜色谓词 X 解释为顶点集 $W \subseteq V(G)$。

引理 6. 若 $\mathrm{tp}_k(G\langle X \mapsto A\rangle\left[N_{2^{k-1}-1}[A]\right]) = \mathrm{tp}_k(G\langle X \mapsto B\rangle\left[N_{2^{k-1}-1}[B]\right])$，则 $(G,A) \cong^{\mathrm{local}}_k (G,B)$。

证明。 固定 G、 A 和 B，使得 $\mathrm{tp}_k(G\langle X \mapsto A\rangle\left[N_{2^{k-1}-1}[A]\right]) = \mathrm{tp}_k(G\langle X \mapsto B\rangle\left[N_{2^{k-1}-1}[B]\right])$。为简洁起见，令 $G_A := G\langle X \mapsto A\rangle$ 和 $G_B := G\langle X \mapsto B\rangle$。为证明该结论，我们需要关于局部公式的以下观察。

断言 2. 设 $\varphi(x)$ 是一个量词秩至多为 $k-1$ 的局部公式。那么，$G_A \models \exists x \in X\ \varphi(x)$当且仅当 $G_B \models \exists x \in X\ \varphi(x)$。

证明。 由于 $G_A\left[N_{2^{k-1}-1}[A]\right]$ 和 $G_B\left[N_{2^{k-1}-1}[B]\right]$ 具有相同的 k-类型，因此它们对句子 $\exists x \in X\ \varphi(x)$ 的求值结果相同，该句子的量词秩至多为 k。

由于 $\varphi(\bar{x})$ 是局部的，且量词秩为 $k-1$，$\varphi(x)$ 中的所有量化变量只能位于距 x 至多 $\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} = \sum_{i=0}^{k-2} 2^i = 2^{k-1}-1$ 的范围内。因此，$\exists x \in X\ \varphi(x)$ 中量化的所有变量必定位于距 X 至多 $2^{k-1}-1$ 的范围内。所以，在 $G_A\left[N_{2^{k-1}-1}[A]\right]$ 和 G_A 上对其求值会得到相同的结果。$G_B\left[N_{2^{k-1}-1}[B]\right]$ 和 G_B 也是如此。因此，G_A 和 G_B 对 $\exists x \in X\ \varphi(x)$ 的求值结果也一致。 □

考虑位置 (G, A, B, k) 处的局部博弈。不失一般性地，破坏者通过一次 a-行动 $a_k \in A$ 开始博弈。令

$$\tau(x) = \bigwedge_{\varphi(x) \in \mathrm{tp}_{k-1}^{\mathrm{local}}(G_A, a_k)} \varphi(x) \wedge \bigwedge_{\varphi(x) \in \overline{\mathrm{tp}}_{k-1}^{\mathrm{local}}(G_A, a_k)} \neg\varphi(x)$$

是定义 $\mathrm{tp}_{k-1}^{\mathrm{local}}(G_A, a_k)$ 的局部公式。

句子 $\exists x \in X\ \tau(x)$ 在 G_A 上成立，这是将 x 赋值为 a_k 得到的。根据断言 2，由于 $\tau(x)$ 的量词秩为 $k-1$，$\exists x \in X\ \tau(x)$ 在 G_B 上也成立。因此，存在一个元素 $b_k \in B$，使得 $\mathrm{tp}_{k-1}^{\mathrm{local}}(G_A, a_k) = \mathrm{tp}_{k-1}^{\mathrm{local}}(G_B, b_k)$。特别地，$\mathrm{tp}_{k-1}^{\mathrm{local}}(G, a_k) = \mathrm{tp}_{k-1}^{\mathrm{local}}(G, b_k)$。复制者选择 b_k 作为他的下一个元素。于是根据引理 5，我们有 $(G, a_k) \cong_{k-1}^{\mathrm{local}} (G, b_k)$。由于我们没有对破坏者的第一次行动 $a_k \in A$ 作任何假设，而复制者的回应总能给出一个 $b_k \in B$，因此如所需，我们现在有 $(G, A) \cong_k^{\mathrm{local}} (G, B)$。 □

由于对于起始位置（G、A、B、k），局部博弈和全局游戏允许相同的第一步行动，我们得到定理 3 的以下简单推论。

引理 7。考虑一个图 G，其集合为 A、$B \subseteq V(G)$，满足 $\mathrm{dist}(A, B) > 2^k$。那么 $(G, A) \cong_k (G, B)$ 当且仅当 $(G, A) \cong_k^{\mathrm{local}} (G, B)$。

我们可以利用这些新的起始位置，确定起始集合被突出显示的图中公式的真值。

引理 8。假设 $(G, A) \cong_k (G, B)$。那么，对于签名 G 中量词秩至多为 $k-1$ 的每个公式 $\varphi(x)$，我们有 $G\langle A\rangle \models \exists x \in A\ \varphi(x) \iff G\langle B\rangle \models \exists x \in B\ \varphi(x)$。

证明。假设 $G\langle A\rangle \models \exists x \in A\ \varphi(x)$，也就是说，存在 $a_k \in A$ 使得 $G \models \varphi(a_k)$。破坏者选择 $a_k \in A$，复制者则以满足 $(G, a_k) \cong_{k-1} (G, b_k)$ 的 $b_k \in B$ 作答。因此，$\mathrm{tp}_{k-1}(G, a_k) = \mathrm{tp}_{k-1}(G, b_k)$，特别地，$G \models \varphi(b_k)$。我们有 $G\langle B\rangle \models \exists x \in B\ \varphi(x)$。由对称性，反向命题也成立。 □

我们将引理 6、引理 7 和引理 8 合并为以下命题。

引理 9。假设 $\mathrm{dist}(A, B) > 2^k$ 且

$$\mathrm{tp}_k(G\langle X \mapsto A\rangle \left[N_{2^{k-1}-1}[A]\right]) = \mathrm{tp}_k(G\langle X \mapsto B\rangle \left[N_{2^{k-1}-1}[B]\right]).$$

那么，对于签名 G 中量词秩至多为 $k-1$ 的每个公式 $\varphi(x)$，都有 $G\langle A\rangle \models \exists x \in A\ \varphi(x) \iff G\langle B\rangle \models \exists x \in B\ \varphi(x)$。

再次，图 3说明了距离约束的必要性。对于 $k = 2$、$A = \{a\}$ 和 $B = \{b\}$，$G\langle X \mapsto A\rangle \left[N_{2^{k-1}-1}[A]\right]$ 和 $G\langle X \mapsto B\rangle \left[N_{2^{k-1}-1}[B]\right]$ 具有相同的类型：二者都是星形图，其中心标记为 X，叶节点标记为红色。然而，对于 $\varphi(x) := \forall y\, \mathrm{Red}(y) \to E(x, y)$，我们有

$$G\langle A\rangle \models \exists x \in A\ \varphi(x) \text{ and } G\langle B\rangle \not\models \exists x \in B\ \varphi(x).$$

将该陈述扩展以容纳 φ 中的更多自由变量，将得到定理 4。为方便起见，我们在此重述该定理。

定理 4。设 G 是一个图，且 A、$B \subseteq V(G)$ 是顶点集，满足 $\mathrm{dist}(A, B) > 2^k$，并且 $\mathrm{tp}_k(G\langle X \mapsto A\rangle \left[N_{2^{k-1}-1}[A]\right]) = \mathrm{tp}_k(G\langle X \mapsto B\rangle \left[N_{2^{k-1}-1}[B]\right])$。设 $\bar{w} \in V(G)^{|\bar{y}|}$ 是顶点，且 $\mathrm{dist}(\bar{w}, A \cup B) \geq 2^k$。那么，对于签名为 G、量词秩至多为 $k-1$ 的每个公式 $\varphi(\bar{y}, x)$，都有 $G\langle A\rangle \models \exists x \in A\ \varphi(\bar{w}, x) \iff G\langle B\rangle \models \exists x \in B\ \varphi(\bar{w}, x)$。

证明。假设 $\bar{w} = w_1, \ldots, w_\ell$。我们将 G' 定义为添加了 2ℓ 个新颜色谓词 W_i 和 N_i（对应于 $1 \leq i \leq \ell$）后的图。我们对 $1 \leq i \leq \ell$ 解释 $W_i = \{w_i\}$ 和 $N_i = N[w_i] \setminus \{w_i\}$。我们将 $\varphi'(x)$ 定义为从公式 $\varphi(\bar{y}, x)$ 得到的公式：将所有原子公式 $E(w_i, z)$ 和 $E(z, w_i)$ 替换为 $N_i(z)$，并将所有原子公式 $(w_i = z)$ 和 $(z = w_i)$ 替换为 $W_i(z)$。于是，对于每个 $v \in V(G)$，都有$G \models \varphi(\bar{w}, v) \iff G' \models \varphi'(v)$，因此只需证明 $G'\langle A\rangle \models \exists x \in A\ \varphi'(x) \iff G'\langle B\rangle \models \exists x \in B\ \varphi'(x)$。由于 $\mathsf{dist}(\bar{w}, A) \geq 2^k$，我们有 $G\left[N_{2^{k-1}-1}[A]\right] = G'\left[N_{2^{k-1}-1}[A]\right]$。对 B 也同样成立，因此 $\mathsf{tp}_k(G'[N_{2^{k-1}-1}(A)]\langle A \mapsto X\rangle) = \mathsf{tp}_k(G'[N_{2^{k-1}-1}(B)]\langle B \mapsto X\rangle)$。结论由引理 9 得出。

□

5 模型检测

在本节中，我们 给出关于结构上处处稀疏图类的模型检测定理 .

定理 1。 对于每个结构上处处稀疏类 $\mathscr{C}$，存在一个函数 $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得给定一个图 $G \in \mathscr{C}$和一个句子 φ，可以在时间 $f(|\varphi|) \cdot |V(G)|$[11]内判定 $G \models \varphi$ 是否成立。

作为一个铺垫，我们证明关于单子稳定图类的以下条件定理。

定理 5。 设 $\mathscr{C}$ 是一个单子稳定图类，并且具有对翻转封闭的稀疏弱邻点覆盖。存在一个函数 $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得给定一个图 $G \in \mathscr{C}$ 和一个句子 φ，可以在时间 $f(|\varphi|) \cdot |V(G)|$[11].内判定 $G \models \varphi$ 是否成立

请注意，关于 $\mathscr{C}$ 的条件是一个存在性陈述：如果 $\mathscr{C}$ 存在翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖，那么我们就能高效地解决 $\mathscr{C}$ 上的模型检验问题。为了在算法运行过程中实际计算所需的覆盖，我们将利用下述定理，其证明推迟到第 6 节。

定理 10. 存在一种算法，以一个 n 顶点图 G 以及数值 r、$s \in \mathbb{N}$ 作为输入，并在时间 $\mathcal{O}(n^{9.8})$ 内计算出一个弱 r-邻域覆盖，其度为 $\mathcal{O}(\log(n)^2+1)d^*$，扩展度为 s；其中，d^* 是满足以下条件的最小数：G 存在一个度为 d^*、扩展度为 s 的弱 r-邻域覆盖。

对于结构上处处稀疏的类，我们能够证明所需覆盖的存在性，如下述定理所述；该定理将在第 7 节证明。

定理 11. 设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏的图类。对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $c(r, \varepsilon)$，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$，都存在一个度至多为 $c(r, \varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}$、扩展度至多为 $34r$ 的弱 r-邻域覆盖。特别地，$\mathscr{C}$ 存在翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖。

由于每个结构上处处稀疏类都是单调稳定的，结合定理 5 和定理 11，我们现在得到定理 1。

5.1 设置

回想一下，game-depth$(\mathscr{C}, \rho)$ 是使翻转者策略 flip* 能在 game-depth$(\mathscr{C}, \rho)$ 轮内赢得 $\mathscr{C}$ 上半径为 ρ 的 Flipper 博弈的最小数值。这意味着，经过 flip* 的 game-depth$(\mathscr{C}, \rho)$ 轮对局后得到的图都是 Flipper 的获胜位置，也就是说，都是单个顶点。在这里，模型检测是平凡的。我们假设存在一种算法，可用于处理由 $\ell + 1$

轮对局（精确定义见下文定义 4）后得到的图，并用它对仅进行 ℓ 轮对局后的图也进行模型检测。重复这一过程，就得到一种适用于已进行零轮对局的图的算法，也就是说，得到一种适用于来自 $\mathscr{C}$ 的所有图的模型检验算法。根据我们的证明细节，博弈半径选择为 $\rho := (6q\sigma(2^q) + 1)(2^q + 1)$。

定义 4. 设 $\mathscr{C}$ 是一个单子稳定图类，具有翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖，扩展度为 σ，并且设 $q, \ell, c \in \mathbb{N}$。我们为 Flipper 博弈选取半径 $\rho := (6q\sigma(2^q) + 1)(2^q + 1)$。注意， ρ 仅取决于 $\mathscr{C}$ 和 q。考虑一个算法，其输入为

- 一段长度为 ℓ 的 Flipper 博弈 $(\mathscr{C}, \rho)$-历史 $(G_0, \mathcal{I}_0) \dots, (G_\ell, \mathcal{I}_\ell)$,
- 一个 G_ℓ 的着色 G，其签名至多有 c 种颜色，以及
- 一个量词秩至多为 q的句子 φ

并判断 $G \models \varphi$是否成立。若存在一个函数 f_{MC}，对每个 $\varepsilon > 0$ 将运行时间限制在以下范围内，则称这是一个高效MC$(\mathscr{C}, q, \ell, c)$-算法：

$$f_{\mathrm{MC}}(q, \ell, c, \varepsilon) \cdot |V(G)|^{((1+\varepsilon)^d)} \cdot |V(G_0)|^{9.8},$$

其中 $d :=$ 博弈深度$(\mathscr{C},\ \rho) - \ell$ 界定了赢得剩余 Flipper 博弈所需的回合数。

5.2 计算带守卫公式

作为我们算法的核心构件，下面的定理将句子转换为守卫句子，前提是我们已经拥有一个高效的模型检测算法，用于处理博弈额外进行一轮后的图。

定理 6. 设 $\mathscr{C}$ 是一个单子稳定图类，它允许具有扩展度 σ 的翻转封闭稀疏弱邻点覆盖，并设 $\rho = (6q\sigma(2^q) + 1)(2^q + 1)$。给定以下输入

- $a\ (\mathscr{C}, \rho)$-*history* $\mathcal{H} = (G_0, \mathcal{I}_0), \dots, (G_\ell, \mathcal{I}_\ell)$ *of length* ℓ,
- 一个 G_ℓ 的着色 G，其签名至多包含 c 种颜色,
- 一个量词秩至多为 q 的句子 φ，以及
- 一个高效的 $\mathrm{MC}(\mathscr{C}, q, \ell + 1, c + 3)$-算法,

可以计算集合 $U_1, \dots, U_t \subseteq V(G)$，其中某个常数 t 仅取决于 q和 c；此外，还可以计算一个 $(U_1, \dots, U_t)$- 受保护句子 ξ，其量词秩为 q。每个 U_i 都包含在 G 的一个 $(q \cdot 3\sigma(2^q))$- 邻域中，并且

$$G \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad G\langle U_1, \dots, U_t \rangle \models \xi.$$

存在一个函数 $f(q, c, \ell, \varepsilon)$，使得对于每个 $\varepsilon > 0$，该过程的运行时间有如下界

$$f(q, c, \ell, \varepsilon) \cdot |V(G)|^{((1+\varepsilon)^d)} \cdot |V(G_0)|^{9.8},$$

其中 $d := \mathrm{game\text{-}depth}(\mathscr{C}, \rho) - \ell$ 给出了赢得剩余 ***Flipper*** 博弈所需回合数的上界。

我们不一次性保护所有量词，而是先只保护一个最外层量词。下面的定理将是我们构造的核心步骤。

定理 7. 设 $\mathscr{C}$ 是一个单子稳定图类，具有翻转封闭的稀疏弱邻点覆盖，扩展度为 σ，并设 $\rho = (6q\sigma(2^q)+1)(2^q+1)$。给定输入

- 一个 $(\mathscr{C}, \rho)$-历史 $\mathcal{H} = (G_0, \mathcal{I}_0), \ldots, (G_\ell, \mathcal{I}_\ell)$，长度为 ℓ，
- 一个着色 G，其 G_ℓ 的签名至多包含 c 种颜色，
- 一个公式 $\exists x\ \varphi(\bar{y}, x)$，其量词秩至多为 q，
- 集合 $W_1, \ldots, W_{|\bar{y}|}$，每个都包含在 G的一个 r-邻域内，并且
- 一个高效的 $\mathrm{MC}(\mathscr{C}, q, \ell+1, c+3)$-算法，

可以计算集合 $U_1, \ldots, U_t \subseteq V(G)$，其中某个常数 t 仅取决于 q、c 和 $|\bar{y}|$。每个 U_i 都包含在 G 的一个 $(r+3\sigma(2^q))$-邻域内，并且对于所有元组 $\bar{w} \in W_1 \times \ldots \times W_{|y|}$，我们有

$$G \models \exists x\ \varphi(\bar{w}, x) \quad \Longleftrightarrow \quad \bigvee_{i=1}^{t} G\langle U_i \rangle \models \exists x \in U_i\ \varphi(\bar{w}, x).$$

存在一个函数 $f(q, c, \ell, \varepsilon, |\bar{y}|)$，使得对于每个 $\varepsilon > 0$，该过程的运行时间上界为

$$f(q, c, \ell, \varepsilon, |\bar{y}|) \cdot |V(G)|^{((1+\varepsilon)^d)} \cdot |V(G_0)|^{9.8},$$

其中 $d :=$ 博弈深度$(\mathscr{C}, \rho) - \ell$ 界定了赢得剩余 ***Flipper*** 博弈所需的回合数。

证明。设 n 为 G的顶点数。我们的目标是计算保护集 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_t\}$。

邻域覆盖计算。 我们使用定理 10，在 $\mathcal{O}(n^{9.8})$ 时间内计算 G 的一个弱2^q-邻域覆盖，其度为 $\mathcal{O}(\log(n)^2+1)\cdot d^*$，扩展度为 $\sigma(2^q)$；其中，d^* 是满足以下条件的最小数：G 具有一个度为 d^*、扩展度为 $\sigma(2^q)$ 的弱 2^q-邻域覆盖。下面说明存在一个函数 $g_1(q, \varepsilon, \ell)$，使得对于每个 $\varepsilon > 0$，该函数计算出的覆盖的度为 $g_1(q, \varepsilon, \ell) \cdot n^{\varepsilon}$。

令 $\varepsilon > 0$。图 G 是通过对 $G_0 \in \mathscr{C}$ 执行至多 ℓ 次翻转并删除顶点得到的。因此，根据定义 3，存在一个函数 $g(q, \varepsilon, \ell)$，使得 G 具有一个度为 $g(q, \varepsilon, \ell) \cdot n^{\varepsilon/2}$、扩展度为 $\sigma(2^q)$ 的弱 2^q-邻域覆盖。因此，$d^* \leq g(q, \varepsilon, \ell) \cdot n^{\varepsilon/2}$，且计算得到的邻域覆盖的度至多为 $\mathcal{O}(\log(n)^2+1) \cdot g(q, \varepsilon, \ell) \cdot n^{\varepsilon/2}$。由于对数因子被任意多项式因子所支配，因此，对于某个适当选取的函数 $g_1(q, \varepsilon, \ell)$，该值可以界定为 $g_1(q, \varepsilon, \ell) \cdot n^{\varepsilon}$。

令 $\{C_1, \ldots, C_m\}$ 为计算得到的弱 2^q-邻域覆盖。不失一般性，我们可以假设 $m \leq n$，否则可以移除冗余集合。我们将 G的顶点划分为集合 V_1，……，V_m，使得对所有 $v \in V_i$，$N_{2^q}[v] \subseteq C_i$ 都成立。若有并列，则任意打破。

拆分存在量词。 将输入公式 $\exists x\ \varphi(\bar{y}, x)$ 中关于 x 的存在量词划分为关于以下集合的量词会很有用：这些集合分别靠近和远离 W_1、……、$W_{|\bar{y}|}$。为此，令 $V_i' := V_i \setminus N_{2^q}\left[\bigcup_{k=1}^{|\bar{y}|} W_k\right]$。由于 G 的每个顶点都属于某个 V_i，

对于所有元组 $\bar{w} \in W_1 \times \ldots \times W_{|y|}$

$$G \models \exists x\ \varphi(\bar{w}, x) \iff \bigvee_{i=1}^{|\bar{y}|} G\langle N_{2^q}[W_i]\rangle \models \exists x \in N_{2^q}[W_i]\ \varphi(\bar{w}, x) \ \vee \ \bigvee_{i=1}^{m} G\langle V_i'\rangle \models \exists x \in V_i'\ \varphi(\bar{w}, x). \quad (1)$$

请记住，我们的解 $\mathcal{U}$ 的大小只取决于 q、 c 和 $|\bar{y}|$。将集合 $N_{2^q}[W_1]$、.....、$N_{2^q}[W_{|\bar{y}|}]$ 添加到 $\mathcal{U}$ 中不会违反这一大小约束。然而，由于 m 可能取决于 n，我们不能将所有集合 V_1'、.....、V_m' 都添加到 $\mathcal{U}$ 中。在证明的其余部分，我们将使用定理 4 以及每个 V_i' 都充分远离 W_1、.....、$W_{|y|}$ 这一事实，构造一个具有以下性质的集合 $S \subseteq [m]$ 。

性质 1。该 $S \subseteq [m]$ 的大小仅取决于 q 和 c，且对于所有元组 $\bar{w} \in W_1 \times \ldots \times W_{|y}$ |

$$\bigvee_{i=1}^{m} G\langle V_i'\rangle \models \exists x \in V_i'\ \varphi(\bar{w}, x) \implies \bigvee_{i \in S} G\langle X \mapsto N_{2^q+2\sigma(2^q)}[V_i']\rangle \models \exists x \in X\ \varphi(\bar{w}, x).$$

找到这样的集合 S 后，我们令

$$\mathcal{U} = \{N_{2^q}[W_1], \ldots, N_{2^q}[W_{|\bar{y}|}]\} \cup \{N_{2^q+2\sigma(2^q)}[V_i'] \mid i \in S\}.$$

注意， $|\mathcal{U}|$ 仅取决于 q、 c 和 $|\bar{y}|$。结合 (1) 和性质 1，对于所有元组 $\bar{w} \in W_1 \times \ldots \times W_{|y|}$，有

$$G \models \exists x\ \varphi(\bar{w}, x) \implies \bigvee_{U \in \mathcal{U}} G\langle U\rangle \models \exists x \in U\ \varphi(\bar{w}, x).$$

这个陈述的逆向蕴含显然成立，因为右侧只是限制了 x 的量化范围。由此得到核心陈述

$$G \models \exists x\ \varphi(\bar{w}, x) \iff \bigvee_{U \in \mathcal{U}} G\langle U\rangle \models \exists x \in U\ \varphi(\bar{w}, x).$$

由于每个 W_i 都包含在 G的一个 r-邻域中，因此每个 $N_{2^q}[W_i]$ 都包含在一个 $(r + 2^q)$-邻域中，并且（借助 $\sigma(2^q) \geq 2^q$）也包含在一个 $(r + \sigma(2^q))$-邻域中。每个集合 $N_{2^q}[V_i']$ 都包含在 C_i中，而根据构造， C_i包含在 G的一个 $\sigma(2^q)$-邻域中。由此可得， $N_{2^q+2\sigma(2^q)}[V_i'] = N_{2\sigma(2^q)}[N_{2^q}[V_i']]$ 包含在 G中的一个 $3\sigma(2^q)$-邻域内。因此，每个 $U \in \mathcal{U}$都包含在 G的一个 $(r + 3\sigma(2^q))$-邻域中。为完成证明，我们必须计算一个满足性质 1 的小代表集 S 。

翻转与类型计算。 作为计算 S 的第一步，我们将展示如何利用给定的高效 $\mathsf{MC}(\mathscr{C}, q, \ell + 1, c + 3)$ 算法，为所有 $i \in [m]$ 计算 $\mathsf{tp}^q(G[N_{2^{q-1}-1}[V_i']]\langle X \mapsto V_i'\rangle)$。为此，我们对每个 $i \in [m]$ 执行以下计算。令 $H_{\ell+1} := G[N_{2^{q-1}-1}[V_i']]$。注意，这对应于半径为 σ 的 $(2^q) \leq \rho$ 翻转者博弈中的一个 Connector 步。我们将适用于类 $\mathscr{C} \ni G_0$ 的半径为 ρ 的翻转者策略 $\mathsf{flip}^\star$ 应用于图 $H_{\ell+1}$ 和内部状态 $\mathcal{I}_\ell$，得到一个翻转 F 和一个新的内部状态 $\mathcal{I}_{\ell+1}$。根据定理 2，这需要的时间为

$$g_2(q) \cdot |V(G_0)|^2,$$

对于某个函数 $g_2(q)$。令 $G_{\ell+1} := H_{\ell+1} \oplus \mathrm{F}$。现在，我们可以通过附加新的有序对 $(G_{\ell+1}, \mathcal{I}_{\ell+1})$，将 $\mathcal{H}$ 扩展为长度为 $\ell+1$ 的 $(\mathscr{C}, \rho)$- 历史。我们额外使用 3 种颜色来构造 $G^+_{\ell+1}$：在 $G_{\ell+1}$ 中用一元谓词标记 F 中的两个 flip 集，以及来自 V'_i 的顶点。接下来，我们枚举签名 $G^+_{\ell+1}$ 上量词秩至多为 q 的规范化一阶句子集合 Φ。回忆一下，$|\Phi|$ 由 q 和 c 的某个函数所界定。我们使用给定的高效 $\mathsf{MC}(\mathscr{C}, q, \ell+1, c+3)$ 算法，在 $G^+_{\ell+1}$ 上求值 Φ 中的每个公式，从而计算 $\mathsf{tp}_q(G^+_{\ell+1})$，所需时间为

$$g_3(q,c) \cdot f_{\mathrm{MC}}(q, \ell+1, c+3, \varepsilon) \cdot |V(G^+_{\ell+1})|^{((1+\varepsilon)^{d-1})} \cdot |V(G_0)|^{9.8},$$

对于某个函数 $g_3(q,c)$。现在我们来说明如何从 $\mathsf{tp}_q(G^+_{\ell+1})$ 推导出 $\mathsf{tp}_q(G[N_{2^{q-1}-1}[V'_i]]\langle V'_i\rangle)$。只需注意到，对于每个句子 ψ，当且仅当 $\psi' \in \mathsf{tp}_q(G^+_{\ell+1})$ 时，$\psi \in \mathsf{tp}_q(G[N_{2^{q-1}-1}[V'_i]]\langle V'_i\rangle)$，其中 ψ' 是通过将 ψ 中每个边关系 $E(x,y)$ 替换为 $E(x,y) \oplus \big((x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A)\big)$ 得到的，其中 A 和 B 是标记 F 的 flip 集的颜色谓词。类似地，我们可以推导出 $\mathsf{tp}_q(G[N_{2^{q-1}-1}[V'_i]]\langle X \mapsto V'_i\rangle)$。

计算代表集。现在我们使用先前计算出的 q-类型，选取 S 作为 $[m]$的一个极小子集，使得

$$\{\mathrm{tp}_q(G[N_{2^{q-1}-1}[V'_i]]\langle X \mapsto V'_i\rangle) \mid i \in [m]\} = \{\mathrm{tp}_q(G[N_{2^{q-1}-1}[V'_i]]\langle X \mapsto V'_i\rangle) \mid i \in S\}.$$

S 的大小至多为具有 $c+3$ 种颜色的图上可能的 q-类型的数量，因此可以用 q 和 c的函数来界定。为了证明 S 满足性质 1，我们固定$\bar{w} \in W_1 \times \cdots \times W_{|\bar{y}|}$ 并论证

$$\bigvee_{i=1}^{m} G\langle V'_i\rangle \models \exists x \in V'_i\ \varphi(\bar{w}, x) \quad \Longrightarrow \quad \bigvee_{i \in S} G\langle X \mapsto N_{2^q+2\sigma(2^q)}(V'_i)\rangle \models \exists x \in X\ \varphi(\bar{w}, x).$$

假设对于某个 i，有 $G\langle V'_i\rangle \models \exists x \in V'_i\ \varphi(\bar{w}, x)$。若对于某个 $j \in S$，有 $V'_i \subseteq \bigcup_{j \in S} N_{2^q+2\sigma(2^q)}[V'_j]$，则右侧结论立即成立，因此我们可以假设对于所有 $j \in S$，都有 $V'_i \not\subseteq \bigcup_{j \in S} N_{2^q+2\sigma(2^q)}[V'_j]$。固定某个 $j \in S$，并证明 $\mathsf{dist}(V'_i, V'_j) > 2^q$ 且 $\mathsf{dist}(\bar{w}, V'_i \cup V'_j) > 2^q$。由于我们有$V'_i \not\subseteq \bigcup_{j \in S} N_{2^q+2\sigma(2^q)}[V'_j]$，因此存在一个顶点，它在 V'_i中，且到 V'_j中的每个顶点的距离都大于 $2^q + 2\sigma(2^q)$。由于 V'_i嵌入到 G 的一个直径至多为 $2\sigma(2^q)$的子图中，V'_i中的每个顶点到 V'_j中的每个顶点的距离都大于 2^q。这意味着 $\mathsf{dist}(V'_i, V'_j) > 2^q$。最后，我们结合以下内容证明 $\mathsf{dist}(\bar{w}, V'_i \cup V'_j) > 2^q$

$$V'_i := V_i \setminus N_{2^q}\Big[\bigcup_{k=1}^{|\bar{y}|} W_k\Big], \quad V'_j := V_j \setminus N_{2^q}\Big[\bigcup_{k=1}^{|\bar{y}|} W_k\Big], \quad \bar{w} \in W_1 \times \cdots \times W_{|\bar{y}|}.$$

集合 S 被选为代表，含义是存在某个 $j \in S$ 满足

$$\mathrm{tp}_q(G[N_{2^{q-1}-1}[V'_i]]\langle V'_i \to X\rangle) = \mathrm{tp}_q(G[N_{2^{q-1}-1}[V'_j]]\langle V'_j \to X\rangle).$$

由于 $G\langle V'_i\rangle \models \exists x \in V'_i\ \varphi(\bar{w},\ x)$，根据定理 4，还有 $G\langle V'_j\rangle \models \exists x \in V'_j\ \varphi(\bar{w},\ x)$，且右侧成立。因此，$S$ 满足性质 1。

运行时间分析。 首先，我们分析段落 翻转与类型计算 中各项计算所耗费的运行时间。如其中所述，运行时间（使用 $m \le n$）有如下界

$$\sum_{i\in[m]} g_2(q)\cdot |V(G_0)|^2 \le n\cdot g_2(q)\cdot |V(G_0)|^2 \tag{2}$$

用于计算翻转，另外

$$\sum_{i\in[m]} g_3(q,c)\cdot f_{\mathrm{MC}}(q,\ell+1,c+3,\varepsilon)\cdot |N_{2^q}[V_i']|^{((1+\varepsilon)^{d-1})}\cdot |V(G_0)|^{9.8}$$

用于计算 q-类型。注意，对于所有 $\alpha \ge 1$ 和非负数 $n_1, \ldots\ldots, n_m$，我们有$\sum_{i\in[m]} n_i^\alpha \le (\sum_{i\in[m]} n_i)^\alpha$，从而将 q-类型计算的运行时间界定为

$$g_3(q,c)\cdot f_{\mathrm{MC}}(q,\ell+1,c+3,\varepsilon)\cdot \Big(\sum_{i\in[m]} |N_{2^q}[V_i']|\Big)^{((1+\varepsilon)^{d-1})}\cdot |V(G_0)|^{9.8}.$$

对于每个 $i\in m$，我们有 $N_{2^q}[V_i'] \subseteq N_{2^q}[V_i] \subseteq C_i$，因此

$$\sum_{i\in[m]} |N_{2^q}[V_i']| \le \sum_{i\in[m]} |C_i| \le g_1(q,\varepsilon,\ell)\cdot n^{1+\varepsilon},$$

其中，最后一个界限源于这样一个事实：我们有 n 个顶点，每个顶点在覆盖 $\{C_1,\ldots,C_m\}$ 的至多$g_1(q,\ \varepsilon,\ \ell)$ 个簇中出现。结合前两个不等式，可将类型计算的运行时间界定为

$$g_3(q,c)\cdot f_{\mathrm{MC}}(q,\ell+1,c+3,\varepsilon)\cdot \Big(g_1(q,\varepsilon,\ell)\cdot n^{1+\varepsilon}\Big)^{((1+\varepsilon)^{d-1})}\cdot |V(G_0)|^{9.8},$$

这等于

$$g_3(q,c)\cdot f_{\mathrm{MC}}(q,\ell+1,c+3,\varepsilon)\cdot g_1(q,\varepsilon,\ell)^{((1+\varepsilon)^{d-1})}\cdot n^{((1+\varepsilon)^{d})}\cdot |V(G_0)|^{9.8}. \tag{3}$$

本段中花费的总运行时间，即 (2) 和 (3) 之和，可界定为 $g_4(q,\ \varepsilon,\ \ell)\cdot n^{((1+\varepsilon)^d)}\cdot |V(G_0)|^{9.8}$，其中 $g_4(q,\ \varepsilon,\ \ell)$ 是某个函数。

段落 邻域覆盖计算 中的计算需要 $\mathcal{O}(n^{9.8})$ 时间。由于代表集的大小受 q 和 c的某个函数限制，我们可以将段落 拆分存在量词 和 计算代表集的计算时间限制为 $g_5(q,c,|\bar{y}|)\cdot n^2$，其中 $g_5(q,c,|\bar{y}|)$ 是某个函数。由于 $n \le |V(G_0)|$，我们可以选取函数 $f(q,c,\ell,\varepsilon,|\bar{y}|)$，使得总运行时间受以下表达式限制

$$f(q,c,\ell,\varepsilon,|\bar{y}|)\cdot n^{((1+\varepsilon)^{d})}\cdot |V(G_0)|^{9.8}. \qquad \square$$

现在，只需对每个量词反复应用定理 7，即可得到我们的主要结果定理 6。这不需要新的思路，但分析起来会有些繁琐。为便于进行归纳证明，我们证明下面这个更强的命题。当 φ 没有自由变量，且 $p=q$ 和 $r=0$ 时，定理 6 就是其特例。

引理10. 设 $\mathscr{C}$ 是一个单子稳定图类，存在扩展度为 σ 的、对翻转封闭的稀疏弱邻点覆盖，并设 $\rho = (6q\sigma(2^q)+1)(2^q+1)$。给定输入

- 一个 $(\mathscr{C}, \rho)$-历史 $\mathcal{H} = (G_0, \mathcal{I}_0), \ldots, (G_\ell, \mathcal{I}_\ell)$，长度为 ℓ，
- 对 G_ℓ 进行着色 G，其签名最多有 c 种颜色，
- 一个量词秩至多为 $p \leq q$ 的公式 $\varphi(\bar{y})$，
- 集合 $W_1, \ldots, W_{|\bar{y}|}$，每个都包含在 G 的一个 r-邻域中，并且
- 一个高效的 $\mathrm{MC}(\mathscr{C}, q, \ell+1, c+3)$-算法，

可以计算集合 $U_1, \ldots, U_t \subseteq V(G)$，其中某个常数 t 仅取决于 p, q, c 和 $|\bar{y}|$，以及一个 $(U_1, \ldots, U_t)$-守卫公式 $\xi(\bar{y})$，其量词秩为 p。每个 U_i 都包含在 G 的一个$(r + q \cdot 3\sigma(2^q))$-邻域中，并且对于所有元组 $\bar{w} \in W_1 \times \ldots \times W_{|y|}$，我们有

$$G \models \varphi(\bar{w}) \quad \iff \quad G\langle U_1, \ldots, U_t\rangle \models \xi(\bar{w}).$$

存在一个函数 f（p、q、c、ℓ、ε），使得对于每个 $\varepsilon > 0$，该过程的运行时间有如下界：

$$f(p,q,c,\ell,\varepsilon) \cdot |V(G)|^{((1+\varepsilon)^d)} \cdot |V(G_0)|^{9.8},$$

其中，$d :=$ game-depth$(\mathscr{C}$、$\rho) - \ell$ 界定了赢得剩余 ***Flipper*** 博弈所需的回合数。

证明。令 $\varepsilon > 0$。我们对 p 进行归纳来证明该引理。对于 $p = 0$，注意到每个无量词公式都是 $\varnothing$-守卫的，因此我们可以令 $\xi(\bar{y}) := \varphi(\bar{y})$，无需再作证明。因此，假设 $p > 0$，且该结论对 $p-1$ 成立。我们将利用所假设的、针对 $p-1$ 的算法作为子程序，为 p 构造一个算法。

根据规范化，$|\varphi|$ 仅取决于 p、c 和 $|\bar{y}|$。此外，$\varphi(\bar{y})$ 是形如 $\exists x\ \psi(\bar{y},\ x)$ 的公式的布尔组合，其量词秩至多为 p。因此，只需对单个这样的公式 $\exists x\ \psi(\bar{y},\ x)$ 证明该定理。我们应用定理 7，将其作为输入

- 历史 $\mathcal{H} = (G_0, \mathcal{I}_0), \ldots, (G_\ell, \mathcal{I}_\ell)$,
- 着色 G，用至多 c 种颜色对 G_ℓ 进行着色，
- 量词秩至多为 $p \leq q$ 的公式 $\exists x\ \psi(\bar{y}, x)$,
- 集合 $W_1, \ldots, W_{|\bar{y}|}$，每个集合都包含在某个 G 的 r-邻域中，并且
- 给定的 $\mathsf{MC}(\mathscr{C}, q, \ell+1, c+3)$-算法。

在时间

$$f'(q,c,\ell,\varepsilon,|\bar{y}|) \cdot |V(G)|^{((1+\varepsilon)^d)} \cdot |V(G_0)|^{9.8} \tag{4}$$

这会产生集合 R_1、.....、$R_{t'} \subseteq V(G)$，其中某个常数 t' 仅取决于 q、c 和 $|\bar{y}|$。每个 R_i都包含在 G 的一个 $(r + 3\sigma(2^q))$ 邻域中，因此对于所有元组 $\bar{w} \in W_1 \times \ldots \times W_{|y|}$，我们有

$$G \models \exists x\ \psi(\bar{w}, x) \quad \iff \quad \bigvee_{i=1}^{t'} G\langle R_i\rangle \models \exists x \in R_i\ \psi(\bar{w}, x). \tag{5}$$

对于每个 $i \in [t']$，我们在其上应用归纳假设给出的用于 $p-1$ 的算法

- 历史 $\mathcal{H}$、图 G，以及 MC($\mathscr{C}$，q，$\ell+1$，$c+3$)-算法，
- 量词秩至多为 $p-1 \leq q$ 的公式 $\psi(\bar{y}, x)$，
- 集合 W_1、.....、$W_{|y|}$，$R_i \subseteq V(G)$，每个集合都包含在某个 $(r+3\sigma(2^q))$-邻域中 G.

在时间

$$f(p-1,q,c,\ell,\varepsilon,|\bar{y}|+1)\cdot|V(G)|^{((1+\varepsilon)^d)}\cdot|V(G_0)|^{9.8} \tag{6}$$

由此得到一个守卫集族 $\mathcal{U}_i$，其中 $|\mathcal{U}_i|$ 取决于 $p-1$、q、c 和 $|\bar{y}|$；此外还得到一个 $\mathcal{U}_i$-守卫公式 $\xi_i(\bar{y})$，其量词秩为 $q-1$。每个 $U \in \mathcal{U}_i$ 都包含在某个 $\big(r+3\sigma(2^q)+(q-1)\cdot 3\sigma(2^{q-1})\big)$-邻域中（因此也包含在某个 $(r+q\cdot 3\sigma(2^q))$-邻域 G 中）。对于所有元组 $\bar{w}v \in W_1 \times \ldots \times W_{|\bar{y}|} \times R_i$，我们有

$$G \models \psi(\bar{w}, v) \iff G\langle \mathcal{U}_i \rangle \models \xi_i(\bar{w}, v).$$

由于上述陈述无论如何选择 $v \in R_i$ 都成立，对$v \in R_i$进行存在量化会保留该等价关系。因此，对于所有元组 $\bar{w} \in W_1 \times \ldots \times W_{|y|}$

$$G\langle R_i \rangle \models \exists x \in R_i\ \psi(\bar{w}, x) \iff G\langle R_i \rangle\langle \mathcal{U}_i \rangle \models \exists x \in R_i\ \xi_i(\bar{w}, x). \tag{7}$$

结合 (5) 和 (7)，对于每个 $\bar{w} \in W_1 \times \ldots \times W_{|y|}$，有

$$G \models \exists x\ \psi(\bar{w}, x) \iff \bigvee_{i=1}^{t'} G\langle R_i \rangle\langle \mathcal{U}_i \rangle \models \exists x \in R_i\ \xi_i(\bar{w}, x),$$

这等价于

$$G\langle R_1 \rangle\langle \mathcal{U}_1 \rangle \ldots \langle R_{t'} \rangle\langle \mathcal{U}_{t'} \rangle \models \bigvee_{i=1}^{t'} \exists x \in R_i\ \xi_i(\bar{w}, x).$$

因此，我们 可以将我们的守卫集 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_t\}$ 定义为 $\mathcal{U} := \{R_1, \ldots, R_{t'}\} \cup \bigcup_{i=1}^{t'} \mathcal{U}_i$。

运行时间由调用定理 7 的界 (4)、带有 $p-1$ 的递归调用的界 (6) 的 t' 倍，以及一些次要的簿记开销共同限定。我们可以选择 $f(p,\ q,\ c,\ \ell,\ \varepsilon)$，使其至多为

$$f(p,q,c,\ell,\varepsilon)\cdot|V(G)|^{((1+\varepsilon)^d)}\cdot|V(G_0)|^{9.8}. \qquad \square$$

5.3 缩减求值半径

我们的总体目标是在图 G 上评估一个量词秩为 q 的句子。在上一节中，我们使用保护集 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_t\}$ 将该句子改写为一个等价的、具有相同量词秩的 $\mathcal{U}$-受保护句子。每个集合 $U_i \subseteq V(G)$ 都包含在 G 的一个 $r := q \cdot 3\sigma(2^q)$-邻域中，因此，诱导子图 $G[U_1 \cup \cdots \cup U_t]$ 由连通分量构成，这些连通分量都包含在 G 中半径至多为 $(2r+1)t$ 的邻域内。

可以设想，在 G 上递归地考察每个连通分量，并使用半径为 $(2r+1)t$ 的 Flipper 博弈策略来计算翻转，从而对 $\mathcal{U}$-受保护句子进行求值。下面说明这种做法行不通。Flipper 博弈的半径不能随时间增加，否则无法保证博弈能在固定轮数内结束。在我们的构造中，

然而，保护集的数量 t 取决于随时间添加的颜色数量 c，因此会随着 Flipper 博弈已进行的回合数增加。由此，我们不能递归考察半径为 $(2r+1)t$ 的连通分量。必须为 Flipper 博弈选定一个固定半径 ρ，且该半径只能取决于 q 和 $\mathscr{C}$。

在本节中，我们证明，只需考察 G 的子图（这些子图包含在半径为 ρ 的邻域内），就能计算 $\mathcal{U}$-受保护句子：$=(2r+1)(2^q+1)$。这个量仅取决于 q 和 $\mathscr{C}$，不会随时间增长。这是以下定理 8 的推论。请注意，为避免引入冗长的额外记号，$\mathcal{U}$ 既指保护公式的一元谓词，也指图 G 中解释这些谓词的相应顶点集。具体指哪一种，将由上下文决定。

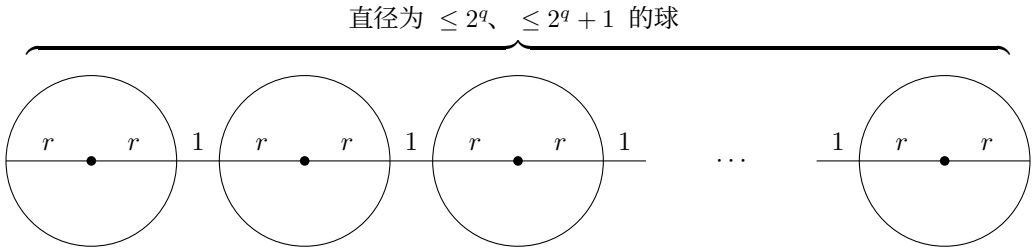
定理 8。对于给定的 $\mathcal{U}$-受保护句子 φ，若其量词秩至多为 q，且具有对称关系 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$，则可以计算出一个句子 $\varphi_{\mathcal{R}}$，使得对于每个图 G 和集合 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$，只要满足 $\mathcal{R} = \{(U,W) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid U$，并且 W 在 $G\}$ 中共享一个顶点或一条连接边，就有

$$G\langle \mathcal{U} \rangle \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad G\langle \mathcal{U} \rangle \models \varphi_{\mathcal{R}}.$$

此外，$\varphi_{\mathcal{R}}$ 是量词秩至多为 q 的句子的布尔组合，并且 $\varphi_{\mathcal{R}}$ 中提到的每个句子对于某个 $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ 都是 $\mathcal{U}'$-受保护的，使得图（$\mathcal{U}$、$\mathcal{R}$）$[\mathcal{U}']$ 的直径至多为 2^q。

特别地，如果每个 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}$（$V$（$G$））集合都包含在 G 的某个 r-邻域中，那么 $\bigcup \mathcal{U}'$ 包含在 G 的一个直径至多为（$2r+1$）（2^q+1）的子图中。

为说明结论中最后的“特别地，.....”部分可由陈述的核心部分推出，假设每个 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}$（$V$（$G$））集合都包含在 G 的某个 r-邻域中。对于 $\psi_{\mathcal{R}}$ 中的 $\mathcal{U}'$-受保护句子 ξ，图（$\mathcal{U}$、$\mathcal{R}$）$[\mathcal{U}']$ 的直径至多为 2^q，并且 G 中的所有（U_1、U_2）共享一个顶点或一条连接边。如下图所示，$\bigcup \mathcal{U}'$ 包含在 G 的一个直径至多为（$2r+1$）（2^q+1）的子图中。



我们通过归纳法证明定理 8 的核心部分，所用的是一个更强的命题，该命题涉及含自由变量的公式。

引理 11. 对于给定的 $\mathcal{U}$-守卫公式 $\varphi(\bar{y})$，其量词秩至多为 q，以及对称关系 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ 和序列 $U_1, \ldots, U_{|\bar{y}|} \in \mathcal{U}$，可以计算出一个公式 $\varphi_{\mathcal{R}}(\bar{y})$，使得对于每个图 G、与谓词 $\mathcal{U}$ 相关联且满足 $\mathcal{R} = \{(U,W) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid U$ 的集合 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$，若其与 W 在 $G\}$ 中共享一个顶点或一条连接边，并且对于每个 $\bar{w} \in U_1 \times \cdots \times U_{|\bar{y}|}$，我们都有

$$G\langle \mathcal{U} \rangle \models \varphi(\bar{w}) \quad \Longleftrightarrow \quad G\langle \mathcal{U} \rangle \models \varphi_{\mathcal{R}}(\bar{w}).$$

此外，$\varphi_{\mathcal{R}}(\bar{y})$ 是量词秩至多为 q 的公式的布尔组合，并且对于 $\varphi_{\mathcal{R}}$ 中提及的每个公式 ξ，都存在 $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$，使得 ξ 是 $\mathcal{U}'$-守卫的，$(\mathcal{U},\mathcal{R})[\mathcal{U}']$ 的直径至多为 2^q，且 $\{U_i \mid y_i \in \mathrm{free}(\xi)\} \subseteq \mathcal{U}'$。

证明。我们考虑任意图 G 以及与谓词 $\mathcal{U}$ 相关联的 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$，满足对于所有 $U, W \in \mathcal{U}$，当且仅当 U, W 在 G 中共享一个顶点或一条连接边时，$(U, W) \in \mathcal{R}$。我们还固定一个序列 $U_1, \ldots, U_{|\bar{y}|} \in \mathcal{U}$。我们通过对 φ 的结构进行归纳来证明该结论。

原子公式。由于 φ 是一个原子公式，它是 $\varnothing$-守卫的，且有一个或两个自由变量。假设 $\varphi(y_1)$只有一个自由变量。我们令 $\varphi_{\mathcal{R}} := \varphi$和 $\mathcal{U}' := \{U_1\}$。那么 $\varphi_{\mathcal{R}}$本身是 $\mathcal{U}'$-守卫的，并且 $(\mathcal{U}, \mathcal{R})[\mathcal{U}']$的直径显然为 $0 \leq 2^0$。现在假设 $\varphi(y_1, y_2)$是一个二元原子公式，也就是说，不失一般性地，它是 $E(y_1, y_2)$ 或 $(y_1 = y_2)$。若 $(U_1, U_2) \in \mathcal{R}$，我们令 $\varphi_{\mathcal{R}} := \varphi$和 $\mathcal{U}' := \{U_1, U_2\}$。同样，$\varphi_R$是 $\mathcal{U}'$-守卫的，并且 $(\mathcal{U}, \mathcal{R})[\mathcal{U}']$的直径为 $1 = 2^0$。否则，$(U_1, U_2) \notin \mathcal{R}$，且 U_1, U_2在 G中既不共享顶点，也没有连接边。这意味着对所有 $w_1 \in U_x, w_2 \in U_y$，$G \not\models E(w_1, w_2)$ 且 $G \not\models (w_1 = w_2)$。我们令 $\varphi_{\mathcal{R}}$为假原子公式 $\bot$和 $\mathcal{U}' = \varnothing$。

布尔组合。如果 φ 具有 $\psi^1 \wedge \psi^2$ 或 $\neg\psi^1$ 的形式，则构造显然：我们通过归纳得到 $\varphi^1_{\mathcal{R}}$ 和 $\varphi^2_{\mathcal{R}}$，并将其分别设为 $\varphi_{\mathcal{R}} \coloneqq \psi^1_{\mathcal{R}} \wedge \psi^2_{\mathcal{R}}$ 或 $\varphi_{\mathcal{R}} \coloneqq \neg\psi^1_{\mathcal{R}}$。

存在量词。假设 $\varphi(\bar{y}) = \exists x \in U\ \psi(\bar{y}x)$。我们对 $\psi(\bar{y}x)$ 归纳应用该陈述（将序列 $U_1, \ldots, U_{|\bar{y}|}$ 扩展为 U），并得到一个公式的布尔组合 $\psi_{\mathcal{R}}(\bar{y}x)$，其量词秩至多为 $q - 1$，使得对于每个 $\bar{w}v \in U_{y_1} \times \cdots \times U_{y_{|\bar{y}|}} \times U$

$$G\langle\mathcal{U}\rangle \models \psi(\bar{w}v) \iff G\langle\mathcal{U}\rangle \models \psi_{\mathcal{R}}(\bar{w}v).$$

对于 $\psi_{\mathcal{R}}(\bar{y}x)$ 中提到的每个公式 ξ，根据归纳，我们都有一个集合 $\mathcal{U}_\xi \subseteq \mathcal{U}$，使得 ξ 是 $\mathcal{U}_\xi$-受限的，并且 $(\mathcal{U}, \mathcal{R})[\mathcal{U}_\xi]$ 的直径至多为 2^{q-1}。通过归纳得到的另一个关键性质是，$x \in \mathsf{free}(\xi)$ 蕴含 $U \in \mathcal{U}_\xi$。我们将 $\psi_{\mathcal{R}}(\bar{y}x)$ 中提到的公式划分为集合 Ψ_x 和 Ψ_x，其中 Ψ_x 包含所有满足 $x \in \mathsf{free}(\xi)$ 的公式 ξ，而 Ψ_x 包含所有满足 $x \notin \mathsf{free}(\xi)$ 的 ξ。Ψ_x 中的公式独立于 x，因此我们可以写成

$$\exists x \in U\ \psi_{\mathcal{R}}(\bar{y}x) \equiv \bigvee_{t:\Psi_x \to \{\bot,\top\}} \Big(\Big(\bigwedge_{\xi \in \Psi_x} \big(\xi(\bar{y}) \leftrightarrow t(\xi)\big) \Big) \wedge \exists x \in U\ \psi_{\mathcal{R}}(\bar{y}x) \Big).$$

现在在右侧，$\psi_{\mathcal{R}}$ 的每次出现都处于这样一个作用域中：其中每个$\xi \in \Psi_x$ 的真值都已确定。因此，我们可以将 $\psi_{\mathcal{R}}$ 中 ξ 的每次出现都替换为该真值$t(\xi) \in \{\bot, \top\}$。令 $\psi^t_{\mathcal{R}}$ 为通过将 $\psi_{\mathcal{R}}$ 中 $\xi \in \Psi_x$的每次出现替换为 $t(\xi)$而得到的公式。我们得到等价关系

$$\exists x \in U\ \psi_{\mathcal{R}}(\bar{y}x) \equiv \varphi_{\mathcal{R}}(\bar{y}) := \bigvee_{t:\Psi_x \to \{\bot,\top\}} \Big(\Big(\bigwedge_{\xi \in \Psi_x} \big(\xi(\bar{y}) \leftrightarrow t(\xi)\big) \Big) \wedge \exists x \in U\ \psi^t_{\mathcal{R}}(\bar{y}x) \Big).$$

因此，对于每个 $\bar{w} \in U_{y_1} \times \cdots \times U_{y_{|\bar{y}|}}$

$$G\langle\mathcal{U}\rangle \models \varphi(\bar{w}) \iff G\langle\mathcal{U}\rangle \models \varphi_{\mathcal{R}}(\bar{w}).$$

我们注意到，$\varphi_{\mathcal{R}}(\bar{y})$是来自 Ψ_x 的旧公式与形如 $\exists x \in U\ \psi^t_{\mathcal{R}}$的新公式的布尔组合。所有这些公式的量词秩都至多为 q。

现在考虑一个新公式 $\omega := \exists x \in U\ \psi^t_{\mathcal{R}}$，并令 $\mathcal{U}_\omega := \bigcup_{\xi \in \Psi_x} \mathcal{U}_\xi$。由于 $\psi^t_{\mathcal{R}}$ 已从 Ψ_x中消去了所有公式，我们知道 ω 是 $\mathcal{U}_\omega$-受保护的。对于所有 $\xi \in \Psi_x$，我们都有 $x \in \mathsf{free}(\xi)$，因此，如前所述，$U \in \mathcal{U}_\xi$。根据归纳，每个图 $(\mathcal{U},\ \mathcal{R})[\mathcal{U}_\xi]$ 的直径至多为 2^{q-1}。这意味着 $(\mathcal{U},\ \mathcal{R})[\mathcal{U}_\omega]$ 被若干图覆盖，这些图都在 U处重叠，且直径至多为 2^{q-1}，因此 $(\mathcal{U},\ \mathcal{R})[\mathcal{U}_\omega]$ 的直径至多为 2^q。由于 $\mathsf{free}(\omega) \subseteq \bigcup_{\xi \in \Psi_x} \mathsf{free}(\xi)$，我们还有$\{U_i \mid y_i \in \mathsf{free}(\omega)\} \subseteq \mathcal{U}_\omega$。 □

我们指出，经典的 Feferman–Vaught定理 [Fef57, Mak04] 关于不交并的结论可作为定理 8 的一个推论得到：假设我们要计算句子在图 G_1 和 G_2的不交并上的取值。将每个量词 $\exists x\ \psi$ 替换为 $\exists x \in V(G_1)\ \psi \vee \exists x \in V(G_2)\ \psi$，并对所有全称量词作类似处理。这样便得到一个等价的 $\mathcal{U}$-受保护句子，其中$\mathcal{U} = \{V(G_1)\ V(G_2)\}$。对于对应于 G_1和 G_2的不交并的关系 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$，图 $(\mathcal{U}, \mathcal{R})$由两个顶点 $V(G_1)$ 和 $V(G_2)$组成，它们之间没有边相连。我们对关系 $\mathcal{R}$应用定理 8。得到的布尔组合中的每个句子都是 $\mathcal{U}'$-受保护的，其中某个 $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$使得 $(\mathcal{U}, \mathcal{R})[\mathcal{U}']$连通。这样只剩下 $\mathcal{U}' \subseteq \{V(G_1)\}$和 $\mathcal{U}' \subseteq \{V(G_2)\}$。因此，我们得到一个布尔组合，其中的句子分别在$G_1$ 或 G_2 中求值。

5.4 主要结果

我们已准备好证明主要结果。首先，我们将前两个小节中的观察结合起来，得到关于 Flipper 博弈深度的归纳步骤。

定理 9. 设 $\mathscr{C}$ 是一个单子稳定图类，具有翻转封闭的稀疏弱邻点覆盖，其扩展度为 σ，并设 $q, \ell \in \mathbb{N}$。若对于每个 $c \in \mathbb{N}$， $\mathscr{C}$都有一个高效的 $\mathrm{MC}(\mathscr{C}, q, \ell+1, c)$ 算法，那么对于每个 $c \in \mathbb{N}$， $\mathscr{C}$也都有一个高效的 $\mathrm{MC}(\mathscr{C}, q, \ell, c)$ 算法。

证明。 令 $\rho := (6q\sigma(2^q)+1)(2^q+1)$。我们将构造的 MC$(\mathscr{C}, q, \ell, c)$ 算法接收以下输入：一个 $(\mathscr{C}, \rho)$-历史 $(G_0, \mathcal{I}_0) \dots, (G_\ell, \mathcal{I}_\ell)$，一个对 G_ℓ 的着色 G，使用的颜色不超过 c 种，以及一个量词秩为 q 的句子 φ。首先，我们调用定理 6。这给出一个量词秩为 q 的 $\mathcal{U}$-受保护句子 ξ，使得

$$G \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad G\langle \mathcal{U} \rangle \models \xi. \tag{8}$$

这里，$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$ 是一个集合，其 $|\mathcal{U}|$ 仅取决于 q, c，且每个 $U \in \mathcal{U}$ 都包含在 G 的一个 $(q \cdot 3\sigma(2^q))$-邻域中。

在 $\mathcal{O}(|\mathcal{U}|^2 \cdot |V(G)|^2)$ 时间内，计算关系 $\mathcal{R} := \{(U, W) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid U$ 和 W 在 $G\}$ 中共享一个顶点或连接边。接下来，我们应用定理 8。这给出了句子 $\xi_1, \dots, \xi_k$ 的一个布尔组合 ξ^*，其量词秩至多为 q，使得

$$G\langle \mathcal{U} \rangle \models \xi \quad \Longleftrightarrow \quad G\langle \mathcal{U} \rangle \models \xi^*. \tag{9}$$

每个句子 ξ_i 对某个 $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}$ 都是 $\mathcal{U}_i$-守卫的，使得 $\bigcup \mathcal{U}_i$ 包含在 G 的一个子图中，该子图的直径至多为 $\rho = (6q\sigma(2^q) + 1)(2^q + 1)$，因此也包含在 G 的一个 ρ-邻域中。定理 8 的运行时间与定理 6 的运行时间相比微不足道。迄今为止耗费的时间有如下界

$$f(q, c, \ell, \varepsilon) \cdot |V(G)|^{((1+\varepsilon)^d)} \cdot |V(G_0)|^{9.8} \tag{10}$$

对于某个函数 $f(q、\ c、\ \ell、\ \varepsilon)$ 以及每个 $\varepsilon > 0$，其中 $d :=$ 博弈深度$(\mathscr{C}、\ \rho) - \ell$ 界定了赢得剩余 Flipper 博弈所需的回合数。

现在，对于每个 $i \in [k]$，我们按照定理 7 的“翻转与类型计算”段落中的类似方法，判断 $G\langle \mathcal{U} \rangle \models \xi_i$ 是否成立。令 $H_{\ell+1} := G[\bigcup \mathcal{U}_i]$，由于 ξ_i 是 $\mathcal{U}_i$- 受守护的，我们有

$$G\langle \mathcal{U} \rangle \models \xi_i \quad \Longleftrightarrow \quad H_{\ell+1}\langle \mathcal{U} \rangle \models \xi_i. \tag{11}$$

注意，由于 $\bigcup \mathcal{U}_i$ 包含在 ρ的邻域中，限制到 $H_{\ell+1}$ 对应于半径为 ρ 的 Flipper 博弈中的一次 Connector 步。我们将适用于类 $\mathscr{C} \ni G_0$的半径为 ρ 的 Flipper 策略 flip*应用于图 $H_{\ell+1}$ 和内部状态 $\mathcal{I}_\ell$，得到由 flip 集合 A， B 指定的一个翻转 F，以及一个新的内部状态 $\mathcal{I}_{\ell+1}$。根据定理 2，所需时间为

$$g_2(q) \cdot |V(G_0)|^2, \tag{12}$$

对于某个函数 $g_2(q)$。

令 $G_{\ell+1} := H_{\ell+1} \oplus \mathsf{F}$ 且 $G^+_{\ell+1} = G_{\ell+1}\langle\mathcal{U}\rangle\langle A, B\rangle$。我们通过将边关系 $E(x, y)$ 的每次出现替换为 $E(x, y) \oplus \big((x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A)\big)$，从 ξ_i 构造 ξ'_i。然后

$$H_{\ell+1}\langle\mathcal{U}\rangle \models \xi_i \iff G^+_{\ell+1} \models \xi'_i. \tag{13}$$

现在，我们可以通过附加新对 $(G_{\ell+1}, \mathcal{I}_{\ell+1})$，将 $\mathcal{H}$ 扩展为长度为 $\ell+1$ 的 $(\mathscr{C}, \rho)$-历史。我们使用给定的高效 $\mathrm{MC}(\mathscr{C}, q, \ell+1, c+2+|\mathcal{U}|)$-算法在时间内判定

$$f_{\mathrm{MC}}(q, \ell+1, c+2+|\mathcal{U}|, \varepsilon) \cdot |V(G^+_{\ell+1})|^{((1+\varepsilon)^{d-1})} \cdot |V(G_0)|^{9.8} \tag{14}$$

是否 $G^+_{\ell+1} \models \xi'_i$。根据 (11) 和 (13)，这可以判定是否 $G\langle\mathcal{U}\rangle \models \xi_i$。

既然我们已经确定了对所有 i 都有 $G\langle\mathcal{U}\rangle \models \xi_i$，就可以将真值代入布尔组合 ξ^*，从而得知 $G\langle\mathcal{U}\rangle \models \xi^*$ 是否成立。根据 (8) 和 (9)，最终便可得知 $G \models \varphi$ 是否成立。

总运行时间由 (10) 加上 k 乘以 (12) 和 (14) 的结果所界定。由于 k 和 $|\mathcal{U}|$ 都由 q 和 c 的某个函数所界定，我们可以选择 $f_{\mathrm{MC}}(q, \ell, c, \varepsilon)$，使得对于每个 $\varepsilon > 0$，总运行时间都不超过

$$f_{\mathrm{MC}}(q, \ell, c, \varepsilon) \cdot |V(G)|^{((1+\varepsilon)^d)} \cdot |V(G_0)|^{9.8}. \qquad \square$$

我们已准备好证明垫脚石定理。我们通过将 $\varepsilon > 0$ 选为博弈深度的函数来控制运行时间。

定理 5. 设 $\mathscr{C}$ 是一个单子稳定图类，并且具有对翻转封闭的稀疏弱邻点覆盖。存在一个函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得给定一个图 $G \in \mathscr{C}$ 和句子 φ，可以在时间 $f(|\varphi|) \cdot |V(G)|^{11}$.内判定 $G \models \varphi$ 是否成立

证明。令 q 为 φ 和 $\rho := (6q\sigma(2^q)+1)(2^q+1)$的量词秩。回顾一下，game-depth$(\mathscr{C}, \rho)$ 界定了翻转者策略 flip* 赢得 Flipper 博弈所需的回合数，也就是说，直到得到一个仅由单个顶点组成的图为止。对于这类图，模型检测是平凡的。因此，对于每个 $c \in \mathbb{N}$，$\mathscr{C}$都有一个高效的 $\mathrm{MC}(\mathscr{C}, q,$ game-depth$(\mathscr{C}, \rho)$ $c)$ 算法。通过反复应用定理 9，$\mathscr{C}$也有一个高效的 $\mathrm{MC}(\mathscr{C}, q, 0, |\Sigma|)$ 算法，其中 Σ 是 $\mathscr{C}$的签名。这样的 $\mathrm{MC}(\mathscr{C}, q, 0, |\Sigma|)$ 算法可以判定对于每个图 $G \in \mathscr{C}$，φ 是否成立，从而解决我们的问题。运行时间上界为

$$f_{\mathrm{MC}}(q, 0, |\Sigma|, \varepsilon) \cdot |V(G)|^{((1+\varepsilon)^{\text{game-depth}(\mathscr{C}, \rho)})} \cdot |V(G)|^{9.8}.$$

通过选择 $\varepsilon := 1.2^{1/\text{game-depth}(\mathscr{C}, \rho)} - 1 > 0$，我们得到的运行时间为

$$f_{\mathrm{MC}}(q, 0, |\Sigma|, \varepsilon) \cdot |V(G)|^{1.2} \cdot |V(G)|^{9.8} \leq f_{\mathrm{MC}}(q, 0, |\Sigma|, \varepsilon) \cdot |V(G)|^{11}.$$

由于我们对 ε 以及 f_{MC} 的所有其他参数的选择只取决于 $|\varphi|$ 和 $\mathscr{C}$，因此我们可以为每个类 $\mathscr{C}$选择一个函数 $f(|\varphi|)$，使得运行时间以 $f(|\varphi|) \cdot |V(G)|^{11}$为界。 $\square$

5.5 关于 $f(|\varphi|)$ 的可计算性说明

在前面的定理中，我们证明了运行时间上界取决于函数 $f(|\varphi|)$。显然，$f(|\varphi|)$ 是一个增长极其迅速的函数；正如 [FG04] 所示，它也必然如此。但我们要强调，$f(|\varphi|)$ 实际上甚至可能不可计算。这是因为，在单子稳定类或结构上处处稀疏类中，用于界定

可转导半图的序或浅层团子式大小的函数可能不可计算。这意味着 Flipper 博弈的深度 game-depth($\mathscr{C}$, ρ) 可能不可计算，而它又是 $f(|\varphi|)$ 的一个下界。仿照 [GKS17], ，可以定义有效处处稀疏类，要求 r-浅层团子式的大小由 r 的某个可计算函数界定。类似地，在有效单子稳定类中，最大可转导半图的序由转导的某个可计算函数界定。我们相信，若承诺所关注的图类是有效的，那么重新审视 [DGK+22a、DMST22、GMM+23] 中的所有基础证明，实际上便能得到一个可计算函数 $f(|\varphi|)$。

6 弱邻域覆盖的近似

稀疏邻域覆盖一直是设计处处稀疏图上模型检测算法的核心工具，而其计算方法与输入图的稀疏结构紧密相关。在本节中，我们发现，这种联系可以被打破；事实上，在任何存在稀疏弱邻域覆盖的图中，都可以计算出这种覆盖。虽然对于固定的扩展度 s，寻找一个度最小的 r-邻域覆盖是 NP 完全问题（通过从最小成员集合覆盖进行简单归约即可证明， $s = 1$， $r = 0$，参见 [KvRW+05]），但我们仍然可以在多项式时间内找到一个 $\mathcal{O}(\log(n)^2 + 1)$-近似解。在我们的情境中，这已经足够，因为对数因子并不重要（参见定义 4）。注意，定理 10 的运行时间与 r 和 s 无关。

定理 10. *存在一种算法，以一个 n 顶点图 G 以及数值 r、$s \in \mathbb{N}$ 作为输入，并在时间 $\mathcal{O}(n^{9.8})$ 内计算出一个度为 $\mathcal{O}(\log(n)^2+1)d^*$、扩展度为 s 的弱 r-邻域覆盖，其中 d^* 是满足 G 存在度为 d^*、扩展度为 s 的弱 r- 邻域覆盖的最小数值。*

6.1 线性规划

本节中，我们使用随机舍入来近似邻域覆盖。给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$和向量 $b \in \mathbb{R}^M$, $c \in \mathbb{R}^N$，相应的整数线性规划 ***(ILP)***要求找到一个向量 $x \in \mathbb{R}^N$，使 $c^T x$ 最大化或最小化，同时满足约束 $Ax \geq b$ 和$x \in \mathbb{Z}^N$。虽然求解整数线性规划是 NP 完全的，但可以在多项式时间内求解相应的线性规划 ***(LP)*** 松弛，它是通过移除整数性约束 $x \in \mathbb{Z}^N$ 得到的。随机舍入 [RT87] 背后的思路是将选择问题表示为整数线性规划，求解相应的线性规划松弛，然后对分数解进行舍入，从而得到原问题的近似解。近期，Dvoˇr´ak 使用该方法紧凑地表示短距离 [Dvo22]。有关这一技术的更多背景知识，可参阅 Vazirani 近似算法一书的第 14 章《应用于集合覆盖的舍入》 [Vaz10]。

这种方法的运行时间主要取决于求解一个线性规划所需的时间。虽然目前最优的运行时间界已接近矩阵乘法所需的时间 [CLS21], 为简单起见，我们采用 Vaidya 的经典算法 [Vai89]，其运行时间为 $\mathcal{O}((N+M)^{1.5}NL)$，其中 N是变量的数量， M 是约束的数量，而 L大致等于输入中的位数。 L 的精确定义有些繁琐：对于给定的线性规划，其矩阵为$A \in \mathbb{Z}^{M\times N}$，向量为 $b \in \mathbb{Z}^M$、$c \in \mathbb{Z}^N$，因子 L定义为

$$L := \log(1 + \det_{\max}) + \log(N + M),$$

其中 $\det_{\max}$ 表示任意方阵子矩阵的行列式绝对值中的最大值

$$\begin{pmatrix} c^T & 0 \\ A & b \end{pmatrix}.$$

如果 A、b、c 中的所有元素都是来自 $\{-1,0,1\}$ 的整数，则运行时间上界可以简化。令 S_n 为 $\{1,\ldots,n\}$ 上所有排列组成的集合，我们可以对上述矩阵的每个 $n\times n$ 子矩阵 A' 给出如下界

$$\det(A') := \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A'_{i,\sigma(i)} \le |S_n| \le n! \le n^n.$$

这就得到 $n \le N+M$，

$$L \le \log\bigl(1+(N+M)^{N+M}\bigr) + \log(N+M) \le \mathcal{O}\bigl((N+M)\cdot\log(N+M)\bigr) \le \mathcal{O}\bigl((N+M)^{1.1}\bigr).$$

因此，Vaidya 算法的运行时间为 $\mathcal{O}\bigl((N+M)^{2.6}\cdot N\bigr)$。

6.2 整数线性规划公式

我们认为，本节的核心贡献是针对弱 r-邻域覆盖的以下鲁棒整数线性规划公式。设 G 为一个图，$\mathcal{X}$ 为 G 的一个弱 r-邻域覆盖，其扩展度为 s。回顾一下，对于每个 $X\in\mathcal{X}$，都存在一个顶点中心$(X)\in V(G)$，满足 $X\subseteq N_s[\text{center}(X)]$。通过合并所有中心相同的簇，我们可以假设存在一个集合$S\subseteq V(G)$，使得 $\mathcal{X}=\{X_w \mid w\in S\}$。我们将 X_w 称为 周围的簇。

为了在图 G 中计算具有最小度和扩展度的弱 r-邻域覆盖，我们将 cover-ILP(G,r,s) 记为以下整数线性规划，其变量为 $d\in\mathbb{Z}$，二元变量为 p_{vw}、$q_{uw}\in\{0,1\}$，其中 $u,v,w\in V(G)$ 具有如下直观含义。我们希望当 $N_r[v]$ 属于以 w 为中心的簇时，$p_{vw}\ge 1$ 成立，也就是说，$N_r[v]\subseteq X_w$；并且当 u 属于以 w 为中心的簇时，$q_{uw}\ge 1$ 成立，也就是说，$u\in X_w$。这一思路导出了以下整数线性规划。

最小化 d，满足

$$\forall v\in V(G) \qquad \sum_{w:N_r[v]\subseteq N_s[w]} p_{vw} \ge 1 \tag{1}$$

$$\forall u\in V(G) \qquad \sum_{w} q_{uw} \le d \tag{2}$$

$$\forall v,w\in V(G)\ \forall u\in N_r[v] \qquad q_{uw}\ge p_{vw} \tag{3}$$

$$\forall w\in V(G)\ \forall u\notin N_s[w] \qquad q_{uw}=0 \tag{4}$$

方程 (1) 强制要求对所有 v，邻域 $N_r[v]$ 都包含在以某个邻近顶点 w 为中心的簇中。类似地，(2) 强制要求每个 v 至多包含在以某个顶点 w 为中心的 d 个簇中。关键的方程 (3) 通过如下陈述关联变量 q_{uw} 和 p_{vw}：如果以 w 为中心的簇包含 $N_r[v]$，那么对于所有 $u\in N_r[v]$，该簇也包含 u。

方程 (4) 确保所得覆盖的扩展度不超过 s。不过，这些方程并非必需，仅为便于说明而列出：由于 $N_r[v]\not\subseteq N_s[w]$，不存在满足 $u\in N_r[v]$ 且 $u\notin N_s[w]$ 的 p_{vw} 会受 (1) 中某个方程约束。因此，我们可以令 $p_{vw}=0$，从而也令 $q_{uw}=0$，而不会违反任何约束或增加成本。

引理 12。 如果图 G 有一个弱 r-邻域覆盖，其度为 d 、扩展度为 s，那么覆盖整数线性规划(G, r, s) 存在一个值至多为 d 的解。

证明。 假设 G 有一个弱 r-邻域覆盖 $\mathcal{X}$，其度为 d，扩展度为 s。如上所述，我们可以假设存在一个集合 $S \subseteq V(G)$，使得 $\mathcal{X} = \{X_w \mid w \in S\}$ with$X_w \subseteq N_s[w]$。令 $p_{vw} = 1 \iff N_r[v] \subseteq X_w$ 和 $q_{uw} = 1 \iff u \in X_w$。如果 $N_r[v] \subseteq X_w$，那么$N_r[v] \subseteq N_s[w]$，因此满足 (1)。 $\mathcal{X}$ 的度上界 d 意味着满足 (2)。由于 $\mathcal{X}$ 的扩展度为 s，如果 $u \notin N_s[w]$，则有 $u \notin X_w$，进而有 $q_{uw} = 0$，满足 (4)。最后，(3) 只表示，对于所有 v，$w \in V(G)$，以及满足 $N_r[v] \subseteq X_w$的 $u \in N_r[v]$，都有 $u \in X_w$。因此，(3) 也成立。由此可知，该整数线性规划存在一个值至多为 d的解。 □

整数线性规划的线性规划松弛 可通过移除所有整数性约束得到。对于上述整数线性规划，这意味着允许 $d \in \mathbb{R}$ 和 $0 \le p_{vw}$，$q_{uw} \le 1$，而不仅仅是 $p_{vw}, q_{uw} \in \{0, 1\}$，对所有 u，v，$w \in V(G)$ 都成立。表示该线性规划的矩阵 A和向量 b，c仅包含来自$\{-1, 0, 1\}$的元素。如上所述，可以使用 Vaidya 算法 [Vai89]在 $\mathcal{O}((N + M)^{2.6}N)$ 时间内求解此类线性规划。这里，$N \in \mathcal{O}(|V(G)|^2)$ 且 $M \in \mathcal{O}(|V(G)|^3)$，由此证明了以下引理。

引理 13. 可以在 $\mathcal{O}(|V(G)|^{9.8}$ 时间内求解覆盖整数线性规划(G, r, s) 的线性规划松弛 $)$.

6.3 分数弱邻域覆盖

由于线性规划松弛的限制比原整数线性规划少，并根据引理 12，引理 13 给出的解至少与满足以下条件的最小 d 同样好： G 具有度为 d 、扩展度为 s的弱 r-邻域覆盖。接下来，我们将线性规划松弛的解转换为一种所谓的分数弱 r-邻域覆盖，定义如下。

定义 5。 图 G 的分数弱 r-邻域覆盖 （度为 d，扩展度为 s ）是由 V（G）的子集 $\mathcal{X}$构成的一个族，这些子集称为簇，并配有一个函数 $f\colon \mathcal{X} \to [0, 1]$ （可将其视为概率赋值），满足

- 每个簇都是 G中某个 s-邻域的子集，
- 对于每个顶点 v，所有完全包含 v 周围 r-邻域的簇的概率之和至少为 1，也就是说，

$$\sum_{X \in \mathcal{X} : N_r[v] \subseteq X} f(X) \ge 1,$$

- 对于每个顶点，包含该顶点的簇的概率之和至多为 d，也就是说，

$$\sum_{X \in \mathcal{X} : v \in X} f(X) \le d.$$

注意，任何整数概率为 $f\colon \mathcal{X} \to \{0, 1\}$ 的分数弱 r-邻域覆盖，也是一个弱 r-邻域覆盖。

引理 14. 对于度为 d 的 覆盖整数线性规划(G, r, s) 的线性规划松弛，其任意一个解都可以在 $\mathcal{O}(|V(G)|^2)$ 时间内转换为一个度为 $d + 1$ 、扩展度为 s 的分数弱 r- 邻域覆盖。

证明。设线性规划松弛的解为 $0 \le p_{vw}, q_{uw} \le 1$，其中 $u, v, w \in V(G)$，且令$|V(G)| = n$。我们将 $P_{vw}, Q_{uw} \in [n]$ 定义为 $P_{vw} := \lceil n \cdot p_{vw} \rceil$ 和 $Q_{uw} := \lceil n \cdot q_{uw} \rceil$。于是

$$\forall v \in V(G) \qquad \sum_{w : N_r[v] \subseteq N_s[w]} P_{vw} \ge n \tag{1}$$

$$\forall u \in V(G) \qquad \sum_{w} Q_{uw} \le \sum_{w} (1 + n \cdot q_{vw}) \le (d+1) \cdot n \tag{2}$$

$$\forall v, w \in V(G)\ \forall u \in N_r[v] \qquad Q_{uw} \ge P_{vw} \tag{3}$$

$$\forall w \in V(G)\ \forall u \notin N_s[w] \qquad Q_{uw} = 0 \tag{4}$$

我们通过为每个 $w \in V(G)$ 和 $i \in [n]$ 创建一个簇$X^i_w := \{u \in V(G) \mid Q_{uw} \ge i\}$，并以概率 $f(X^i_w) = 1/n$执行此操作，从而构造所需的分数覆盖 $\mathcal{X}$。根据 (4)，$\mathcal{X}$的扩展度显然有上界 s。对于每个顶点 u，注意到 $\{X \in \mathcal{X} \colon u \in X\} = \{X^i_w \colon w \in V(G) \wedge Q_{uw} \ge i\}$，因此

$$|\{X \in \mathcal{X} : u \in X\}| = \sum_{w} Q_{uw} \tag{5}$$

因此，$\mathcal{X}$ 中 u 的度有上界

$$\sum_{X \in \mathcal{X} : u \in X} f(X) = \sum_{X \in \mathcal{X} : u \in X} 1/n \overset{\text{by (5)}}{=} \sum_{w} Q_{uw}/n \overset{\text{by (2)}}{\le} (d+1).$$

设 $i \le P_{vw}$。那么由 (3) 可知，对所有 $u \in N_r[v]$，都有 $i \le Q_{uw}$，因此 $u \in X^i_w$。所以，对所有 $1 \le i \le P_{vw}$，都有 $N_r[v] \subseteq X^i_w$。因此

$$\sum_{X \in \mathcal{X} : N_r[v] \subseteq X} f(X) = \sum_{X \in \mathcal{X} : N_r[v] \subseteq X} 1/n \ge \sum_{w \in N_s[v]} P_{vw}/n \overset{\text{by (1)}}{\ge} 1. \qquad \square$$

6.4 随机采样

前面的引理共同使我们能够计算出 G的一个良好的分数弱 r-邻域覆盖 $(\mathcal{X}, f)$。只需以概率 $24 \ln(|V(G)|) f(X)$ 从 $\mathcal{X}$中采样簇 X，引理 15 即证明存在一个（非分数）弱 r-邻域覆盖，其度至多是最优值的 $36 \ln(|V(G)|)$ 倍。该论证很容易转化为一个成功概率很高的随机化算法。不过，我们最终希望得到一个完全确定性算法。可以使用条件概率法和适当的悲观估计量对该算法去随机化，但这一过程的细节稍显繁琐。我们改为利用纯存在性引理 15，将弱 r-邻域覆盖的搜索空间从 G 中所有 s-邻域子集构成的指数级集合，缩减为来自 $\mathcal{X}$的至多 $\mathcal{O}(|V(G)|^2)$ 个簇。缩减搜索空间后，我们将通过简单地归约到一种称为 最小成员集合覆盖的集合覆盖变体，来计算最终的弱 r-邻域覆盖；该变体可以得到高效近似。

引理 15。设一个具有 $n \ge 5$ 个顶点的图 G 有一个分数型弱 r-邻域覆盖（$\mathcal{X}$、f），其度为 d，扩展度为 s。则 G 有一个弱 r-邻域覆盖 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$，其度为$36\ln(n)d$，扩展度为 s。

证明。我们使用概率方法。从 $\mathcal{X}$ 中抽取一个簇的多重集 $\mathcal{Y}$：独立地对每个 $X \in \mathcal{X}$ 抽取 $24\ln(n)$ 次，每次抽取的概率为 $f(X)$。注意，$\mathcal{Y}$ 是一个多重集，因为它可以包含来自 $\mathcal{X}$ 的每个覆盖的多个副本（最多 $24\ln(n)$ 个）。对于每个顶点 v，令 A_v 表示 $\mathcal{Y}$ 中完全包含 v 周围的 r-邻域的簇的数量。根据期望的线性性，

$$E[A_v] = 24\ln(n) \cdot \sum_{X \in \mathcal{X}: N_r[v] \subseteq X} f(X) \geq 24\ln(n).$$

类似地，令 B_v 表示 $\mathcal{Y}$ 中包含 v 的簇的数量。我们按照上述方法论证 th at

$$E[A_v] \leq E[B_v] = 24\ln(n) \cdot \sum_{X \in \mathcal{X}: v \in X} f(X) \leq 24\ln(n)d.$$

由于 A_v 是独立的二元变量之和，根据切尔诺夫界[4] 可得

$$P(|A_v - E[A_v]| \geq E[A_v]/2) \leq 2e^{-E[A_v]/12} \leq 2e^{-24\ln(n)/12} = 2(e^{\ln(n)})^{-2} = 2/n^2.$$

利用 $E[B_v] \geq E[A_v]$，我们有

$$P(|B_v - E[B_v]| \geq E[B_v]/2) \leq 2e^{-E[B_v]/12} \leq 2e^{-E[A_v]/12} \leq 2/n^2.$$

根据并集界，对于某个 v 而言，$|A_v - E[A_v]| \geq E[A_v]/2$ 或 $|B_v - E[B_v]| \geq E[B_v]/2$ 发生的概率（其中 $n \geq 5$）至多为 $\sum_{v \in V(G)} (2/n^2 + 2/n^2) = 4/n < 1$。因此，存在 $\mathcal{Y}$，使得对于所有 $v \in V(G)$，都有 $|A_v - E[A_v]| \leq E[A_v]/2$ 和 $|B_v - E[B_v]| \leq E[B_v]/2$。这意味着对于所有 $v \in V(G)$，$A_v \geq \frac{1}{2}E[A_v] \geq 12\ln(n) \geq 1$ 且 $B_v \leq \frac{3}{2}E[B_v] \leq 36\ln(n)d$，从而证明了该命题。 □

6.5 最小成员覆盖约简

我们已经计算出一个良好的分数弱 r-邻域覆盖 $(\mathcal{X}, f)$，并且知道可以将一个足够好的（非分数）弱 r-邻域覆盖选为 $\mathcal{X}$ 的子集。因此，要找到我们的解，只需从 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ 中选取一个子集来覆盖 G 的所有 r-邻域，使每个顶点所属集合的最大数量尽可能小。

正如我们很快将会看到的，剩下的难点可归结为以下最小成员集合覆盖（MMSC）问题。令 V 为我们的论域，$\mathcal{X}$ 为 V 的一个子集族，且 $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X = V$。MMSC 问题要求找到一个子集 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$，覆盖 V 中的所有元素，并使顶点被覆盖的最大次数 $(V, \mathcal{Y}) := \max_{v \in V} |\{X \in \mathcal{Y} \mid v \in X\}|$ 最小。尽管该问题是 NP-困难的，但可以在对数因子范围内近似求解。

引理 16（[KvRW+05]定理 3）。对于任意 *MMSC* 实例 $(V, \mathcal{X})$，可以在 $\mathcal{O}((|V| + |\mathcal{X}|)^{2.6}|\mathcal{X}|)$ 的时间内计算出一个集合 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$，使得

$$M(V, \mathcal{Y}) \leq (1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{z}))(\log(|V|) + 1)z,$$

其中

$$z = \min\{M(V, \mathcal{Y}^*) \mid \mathcal{Y}^* \subseteq \mathcal{X} \text{ covers } V\}.$$

[4]对于 $\mu = E(X)$，切尔诺夫界表明 $P(|X - \mu| \geq \delta\mu) \leq 2e^{-\delta^2\mu/3}$。

证明。 在 [KvRW+05] 中，作者仅声称存在一个“确定性多项式时间”算法，却没有界定该多项式的次数。我们通过逐一检查算法的各个步骤并界定运行时间，补全证明。假设输入由 $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$ 和 $\mathcal{X} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ 组成。在 [KvRW+05 的第 5 节中，作者构造了一个等价的整数线性规划，其中包含 $m+1$ 个变量和 $2n$ 个约束，其矩阵表示仅含来自 $\{-1, 0, 1\}$ 的项。如第 6.1 节所述，相应的线性规划松弛可在时间 $\mathcal{O}((n+m)^{2.6}m)$ [Vai89] 内求解。由此可为每个集合 S_i 赋予一个分数值 $0 \le x'_i \le 1$。随后， [KvRW+05 的第 5 节定义了数值 α 和 β，并为每个集合 S_i 赋予概率 $p_i := \min(1, \alpha x'_i)$。接着，论文定义了一个悲观估计量

$$P(p_1, \ldots, p_m) := 2 - \prod_{i=1}^{n}(1 - A_i) - \prod_{i=1}^{n}(1 - B_i)$$

其中

$$A_i := \prod_{S_j \ni u_i}(1 - p_j) \quad \text{and} \quad B_i := \prod_{S_j \ni u_i}(1 + (\beta - 1)p_j).$$

最终的去随机化过程见 [KvRW+05 第 5.3] 节。该过程遍历 $1 \le i \le m$，并将 p_i 舍入为 0 或 1，使得 $P(p_1、\ldots\ldots、p_m)$ 最大。计算 A_i 和 B_i 需要时间 $\mathcal{O}(m)$，因此每次计算 $P(p_1、\ldots\ldots、p_m)$ 需要时间 $\mathcal{O}(nm)$。由于我们遍历 $1 \le i \le m$，该步骤的总运行时间为 $\mathcal{O}(nm^2)$。总而言之，我们得到的运行时间为 $\mathcal{O}((n+m)^{2.6}m)$。 □

注意，也可以直接应用 [KvRW+05] 的上述悲观估计量，对引理 15 进行去随机化。相反，我们通过简单地归约到 MMSC 来证明定理 10。

定理 *10* 的证明。 不失一般性，假设 $n \ge 5$。根据引理 12 和引理 13，我们可以在时间 $\mathcal{O}(n^{9.8})$ 内计算出 cover-ILP(G, r, s) 的线性规划松弛的一个解，其值至多为 d^*。接下来，引理 14 在时间 $\mathcal{O}(n^2)$ 内将该解转换为一个分数 r-邻域覆盖 $(\mathcal{X}, f)$，其度至多为 $d^* + 1$，扩展度为 s。根据引理 15， G 具有一个弱 r-邻域覆盖 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$，其度至多为 $36 \ln(n)(d^* + 1)$，扩展度为 s。我们将把求得该覆盖的良好近似归约为求得一个 MMSC 解的近似。

我们构造一个 MMSC 实例 $(V', \mathcal{X}')$，其中论域 $V' = V(G) \times \{0, 1\}$ 对于每个顶点 $v \in V(G)$ 都包含两个副本 $(v, 1)$ 和 $(v, 2)$，而集合系统 $\mathcal{X}'$ 对于每个簇 $X \in \mathcal{X}$ 包含一个集合

$$X' = \{(v, 1) \mid v \in V(G), N_r[v] \subseteq X\} \cup \{(v, 2) \mid v \in X\}.$$

命题 3。 对于每个 $z \in \mathbb{N}$， $\mathcal{Y}' = \{X'_1, \ldots, X'_\ell\} \subseteq \mathcal{X}'$ 是 *MMSC* 实例 $(V', \mathcal{X}')$ 的一个解，当且仅当 $\mathcal{Y} = \{X_1, \ldots, X_\ell\} \subseteq \mathcal{X}$ 是一个具有度 z 和扩展度 s 的弱 r-邻域覆盖。

证明。 假设 $\mathcal{Y}'$ 是一个 MMSC 解。对于每个顶点 $v \in V(G)$，我们有 $(v,1) \in X' \in \mathcal{Y}'$。根据构造，我们还有 $N_r[v] \subseteq X \in \mathcal{X}$。此外，对于每个 $v \in V(G)$，$(v, 2)$ 至多包含在 $\mathcal{Y}'$ 的 z 个集合中。因此， v 至多包含在 $\mathcal{Y}$ 的 z 个簇中。由于 $\mathcal{X}$ 的扩展度为 s， $\mathcal{Y}$ 也同样如此。由此可得， $\mathcal{X}$ 是一个度为 z、扩展度为 s 的弱 r-邻域覆盖。

假设 $\mathcal{Y}$ 是一个度为 z 、扩展度为 s 的弱 r-邻域覆盖。每个 $v \in V(G)$ 至多出现在 $\mathcal{Y}$ 中的 z 个簇中。因此，$(v,2)$ 至多出现在 $\mathcal{Y}'$ 中的 z 个集合中。由于对于每个 $X' \in \mathcal{X}'$，$(v,1) \in X'$ 蕴含 $(v,2) \in X'$，$(v,1)$ 也同样如此。对于每个 $v \in V(G)$，其 r-邻域均被某个簇 $X \in \mathcal{Y}$ 覆盖。因此，我们有 $(v,1) \in X' \in \mathcal{Y}'$，并且还有 $(v,2) \in X'$。由此可得，$\mathcal{Y}'$ 是一个 MMSC 解。■

建立上述归约后，我们在实例（V'，$\mathcal{X}'$）上运行引理 16，耗时 $\mathcal{O}((|V'|+|\mathcal{X}'|)^{2.6}|\mathcal{X}'|)$，并将输出转换为弱 r-邻域覆盖 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$，其扩展度为 s，度至多为 $(1+\mathcal{O}(1/\sqrt{z}))(\log(|V'|)+1)z$，其中 $z = 36\ln(n)(d^*+1)$。度的上界为 $\mathcal{O}(\log(n)^2+1)d^*$。由于 $|V'|=n$ 且 $|\mathcal{X}'|=\mathcal{O}(n^2)$，引理 16 的运行时间为 $\mathcal{O}(n^{7.2})$，这超过了在两个问题之间转换实例和解所需的时间。

□

7 结构稀疏类中的弱邻域覆盖

本节证明，结构上处处稀疏图类具有对翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖。

定理 11. 设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏图类。对于任意 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $c(r,\varepsilon)$，使得对于任意 $G \in \mathscr{C}$，都存在一个弱 r-邻域覆盖，其度至多为 $c(r,\varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}$，且扩展度至多为 $34r$。特别地，$\mathscr{C}$ 具有翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖。

建立主定理的关键在于通过局部收缩对输入图进行稀疏化。为了衡量稀疏性，我们将使用弱着色数 $\mathrm{wcol}_r(G)$；该概念由 Kierstead 和 Yang [KY03] 引入。我们将在下文正式定义这些数值。弱着色数对我们的研究非常有用，因为弱着色数有界的图具有性质良好的邻域覆盖。

引理 17 ([GKS17，引理 6。10])。设 $r \in \mathbb{N}$。每个图 G 都有一个 r-邻域覆盖，其扩展度至多为 $2r$，度至多为 $\mathrm{wcol}_{2r}(G)$。

证明定理 11 的关键如下。

定理 12. 设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏图类。对于每个 $G \in \mathscr{C}$，都存在一个 *8*-收缩 $\mathrm{contract}(G)$，它是 G 的收缩，并在以下意义下稀疏：对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $r \in \mathbb{N}$，都存在 $c(r,\varepsilon)$，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$

$$\mathrm{wcol}_r(\mathrm{contract}(G)) \le c(r,\varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}.$$

我们将首先定义局部收缩，并证明可以将稀疏邻域覆盖从缩约图提升到原图。然后，结合引理 17 和定理 12，我们便可得出定理 11。

7.1 局部收缩与弱邻域覆盖

以下局部收缩的定义是我们方法的关键。

定义 6 (缩约)。设 G 为一个图，且 $A \subseteq V(G)$ 和 $A = V(G) \setminus A$。收缩 $G[\![A]\!]$ 定义为将 A 收缩为一个新顶点 v_A 后得到的图，该新顶点与每个满足 $N[w] \cap A \neq \varnothing$ 的 $w \in A$ 相连。对于互不相交的子集 $A_1, \ldots, A_l \subseteq V(G)$，若每个 A_i 都包含在 G 的一个 k- 邻域中，则称 $G[\![A_1]\!]\ldots[\![A_l]\!]$ 为 G 的 k- 收缩。

注意， k-收缩不一定是深度-k minor，因为集合 A_i 的半径可能很大，甚至可能不连通（尽管它们可嵌入低半径子图中）。特别是，处处稠密类中的图的 k-收缩可能无法保持处处稠密性。不过，我们注意到， k-收缩的 G 的覆盖可以提升为 G的覆盖。

引理 18. 设 G' 是图 G的一个 k-收缩。若 G'存在扩展度为 s 且度为 d 的弱 r-邻域覆盖，则 G存在扩展度至多为$(2k+1)\cdot s$ 且度为 d 的弱 r-邻域覆盖。

证明。 设 $\mathcal{A}$ 是 G的顶点集的划分，其中每个集合 $A \in \mathcal{A}$ 都完全包含在 G 的一个 k-邻域内，而 G' 由 G 通过收缩 $\mathcal{A}$的各部分得到，也就是说，若且唯若存在 $v_1 \in A_1$ 和 $v_2 \in A_2$ 使得 $\{v_1, v_2\} \in E(G)$，就有 $V(G') = \mathcal{A}$ 和 $\{A_1, A_2\} \in E(G')$。

设 $\mathcal{X}'$ 是 G'的一个扩展度为 s 的弱邻域覆盖。对于顶点 $v \in V(G)$，用$\mathcal{A}(v)$表示包含 v的集合 $A \in \mathcal{A}$ 。我们按如下方式为 G 构造邻域覆盖 $\mathcal{X}$。对于每个簇 $X' \in \mathcal{X}'$，定义簇 $X = \bigcup_{A \in X'} \{v : \mathcal{A}(v) = A\}$，并令 $\mathcal{X} = \{X : X' \in \mathcal{X}'\}$。

我们证明， $\mathcal{X}$是 G 的弱 r邻域覆盖，其扩展度至多为$(2k+1)\cdot s$ ，且度与 $\mathcal{X}'$相同。

覆盖邻域。我们首先证明，对每个顶点 $w \in V(G)$，都存在一个包含 $N_r^G[w]$的簇 $X \in \mathcal{X}$。令簇 $X' = \text{cluster}'(\mathcal{A}(w)) \in \mathcal{X}'$为包含 $N_r^{G'}[\mathcal{A}(w)]$的簇，并令 X为生成 X' 的簇。设 z 是一个与 w的距离至多为 r 的顶点，这可由 G中连接 w和 z、长度至多为 r的路径 P证明。令 $P' = \{\mathcal{A}(x) : x \in V(P)\}$。由于 P 是长度至多为 r的路径， G' 中由 P' 诱导的子图是连通的，且在 G'中的直径至多为 r 。由此可知， $\mathcal{A}(z)$在 G' 中与 $\mathcal{A}(w)$的距离至多为 r ，因此包含在 X'中。根据构造， z 包含在 X中。因此， X 覆盖 $N_r^G[w]$。

扩展度界。现在我们来证明，每个簇 $X \in \mathcal{X}$ 都是 G 中某个 $((2k+1)\cdot s)$-邻域的子集。令 $A_1 =$ 为 $'(X')$ 的中心，其中 X' 是生成 X 的簇。任取一个顶点 $v \in A_1$，并令 $w \in X$。我们证明，在 G 中， w 到 v 的距离至多为 $(2k+1)\cdot s$。根据构造，我们有 $\mathcal{A}(w) \in X'$。由于 $\mathcal{X}'$ 的扩展度为 s，可知在 G' 中， A_1 和 $\mathcal{A}(w)$ 的距离至多为 s，其见证路径为 $P = (A_1 = \mathcal{A}(v)\ A_2, A_3, \ldots, A_i = \mathcal{A}(w))$，长度为 $i \le s$。由于 A_j、 $1 \le j \le i$ 中任意两个顶点在 G 中的距离至多为 $2k$ ，并且存在 $v_j \in A_j$ 和 $v_{j+1} \in A_{j+1}$ 满足 $\{v_j, v_{j+1}\} \in E(G)$ 、 $1 \le j < i$，因此我们得出，在 G 中， v 和 w 的距离至多为 $(2k+1)\cdot i$ 。

度数界。顶点 $v \in V(G)$ 恰好属于那些簇 X ，其中 $\mathcal{A}(v)$ 属于 X'。由于 $\mathcal{A}(v)$ 至多出现在 $\mathcal{X}'$ 的 d 个簇中， v 至多出现在 $\mathcal{X}$ 的 d 个簇中。

□

7.2 结构稀疏图背景

证明定理 12 的关键在于基于准灌木 [DGK+22a] 对结构上处处稀疏图类进行结构刻画。下面回顾有关处处稀疏图类和结构上处处稀疏图类的必要背景。

7.2.1 广义着色数与稀疏性度量

如果存在一组两两不相交的顶点子集$\{V_u \subseteq V(G)\}_{u\in V(H)}$，且每个子集的半径至多为 r，使得若 $\{u,v\} \in V(H)$，则 V_u 中存在一个顶点与 V_v 中的一个顶点相连，那么图 H 就是图 G 的 r-浅层 *minor*。如果存在一组顶点 $\{p(u)\}_{u\in V(H)}$ 以及一组 $\{P(u,v)\}_{\{u,v\}\in E(H)}$ 内部顶点不相交的路径，且每条路径的长度至多为 $2r+1$，那么图 H 就是一个 r-浅拓扑子式，其中 $P(u,v)$ 的端点为 $p(u)$ 和 $p(v)$。

在下文中，分别表示在 G 中所有 r-浅层 minor 和 r-浅拓扑子式中，边数与顶点数之比的最大值。

我们将使用弱着色数，该概念由 Kierstead 和 Yang [KY03] 引入。固定一个图 G 以及顶点集 G 上的一个序 $\prec$。如果存在一条长度至多为 r 的路径连接顶点 v 和 u，且 u 是该路径上最小的顶点（相对于 $\prec$），则称顶点 u 从顶点 v 弱r可达。从 v 弱 r-可达的所有顶点组成的集合记为 $\mathrm{WReach}_r[G,\prec,v]$。令

$$\mathrm{wcol}_r(G,\prec) = \max_{v\in V(G)} |\mathrm{WReach}_r[G,\prec,v]|,$$

并定义 G 的弱 r-着色数为

$$\mathrm{wcol}_r(G) = \min_{\text{order } \prec \text{ on } V(G)} \mathrm{wcol}_r(G,\prec).$$

根据引理 17，每个图 G 都有一个 r-邻域覆盖，其扩展度至多为 $2r$，且度至多为 $\mathrm{wcol}_{2r}(G)$。

此外，$\mathrm{adm}_r(G)$ 表示 G 的 r-可容许度，这是一种稀疏性度量，我们只将其作为辅助概念，用来界定其他稀疏性度量，其精确定义与此无关。这些度量之间的关系在 Marcin 和 Michał Pilipczuk [PPS20] 的《稀疏性讲义》第一章和第二章中有很好的汇总。

命题 1。对于每个 $r\in\mathbb{N}$ 和图 G，都有

$$\mathrm{wcol}_r(G) \le 1 + r(\mathrm{adm}_r(G)-1)^{r^2} \qquad \text{[PPS20, Corollary 2.7]} \qquad (15)$$

$$\mathrm{adm}_r(G) \le 1 + 6r\big(\lceil \tilde{\nabla}_{r-1}(G)\rceil\big)^3 \qquad \text{[PPS20, Lemma 3.2]} \qquad (16)$$

$$\tilde{\nabla}_r(G) \le \nabla_r(G) \qquad \text{by definition} \qquad (17)$$

$$\nabla_r(G) \le \mathrm{wcol}_{4r+1}(G) \qquad \text{[PPS20, Lemma 3.1]} \qquad (18)$$

注意，根据命题 1，$\mathrm{wcol}_r(G)$、$\nabla_r(G)$ 和 $\tilde{\nabla}_r(G)$ 的值是多项式相关的（多项式的次数取决于 r）。因此，我们可以常规地使用一种概念来界定另一种概念。下面这个关于平均度和最小度的关系也很有用。

引理 19（民间结果，参见例如 [NDM12]中的 (3.4)）。每个平均度至少为 d 的图都包含一个最小度至少为 $\frac{d}{2}$ 的子图。

7.2.2 结构上处处稀疏图类

处处稀疏图类可以用弱 r着色数来定义。

定义 7（处处稀疏）。若对每个 $r\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon>0$，都存在 $c(r,\varepsilon)$，使得对于来自 $\mathscr{C}$的图的每个子图 G，均满足 $\mathrm{wcol}_r(G) \le c(r,\varepsilon)\cdot|G|^{\varepsilon}$，则图类 $\mathscr{C}$ 是处处稀疏的。

结构上处处稀疏图类在 [GKN+20] 中被定义为处处稀疏类的一阶转导。我们不会依赖这个定义，而是采用一项分解性结果，该结果涉及所谓的几乎处处稀疏的准丛 [DGK+22a]，我们将在下文介绍。

7.2.3 几乎处处稀疏图类

弱 r-着色数不仅可以用来定义处处稀疏图类，也可以用来定义稍微更一般的几乎处处稀疏图类这一概念 [DGK+22a]。

定义 8 （几乎处处稀疏）。若对任意 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $c(r, \varepsilon)$，使得每个 $G \in \mathscr{C}$ 都满足 $\mathrm{wcol}_r(G) \leq c(r, \varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}$，则图类 $\mathscr{C}$ 称为几乎处处稀疏。

注意，一个遗传图类几乎处处稀疏，当且仅当它处处稀疏。然而，几乎处处稀疏类中的图可以包含稠密子图，例如大小为 $\log(n)$ 的团，只要这些团是足够大的稀疏图的子图。根据前面的引理 17，几乎处处稀疏类具有稀疏邻域覆盖。

7.2.4 准灌木

遵循 [Dre21], 的局部分隔器方法， [DGK+22a] 引入了准灌木，以推导结构上处处稀疏图类的结构性质，例如低灌木深度覆盖。设 T 为一棵有根树。对于节点 v、$w \in V(T)$，若 v 位于从 w 到根节点的唯一路径上，我们就称 v 在 w 上方。若 w 在 v 上方，则称节点 v 在 w 下方。注意，每个节点都在其自身上方和下方。对于有根树 T 及树中的节点 w， w 的祖先和后代分别是 w 在 T 中上方和下方的所有节点（包括 w）。需要强调的是，每个节点都是自身的祖先和后代。若 v 是 w 的祖先，我们记作 $v \leq_T w$；若此外 $v \neq w$，则记作 $v <_T w$，此时称 v 是 w 的严格祖先。因此，根节点是 T 中最小的节点，而叶节点是相对于树序 $\leq_T$ 而言 T 中最大的节点。我们以预期的方式类似地定义 $\geq_T$ 和 $>_T$。对于顶点 $w \in V(T)$，令 $T(w)$ 表示 T 中以 w 为根、包含 w 的所有后代的子树；令 $L(w)$ 表示 T 中作为 w 后代的叶节点集合。

定义 9。准灌木由以下部分组成：

- 一棵有根树 T，表示为一张有向图，其中所有边都从根节点向外定向，
- 一个有向弧 D 集合（称为指针），从 T 的叶节点指向 T 的节点（我们要求每个叶节点都指向 T 的根节点）[5]，
- 一个标记函数 $\lambda\colon D \to \{0,1\}$。

准灌木 B 定义了一张有向图 $G(B)$，其顶点是 T 的叶节点，弧集定义如下：设 u、v 是两个不同的叶节点，并设 w 是 v 的最低（相对于 $\leq_T$ 而言最大的）祖先，使得 $(u,w) \in D$。当且仅当 $\lambda((u,w)) = 1$ 时，(u,v) 是 $G(B)$ 中的一条弧。在这种情况下，w 称为 (u,v) 的连接点。注意，一条弧 (u,v) 的连接点是唯一确定的。等价地，如果从 u 到 v 的 B 中的最短有向路径以指针 $(u,w) \in D$ 作为第一条弧，并且其余所有弧均来自 T，则当且仅当该路径上的指针 (u,w) 被标记为 1 时，(u,v) 是 $G(B)$ 中的一条弧。我们将这条最短路径称为 u 在 B 中的隧道。准灌木的深度是树 T 的深度。

我们称 u 指向 v，如果 $(u,v) \in D$。如果 $\lambda((u,v)) = 1$，我们称该指针为正。在本研究中，$G(B)$ 始终被视为有向图。我们只编码无向图，因此，$G(B)$ 将是对称有向图，也就是说，当且仅当它包含弧 (v,u) 时，它才包含弧 (u,v)。随后我们将利用这样一个事实：每条弧 (u,v) 都是冗余编码的：既通过 u 的一个祖先编码，也通过 v 的一个祖先编码。

[5] 在 [DGK+22a] 中，指针只能指向 T 的内部节点。对我们来说，采用稍微宽泛一些的定义，并允许指针指向 T 的所有顶点，会更方便。

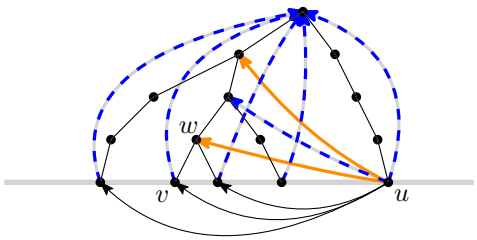


图4：一个准灌木（灰线以上）及其所描述的图（灰线以下）。蓝色虚线弧表示标记为 0 的指针，橙色弧表示标记为 1 的指针。节点 w 是 $(u,\ v)$ 的连接点。

准灌木的盖夫曼图是一个（无向）图，其边集由树边和指针构成。我们通过准灌木的盖夫曼图，将所有图论概念推广到准灌木。例如，准灌木 B 的广义着色数 $\mathrm{wcol}_r(B)$ 指的是 $\mathrm{wcol}_r(H)$，其中 H 是 G 的盖夫曼图。因此，我们可以讨论准灌木的几乎处处稀疏类。

7.3 Qu结构上处处稀疏类的准灌木分解

[DGK+22a] 的核心观察表明，结构上处处稀疏类可以用有界深度的几乎处处稀疏准灌木来描述。

定理13 ([DGK+22a，定理 3])**.** 设 $\mathscr{D}$ 是一个结构上处处稀疏图类。那么对于每个 $G \in \mathscr{D}$，都存在一个表示 G 的准灌木 B_G，使得准灌木类 $\{B_G\colon\ G \in \mathscr{D}\}$ 具有有界深度且几乎处处稀疏。

由于 $\{B_G\colon\ G \in \mathscr{D}\}$ 几乎处处稀疏，根据定义，对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $c(r,\ \varepsilon)$，使得对所有 $G \in \mathscr{D}$，都存在一个序 $\prec$，满足 $\mathrm{wcol}_r(G,\ \prec) \leq c(r,\ \varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}$。就我们的目的而言，我们还需要 $\prec$ 可以独立于 r 和 ε 选取，并且遵循树序；这意味着，对于所有满足 $u \leq_T v$ 的 $u,\ v \in V(T)$，都有 $u \preceq v$。

定义10。设 $B = (T,\ D,\ \lambda)$ 是一个准灌木。若 $\prec$ 是 $V(T)$ 上的一个尊重祖先关系的序，则称其为尊重祖先关系的；也就是说，对于所有满足 $u \leq_T v$ 的节点 $u,\ v \in V(T)$，都有 $u \preceq v$。

为了说明我们可以作出这一假设，我们分析了引入拟灌木的论文完整版 [DGK+22b]中的证明。该论文在定义29中定义了 r-分隔拟灌木的概念。给定一个图 $G \in \mathscr{D}$，它是通过半径为 r的Gaifman转导，由处处稀疏类 $\mathscr{C}$ 中的图 H 导出的，论文随后在 Proof of Theorem 28 using Theorem 30中证明，如何通过 H 的 r-分隔拟灌木，导出 G 的一个拟灌木（如上文所定义），并且二者具有相同的底层树和指针集。给定一个序 $\prec$，定义37给出了 H的一个 r-分隔拟灌木的显式构造，记作$B_r^{\mathrm{sep}}(H, \prec)$。引理39随后选取序 $\prec$，使得 $\{B_r^{\mathrm{sep}}(H, \prec) \mid H \in \mathscr{C}\}$ 几乎处处稀疏。 $B_r^{\mathrm{sep}}(H, \prec)$的（内部）节点是 $V(H)$的子集，并满足以下性质：对于所有节点 X、Y，若 X 是 Y 的祖先，则有 $X \subseteq Y$。引理39首先在 H 上选取一个良好的弱可达序 $\prec$，并将其扩展到$B_r^{\mathrm{sep}}(H, \prec)$的内部节点，使得对于任意两个内部节点 X、$Y \subseteq V(H)$，$X \prec Y$ 当且仅当 X 的最大值小于 Y 的最大值（相对于 $\prec$）。这意味着，序 $\prec$ 将 $B_r^{\mathrm{sep}}(H, \prec)$中的每个祖先都排在其后代之前，因此在 G的拟灌木中也是如此。此外，该构造独立于 r 和 ε，正如所需。由此得到以下结果。

定理 14. 设 $\mathscr{D}$ 是一个结构上处处稀疏的图类。对于每个 $G \in \mathscr{D}$，存在一个表示 G 的拟灌木 B_G 以及一个尊重祖先关系的序 $\prec_G$，使得 $\{B_G : G \in \mathscr{D}\}$ 具有有界深度。此外，对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $c(r,\varepsilon) \in \mathbb{N}$，使得对于所有$G \in \mathscr{D}$，我们都有

$$\mathrm{wcol}_r(B_G, \prec_G) \leq c(r,\varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}.$$

在接下来的构造过程中，我们将通过收缩节点集合并添加额外的指针来修改准灌木。为了控制所得准灌木的密度，我们需要对准灌木的盖夫曼图进行以下闭包运算。

定义 11. 设 $B = (T, D, \lambda)$ 是一个以顶点 w_0 为根节点的准灌木。我们用 B^* 表示这样一个无向图：取 B 的盖夫曼图，并对每个从叶节点 v 指向顶点 $w \in V(T)$ 的指针 $(v, w) \in D$，将边集 $\{\{v', w'\} \mid v' \leq_T v, w' \leq_T w\}$ 加入其中。

我们还需要第二种闭包性质，它作用的不是盖夫曼图，而是准灌木本身。

定义 12. 若对所有指针 $(u, w) \in D$ 以及 T 中的祖先 $w' \leq_T w$，都存在一个指针 $(u, w') \in D$，则称准灌木 (T, D, λ) 是向上封闭 的。

请注意，$\lambda((u, w'))$ 可能不同于 $\lambda((u, w))$。

引理 20。对于每个深度为 d、序为 $\prec$ 的准灌木 B，都存在一个向上封闭的准灌木 B'，使得 $G(B) = G(B')$、B 和 B' 具有相同的底层树，并且对每个 $r \in \mathbb{N}$，都有

$$\mathrm{wcol}_r(B'^*, \prec) \leq \mathrm{wcol}_{d \cdot r}(B, \prec).$$

特别地，由于 B 和 B' 具有相同的底层树，如果 $\prec$ 在 B 上尊重祖先关系，那么在 B' 上也同样如此。

证明。我们通过从 B 出发，针对所有的 $(u, w) \in D$ 以及 T 中 w 的祖先 w'，再添加指针 (u, w') 到 D'，来构造 B'。请记住，w 是自身的祖先。我们稍后会指定 $\lambda'(u, w')$ 的值。不过请注意，无论 λ' 如何，我们已经有 B' 是向上封闭的，并且 B 和 B' 具有相同的底层树。

我们定义 λ'，使得 $G(B) = G(B')$：令 $\lambda'(u, w') = \lambda(u, w'')$，其中 w'' 是 w' 的最低祖先，且 $(u, w'') \in D$。由于每个节点都有一个指向根节点的指针，因此这样的节点 w'' 总是存在。令 u, v 为两个节点。令 w' 为 v 的最低祖先，且 $(u, w') \in D'$。令 w'' 为 w' 的最低祖先，且 $(u, w'') \in D$（注意，$w' = w''$ 是可能的）。由于 $D \subseteq D'$，我们观察到 w'' 是 v 的最近公共祖先，且 $(u, w'') \in D$。因此，u 和 v 在 $G(B)$ 中连通，当且仅当 $\lambda((u, w'')) = 1$。根据 w' 和 w'' 的构造与选择，$\lambda'((u, w')) = \lambda((u, w''))$，因此 u 和 v 在 $G(B')$ 中连通，当且仅当 $\lambda'((u, w')) = \lambda((u, w'')) = 1$。我们得出结论：$u$ 和 v 在 $G(B)$ 中的连通关系与在 $G(B')$ 中相同。

注意到 $B'^* = B^*$。因此，只需证明对于每个 $r \in \mathbb{N}$，都有 $\mathrm{wcol}_r(B^*, \prec) \leq \mathrm{wcol}_{2d \cdot r}(B, \prec)$。设 $u, v \in V(T)$ 是满足以下条件的顶点：v 在 B^* 中相对于 $\prec$ 弱 r-可达 u。这由一条路径 $P^* = (v, \ldots\ldots, u)$ 见证，该路径在 B^* 中的长度至多为 r，且 u 是路径中最小的元素。我们通过构造一条从 v 到 u 的路径 P 来证明这一断言，该路径在 B 中的长度至多为 $2d \cdot r$，其中 u 根据 $\prec$ 是路径上的最小元素，从而见证 v 在 B 中弱 $(2d \cdot r)$-可达 u。

我们通过以下方式从 P^* 构造 P：将 P^* 的每条边替换为 B 中长度至多为 $2d$ 的一条路径，该路径上的所有顶点相对于 $\prec$ 都大于或等于 u。P^* 中属于 T 的边同时也是 B 中的边，无需替换。对于 P^* 中不是 T 的边的每条边 (a, b)，根据 P 的定义，

T 中存在 a 的后代 a' 和 b 的后代 b'，二者由 B 中的一条指针连接。因此， B 中存在一条路径 P_{ab} =(a，……，a'，b'，……，b)：该路径沿着 T 从 a 向下 traverses 到 a'，使用指针到达 b'，然后沿着 T 向上 traverses 到达 b。由于 P_{ab} 只使用 a 和 b 的后代，且 $\prec$ 尊重祖先关系，我们知道其所有顶点都大于或等于 u。由于 T 的深度至多为 d， P_{ab} 的长度至多为 $2d+1$。我们注意到，从 T 中的每个其他顶点出发，最多经过 d 步即可到达 T 的根顶点：沿着 T 向下到达叶节点，再使用指针到达根节点。因此，我们可以假设 a 和 b 都不是根顶点，这将 P_{ab} 的长度上界改进为 2(d − 1) + 1 ≤ 2d。 □

作为结合定理 14 和引理 20 的直接结果，我们最终将 [DGK+22a] 的分解结果转换为所需的形式。

定理 15。 设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏图类。对于每个 $G \in \mathscr{C}$，存在一个表示 G 的向上闭准灌木 B_G 以及一个尊重祖先关系的序 $\prec_G$，使得 $\{B_G\colon \ G \in \mathscr{C}\}$ 具有有界深度。此外，对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 c（r、ε） $\in \mathbb{N}$，使得对于所有 $G \in \mathscr{C}$，我们有

$$\mathrm{wcol}_r(B_G^*, \prec_G) \leq c(r,\varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}.$$

7.4 准灌木中的兄弟收缩

正如定理 12 中所述，我们的目标是：对于来自结构上处处稀疏图类的图 G，找到一个稀疏 8-收缩。我们将把这个 8-收缩构造为准灌木上的一系列所谓的兄弟收缩，具体定义如下。下文中，当我们想强调所指的是特定灌木 B = （T， D， λ）的树 T 中节点 w 的叶节点 L（w）时，我们将 L（w）记作 L^B（w）。

设 B =(T， D， λ) 是一个准灌木。我们称 $S = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq V(T)$ 中具有相同父节点 p in T 的一组顶点为兄弟集。令 $T(S)$ 表示由$T(a_1)$、...、$T(a_k)$ 不交并构成的森林，并令 $L^B(S)\colon = L^B(a_1) \cup \ldots \cup L^B(a_k)$。设 a是一个不属于 $V(T) \setminus V(T(S))$ 的顶点。我们定义兄弟收缩 $B[\![a \leftarrow S]\!]$ =(T'， D'， λ') 如下。

1. 通过从 T 中移除顶点 $V(T(S))$，并将 a 作为叶节点插入到 p 下方，构造 T'。

2. 对于未修改的节点，其指针继承自 B。更准确地说，对于所有节点v， $w \in V(T) \cap V(T')$，当且仅当 $(v, w) \in D$ 且 $\lambda'((v, w)) = \lambda((v, w))$ 时，我们令 $(v, w) \in D'$。

3. 接下来需要定义指向新叶节点 a 以及从新叶节点 a 指出的指针。对于每个 $w \in V(T') \setminus \{a\}$，我们定义以下规则，稍后将其称为 (3a)、(3b)、(3c)、(3d)。

   (a) 当且仅当对于某个 $u \in L^B(S)$ 有 $(u, w) \in D$ 时，我们设 $(a, w) \in D'$。(b) 当且仅当对于某个 $w \in V(T(S))$ 有 $(v, w) \in D$ 时，我们设 $(v, a) \in D'$。(c) 当且仅当存在 $u \in L^B(S)$ 和 $v \in V(T) \setminus V(T(S))$，且有 $(u, v) \in E(G(B))$，使得 w 位于 (u, v) 的隧道上时，我们设 $\lambda'((a, w)) = 1$。(d) 当且仅当存在 $u \in L^B(S)$，使得 $(v, u) \in E(G(B))$ 时，我们设 $\lambda'((v, a)) = 1$。

当新顶点 a 的名称不重要时，我们也将 $B[\![a \leftarrow S]\!]$ 写作 $B[\![S]\!]$。图 5 给出了一个兄弟收缩的示例。我们先说明，对准灌木应用兄弟收缩后，所得结果仍然是一个表示无向图的准灌木，即从 G（B）得到的无向图，其中将 L^B（S）中的顶点收缩为一个单独的顶点。

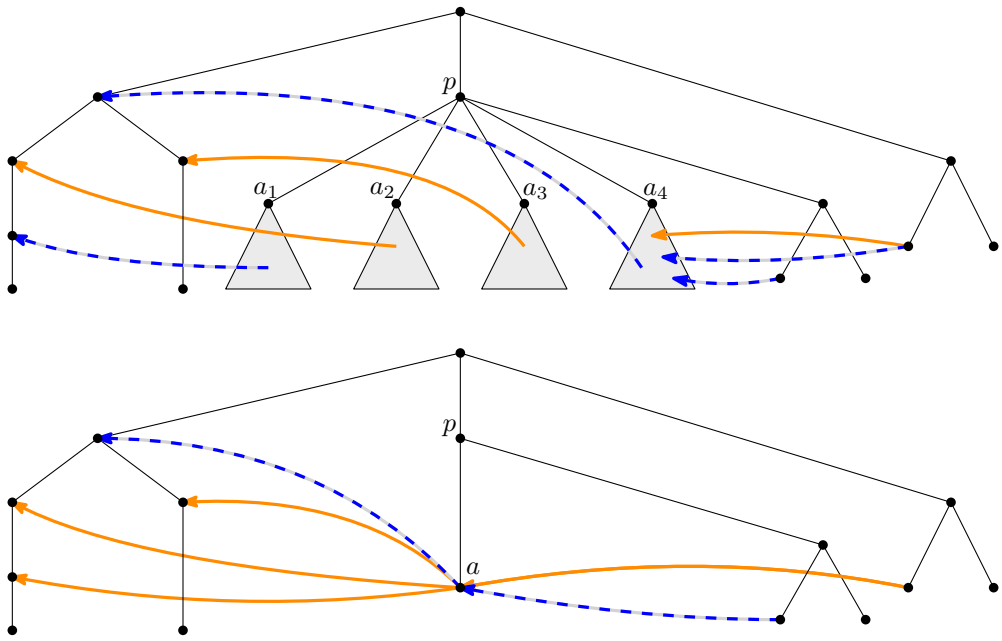


图 5：上方为准灌木 B，下方为兄弟收缩 $B[\![a \leftarrow \{a_1, a_2, a_3, a_4\}]\!]$。

引理 21。给定一个表示无向图的准灌木 B，以及 B 中的兄弟集 S，则 $B[\![S]\!]$ 也是一个表示无向图的准灌木，并且有

$$G(B[\![S]\!]) = G(B)[\![L^B(S)]\!].$$

证明。设 $B = (T, D, \lambda)$、$G = G(B)$、$B' = (T', D', \lambda') = B[\![a \leftarrow S]\!]$、$G' = G(B')$、$T(S)$ 和 $L^B(S)$ 如上所述。记 p 为 S 中各顶点的父节点。根据定义，$V(G') = V(G[\![L^B(S)]\!]) = (V(G) \setminus L^B(S)) \cup \{a\}$。由于 a 是叶节点，对于任意两个顶点 $u \neq a$、$v \neq a$，由 u、v 及其祖先诱导的灌木在 B 和 B' 中相同，并且在 G' 中，u 和 v 双向连通，当且仅当它们在 G 中连通，也当且仅当它们在 $G[\![L^B(S)]\!]$ 中连通。剩下只需验证与 a 之间的连接。

断言 4。令 $v \in V(G[\![L^B(S)]\!]) = V(G')$ 为与 a 在 $G[\![L^B(S)]\!]$中相邻的一个顶点。那么 v 与 a 在 G'中相邻，即 $(a, v) \in E(G')$ 且 $(v, a) \in E(G')$。

证明。我们首先证明 $(a, v) \in E(G')$。根据 $G[\![L^B(S)]\!]$ 的定义，存在与 v 在 G中相邻的 $u \in L^B(S)$。令 w' 为 (u, v) 在 B 中的连接点，并令 w 为 v 在 T中的最低祖先，使得 $(a, w) \in D'$。根据 (3a)，这样的 w 存在且满足 $w' \leq_T w \leq_T v$，其中 $w = w'$可能成立。于是 w 位于 (u, v) 的隧道上，并且根据 (3c)，$\lambda'((a, w))$ 被设为 1。由于 w 是 v 在 T 中的最低祖先，且 $(a, w) \in D'$，我们有 $(a, v) \in E(G')$。

现在我们证明 $(v, a) \in E(G')$。先假设 $(v, a) \notin D'$。那么，根据 (3b)，不存在 $w \in V(T(S))$ 使得 $(v, w) \in D$。由于 $(v, u) \in E(G)$，(v, u) 的连接点 w 满足 $w \leq_T p$。这意味着 w 是 T 中 p 的最低祖先，且 $(v, w) \in D$ 并且 $\lambda((v, w)) = 1$。由于 B 和 B' 在 $V(T) \cap V(T')$ 上一致，w 也是 T' 中 p 的最低祖先，且 $(v, w) \in D'$ 并且 $\lambda'((v, w)) = 1$。由于 p 是 T' 中 a 的父节点，且 $(v, a) \notin D'$，w 是 (v, a) 的连接点，因此我们有 $(v, a) \in E(G')$。

现在假设 $(v, a) \in D'$。根据 (3d)，$(v, u) \in E(G)$，因此 $\lambda'((v, a))$ 被设为 1。由此立即可得 $(v, a) \in E(G')$。■

命题5。 设 $v \in V(G[\![L^B(S)]\!]) = V(G')$ 是 $G[\![L^B(S)]\!]$ 中与 a 不相邻的顶点。那么 v 在 G' 中与 a 不相邻，也就是说，$(a,v) \notin E(G')$ 且 $(v,a) \notin E(G')$。

证明。 根据 $G[\![L^B(S)]\!]$的定义， v 在 G中与 $L^B(S)$的所有元素均不相邻。

我们首先证明$(a,v) \notin E(G')$。令 w为 v在 T'中的最低祖先，使得$(a,w) \in D'$。根据(3a)，对于某个 $u \in L^B(S)$， w 是 v 在 T 中的最低祖先，使得$(u,w) \in D$ 。对于图 G，这意味着每个 $u \in L^B(S)$都与 w的所有后代均匀连通：对于所有$u \in L^B(S)$以及 w的后代 v_1, v_2，当且仅当$(u,v_2) \in E(G)$ 时，$(u,v_1) \in E(G)$。反设 $(a,v) \in E(G')$，因此 $\lambda'((a,w)) = 1$。根据 (3c)，存在叶节点$u \in L^B(S)$和 $v' \in V(T) \setminus V(T(S))$，满足$(u,v') \in E(G)$，且 w位于(u,v')的隧道上。由于 v' 和 v 都是 w的后代，因此$(u,v) \in E(G)$。这与 $u \in L^B(S)$矛盾，由此得出$(a,v) \notin E(G')$。

现在我们证明 $(v,a) \notin E(G')$。若 $(v,a) \in D'$，则由 (3d) 可知 $\lambda'((v,a)) = 0$，因为不存在满足 $(v,u) \in E(G)$ 的 $u \in L^B(S)$。因此，设 $(v,a) \notin D'$。令 w 为 a 的最低祖先，使得 $(v,w) \in D'$。根据假设 $w \leq_T p$，因此 $(v,w) \in D$ 也成立。由于在 G 中， v 与所有 $L^B(S)$ 都不相邻，我们有 $\lambda'((v,w)) = \lambda((v,w)) = 0$。由于 w 是满足 $(v,w) \in D'$ 的 a 的最低祖先，我们得出 $(v,a) \notin E(G')$。■

Now $G(B[\![S]\!]) = G(B)[\![L^B(S)]\!]$ follows. □

注意，兄弟收缩保留向上闭包，如下一个引理所示。

引理 22. 设 B 是一个向上闭准灌木， S 是一个兄弟集。那么 $B[\![a \leftarrow S]\!]$ 是向上封闭的。

证明。 只需分析 $B[\![S]\!]$ 中指向收缩后顶点 a以及从该顶点出发的新指针。若 a 指向 $B[\![S]\!]$中的一个顶点 w ，那么根据 (3a)，某个 $u \in L^B(S)$也必须指向 B中的 w。由于 B 是向上封闭的，u 也指向 w的所有祖先。因此， a 也指向 w的所有祖先。

反过来，若一个顶点 v 指向 $B[\![S]\!]$中的 a ，那么根据 (3b)，它必定曾指向 B中 S 所列某个兄弟下方子树中的一个顶点u 。由于 B 是向上封闭的，它指向 B中 u 的所有祖先，而这些祖先构成了 $B[\![S]\!]$中 a 的所有祖先的超集。这些指针在 $B[\![S]\!]$中仍然存在。 □

7.5 收缩过程概述

给定一个结构上处处稀疏图类 $\mathscr{C}$，我们使用定理 15，为每个$G \in \mathscr{C}$ 关联一个向上封闭的有界深度准灌木 B_G ，以表示 G。此外，根据该定理，每个 B_G 都配备了一个尊重祖先关系的序 $\prec_G$ ，同时证明 B_G^* 一致稀疏；也就是说，对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$ ，存在 $c(r, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ ，使得对于所有 $G \in \mathscr{C}$ ，都有

$$\mathrm{wcol}_r(B_G^*, \prec_G) \leq c(r,\varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}.$$

现在，我们将进行一系列兄弟收缩，从而得到 $G(B)$ 的一个稀疏 8-收缩；我们在定理 12 中断言这种收缩的存在。兄弟收缩分两个阶段进行，之后再作分析。

- 在第一阶段，我们将通过消除某些称为衣架的模式来简化准灌木。本阶段只使用兄弟集大小为一的兄弟收缩。本阶段的目标是完全掌控隧道。

回想一下，对于 $G(B)$ 中的每条弧 (u,v)，从 u 到 v 的 B 中，以指针 $(u,w) \in D$ 作为第一条弧、其余弧均来自 T 的最短有向路径，称为 B中 (u,v) 的隧道，其中 w 称为 (u,v) 的连接点。消除衣架后，我们将得到这样的性质：对于 (u,v)，其隧道要么具有 u,v 的形式，也就是说，弧 (u,v) 的端点v就是该弧自身的连接点；要么具有 u,w,v 的形式，也就是说，(u,v) 的连接点 w 是 v的父节点。

- 因此，第一阶段结束后，对于 $G(B)$ 的所有弧 (u,v)，若其连接点为 w （可能等于 v），则 u 是 D 中的入邻居，而 v 是 T 中 w（或 $v=w$）的出邻居。这自然引出了集合 $\mathsf{In}(w)$ 和 $\mathsf{Out}(w)$ 的定义。

在第二阶段，我们收缩大小无界的兄弟集，以限制集合 $\mathsf{In}(w)$ 和 $\mathsf{Out}(w)$ 的基数。

- 随后，我们论证，对于所有节点而言，若稀疏准灌木的集合 $\mathsf{In}(w)$ 和 $\mathsf{Out}(w)$ 都很小，那么它必然表示一个稀疏图，从而证明定理 12。

兄弟收缩会在灌木中插入新节点和边。在最终分析中，我们要求这不会使所得准灌木变得过于稠密。第一阶段中，我们从一个准灌木 $B = B_0$ 开始，并反复收缩大小为 1 的兄弟集。这意味着我们将准灌木 $B_i = (T_i, D_i\lambda_i)$ 收缩为准灌木 $B_{i+1} = (T_{i+1}, D_{i+1}\lambda_{i+1}) = B_i[\![a \leftarrow \{a\}]\!]$，其中 a 是某个节点。为了界定这些操作所产生的密度，我们注意到，B_{i+1} 中所有新引入的边都源自 B_i 中端点位于 a 下方的边，因此闭包 B^*_{i+1} 是闭包 B^*_i 的子图。由定理 15 可知，$\mathsf{wcol}_r(B^*_0)$ 很小，因此 $\mathsf{wcol}_r(B^*_i)$，$\mathsf{wcol}_r(B^*_{i+1})\ldots$也很小。

然而，这还不够。要开始第二阶段，我们不仅要求弱着色数很小，还要求它们相对于尊重祖先关系的序也很小。对于有向图 H' 和 H，我们记 $H' \sqsubset H$，如果 $V(H') \subseteq V(H)$ 且 $E(H') \subseteq E(H)$。注意，这不过意味着 H' 是 H的子图，但我们想强调 $V(H') \subseteq V(H)$，并且我们想区分同构的子图。

我们将证明 $B^*_{i+1} \sqsubset B^*_i$ 和 $T_{i+1} \sqsubset T_i$。注意，后者意味着 T_{i+1} 是 T_i的子树。定理 15 给出了一个尊重祖先关系的序 $\prec$，使得 $\mathsf{wcol}_r(B^*_0, \prec)$ 很小。由于$B^*_{i+1} \sqsubset B^*_i$，相对于 $\prec$ 的着色数仍然很小；又由于 $T_{i+1} \sqsubset T_i$，序 $\prec$仍然尊重祖先关系。因此，以下引理是为第二阶段准备准灌木的关键。

引理 23。对于每个准灌木 B、$a \in V(T)$ 以及 $B' = (T', D', \lambda') := B[\![a \leftarrow \{a\}]\!]$ 我们有 $B'^* \sqsubset B^*$ 以及 $T' \sqsubset T$。

证明。根据 B' 的构造，显然有 $T' \sqsubset T$，并且 $V(B'^*) = V(B') \subseteq V(B) = V(B^*)$。回忆一下，$B^*$ 是 B 的盖夫曼图的超图，因此包含无向边。为了进一步证明 $E(B'^*) \subseteq E(B^*)$，考虑一条边 $\{u,v\} \in E(B'^*)$。如果 $\{u,v\}$ 源自 T'的一条弧，那么对于 $T' \sqsubset T$，边 $\{u,v\}$ 也属于 $E(B^*)$。因此，假设$\{u,v\} \in E(B'^*)$ 并非源自一条树弧。

否则，边 $\{u,v\}$ 源自 B' 中 u_0 与 v_0 之间的某个指针（任意方向），并带有 $u \le_{T'} u_0$和 $v \le_{T'} v_0$。如果 u_0 和 v_0都不等于叶节点 a，那么 B 中也存在 u_0与 v_0 之间的指针。由于 $u \le_T u_0$ 和 $v \le_T v_0$，B^* 也包含边 $\{u,v\}$。

否则，不妨利用对称性假设 $u_0 = a$。在构造 B' 的过程中，根据 (3a) 和 (3b)，某个 $a_0 \in T(a)$ 与 v_0 之间必定有一个指针。由于 $u \le_T u_0 = a \le_T a_0$ 和 $v \le_T v_0$,B^* 也包含边 $\{u,v\}$。

□

遗憾的是，一般而言， $B'^* \sqsubset B^*$ 仅适用于 $|S| = 1$ 为 $B' = B[\![a \leftarrow S]\!]$ 的兄弟收缩。在第二阶段，我们将收缩多个基数更大的兄弟集。我们仍将确保这些操作保持拟灌木的稀疏性，具体做法是

1. 仅收缩不重叠的兄弟集，我们将其称为独立的，以及
2. 将收缩后的准灌木嵌入一个稍大但仍然稀疏的图中，我们将其称为复制积。

定义 13 （复制积）。给定一个图 G，我们将其复制积 $\mathrm{cp}(G)$定义为如下图：取 G 与其副本 G' 的不交并，并将 G中的每个节点 v 与其在 G' 中的副本 $\mathrm{cp}(v)$相连，使 v 与 $\mathrm{cp}(v)$成为真孪生点。如果 $\prec$ 是 G上的一个序，则 $\mathrm{cp}(\prec)$是 $\mathrm{cp}(G)$上的序，它由 $\prec$ 通过将每个元素 $\mathrm{cp}(v)$插入到 v的正前方而得到。

注意，复制积等于 G 与 K_2的字典积。已知与有界大小的团取字典积可以保持稀疏性（例如参见[NDM12，命题 4.6.]）。

引理 24. 对于每个图 G、每个序 $\prec$ 以及每个 $r \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathrm{wcol}_r(\mathrm{cp}(G), \mathrm{cp}(\prec)) \leq 2 \cdot \mathrm{wcol}_r(G, \prec).$$

证明。根据定义，若 $\mathrm{WReach}_r[G, \prec, v] = \{v_1, \ldots, v_l\}$，则 $\mathrm{WReach}_r[\mathrm{cp}(G), \mathrm{cp}(\prec)\ v]$ 和 $\mathrm{WReach}_r[\mathrm{cp}(G), \mathrm{cp}(\prec), \mathrm{cp}(v)]$ 都是 $\{v_1, \ldots, v_l, \mathrm{cp}(v_1) \ldots, \mathrm{cp}(v_l)\}$的子集。 □

定义 14. 准灌木 B 中的两个兄弟集 S_1 和 S_2 是独立的，当且仅当它们的父顶点不同，且对于所有 $a \in S_1$ 和 $b \in S_2$， $L^B(a)$与 $L^B(b)$不相交（见图 6）。令$S_1, \ldots, S_l$为 B中两两独立的兄弟集，并令 $\{a_1, \ldots, a_l\}$为不属于B的互异节点。由此可知，对于 $i \in [l]$，准灌木 $B_0 = B$和 $B_i = B_{i-1}[\![a_i \leftarrow S_i]\!] = B[\![a_1 \leftarrow S_1]\!] \ldots [\![a_i \leftarrow S_i]\!]$是有效的兄弟收缩：对于每个 $i \in [l]$， a_i 不包含于 B_{i-1}，且 S_i 是 B_{i-1}中的兄弟集。我们用 $B\{\!\{a_1 \leftarrow S_1, \ldots, a_l \leftarrow S_l\}\!\}$ 表示对两两独立的兄弟集进行迭代收缩。

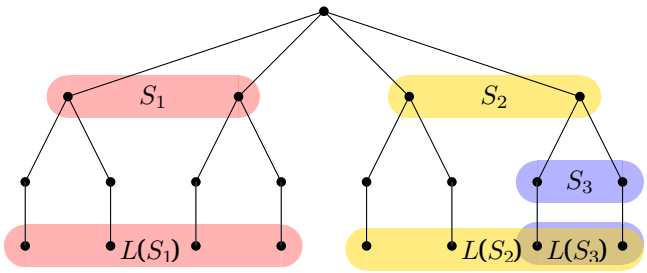


图 6：准灌木中的三个兄弟集 S_1， S_2， S_3（省略指针）。S_1和 S_2并非独立，因为它们有相同的父节点。 S_2 和 S_3 并非独立，因为它们的叶集 $L(S_2)$ 和 $L(S_3)$ 重叠。 S_1 和 S_3 是独立的。

在第二阶段，我们只会收缩两两独立的兄弟集，并利用以下观察来界定收缩的稀疏性。

引理 25. 对于每个准灌木 B_0、两两独立的兄弟集 $S_1, \ldots, S_l$（其父节点为$p_1, \ldots, p_l$），以及兄弟收缩 $B_l := B\{\!\{\mathrm{cp}(p_1) \leftarrow S_1, \ldots, \mathrm{cp}(p_l) \leftarrow S_l\}\!\}$，有 $B_l^* \sqsubset \mathrm{cp}(B_0^*)$。

证明. 令 $B_0 = (T_0, D_0, \lambda_0) = B$ 和 $B_i = (T_i, D_i, \lambda_i) = B_{i-1}[\![\mathrm{cp}(p_i) \leftarrow S_i]\!]$ 对所有 $i \in [l]$ 均成立。

观察 2。 对于所有 $i \in [l]$，我们有 $V(T_i) \setminus \{\mathrm{cp}(p_1), \ldots, \mathrm{cp}(p_i)\} \subseteq V(T_0)$.

那么显然，$V(B_l^*) = V(T_l) \subseteq V(T_0) \cup \{\mathrm{cp}(p_1), \ldots, \mathrm{cp}(p_l)\} \subseteq V(\mathrm{cp}(B_0^*))$。现在我们用归纳法证明，对于所有 $i \in [l]$，B_i^* 中的每条边也是 $\mathrm{cp}(B^*)$ 中的一条边。对于 $i = 0$，我们有 $B_0 = B$，并且根据定义，$B_0^* = B^* \sqsubset \mathrm{cp}(B^*)$ 成立。

假设该命题对 B_i^* 成立。设 B_{i+1}^* 中的一条边 $\{u, v\}$ 不属于 B_i^*，否则由归纳假设可得该命题成立。如果 $\{u, v\}$ 源自 B_{i+1}^* 中的一条树弧，那么根据复制积的定义，边 $\{u, v\} = \{p_i, \mathrm{cp}(p_i)\}$ 包含在 $\mathrm{cp}(B^*)$ 中。否则，$\{u, v\}$ 源自 B_{i+1} 中节点 $u_0 \geq_{T_{i+1}} u$ 和 $v_0 \geq_{T_{i+1}} v$ 之间的一个指针（方向不限）。

断言 6. $u_0 = \mathrm{cp}(p_{i+1})$ 或 $v_0 = \mathrm{cp}(p_{i+1})$。

证明。 反设 u_0 和 v_0 都不是 $\mathrm{cp}(p_{i+1})$，从而导致矛盾。那么，u 和 v 也都不是 $\mathrm{cp}(p_{i+1})$，且二者都包含在 B_i 中。由于兄弟收缩只修改了指向 $\mathrm{cp}(p_{i+1})$ 或从 $\mathrm{cp}(p_{i+1})$ 指出的指针，因此 u_0 与 v_0 之间的指针在 B_i 中已经存在。因此，$\{u, v\}$ 是 B_i^* 中的一条边，这与我们先前的假设矛盾。■

根据对称性，我们可以假设 $u_0 = \mathrm{cp}(p_{i+1})$。由于 $\mathrm{cp}(p_{i+1})$ $u_0 =$ 与 v_0 之间存在一个指针，且根据 (3a) 和 (3b)，必定存在一个顶点 $u_0' \geq_{T_i} p_{i+1}$，以及 u_0' 与 v_0 之间的一条指针，位于 B_i 中。根据 $p_{i+1} \leq_{T_i} u_0'$ 和 $v \leq_{T_i} v_0$，边 $\{p_{i+1}, v_0\}$ 和 $\{p_{i+1}, v\}$ 存在于 B_i^* 中。

命题 7. $u = u_0 = \mathrm{cp}(p_{i+1})$。

证明。 反设 $u \neq \mathrm{cp}(p_{i+1}) = u_0$。于是 $u \leq_{T_{i+1}} \mathrm{cp}(p_{i+1})$。由于 p_i 是 T_{i+1} 中 $\mathrm{cp}(p_{i+1})$ 的父节点，我们可以得出 $u \leq_{T_{i+1}} p_{i+1}$。由于 T_{i+1} 和 T_i 仅在 p_i 下方的子树中有所不同，因此我们还有 $u \leq_{T_i} p_{i+1}$。结合 B_i^* 中的边 $\{p_{i+1}, v\}$，可推出 B_i^* 中的边 $\{u, v\}$，这与先前的假设矛盾。■

回想一下，$u_0' \geq_{T_i} p_{i+1}$。由于兄弟集 $S_1, \ldots, S_{i+1}$ 是独立的，我们必有 $u_0' \notin \{\mathrm{cp}(p_1), \ldots, \mathrm{cp}(p_i)\}$ 以及 $u_0' \in V(T_0)$，根据观察 2。

假设 $v_0 \notin \{\mathrm{cp}(p_1), \ldots, \mathrm{cp}(p_i)\}$。同样，根据观察 2，我们知道 $v_0 \in V(T_0)$。因此，u_0' 与 v_0 之间的指针已存在于 B 中。于是 B_0^* 包含边 $\{p_{i+1}, v\}$。根据复制积的定义，$\mathrm{cp}(B_0^*)$ 包含所需的边 $\{u = \mathrm{cp}(p_{i+1}) \; v\}$。

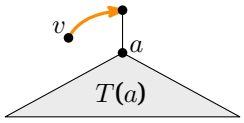
最后，假设对于某个 $j \in [i]$，$v_0 = \mathrm{cp}(p_j)$。那么，v_0 和 u_0' 之间的指针必定是在 B_i 中引入的。根据 (3a) 和 (3b)，B_{j-1} 中必定存在某个 $v_0' \geq_{T_{j-1}} p_j$ 和 u_0' 之间的指针。由于兄弟集 S_1、……、S_j 彼此独立，根据观察 2，我们有 $v_0' \notin \{\mathrm{cp}(p_1), \ldots, \mathrm{cp}(p_{j-1})\}$ 和 $v_0' \in V(T_0)$。于是，u_0' 和 v_0' 之间的指针也存在于 B_0 中。因此，边 $\{p_{i+1}, p_j\}$ 属于 B_0^*。回想一下，$v \leq_{T_{i+1}} v_0$。如果 $v = v_0 = \mathrm{cp}(p_j)$，那么，$\mathrm{cp}(B_0^*)$ 中的边 $\{\mathrm{cp}(p_{i+1}), \mathrm{cp}(p_j)\} = \{u, v\}$ 是由 B_0^* 中的边 $\{p_{i+1}, p_j\}$ 以及复制积的定义得到的。否则，$v \leq_{T_{i+1}} \mathrm{cp}(p_j)$；并且由于 $\mathrm{cp}(p_j)$ 被插入到 p_j 下方，也有 $v \leq_{T_{i+1}} p_j$。由于从 p_j 到 T_0 根节点的路径上的节点在兄弟收缩过程中保持不变，我们还有 $v \in T_0$ 和 $v \leq_{T_0} p_j$。由 B_0^* 中的边 $\{p_{i+1}, p_j\}$ 可知，边 $\{p_{i+1}, v\}$ 存在于 B_0^* 中；根据复制积的定义，$\mathrm{cp}(B_0^*)$ 包含所需的边 $\{u = \mathrm{cp}(p_{i+1}) \; v\}$。

□

7.6 第一阶段：消除衣架

定义 15. 给定一个准灌木 $B=(T,\ D,\ \lambda)$，衣架是以节点 a 为根节点的子树 $T(a)$，其中存在一个叶节点 v （不一定包含在 $T(a)$ 中），并满足以下性质

- a 不是根节点，并且 v 正指向 a的父节点，
- v 不指向 $T(a)$中的任何节点，
- a 是一个非叶节点。



如果不存在衣架 $T(a')$，使得 a' 是 T中 a 的祖先，那么我们称衣架 $T(a)$为极大的。

观察 3. 对于每个准灌木 $B=(T,D,\lambda)$ 以及极大衣架 $T(a_1)$ 和 $T(a_2)$，若 $a_1\neq a_2$，则有 $V(T(a_1))\cap V(T(a_1))=\varnothing$。

我们将在下文证明，不含衣架的拟灌木具有良好的结构。为了消除衣架，我们首先证明兄弟收缩不会引入新的衣架。

引理26. 设 $B=(T,D,\lambda)$ 是一个向上闭丛林，S 是一个兄弟集，且 $B'=(T',D',\lambda'):=B[\![S]\!]$。若 $T'(a')$ 是 B' 中的一个衣架，其中 $a'\in V(T')$，则还有 $a'\in V(T)$，并且存在 $a\leq_T a'$ 使得 $T(a)$ 是 B 中的一个衣架。

证明。 由于 $T'(a')$ 是 B' 中的一个衣架，因此 a' 是 B' 中的一个非叶节点，并且存在一个叶节点 v'，它有一条指向 a' 的祖先 w' 的正向指针，且没有指向 $T'(a')$ 中任何节点的指针。由于 a' 和 w' 都是 T' 中的非叶节点，因此它们在兄弟收缩中未被收缩，故此前已存在于 B 中。节点 v' 要么此前已存在于 B 中，要么是由此次收缩引入的。

首先，假设 v' 此前已存在于 B 中。那么，指针 $\lambda'((v',\ w'))=1$ 是从 B 继承而来的。由于 v' 没有指向 $T'(a')$ 中任何节点的 D'-指针，根据 (3b)，我们可以得出 v' 也没有指向 $T(a')$ 中任何节点的 D-指针。因此，$T(a')$ 是 B 中的一个衣架。

现在假设 v' 是通过收缩引入的，并且新引入了 D'-指针 $(v',\ w')$。由于 $\lambda'((v',\ w'))=1$，由 (3c) 可知，w' 位于一条隧道上，该隧道由叶节点$v\in T(S)$ 和 B 中的一个节点 $w\leq_T w'$ 见证，使得

(1) v 有一个指向 w的正 D-指针，并且

(2) 不存在从 v 指向任何满足 $w<_T a\leq_T w'$的节点 a 的 D-指针。

令 $a\leq_T a'$ 为从 w 到 a'的路径上 w 的非叶子节点子节点。下面证明 v 没有指向 B中来自 $T(a)$ 的任何节点的指针。

若 $w\neq w'$，则 $w<_T w'$。由于 a 是 w的子节点，它满足 $w<_T a\leq_T w'$，因此根据 (2)，v 没有指向 B 中 a 的指针。由于 B 向上封闭，v 也就不能指向 B中来自 $T(a)$ 的任何节点。

另一方面，如果 $w=w'$，那么 $a=a'$，且从 v 指向 $T(a)$ 的 D-指针 $=T(a')$，由于 B向上封闭，将意味着在 B 中存在一个从 v 指向 a' 的 D-指针；根据 (3a)，还会在 B'中存在一个从 v' 指向 a'的 D'-指针。这与 v' 不指向 $T'(a')$ 相矛盾。

我们得出，在 B 中，v 有一个指向 w的正 D-指针，而 w有一个非叶节点子节点 a，使得 v不指向 $T(a)$ 中的任何元素。根据定义，$T(a)$ 是 B中的一个衣架。 □

我们推导出引理26的以下简单推论。

推论 1. 如果一个向上闭准灌木不包含任何衣架，那么它的任何兄弟收缩也不包含衣架。

现在我们证明收缩阶段一的核心观察：它构造出一个 1-收缩，移除所有衣架，同时不会使准灌木变得过于稠密。

引理 27. 对于每个向上闭准灌木 $B=(T,D,\lambda)$，都存在一个向上闭的无衣架准灌木 $B'=(T',D',\lambda')$，使得 $G(B')$ 是 $G(B)$的一个 1-收缩， $B'^{*}\sqsubset B^{*}$且 $T'\sqsubset T$。

证明。 设 $T(a_1)\dots,T(a_l)$ 是 B 的极大衣架。令 $B_0=(T,D,\lambda):=B$，并且对每个 $i\in[l]$，定义 $B_i=(T_i,D_i,\lambda_i):=B_{i-1}[\![a_i\leftarrow\{a_i\}]\!]$。令 $B':=B_l$。由引理 23 可得 $B'^{*}=B_l^{*}\sqsubset B_{l-1}^{*}\sqsubset\cdots\sqsubset B_0^{*}=B^{*}$。于是，利用子图关系的传递性 $B'^{*}\sqsubset B^{*}$，同理可由引理 23 得出 $T'\sqsubset T$。根据引理 22， B'仍然向上封闭。还需证明 B' 无衣架，并且 $G(B')$ 是 $G(B)$ 的一个 1-收缩。

为了证明 B' 无衣架，我们对 $i\in[l]$ 进行归纳，证明

$$\text{对于 } B_i \text{ 中的每个衣架 } T(b),\text{ 都存在某个 } i<j\le l\text{使得 } a_j\le_{T_i} b\text{。}$$

该命题对 $B_0=B$显然成立。假设它对 B_i 成立，现在证明它对$B_{i+1}=B_i[\![a_{i+1}\leftarrow\{a_{i+1}\}]\!]$也成立。为此，设 $T(b')$ 是 B_{i+1}中的一个衣架。根据引理26，$b'\in V(T_i)$，并且存在 $b\le_{T_i}b'$ 使得 $T(b)$ 是 B 中的一个衣架。由归纳假设，存在某个 $i<j\le l$ 使得 $a_j\le_{T_i}b$，因此也有 $a_j\le_{T_i}b'$。由于 a_j，$b'\in V(T_{i+1})\cap V(T_i)$，且兄弟收缩保持保留节点树不变，因此可知存在某个 $i<j\le l$使得 $a_j\le_{T_{i+1}}b'$。注意， a_{i+1}是 B_{i+1}中的一个叶节点，而由于 $T(b')$是一个衣架， b 不是 B_{i+1}中的叶节点。因此，我们知道$a_{i+1}\not\le_{T_{i+1}}b'$。于是，存在某个 $i+1<j\le l$使得 $a_j\le_{T_{i+1}}b'$，从而证明了该命题。

剩下要证明的是， $G(B')$ 是 $G(B)$ 的 1-收缩。设 $L^{B_i}(a)$ 是 B_i 中 a 下方的叶节点。反复应用引理 21，可得

$$G(B')=G(B)[\![L^{B_1}(a_1)]\!]\dots[\![L^{B_l}(a_l)]\!].$$

很容易看出 $L^{B_i}(a_i)=L^{B}(a_i)$。根据观察 3，集合 $L^{B}(a_1)\dots,L^{B}(a_l)$ 两两不相交。由于 $T(a_i)$ 是 B 中的一个衣架，因此每个集合 $L^{B}(a_i)$ 在 $G(B)$ 中还诱导出一个半径为一的子图。根据定义 6， $G(B')=G(B)[\![L^{B}(a_1)]\!]\dots[\![L^{B}(a_l)]\!]$ 是 $G(B)$ 的 1-收缩。

□

现在该退一步，将定理 15 和引理 27 合并为以下结论，从而完成第一阶段的衣架消除。

引理 28。 设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏图类。对于每个 $G\in\mathscr{C}$，都存在一个无衣架的向上闭准灌木 B_G，它表示 G 的一个 *1*-收缩；还存在一个尊重祖先的序 $\prec_G$，使得 $\{B_G\colon\ G\in\mathscr{C}\}$ 具有有界深度。此外，对于每个 $r\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon>0$，都存在 $c(r,\varepsilon)\in\mathbb{N}$，使得对所有 $G\in\mathscr{C}$，均有

$$\operatorname{wcol}_r(B_G^{*},\prec_G)\le c(r,\varepsilon)\cdot|G|^{\varepsilon}.$$

证明。 定理 15 对每个 $G\in\mathscr{C}$给出一个表示 G 的向上闭准灌木 B_G 以及一个尊重祖先的序 $\prec_G$。对于每个 $r\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon>0$，都存在 $c(r,\varepsilon)\in\mathbb{N}$，使得对所有$G\in\mathscr{C}$，都有弱着色数$r(B_G^{*},\prec_G)\le c(r,\varepsilon)\cdot|G|^{\varepsilon}$。

根据引理 27，我们可以从 B_G 得到一个向上封闭的无衣架准灌木 B'_G，它表示 G的一个 1-收缩。由于 $B'^{*}_G\sqsubset B^{*}_G$，对于每个 $r\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon>0$，我们仍有 $\operatorname{wcol}_r(B'^{*}_G,\prec_G)\le c(r,\varepsilon)\cdot|G|^{\varepsilon}$。此外，由于 $T'\sqsubset T$，序 $\prec_G$在 B'_G中仍尊重祖先关系。

□

7.7 第二阶段：界定入集合与出集合

值得注意的是，使用稀疏准灌木表示稠密图，需要一些“中心枢纽”作为许多隧道的连接点（见图7）。下面关于入集和出集的定义衡量节点 w 的中心程度。

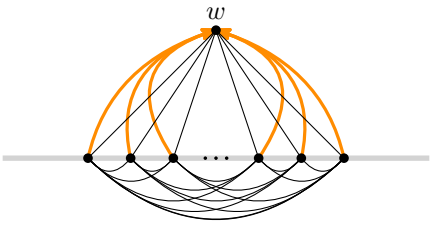


图7：表示一个团的稀疏准灌木。这里，节点 w 充当中央枢纽，许多隧道都经过此处。

定义 16。对于每个准灌木 $B=(T,D,\lambda)$ 和节点 $w\in V(T)$，我们定义

$$\mathrm{In}(w,B):=\{u\mid w\text{是某条弧 }(u,v)\in E(G(B))\text{ 的连接点，}\},\mathrm{Out}(w,B):=\{v\mid w\text{是某条弧 }(u,v)\in E(G(B))\text{ 的连接点，}\}.$$

注意，一般来说，$\mathrm{In}(w,B)$ 中的节点都指向 w，而 $\mathrm{Out}(w,B)$ 中的节点都是 w 的后代。我们在前一阶段消除衣架的主要原因，是以下观察所保证的：$\mathrm{Out}(w,B)$ 中的节点在灌木中的距离也至多为一，即它们与 w 的距离至多为一。

引理29。设 $B=(T,D,\lambda)$ 是一个不含衣架的向上闭准灌木，且令$w\in V(T)$。每个节点 $v\in\mathrm{Out}(w,B)$，$v\neq w$ 都是 w 的子节点。

证明。令 $v\in\mathrm{Out}(w,B)$。那么 w 是某条边 $(u,v)\in E(G(B))$ 的连接点。反设 w 不等于 v，且不是 v的父节点。根据连接点的定义，u 不会指向 w 到 v 在 T中的路径上的另一个节点。令 w' 为这条路径上 w 的子节点。由于 v 既不等于 v，也不是 v的子节点，因此有 $w<_T w'<_T v$。节点 u 不会指向 w'，而且由于 B 是向上封闭的，u 不会指向来自 $T(w')$ 的任何节点；否则 w 就不会是 (u,v) 的连接点。由于 $w'<_T v$，我们得出 w' 是非叶节点，因此 $T(w')$ 是一个衣架。矛盾。 □

直观地说，我们将在下一小节证明，稀疏准灌木 B 只有在存在“中心枢纽” w，且集合 $\mathrm{In}(w,B)$ 和集合 $\mathrm{Out}(w,B)$ 均具有多项式规模时，才能表示稠密图。以下引理消除了这些枢纽，从而保证 B 表示稀疏图。

引理30。设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏图类。对于每个 $G\in\mathscr{C}$，都存在一个无衣架的向上闭准灌木 B'，它表示 G 的一个 *8*-收缩，并具有以下性质。对于每个 $r\in\mathbb{N}$ 和每个 $\varepsilon>0$，都存在 c（r、ε）和 t（ε），使得对于每个 $G\in\mathscr{C}$ 和每个 $r\in\mathbb{N}$，都有

$$\mathrm{wcol}_r(B')\leq c(r,\varepsilon)\cdot|G|^{\varepsilon}.$$

此外，对于 B' 中的每个节点 w，都有

$$\mathrm{In}(w,B')\leq t(\varepsilon)\cdot|G|^{\varepsilon}\quad or\quad \mathrm{Out}(w,B')\leq t(\varepsilon)\cdot|G|^{\varepsilon}.$$

证明。令 $G\in\mathscr{C}$。我们首先说明如何构造相应的准灌木 B'，然后证明其性质。

构造。我们首先应用引理 28，得到一个无衣架的向上闭准灌木$B=(T,\ D,\ \lambda)$，它表示 G 的 1-收缩，并带有一个尊重祖先的序 $\prec$，定义在 $V(T)$ 上，使得对于所有 $r\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon>0$，都有弱着色数$r(B^*,\ \prec)\le c'(r,\ \varepsilon)\cdot|G|^{\varepsilon}$。

我们按照 $\prec$ 给定的序，迭代处理 T 中的非叶节点，并在每一步按如下方式修改准灌木 B。令 $B_i=(T_i,\ D_i,\ \lambda_i)$ 为第 i 个处理步骤之前的准灌木，并令 $W_i=\{w_1,\dots,w_{i-1}\}$ 为迄今已处理的节点集合。我们从 $B_1=B$ 和 $W_1=\varnothing$ 开始。

在第 i 个处理步骤中，我们选择 w_i 作为 T_i 中相对于 $\prec$ 序最小的非叶节点，该节点属于 $V(T)$，且相对于 $\prec$ 序大于 W_i 中的所有节点。注意，w_1 是 T 的根节点。如果不存在这样的 w_i，则通过设定 $B':=B_i$ 和 $W':=W_i$ 来结束处理。否则，我们设定 $W_{i+1}:=W_i\cup\{w_i\}$，并在下文说明如何导出 B_{i+1}:

选取兄弟集 $S_i\subseteq V(T_i)$，使其成为 T_i 中 w_i 的一个极大（但可能为空）子节点集合，并且在 $G(B)$ 中存在一个半径为 2 的邻域，包含 T_i 中位于 S_i 下方的所有叶节点 $L^{B_i}(S_i)$。如果 S_i 为空，我们就将 B_{i+1} 设为 $=B_i$。否则，我们执行一次兄弟收缩，并将 B_{i+1} 设为 $=B_i[\![\mathrm{cp}(w_i)\leftarrow S_i]\!]$，然后继续进行下一个处理步骤。注意，这是一次有效的兄弟收缩，因为 $\mathrm{cp}(w_i)$ 不包含在 B_i 中。至此，B' 的构造描述完毕。

断言。令 k 为在 B 上执行的处理步骤数，使得 $W'=\{w_1,\dots,w_k\}$。我们通过以下命题来控制上述构造。

断言 8。对于所有满足 $w_i\preceq v$ 的 $i\in[k]$ 和 $v\in V(T_i)\cap V(T)$，我们有 $T_i(v)=T(v)$。特别地，v 是 T_i 中的叶节点，当且仅当它是 T 中的叶节点。

证明。反设 $w_i\preceq v$ 与 $T_i(v)$ 不同于 $T(v)$。由于兄弟收缩只会修改当前正在处理的节点的子树，因此 $T(v)$ 必定是在处理节点 $w_j\prec w_i\preceq v$时被修改的；而由于 $\prec$ 尊重祖先关系，$w_j\prec w_i\preceq v$ 必定是 T中 v 的祖先。在 w_j下方进行兄弟收缩时，包含在 S_j 中的每个子节点都会连同其子树一起被删除，而不包含在 S_j 中的子节点的子树则保持不变。因此，T_i 中存在 v 证明了包含 v 的子树并未被修改。矛盾。■

断言 9。对于所有 $i\in[k]$和 $u,\ v\in V(T_i)\cap V(T)$ 当且仅当 $(u,v)\in D_i$ $(u,v)\in D$时成立。此外，我们有 $\lambda_i(u,v)=\lambda(u,v)$。

证明。兄弟收缩所修改的指针仅指向新插入的节点或从这些节点指向外部，而这些节点不包含在 $V(T)$ 中。因此，$V(T_i)\cap V(T)$ 中节点之间的指针保持不变。■

断言 10。集合 $S_1,\dots,S_k$ 在 B 中两两独立。因此，

$$B'=B[\![\mathrm{cp}(w_1)\leftarrow S_1,\dots,\mathrm{cp}(w_k)\leftarrow S_k]\!].$$

证明。每个集合 S_i 都包含 B_i 中 w_i 的子节点。根据断言 8，我们有 $T_i(w_i)=T(w_i)$。因此，w_i 不仅是 T_i 中 S_i 的父节点，也是 T 中的父节点。

固定 $i<j\in[k]$，并证明 S_i 和 S_j 在 B 中是独立的。显然，S_i 和 S_j 在 T 中有不同的父节点 $w_i\prec w_j$。令 $a_i\in S_i$ 和 $a_j\in S_j$。由于子树 $T_i(a_i)=T(a_i)$ 在处理 w_i 时已被移除，因此它与后来处理的 $T_j(a_j)=T(a_j)$ 不重叠。这意味着 $L^B(a_i)\cap L^B(a_j)=\varnothing$。根据定义 14，$S_i$ 和 S_j 在 B 中是独立的。■

断言 11。 B_i 对所有 $i \in [k]$ 都是向上封闭的，且不包含任何衣架。特别地，$\mathrm{Out}(w, B_i)$ 只包含 w 的子节点。

证明。 B_i 是通过一系列兄弟收缩从 B 得到的。由于 B 源自引理 28，B 是向上封闭的，且不含衣架。对于每次收缩，引理 22 保持向上封闭性，而推论 1 保持无衣架性。■

断言 12。 W' 是 B'的非叶节点集合。此外，对于每个 $i \in [k]$， W' 都包含在 B_i 的非叶节点集合中。

证明。 设 $w_i \in W'$ 为第 i个处理步骤开始时选取的 B_i 的非叶节点。在第 i个处理步骤中，要么 w_i 的一些子节点被合并为一个叶节点，要么 B_i 没有发生变化。无论哪种情况， w_i 在 B_{i+1}中仍是一个非叶节点。在接下来的处理步骤中，只处理在 $\prec$ 中排在 w_i 之后的节点。由于 $\prec$ 尊重祖先关系，特别是不会处理 w_i 的任何祖先，因此 w_i 必定在 B'中保留为非叶节点。

令 w 为 B' 中的一个非叶节点。在将 B 转换为 B' 的处理步骤中，所有新插入的节点都是叶节点；由于只会收缩非叶节点下方的兄弟集，这些节点会一直保持为叶节点。因此，对于每个 $i \in [k]$， w 都作为非叶节点存在于 B_i 中。特别地， w 出现在 $B_1 = B$ 中，因此由 $\prec$ 排序。若 w 是 T 的根节点，则 w 显然包含于 W' 中。因此，假设 w 不是 T 的根节点。那么存在一个节点 $w_{i-1} \in W'$，它关于 $w_{i-1} \prec w$ 是极大的。在第 i 个处理步骤中，我们尝试选取 w_i 作为 T_i 中（关于 $\prec$）最小的非叶节点，该节点包含于 V（T）中，且大于 w_{i-1}（关于 $\prec$）；如果不存在这样的 w_i，则终止。注意， w 是 w_i 的候选项，因此 w_i 存在，且 $w_i \preceq w$。如果 $w_i \prec w$，我们就会得到与所选 w_{i-1} 矛盾的结论。因此，我们有 $w = w_i \in W'$。■

Cl目标 13. 对于每个 $w \in W'$ 和 $i \in [k-1]$，都有 $|\mathrm{In}(w, B_i)| \geq |\mathrm{In}(w, B_{i+1})|$.

证明。 根据断言 12， w 在 B_i 和 B_{i+1} 中都是非叶节点。我们有 $B_{i+1} = B_i[\![S_i]\!]$。如果 $B_{i+1} = B_i$，则无需证明。否则，在 B_{i+1} 中存在一个位于 w_i 下方的新叶节点 $\mathsf{cp}(w_i)$。令 $u \in \mathsf{In}(w, B_{i+1})$。根据定义 16，且由于 w 是非叶节点，因此存在一个叶节点 $v \neq w$，满足 $v \in \mathsf{Out}(w, B_{i+1})$。根据断言 11 和引理29， v 是 B_{i+1} 中 w 的子节点。总之， u 有一个指向 w 的正向指针，并且没有指向 w 的叶子子节点 u 的指针。

首先假设 $u \neq \mathsf{cp}(w_i)$。如果 u 在 B_i 中指向 w 下方的每个叶节点，那么在 B_{i+1} 中也必然如此。这与我们的假设矛盾，即 u 没有指向 v 的指针。因此，在 B_i 中也存在一个位于 w 下方且 v 不指向的叶节点，并且我们有 $u \in \mathsf{In}(w, B_i)$。现在假设 $u = \mathsf{cp}(w_i)$。由于 u 有一个指向 w 的正向指针，根据兄弟收缩的定义，必定存在某个被收缩的节点 $u' \in \mathsf{In}(w, B_i)$，它不再出现在 B_{i+1} 中，因此我们有 $u' \notin \mathsf{In}(w, B_{i+1})$。综合这两种情况，得到 $|\mathsf{In}(w, B_i)| \geq |\mathsf{In}(w, B_{i+1})|$。■

现在我们将利用这些断言来证明 B'所需的性质。根据断言 11， B' 向上封闭且不包含衣架。其余三个性质将在接下来的三个段落中证明。

8-收缩。 我们证明 $G(B')$是 G的 8-收缩。通过反复应用引理21，我们有

$$G(B') = G(B)[\![L^{B_1}(S_1)]\!] \dots [\![L^{B_l}(S_l)]\!].$$

在构造过程中，我们确保每个集合 $L^{B_i}(S)$都包含在 $G(B)$中的一个半径为 2 的邻域内。根据断言 8， $L^{B_i}(S_i) = L^B(S_i)$。根据断言 10，集合 S_1、……、S_l 是 B 中的独立兄弟集，因此根据定义 14， $L^B(S_1)$……、$L^B(S_l)$两两不相交。根据定义 6， $G(B') = G(B)[\![L^B(S_1)]\!] \dots [\![L^B(S_l)]\!]$ 是 $G(B)$的 2-收缩。由于 $G(B)$本身是 G的 1-收缩， $G(B')$是 G的 8-收缩。

稀疏性。 我们知道，对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，都有 $\mathrm{wcol}_r(B^*, \prec) \le c'(r, \varepsilon) \cdot |G|^\varepsilon$，其中 $c'(r, \varepsilon)$ 是在证明开头的段落 构造 中调用引理 28 得到的函数。我们令 $c(r, \varepsilon) = 2c'(r, \varepsilon)$。于是，根据引理 24，对于复制积 $\mathrm{cp}(B^*)$，

$$\mathrm{wcol}_r\big(\mathrm{cp}(B^*), \mathrm{cp}(\prec)\big) \le c(r, \varepsilon) \cdot |G|^\varepsilon.$$

如断言 10 所示， B' 由 B 通过对两两独立的兄弟集进行兄弟收缩得到。根据引理 25， B' 的盖夫曼图是 $\mathrm{cp}(B^*)$ 的子图，因此 $\mathrm{wcol}_r(B') \le \mathrm{wcol}_r(\mathrm{cp}(B^*))$。由此得到 B' 的弱着色数所需的上界。

In集和Out集的大小。 接下来，请记住， $W' = \{w_1, \dots, w_k\}$ 是已处理节点的集合，并且对于 $i \in [k]$， B_i 是处理 w_i之前的准灌木。正如断言 10 所示，我们还可以得到， $B' = B[\![S_1, \dots, S_k]\!]$ 是 B中两两独立的兄弟集 $S_1, \dots, S_k$的一次兄弟收缩。任取一个 $\varepsilon > 0$。令 $p := c(1, \varepsilon) \in \mathbb{N}$。如上所述，

$$\mathrm{wcol}_1\big(\mathrm{cp}(B^*), \mathrm{cp}(\prec)\big) \le p \cdot |G|^\varepsilon. \tag{19}$$

我们要证明，对于 B' 的每个节点 w ，以下至少有一个成立：

$$|\mathrm{In}(w, B')| \le 5p \cdot |G|^\varepsilon \quad \text{or} \quad |\mathrm{Out}(w, B')| \le 4p \cdot |G|^\varepsilon + 1.$$

于是，我们可以选择 $t(\varepsilon)$，使得以下至少有一个成立：$\mathrm{In}(w, B') \le t(\varepsilon) \cdot |G|^\varepsilon$，或 $\mathrm{Out}(w, B') \le t(\varepsilon) \cdot |G|^\varepsilon$。如果 w是叶节点，那么 $|\mathrm{Out}(w, B')| \le 1$。因此，假设 w是非叶节点且 $|\mathrm{In}(w, B')| > 5p \cdot |G|^\varepsilon$，否则便无需证明。

根据断言 11、引理29，并且由于 w 是非叶节点，我们得到 $\mathrm{Out}(w, B')$ 是 w 在 B' 中的子节点的子集。因此，为了界定 $\mathrm{Out}(w, B')$，只需证明 w 在 B' 中至多有 $4p \cdot |G|^\varepsilon + 1$ 个子节点。由于 w 是 B' 中的非叶节点，根据断言 12，对于某个 $i \in [k]$，我们必须有 $w = w_i \in W'$。请记住， B_i 是处理 w_i 之前的准灌木，而 B_{i+1} 是处理 w_i 之后的准灌木。显然， w_i 在 B_{i+1} 中的子节点数至少与其在 B' 中的一样多。

It therefore suffices to show that w_i has at most $4p \cdot |G|^\varepsilon + 1$ children in B_{i+1}.

现在我们希望使用序 $\prec$ 对 $\mathrm{In}(w_i, B_i)$ 中的节点进行划分。然而， $\prec$ 仅针对 B 的节点定义。我们通过执行兄弟收缩，从 B 得到了 $B_i = B[\![\mathrm{cp}(w_1) \leftarrow S_1, \dots, \mathrm{cp}(w_{i-1}) \leftarrow S_{i-1}]\!]$。对于每个 $j < i$， B_i 都包含一个叶节点 $\mathrm{cp}(w_j)$；该叶节点是在收缩 S_j 时创建的，不存在于 B 中，因此不受 $\prec$的排序。为解决这一问题，我们转而使用定义 13 给出的扩展序 $\mathrm{cp}(\prec)$。我们注意到， B_i 中的所有节点也都存在于 $\mathrm{cp}(B)$ 中。因此，$\mathrm{cp}(\prec)$ 完全确定了 B_i 中节点的顺序，使得 $V(T) \cap V(T_i)$ 按照 $\prec$ 中的顺序排列，并且每个节点 $\mathrm{cp}(w_j) \in V(T) \setminus V(T_i)$ 都是其父节点 w_j 的直接前驱。

由 (19) 可知，就着色数而言，$\mathrm{cp}(\prec)$ 是 $\mathrm{cp}(B^*)$ 的一个良好序。引理 25 指出 $B_i^* \sqsubset \mathrm{cp}(B^*)$，因此 (19) 给出的界可推广到 B_i，也就是说，

$$\mathrm{wcol}_1\big(B_i, \mathrm{cp}(\prec)\big) \le p \cdot |G|^\varepsilon. \tag{20}$$

现在，我们可以根据这些节点相对于 cp($\prec$) 是小于还是大于 w_i ，将 In(w_i, B_i) 中的节点划分为集合 In$_\prec$(w_i, B_i) 和 In$_\succ$(w_i, B_i)。我们先给出 In$_\prec$(w_i, B_i) 大小的上界。根据定义 16，In$_\prec$(w_i, B_i) $\subseteq$ In(w_i, B_i) 中的每个节点都有一个指向 w（位于 B_i 中）的指针。In$_\prec$(w_i, B_i) 中的所有节点都小于 w_i，因此 w_i 能弱 1-到达 In$_\prec$(w_i, B_i) 中的所有节点。由 (20) 可得

$$|\mathrm{In}_\prec(w_i, B_i)| \leq \mathrm{wcol}_1\big(B_i, \mathrm{cp}(\prec)\big) \leq p \cdot |G|^\varepsilon.$$

我们假设 |在(w, B')| $\geq 5p \cdot |G|^\varepsilon$。根据断言 13， |在($w$, B_i)| > |在(w, B')|，因此

$$|\mathrm{In}_\succ(w_i, B_i)| = |\mathrm{In}(w, B')| - |\mathrm{In}_\prec(w, B')| > 4p \cdot |G|^\varepsilon. \tag{21}$$

我们终于来到了这一证明背后的核心论证。为此，我们将 T_i 中 w_i 的子节点划分为两个集合：集合 A 包含所有满足以下条件的子节点 a ： In$_\succ$(w_i, B_i)$^-$ 中指向 a 的节点不到一半；其余子节点组成集合 $\bar{A}$。另见图 8。

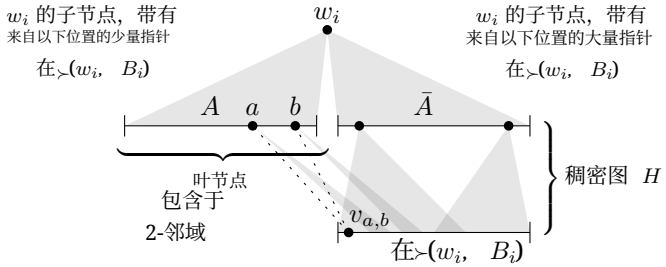


图 8：引理30证明背后的核心论证。 A 下方的叶节点包含在半径为 2 的邻域中，因此可以收缩。要么 w_i 的其余子节点 $\bar{A}$ 很少，要么集合 In$_\succ$(w_i, B_i) 很小；否则就会出现一个大的稠密图 H 。

我们来证明， A 下方的所有叶节点都包含在 $G(B)$ 的半径为 2 的邻域中。根据 A 的定义，对于每一对 a， $b \in A$，必定存在 $v_{a,\,b} \in$ In$_\succ$(w_i, B_i)，既不指向 a，也不指向 b。根据向上闭包可知，$v_{a,\,b}$ 不指向 $T_i(a)$ 中的任何节点，也不指向 $T_i(b)$ 中的任何节点。由于 $v_{a,\,b}$ 有一个指向 w_i 的正向指针，我们知道 $v_{a,\,b}$ 在 $G(B_i)$ 中与 a 和 b 下方的所有叶节点 $L^{B_i}(a)$ 及 $L^{B_i}(b)$ 连通。

我们论证，这在 $G(B)$ 中也成立。按照序 cp($\prec$)，$v_{a,b}$ 排在 w_i之后。如前所述，这意味着 $v_{a,b} \in V(T)$ 以及 $w_i \prec v_{a,b}$。对 $v_{a,b}$ 应用断言 8，可知 $v_{a,b}$ 不仅是 T_i 中的叶节点，也是 T中的叶节点。断言 8 还说明 $T_i(w_i) = T(w_i)$，因此特别有 $L^{B_i}(a) = L^B(a)$，且 $L^{B_i}(b) = L^B(b)$。根据断言 9， B 中 $T(w_i)$ 与 $v_{a,b}$ 之间的指针和 B_i中的相同。因此，在 $G(B)$ 中，$v_{a,b}$ 也与 $L^{B_i}(a)$ 和 $L^{B_i}(b)$ 中的所有节点连通。由于这对每一对 $a, b \in A$ 都成立， A 下方的叶节点（它们在 T_i 中与在 T 中相同）包含在 $G(B)$ 中一个半径为 2 的邻域内。

请记住， $S_i \subseteq V(T_i)$ 被选为 T_i 中 w_i的一个极大（但可能为空）子节点集合，使得 $G(B)$ 中存在一个半径为 2 的邻域，包含 T_i中 S_i 下方的所有叶节点 $L^{B_i}(S_i)$。我们刚刚证明， A 是 S_i 的候选集合，因此，在处理 w_i时，我们将一个集合 S_i （其中至少包含其 $|A|$ 个子节点）收缩为位于$_-w_i$下方的单个新节点 cp(w_i)。这意味着 B_{i+1} 中 w_i 的子节点数量至多为 $|A| + 1$。

It therefore suffices to show that $|\bar{A}| \leq 4p \cdot |G|^\varepsilon$.

$^-$ $^-$我们对 A next 的大小进行界定。反设 $|A| > 4p \cdot |G|^\varepsilon$，从而导出矛盾。根据 (21)，还有$_-$|在$_\succ$($w_i$, B_i)| $> 4p \cdot |G|^\varepsilon$中，考虑由指针定义的二分图 H： 一部分为 A （称为上部），另一部分为 In$_\succ$(w_i, B_i)（称为下部）。另请参见

¯图 8 展示了 H。请记住，根据定义， A 中的每个节点都至少有一半的 $\mathrm{In}_{\succ}(w_i,\ B_i)$ 中的节点指向它。因此，上部的每个节点都与下部至少一半的节点连通。我们将 H 中每个顶点的边数界定为

$$\frac{|\bar{A}|\cdot\frac{1}{2}|\mathrm{In}_{\succ}(w_i,B_i)|}{|\bar{A}|+|\mathrm{In}_{\succ}(w_i,B_i)|}\geq\frac{|\bar{A}|\cdot\frac{1}{2}|\mathrm{In}_{\succ}(w_i,B_i)|}{2\max(|\mathrm{In}_{\succ}(w_i,B_i)|,|\bar{A}|)}=\frac{1}{4}\min(|\bar{A}|,|\mathrm{In}_{\succ}(w_i,B_i)|)>p\cdot|G|^{\varepsilon}.$$

因此，图 H 的平均度大于 $2p\cdot|G|^{\varepsilon}$，根据引理 19，存在一个子图 H'，其最小度大于 $p\cdot|G|^{\varepsilon}$。这意味着 $\mathrm{wcol}_1(B_i)\geq\mathrm{wcol}_1(H')>p\cdot|G|^{\varepsilon}$，这与 (20) 矛盾。

因此，我们必须有 $|$。由此可得， w_i 在 B_{i+1} 中至多有 $4p\cdot|G|^{\varepsilon}+1$ 个子节点，从而得到 $|\mathrm{Out}(w_i,\ B')|$ 的所需上界。 □

7.8 收缩的稀疏性

现在我们将证明，所构造的 8-收缩是稀疏的。首先证明它不包含大型细分团。下文中，当准灌木 B 能从上下文中明确时，我们将用 $\mathrm{In}(w)$ 和 $\mathrm{Out}(w)$ 代替 $\mathrm{In}(w,\ B)$ 和 $\mathrm{Out}(w,\ B)$。

引理 31。 对于任意的 r、$m\in\mathbb{N}^+$，满足 $m\geq 20r$，以及任意向上封闭、无衣架的准灌木 B，若

- 弱着色数 $_{9r}(B,\ \prec)\leq m$，并且
- 对于每个 $w\in V(T)$，或者 $\mathrm{In}(w)\leq m$，或者 $\mathrm{Out}(w)\leq m$，

那么 $G(B)$ 不包含大小为 m^7 的 r-浅拓扑团子式。

证明。 反设 $G(B)$ 包含一个大小为 m^7 的 r-浅拓扑团子式。它由 m^7 个主顶点 以及 $\binom{m^7}{2}$ 条两两顶点不相交的细分路径组成，这些路径的长度至多为 $(2r+1)$，并连接所有主顶点对。若 $u\prec v$，我们将每条细分路径 $P_{uv}=(u,\ldots,v)$ 定向为.....。

我们为每个主顶点 u 指定一个节点 $p(u)\in V(T)$：如果 u 的父节点 w 具有 $u\in\mathrm{Out}(w)$ 和 $|\mathrm{Out}(w)|\leq m$，则令 $p(u)=w$；否则，令 $p(u)=u$。我们令 $A_u:=\{u,p(u)\}$，并称两个不同的顶点 u 和 v 重叠，当且仅当 $A_u\cap A_v\neq\varnothing$。下面统计可能与 u 重叠的其他主顶点 v 的数量。由于 $u\neq v$，我们知道集合 A_u 和 A_v 相交于一个顶点 $p(v)=p(u)$，该顶点不同于 u 和 v。根据定义，$v\in\mathrm{Out}(p(v))=\mathrm{Out}(p(u))$，且 $|\mathrm{Out}(p(u))|\leq m$，因此每个顶点 u 至多与 m 个其他顶点重叠。我们从 m^7 个主顶点中贪心地选取一个由两两不重叠的主顶点组成、大小为 m^5 的集合 S。这是可行的，因为 $m\geq 10$，因此

$$\frac{m^7}{m+1}\geq m^5=|S|.$$

对于 $(u,v)\in E(G(B))$，令 $q(u,v)$ 为 (u,v) 的连接点。由于灌木向上封闭且无衣架，根据引理29，我们有 $q(u,v)$ 要么等于 v，要么是 v 的父节点。根据定义 16，我们直接得到一个重要观察：

$$u\in\mathrm{In}(q(u,v))\text{ and }v\in\mathrm{Out}(q(u,v)).\tag{22}$$

我们继续在由 S 中的主顶点张成的较小细分中进行讨论。对于细分路径 $P = (v_1, \ldots, v_l)$，我们将 $A_P := \{v_2, q(v_2, v_3)\ v_3, \ldots, q(v_{l-2}, v_{l-1})\ v_{l-1}\}$ 定义为连接 P 的内部节点的隧道上的顶点。注意，当且仅当 P 的长度为一时，A_P 为空，也就是说，它通过一条边直接连接两个主顶点。

若主顶点 $u \in S$ 与细分路径 P **重叠**，则称它们重叠，当且仅当 $A_u \cap A_P \neq \varnothing$。由于 u不是 P的内部节点，若 v与 P重叠，则对于 P中的某些内部节点 v, v'，有 $u \neq p(u) = q(v', v)$。根据 (22) 和 $p(u)$ 的定义，$v \in \mathsf{Out}(q(v', v)) = \mathsf{Out}(p(u))$ 且 $|\mathsf{Out}(p(u))| \leq m$。由于$v$ 是 P 的内部顶点，且所有细分路径的内部顶点互不相交，因此 u 至多与 m 条细分路径重叠。结合 $m \geq 10$，在 S 中的两个顶点之间延伸、但不与 S 中的任何顶点重叠的细分路径集合 $\mathcal{P}_1$，其大小至少为

$$|\mathcal{P}_1| \geq \binom{|S|}{2} - |S| \cdot m = \frac{m^5 \cdot (m^5 - 1)}{2} - m^5 \cdot m \geq m^9.$$

若两条细分路径 P和 P' **重叠**，则称它们重叠，当且仅当 $A_P \cap A_{P'} \neq \varnothing$。我们来统计有多少条其他细分路径 $P' = (v'_1, \ldots, v'_l)$可能与 P重叠。我们知道 P和 P'的内部顶点互不相交，因此集合 A_P和 $A_{P'}$在顶点 $q = q(v'_{j-1}, v'_j)$处相交。我们使用 (22)，并区分两种情况：

- $|\mathsf{Out}(q)| \leq m$。由于 $v'_j \in \mathsf{Out}(q)$，且所有细分路径的内部顶点互不相交，因此满足 A_P 与 $A_{P'}$ 在 q 中相交的 P' 至多有 m 种可能选择。
- $|\mathsf{In}(q)| \leq m$。由于 $v'_{j-1} \in \mathsf{In}(q)$，且所有细分路径的内部顶点互不相交，同样，满足 A_P 与 $A_{P'}$ 在 q 中相交的 P' 至多有 m 种可能选择。

由于 q 至多有 $2r$ 种可能选择，因此与 P 重叠的其他路径 P' 总共至多有 $2rm$ 条。由 $m \geq 20r$ 可知，我们可以通过贪心法选取一个极大的两两不重叠路径子集 $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}_1$，其大小至少为

$$|\mathcal{P}_2| \geq \frac{|\mathcal{P}_1|}{2rm + 1} \geq \frac{m^9}{2rm + 1} \geq m^7.$$

如果 P 是一条细分路径，且 $v \in P$ 是 P 的起点或端点，我们就称 P 与 v**关联**。令 v' 为 v 在 P 中的邻点。由于 v 是起点或端点，因此 v' 有唯一确定的取值。注意，如果 P 不含内部顶点，也就是说，P 的长度为一，那么 v' 就是该路径的另一个起点或端点。如果 $q(v', v) \in A_v$，我们称 P 与 v**私下连接**。

请记住，$q(v', v)$要么等于 v，要么等于 v的父节点 w。如果 $q(v', v) \notin A_v$，那么 $q(v', v) = w$，且 $p(v) = v$。根据 $p(v)$的定义，这意味着 $v \notin \mathsf{Out}(w)$或 $|\mathsf{Out}(w)| > m$。根据（22），$v \in \mathsf{Out}(q(v', v)) = \mathsf{Out}(w)$，因此 $|\mathsf{Out}(w)| > m$，这意味着 $|\mathsf{In}(w)| \leq m$。再次根据（22），$v' \in \mathsf{In}(q(v', v)) = \mathsf{In}(w)$。注意，与 v 相接的细分路径在它们的 v邻点 v' 上都各不相同。因此，对于每个主顶点 $v \in S$，与 v 相接的细分路径中，至多有 m 条不与其私下相连。设 $m \geq 10$，那么在 S 中同时与其两个端点私下相连的细分路径子集 $\mathcal{P}_3 \subseteq \mathcal{P}_2$ 的大小至少为

$$|\mathcal{P}_3| \geq m^7 - |S| \cdot m = m^7 - m^5 \cdot m > m^6.$$

现在来看看辅助图 H，其顶点集为 S，并且当 $P_{uv} \in \mathcal{P}_3$ 时，两个顶点$u \prec v$ 相连。我们将论证，H 是 B 的盖夫曼图的一个（$r+1$）-浅层 minor（但不一定是拓扑 minor）：注意，对于所有 $v \in S$ 和 $P \in \mathcal{P}_3$，集合 A_v 和 A_P 两两不相交。令 $P = P_{uv} \in \mathcal{P}_3$。根据我们对 $\mathcal{P}_3$ 的选择，如果 $A_P \neq \varnothing$，则存在从 A_P 指向 A_u 的指针，以及从 A_P 指向 A_v 的指针。如果 $A_{P_{uv}} = \varnothing$，则 A_u 之间存在指针

和 A_v 之间存在指针。由于 A_P 至多包含 $2(r-1)$ 个顶点，而 A_u 和 A_v 至多包含两个顶点，A_P 中的每个顶点在 B 的盖夫曼图中到 u 或 v 的距离至多为 $r+1$。因此，对于 $v \in S$ 和 $P \in \mathcal{P}_3$，集合 A_v 和 A_P 共同见证了 H 是 B 的盖夫曼图的一个（$r+1$）-浅层 minor。H 的密度为

$$\frac{|\mathcal{P}_3|}{|S|} > \frac{m^6}{m^5} = m,$$

因此 $\nabla_{r+1}(B) > m$。根据命题 1 中的 (18),

$$\mathrm{wcol}_{9r}(B) \geq \mathrm{wcol}_{4r+5}(B) = \mathrm{wcol}_{4(r+1)+1}(B) \geq \nabla_{r+1}(B) > m.$$

这与我们的假设矛盾，从而完成了该引理的证明。 □

我们将使用以下工具，以便在足够稠密的图中构造大型拓扑团子式。

引理 32 ([Dvo07, 引理 3。15])。令 $\rho' \in \mathbb{N}$。存在 n_0' 和 ρ''，使得所有具有 $n \geq n_0'$ 个顶点且最小度至少为 $n^{1/\rho'}$ 的图 G，都包含一个大小至少为 $n^{1/\rho''}$ 的 ρ''-浅拓扑团子式。

关于浅拓扑子式，我们还需要以下传递性观察。

引理 33 (参见 [NDM12]中的命题 4.2)。如果图 A 包含图 B 作为 b-浅拓扑 *minor*，并且 B 本身包含图 C 作为 c-浅拓扑子式，那么 A 就包含 C 作为 $4bc$-浅拓扑子式。

利用这两个引理，我们将引理 31 推广到关于叶节点数量的多项式阈值。

引理 34。对于每个 $\rho \in \mathbb{N}$，都存在 μ、$n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于每个 n-叶节点、向上封闭、无衣架的准灌木 B，若其满足 $n \geq n_0$，则

- 弱着色数$_\mu(B) \leq n^{1/\mu}$，并且
- 对于每个 $w \in V(T)$，要么 $\mathrm{In}(w) \leq n^{1/\mu}$，要么 $\mathrm{Out}(w) \leq n^{1/\mu}$，

那么 弱着色数$_\rho(G(B)) \leq n^{1/\rho}$。

证明。固定 $\rho \in \mathbb{N}$。我们先取 $n_0 = 1$，并在证明过程中根据需要逐步增大它。常数 $\mu \in \mathbb{N}$ 稍后选定。我们取一个有 $n \geq n_0$ 个叶节点、满足该引理前提的准灌木 B。令 $G = G(B)$ 为其表示图，该图有 n 个顶点。反设弱着色数$_\rho(G) > n^{1/\rho}$。结合命题 1 中的不等式 (15) 和 (16)，可得

$$n^{1/\rho} < \mathrm{wcol}_\rho(G) \leq 1 + \rho(6\rho)^{\rho^2}\left(\lceil \tilde{\nabla}_\rho(G) \rceil\right)^{3\rho^2}.$$

因此，我们可以选择 ρ' 和 n_0（作为 ρ的函数），使得对于 $n \geq n_0$，$\tilde{\nabla}_\rho(G) \geq n^{1/\rho'}$。换言之，$G$ 包含一个 ρ-浅拓扑子式，每个顶点至少有 $n^{1/\rho'}$ 条边，因此其平均度至少为 $2n^{1/\rho'}$。根据引理 19，该 ρ-浅拓扑子式存在一个子图 H，其最小度至少为 $n^{1/\rho'}$。接下来，我们希望将引理 32 应用于 H。根据该引理，选择 ρ'' 和 n_0' 作为 ρ' 的函数。更新 n_0，使得 $n_0^{1/\rho'} \geq n_0'$。由于 H 至少有 $n_0^{1/\rho'} \geq n_0'$ 个顶点，因此满足引理 32 的前提条件。于是，H 包含

一个大小至少为 $n^{1/\rho''}$的 ρ''-浅拓扑团子式。由于 H 本身是一个 ρ-浅拓扑子式 G，并且浅拓扑子式关系具有传递性（引理 33），因此 G 包含一个大小为 $n^{1/\rho''}$的$4\rho\rho''$-浅拓扑团子式。

我们选择 $r := 4\rho\rho''$, $\mu := 9r$ 和 $m := \lfloor n^{1/\mu} \rfloor$。因此， G 包含一个大小至少为 $n^{1/\rho''} \geq n^{1/r} > n^{7/9r} = n^{7/\mu} \geq m^7$ 的 r-浅拓扑团子式。根据我们的假设，对于每个$w \in V(T)$，要么 $\mathsf{In}(w) = \lfloor \mathsf{In}(w) \rfloor \leq \lfloor n^{1/\mu} \rfloor = m$，要么 $\mathsf{Out}(w) = \lfloor \mathsf{Out}(w) \rfloor \leq \lfloor n^{1/\mu} \rfloor = m$。我们递增 n_0，使得 $m = \lfloor n^{1/9r} \rfloor \geq \lfloor n_0^{1/9r} \rfloor \geq 20r$。由于引理 31 的所有前提均已满足，$\mathsf{wcol}_{9r}(B) > m = \lfloor n^{1/\mu} \rfloor$。由于 $\mathsf{wcol}_{9r}(B)$ 是整数，因此 $\mathsf{wcol}_{9r}(B) > n^{1/\mu}$。这一结论与我们的假设矛盾，从而完成了引理的证明。 □

7.9 总结

我们现在可以证明定理 12。为方便起见，我们重述如下。

定理 12. 设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏的图类。对于每个 $G \in \mathscr{C}$，都存在 G的一个 *8*-收缩 $\mathrm{contract}(G)$，它在以下意义下是稀疏的：对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $r \in \mathbb{N}$，都存在 $c(r, \varepsilon)$，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$

$$\mathrm{wcol}_r(\mathrm{contract}(G)) \leq c(r, \varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}.$$

证明. 我们首先证明，对于每个 $\rho \in \mathbb{N}$，都存在 $n_0(\rho)$，使得对所有满足 $|G| \geq n_0(\rho)$ 的 $G \in \mathscr{C}$，都有 $\mathsf{wcol}_\rho(G(B)) \leq |G|^{1/\rho}$。其中， B 是一个向上封闭、无衣架的准灌木，用于表示 G 的一个 8-收缩；我们通过引理30得到它。固定 $\rho \in \mathbb{N}$。令 μ 和 n_0 （作为 ρ的函数）为引理 34 中相应的常数。由于我们通过引理30得到了 B，

- 弱着色数$_\mu(B) \leq c(\mu, 1/2\mu) \cdot |G|^{1/2\mu}$,
- 对于每个 e 每个节点 w 要么属于 B $\mathsf{In}(w) \leq t(1/2\mu) \cdot |G|^{1/2\mu}$，要么属于 $\mathsf{Out}(w) \leq t(1/2\mu) \cdot |G|^{1/2\mu}$.

我们可以增大 n_0 （作为 $c(\mu, 1/2\mu)$ 和 $t(1/2\mu)$ 的函数），使得对于 $|G| \geq n_0$

- 弱着色数$_\mu(B) \leq n^{1/\mu}$,
- 对于 B 中的每个节点 w，它要么属于 $\mathsf{In}(w) \leq n^{1/\mu}$，要么属于 $\mathsf{Out}(w) \leq n^{1/\mu}$。

由于 B 向上封闭且不包含衣架，根据引理 34，对于 $|G| \geq n_0$,

$$\mathrm{wcol}_\rho(G(B)) \leq |G|^{1/\rho}.$$

现在，对于 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，令 $\rho = \max\{r, \varepsilon^{-1}\}$ 和 $c(r, \varepsilon) = n_0(\rho)$。那么对于所有满足 $|G| \geq n_0(\rho)$ 的图 $G \in \mathscr{C}$,

$$\mathrm{wcol}_r(G(B)) \leq \mathrm{wcol}_\rho(G(B)) \leq |G|^{1/\rho} \leq |G|^{\varepsilon} \leq c(r, \varepsilon) \cdot |G|^{1/\varepsilon}.$$

对于所有满足 $|G| < n_0(\rho)$ 的图 $G \in \mathscr{C}$，我们显然可以得到相同的界

$$\mathrm{wcol}_r(G(B)) \leq |G(B)| \leq |G| < n_0(\rho) = c(r, \varepsilon) \leq c(r, \varepsilon) \cdot |G|^{1/\varepsilon}.$$ □

引理 17 指出，着色数较小的图存在度较低的邻域覆盖。因此，结合定理 12 和引理 17，可直接得到以下结果。

引理 35。 设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏的图类。对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $c(r, \varepsilon)$，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$，存在 G 的一个 *8*-收缩 G'，它具有一个r-邻域覆盖，其度至多为 $c(r, \varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}$，且扩展度至多为 $2r$。

借助引理 18，我们现在立即得到主要结果。翻转封闭的稀疏邻域覆盖（其中 $\sigma(r)$ 统一设为 $34r$）可由以下观察得到：每个翻转后的类$\mathscr{C}_\ell$ 仍然是结构上处处稀疏的，因此我们可以对其应用定理 11 的第一部分。

定理 11. 设 $\mathscr{C}$ 是一个结构上处处稀疏的图类。对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $c(r,\varepsilon)$，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$，都存在一个弱 r-邻域覆盖，其度至多为 $c(r,\varepsilon) \cdot |G|^{\varepsilon}$，且扩展度至多为 $34r$。特别地，$\mathscr{C}$ 具有翻转封闭的稀疏弱邻域覆盖。

参考文献

[AA14] Hans Adler 和 Isolde Adler。将无处稠密图类理解为模型论中的一个经典概念。《欧洲组合学杂志》，36:322–330，2014年。[AT] 匿名作者和 Szymon Toru´nczyk。重新审视无处稠密模型检测。即将发表。[BDG+22] ´Edouard Bonnet、Jan Dreier、Jakub Gajarsk´y、Stephan Kreutzer、Nikolas M¨ahlmann、Pierre Simon 和 Szymon Torunczyk。对有界局部团宽度类的解释进行模型检测。载于 Christel Baier 和 Dana Fisman 编，《LICS '22：第37届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会》，以色列海法，2022年8月2日至5日，第54:1–54:13页。ACM，2022年。[BGOdM+22] ´Edouard Bonnet、Ugo Giocanti、Patrice Ossona de Mendez、Pierre Simon、St´ephan Thomass´e 和 Szymon Toru´nczyk。孪生宽度 IV：有序图与矩阵。载于《第54届ACM SIGACT计算理论年会论文集》，第924–937页，2022年。[BKTW21] ´Edouard Bonnet、Eun Jung Kim、St´ephan Thomass´e 和 R´emi Watrigant。孪生宽度 I：可处理的一阶逻辑模型检测。《美国计算机学会会刊》（JACM），69(1):1–46，2021年。[BL22] Samuel Braunfeld 和 Michael C Laskowski。单子 NIP 的存在性刻画。arXiv 预印本 arXiv:2209.05120，2022年。[BS85] John T Baldwin 和 Saharon Shelah。二阶量词与理论的复杂性。《圣母大学形式逻辑杂志》，26(3):229–303，1985年。[CLS21] Michael B Cohen、Yin Tat Lee 和 Zhao Song。以当前矩阵乘法的时间复杂度求解线性规划。《美国计算机学会会刊》（JACM），68(1):1–39，2021年。[CMR00] Bruno Courcelle、Johann A Makowsky 和 Udi Rotics。有界团宽度图上的线性时间可解优化问题。《计算理论系统》，33(2):125–150，2000年。[Cou90] Bruno Courcelle。图的单子二阶逻辑 I：有限图的可识别集合。《信息与计算》，85(1):12–75，1990年。[DGK07] Anuj Dawar、Martin Grohe 和 Stephan Kreutzer。局部排除一个小面。在《第22届IEEE计算机科学逻辑年会》（LICS 2007）上发表，第270–279页。IEEE，2007年。

[DGK+22a] Jan Dreier、Jakub Gajarsk´y、Sandra Kiefer、Micha-l Pilipczuk 和 Szymon Toru´nczyk。稀疏图转导的树状分解。载于《第37届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会论文集》，LICS '22，美国纽约州纽约市，2022年。计算机协会。[DGK+22b] Jan Dreier、Jakub Gajarsk´y、Sandra Kiefer、Micha-l Pilipczuk 和 Szymon Toru´nczyk。稀疏图转导的树状分解，2022年。[Die12] Reinhard Diestel。《图论》，第4版，数学研究生教材第173卷。Springer，2012年。[DKT10] Zdenˇek Dvoˇr´ak、Daniel Kr´al 和 Robin Thomas。判定稀疏图的一阶性质。载于《2010年IEEE第51届计算机科学基础年会论文集》，第133–142页。IEEE，2010年。[DMST22] Jan Dreier、Nikolas M¨ahlmann、Sebastian Siebertz 和 Szymon Toru´nczyk。单子稳定类和单子 NIP 类中的不可区分对象与宽度性。arXiv 预印本 arXiv:2206.13765，2022年。[Dre21] Jan Dreier。Lacon 分解与灌木分解：有界扩张类一阶转导的一种新刻画。载于《第36届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会》，LICS 2021，第1–13页。IEEE，2021年。[Dvo07] Zdenˇek Dvoˇr´ak。组合对象的渐近结构，2007年。[Dvo22] Zdenˇek Dvoˇr´ak。结构稀疏图中短距离的表示，2022年。[EF99] Heinz-Dieter Ebbinghaus 和 J¨org Flum。《有限模型论》。施普林格科学与商业媒体，1999年。[EK17] Kord Eickmeyer 和 Ken-ichi Kawarabayashi。地图图上的一阶逻辑模型检测。载于《国际计算理论基础研讨会》，第204–216页。Springer，2017年。[Fef57] Solomon Feferman。Ehrenfeucht 和 Fra¨ıss´e 的近期研究。《符号逻辑暑期研究所论文集》，纽约州伊萨卡，第201–209页，1957年。[FG01a] J¨org Flum 和 Martin Grohe。固定参数可处理性、可定义性与模型检测。《SIAM计算杂志》，31(1):113–145，2001年。[FG01b] Markus Frick 和 Martin Grohe。判定局部树状可分解结构的一阶性质。《美国计算机学会会刊》（JACM），48(6):1184–1206，2001年。[FG04] Markus Frick 和 Martin Grohe。重新审视一阶逻辑与单子二阶逻辑的复杂性。《纯粹与应用逻辑年刊》，130(1-3):3–31，2004年。[Gai82] Haim Gaifman。论局部与非局部性质。载于《逻辑与数学基础研究》，第107卷，第105–135页。Elsevier，1982年。[GGK20] Jakub Gajarsk`y、Maximilian Gorsky 和 Stephan Kreutzer。图的一阶逻辑中的微分博弈、局部性与模型检测。arXiv 预印本 arXiv:2007.11345，2020年。

[GHK+13] Robert Ganian, Petr Hlinˇen`y, Daniel Kr´al, Jan Obdrˇz´alek, Jarett Schwartz 和 Jakub Teska。《区间图的一阶逻辑模型检测》。载于《国际自动机、语言与编程学术讨论会》，第250–262页。Springer，2013年。[GHL+14] Robert Ganian, Petr Hlinˇen`y, Alexander Langer, Jan Obdrˇz´alek, Peter Rossmanith 和 Somnath Sikdar。《MSO1模型检验复杂度的下界》。《计算机与系统科学杂志》，80(1):180–194，2014年。[GHO+20] Jakub Gajarsk`y, Petr Hlinˇen`y, Jan Obdrˇz´alek, Daniel Lokshtanov 和 MS Ra- manujan。《稠密图类一阶逻辑模型检测的新视角》。《ACM 计算逻辑汇刊》(TOCL)，21(4):1–23，2020年。[GK11] Martin Grohe 和 Stephan Kreutzer。《算法元定理的方法》。《有限组合学中的模型论方法》，558:181–206，2011年。[GKN+20] Jakub Gajarsk`y, Stephan Kreutzer, Jaroslav Neˇsetˇril, Patrice Ossona De Mendez, Micha-l Pilipczuk, Sebastian Siebertz 和 Szymon Toru´nczyk。《有界扩张类的一阶解释》。《ACM 计算逻辑汇刊》(TOCL)，21(4):1–41，2020年。[GKR+18] Martin Grohe, Stephan Kreutzer, Roman Rabinovich, Sebastian Siebertz 和 Konstantinos Stavropoulos。《处处稀疏图的着色与覆盖》。《SIAM离散数学杂志》，32(4):2467–2481，2018年。[GKS17] Martin Grohe, Stephan Kreutzer 和 Sebastian Siebertz。《判定处处稀疏图的一阶性质》。《美国计算机学会会刊》，64(3):17:1–17:32，2017年。[GMM+23] Jakub Gajarsk´y, Nikolas M¨ahlmann, Rose McCarty, Pierre Ohlmann, Micha-l Pilipczuk, Wojciech Przybyszewski, Sebastian Siebertz, Marek Soko-lowski 和 Szy- mon Toru´nczyk。《单子稳定图类的 Flipper 游戏》。arXiv预印本，arXiv:2301.13735，2023年。[GPPT22] Jakub Gajarsk´y, Micha-l Pilipczuk, Wojciech Przybyszewski 和 Szymon Toru´nczyk。《孪生宽度与类型》。载于第49届《国际自动机、语言与编程学术讨论会》，第123:1–123:21页，2022年。[GPT22] Jakub Gajarsk`y, Micha-l Pilipczuk 和 Szymon Toru´nczyk。《有界孪生宽度的稳定图》。载于《第37届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会论文集》，第1–12页，2022年。[Gro08] Martin Grohe。《逻辑、图与算法》。《逻辑与自动机》，2:357–422，2008年。[Hod97] Wilfrid Hodges。《简明模型论》。剑桥大学出版社，1997年。[HPR17] Petr Hlinen´y, Filip Pokr´yvka 和 Bodhayan Roy。《几何图的一阶逻辑模型检测》。载于 Daniel Lokshtanov 和 Naomi Nishimura 编，《第12届参数化与精确计算国际研讨会》，IPEC 2017，2017年9月6–8日，奥地利维也纳，LIPIcs第89卷，第19:1–19:12页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2017年。[IP01] Russell Impagliazzo 和 Ramamohan Paturi。《关于k-SAT的复杂度》。《计算机与系统科学杂志》，62(2):367–375，2001年。

[IPZ01] Russell Impagliazzo, Ramamohan Paturi 和 Francis Zane。《哪些问题具有强指数复杂度？》。《计算机与系统科学杂志》，63(4):512–530，2001年。[Kre11] Stephan Kreutzer。《算法元定理》。《有限与算法模型论》，379:177–270，2011年。[KT10] Stephan Kreutzer 和 Siamak Tazari。《单子二阶逻辑复杂度的下界》。载于《 2010 年第 25 届 IEEE 计算机科学逻辑年会》，第189–198页。IEEE，2010年。[KvRW+05] Fabian Kuhn, Pascal von Rickenbach, Roger Wattenhofer, Emo Welzl 和 Aaron Zollinger。《蜂窝网络中的干扰：最小成员集合覆盖问题》。载于王路生编《计算与组合数学》，第188–198页，柏林、海德堡，2005年。Springer Berlin Heidelberg。[KY03] Hal A Kierstead 和 Daqing Yang。《图上的序与博弈染色数》。《序》，20(3):255–264，2003年。[Lib04] Leonid Libkin。《有限模型论基础》，第41卷。Springer，2004年。[Mak04] Johann A Makowsky。《Feferman–Vaught定理的算法应用》。《纯粹与应用逻辑年刊》，126(1-3):159–213，2004年。[NDM12] Jaroslav Neˇsetˇril 和 Patrice Ossona De Mendez。《稀疏性：图、结构与算法》，第28卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[NdM16] Jaroslav Neˇsetˇril 和 P Ossona de Mendez。《结构稀疏性》。《俄罗斯数学综述》，71(1):79，2016年。[Pel00] David Peleg。《分布式计算：一种局部性敏感方法》。SIAM，2000年。[PPS20] Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk 和 Sebastian Siebertz。《“稀疏性”课程讲义》，课程由华沙大学数学、信息学与力学学院开设，2017/18和2019/20冬季学期。可查阅：https: //www.mimuw.edu.pl/~mp248287/sparsity2。[PZ78] Klaus-Peter Podewski 和 Martin Ziegler。《稳定图》。《Fundamenta Mathematicae》，100(2):101–107，1978年。[RT87] Prabhakar Raghavan 和 Clark D Tompson。《随机舍入：一种构造可证明良好算法和算法证明的技术》。《组合数学》，7(4):365–374，1987年。[See96] Detlef Seese。《线性时间可计算问题与一阶描述》。《计算机科学中的数学结构》，6(6):505–526，1996年。[She90] Saharon Shelah。《分类理论：非同构模型的数量》。Elsevier，1990年。[Tor22] Szymon Toru´nczyk。《有限模型论讲义》。2022年。[TZ05] Mikkel Thorup 和 Uri Zwick。《近似距离预言机》。《美国计算机学会会刊》(JACM)，52(1):1–24，2005年。

[Vai89] Pravin M Vaidya。利用快速矩阵乘法加速线性规划。载于第*30*届计算机科学基础年会，第332–337页。IEEE计算机学会，1989年。

[Vaz10] Vijay V. Vazirani。《近似算法》。施普林格出版公司，2010年。[war16]

华威算法、逻辑与结构研讨会——开放问题专题会议。
https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/daniel_kral/ alglogstr/openproblems.pdf，2016年。[在线；访问日期：07-Feb-2023]。