arXiv:2302.03546v2 [cond-mat.soft] 3 Jul 2023

黏弹性胶囊悬浮液：膜黏度对瞬态动力学的影响

Fabio Guglietta[1,†,*] **Francesca Pelusi**[1,‡] **Marcello Sega**[2] **OthmaneAouane**[1] **Jens Harting**[1,3]于利希研究中心埃朗根-纽伦堡可再生能源赫姆霍兹研究所（IEK-11），考尔街 1 号，91058 埃朗根，德国[2]伦敦大学学院化学工程系，伦敦 WC1E 7JE，英国[3]埃朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学化学与生物工程系及物理系，考尔街 1 号，91058 埃朗根，德国[†]现任单位：罗马第二大学物理系与意大利国家核物理研究所，科学研究路 1 号，00133 罗马，意大利[‡]现任单位：意大利国家研究委员会计算应用研究所，陶里尼路 19 号，00185 罗马，意大利

[*]f.guglietta@fz-juelich.de

摘要

众所周知，膜黏度在孤立的黏弹性胶囊的瞬态动力学中发挥着核心作用：它会降低胶囊的变形、诱发形状振荡并缩短加载时间，即达到稳态变形所需的时间。然而，对于浓悬浮液中的胶囊，我们对膜黏度影响的了解十分有限。在本研究中，我们基于耦合浸入边界–格子玻尔兹曼（IB-LB）数值模拟，在非惯性区对黏弹性球形胶囊悬浮液开展了系统的数值研究。我们展示了膜黏度对瞬态动力学的影响如何随体积分数和毛细数变化。结果表明，膜黏度对变形和加载时间的影响均以一种非平凡的方式强烈依赖于体积分数：具有较大表面黏度的浓悬浮液更能抵抗变形，但其加载时间却表现出无表面黏度胶囊所特有的特征，从而为获得更加丰富的力学特性组合提供了可能。

1 引言

胶囊由液滴内核和包裹其外的薄膜构成，薄膜可通过设计获得特定的力学性质，例如应变软化、应变硬化和黏弹性（Barthès-Biesel（2016））。胶囊已成为一种很有前景的材料，可用于封装、输送和缓释物质，应用领域包括化妆品、个人护理产品、自修复涂料、阻燃涂层和药物（Luo 和 Bai 2019；Bah、Bilal 和 Wang 2020；Kim 等 2009；Sun 等 2021）。胶囊也被用作简化模型，以数值方式研究红细胞等复杂生物细胞（Zhang、Johnson 和 Popel 2007；Krüger 2012；Shen 等 2018；Gekle 2016；Bächer 等 2018）。在模拟红细胞的流动行为时，通常会忽略膜的黏性成分。然而，微流控实验表明，在这类系统中，膜的表面黏度是一项重要特性，而且膜的黏性贡献与弹性贡献之间的相互作用并非简单明了（Tomaiuolo 等 2011；Tomaiuolo 和 Guido 2011；Tomaiuolo 等 2016；Braunmüller 等 2012；Prado 等 2015；Tran-Son-Tay、Sutera 和 Rao 1984）。纯弹性胶囊悬浮液的力学和流变性质已通过解析方法（Barthès-Biesel 和 Rallison 1981；Barthès-Biesel 1980；Barthès-Biesel 1991；Barthès-Biesel 1993；Barthès-Biesel、Diaz 和 Dhenin 2002）、实验（Chang 和 Olbricht 1993；Walter、Rehage 和 Leonhard 2001）和数值方法（Pozrikidis 1995；Ramanujan 和 Pozrikidis 1998；Aouane、Scagliarini 和 Harting 2021；Pranay、Henríquez-Rivera 和 Graham 2012；Karyappa、Deshmukh 和 Thaokar 2014；Clausen 和 Aidun 2010；Clausen、Reasor 和 Aidun 2011；Rorai 等 2015；Dodson 和 Dimitrakopoulos 2009；Krüger、Kaoui 和 Harting 2014；Krüger、Varnik 和 Raabe 2011；

Esposito 等，2022；Diaz、Pelekasis 和 Barthès-Biesel（2000）；Tran 等，2020；Cordasco 和 Bagchi，2013；Wouters 等，2020；Bielinski 等，2021；Alizad Banaei 等，2017；Kessler、Finken 和 Seifert，2008；Bagchi 和 Kalluri，2011）。然而，只有少数研究致力于理解胶囊膜黏度的影响（Barthès-Biesel 和 Sgaier，1985；Yazdani 和 Bagchi 2013；Li 和 Zhang，2019；Guglietta 等，2020；Guglietta 等，2021b；Guglietta et al. 2021a；Rezghi、Li 和 Zhang，2022；Li and Zhang 2021；Diaz、Barthès-Biesel 和 Pelekasis，2001；Zhang 等，2020；Rezghi 和 Zhang，2022）。

在理论研究中，Barthès-Biesel 和 Sgaier，1985 在小变形极限下进行了微扰计算，表明膜黏度会减小整体变形。关于加载时间，即达到稳态变形所需的时间，Diaz、Barthès-Biesel 和 Pelekasis，2001 是最早使用数值模拟研究膜黏度对瞬态动力学影响的学者之一：他们利用边界积分法表明，在伸长流中，膜黏度会使加载时间增加，且增加量与膜黏度成正比。Yazdani 和 Bagchi 2013 通过数值方法研究了膜黏度对单个黏弹性胶囊变形和坦克履带式旋转频率的影响，并观察到膜黏度会导致表面出现皱褶。近期，Li 和 Zhang，2019；Li 和 Zhang 2020 将有限差分法与浸入边界-格子玻尔兹曼方法相结合，以模拟界面黏度的影响。随后，这一方法主要用于研究红细胞的动力学，凸显了膜黏度对变形及其相关特征时间的重要作用（Guglietta 等，2020；Guglietta 等，2021b；Li and Zhang 2021），以及对翻滚和坦克履带式运动动力学的影响（Guglietta et al. 2021a；Rezghi 和 Zhang，2022）。

上述工作研究了膜黏度对单个胶囊的影响。然而，目前仍缺乏对其对胶囊悬浮液影响的认识。据我们所知，尚不存在关于膜黏度对这类系统影响的参数研究。我们的工作旨在通过聚焦于一般性的球形黏弹性胶囊来填补这一空白。我们利用耦合浸入边界-格子玻尔兹曼实现，给出了膜黏度对（初始为球形的）黏弹性胶囊悬浮液影响的数值研究结果。
为研究通过布辛涅斯克数 Bq（见式（23））量化的膜黏度对变形D 和加载时间 t_{L}的影响，我们采用不同的 Bq 、毛细数 Ca 和体积分数 ϕ 进行了数值模拟。我们的目标是研究不同的膜黏度和体积分数如何影响黏弹性胶囊的变形和加载时间。

本文其余部分的组织如下：第 2 节介绍浸入边界-格子玻尔兹曼方法（第 2.1 节）和黏弹性膜模型（第 2.2 节）的一些细节。第 3 节详细介绍数值设置，并引入主要的无量纲数。第 4 节专门讨论数值结果：我们首先展示并讨论单个胶囊的变形和加载时间（第 4.1 节），随后讨论不同体积分数悬浮液中的情况（第 4.2 节）。最后，我们在第 5 节总结主要发现，并给出结论和未来展望。

2 数值模型

我们使用耦合浸入边界-格子玻尔兹曼方法模拟胶囊及其周围流体的动力学过程。简而言之，浸入边界法以由拉格朗日点构成的三角剖分网格为支撑，计算作用力，再利用这些力对流体施加正确的、随空间和时间变化的边界条件；流体则使用格子玻尔兹曼方法进行模拟。浸入边界-格子玻尔兹曼方法实现了双向耦合：边界随流体流动而变形，而边界施加的黏弹性力则会改变流体的局部动量平衡。边界表面力包括膜弹性、膜黏度、体积守恒正则化项，以及防止胶囊相互穿透的排斥力。下文将详述这些内容。

2.1 浸入边界-格子玻尔兹曼方法

格子玻尔兹曼方法对玻尔兹曼输运方程的离散版本进行数值求解，求解对象是粒子分布函数 n_i。该函数表示在格子上位置 $\boldsymbol{x}$、时刻 t，以离散速度 $\boldsymbol{c}_i$ 运动的流体分子的概率密度函数（Benzi, Succi, and Vergassola 1992）。通过计算粒子分布的矩并进行适当的 Chapman-Enskog 分析，可从输运方程中得到纳维-斯托克斯方程的解（Chapman and Cowling 1990）。
由 LB 方程给出的函数 n_i 的演化为

$$\mathrm{n}_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i\Delta t, t+\Delta t)-\mathrm{n}_i(\boldsymbol{x},t)=\Omega_i+S_i\,, \tag{1}$$

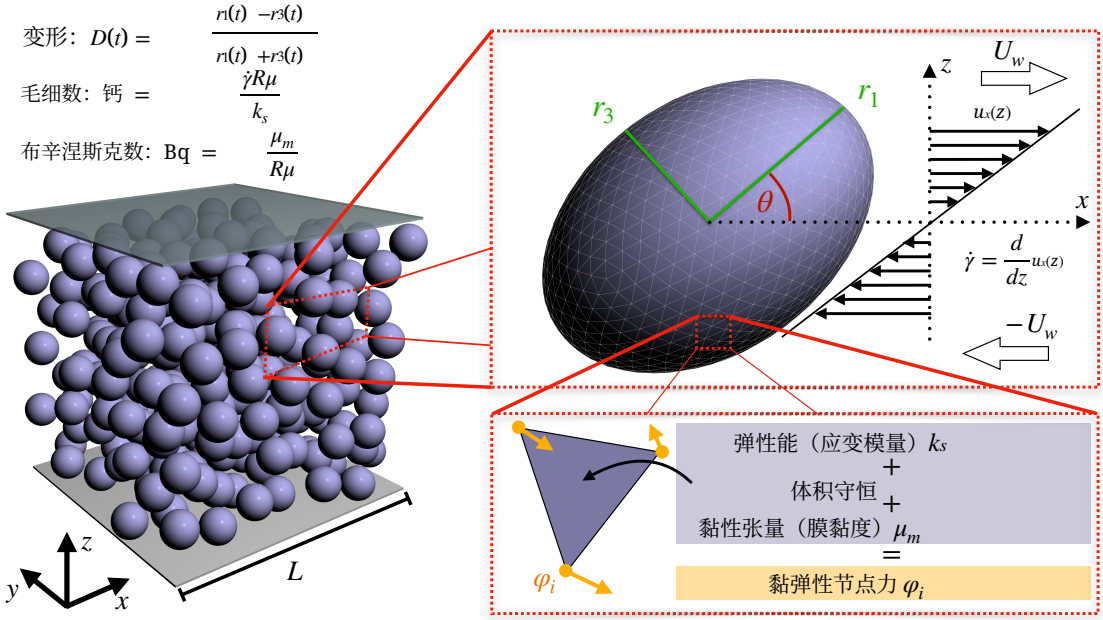

图1：本文所进行数值模拟的示意图。左侧：三维立方域内含有 L^3 个晶格节点（欧拉网格），其中充满了初始半径为 R的黏弹性球形胶囊浓悬浮液。该区域沿 z 轴由两面平面壁围成，两壁以恒定速度 U_w 沿相反方向运动。在此设置下，我们施加剪切速率恒定为 $\dot{\gamma}$的简单剪切流。右上框：单个胶囊在简单剪切流作用下发生变形的细节。胶囊采用包含 2420 个单元的三维三角网格表示。泰勒变形度 D 由 $D=(r_1-r_3)/(r_1+r_3)$给出，其中 r_1 和 r_3 为长半轴（绿色线段）。变形度 $D(t)$随时间的演变用于评估加载时间 t_L（见式（26））。倾斜角 θ 是r_1 与流动方向（x轴）形成的夹角。右下框：在每个三角形单元上计算黏弹性力，并将其分配至各顶点。这些力通过浸入边界（IB）方法与流体耦合，流体动力学则采用格子玻尔兹曼（LB）方法进行模拟（见第 2 节）。

其中，Δt 为离散时间步长，Ω_i 表示碰撞算子，而 S_i 为与作用的外力 $\boldsymbol{F}$成正比的源项（例如膜力，见第 2.2 节），其实现遵循 Guo、Zheng 和 Shi（2002）：

$$S_i(\boldsymbol{x},t)=\left(1-\frac{\Delta t}{2\tau}\right)\frac{w_i}{c_s^2}\left[\left(\frac{\boldsymbol{c}_i\cdot\boldsymbol{u}}{c_s^2}+1\right)\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{u}\right]\cdot\boldsymbol{F}\,, \tag{2}$$

其中，τ 是弛豫时间，即函数 n_i 达到平衡分布 $\mathrm{n}^{(\mathrm{eq})}{}_i$ 所需的时间，该分布由 Qian、d'Humières 和 Lallemand（1992）给出。

$$\mathrm{n}_i^{(\mathrm{eq})}(\boldsymbol{x},t)=w_i\rho\left(1+\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}_i}{c_s^2}+\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}_i)^2}{2c_s^4}-\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}{c_s^2}\right)\,, \tag{3}$$

其中，$c_s=\Delta x/\Delta t\sqrt{3}$为声速，$\Delta x$ 为晶格间距，w_i 为合适的权重。在本研究采用的 D3Q19 格子格式中，$w_0=1/3$、$w_{1-6}=1/18$、$w_{7-18}=1/36$。我们采用 Bhatnagar-Gross-Krook 碰撞算子（Qian、d'Humières 和 Lallemand，1992）。

$$\Omega_i=-\frac{\Delta t}{\tau}\left(\mathrm{n}_i(\boldsymbol{x},t)-\mathrm{n}_i^{(\mathrm{eq})}(\boldsymbol{x},t)\right)\,. \tag{4}$$

Chapman-Enskog 分析通过将弛豫时间 τ 与流体输运系数（例如动力黏度）联系起来，搭建了 LB 与纳维-斯托克斯方程之间的桥梁

$$\mu=\rho c_s^2\left(\tau-\frac{\Delta t}{2}\right)\,. \tag{5}$$

随后，利用函数 n_i 计算流体的流体动力学密度（ρ）和速度（$\boldsymbol{u}$）场，如下所示

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=\sum_i \mathrm{n}_i(\boldsymbol{x},t)\,, \qquad \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\sum_i \boldsymbol{c}_i\mathrm{n}_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{\boldsymbol{F}\Delta t}{2}\,. \tag{6}$$

流体与黏弹性膜之间的耦合通过浸入边界法处理。膜由一组相互连接的拉格朗日节点表示，构成三维三角网格（见图1）。其基本思想是对流体（欧拉）速度（$\boldsymbol{u}$）进行插值，以计算节点（拉格朗日）速度（$\dot{\boldsymbol{r}}$），并扩散节点力（$\boldsymbol{\varphi}$），从而求得作用于流体的力密度（$\boldsymbol{F}$）。这类插值由以下方程给出（Krüger 等，2017；Peskin，2002）：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)=\sum_i \boldsymbol{\varphi}_i(t)\Delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{x})\,, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_i(t)=\sum_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\Delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{x})\Delta x^3\,, \tag{7}$$

其中，Δ 是狄拉克δ函数的离散近似，可分解为三个插值模板的乘积 $\Delta(\boldsymbol{x})=\phi(x)\phi(y)\phi(z)/\Delta x^3$。本文采用二点插值模板

$$\phi_2(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{for } 0\le|x|\le 1\,,\\ 0 & \text{elsewhere}\,.\end{cases} \tag{8}$$

2.2 膜模型

2.2.1 弹性模型

我们采用 Skalak 模型来描述膜弹性（Skalak 等，1973）。此处，弹性自由能表示为

$$W_\mathrm{S}=\sum_j A_j\left[\frac{k_\mathrm{S}}{12}\left(I_{1,j}^2+2I_{1,j}-2I_{2,j}\right)+\frac{k_\alpha}{12}I_{2,j}^2\right]\,, \tag{9}$$

其中，A_j 是网格中第 j–个三角形单元的面积，k_S 和 k_α 分别是弹性剪切模量和膨胀模量（我们仅考虑 $k_\alpha=k_\mathrm{S}$。），$I_{1,\,j}=\lambda_{1,\,j}^2+\lambda_{2,\,j}^2-2$ 和 $I_{2,\,j}=\lambda_{1,\,j}^2\lambda_{2,\,j}^2-1$ 是第 j个三角形单元的应变不变量，其中$\lambda_{1,\,j}$和$\lambda_{2,\,j}$是该三角形的主伸长比（Skalak 等，1973；Krüger、Kaoui 和 Harting，2014）。在第 j–个单元上计算得到的自由能 $W^{(j)}$ s 用于计算其三个顶点所受的力：坐标为 $\boldsymbol{x}_i$ 的第 i–个节点所受的力可写为

$$\boldsymbol{\varphi}_i=-\frac{\partial W_\mathrm{S}^{(j)}}{\boldsymbol{x}_i}\,. \tag{10}$$

2.2.2 黏性模型

膜黏度可通过引入以下黏性应力张量来实现：

$$\boldsymbol{\tau}_\nu=\mu_\mathrm{s}\left(2\boldsymbol{e}-\mathrm{tr}(\boldsymbol{e})\boldsymbol{P}\right)+\mu_\mathrm{d}\mathrm{tr}(\boldsymbol{e})\boldsymbol{P}=2\mu_\mathrm{m}\boldsymbol{e}\,, \tag{11}$$

其中，μ_s 和 μ_d 分别是剪切膜黏度和膜膨胀黏度（为减少参数数量，我们令 $\mu_\mathrm{s}=\mu_\mathrm{d}=\mu_\mathrm{m}$，并且仅称其为膜黏度 μ_m（Barthès-Biesel 和 Sgaier，1985）），$\boldsymbol{P}$是二维曲面的投影张量，并且

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{P}\cdot\left[\left(\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{S}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{S}}\right)+\left(\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{S}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{S}}\right)^{\dagger}\right]\cdot\boldsymbol{P}\right\} \tag{12}$$

为表面应变率。在式（12）中，上标 $\boldsymbol{S}$ 表示梯度算子（$\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{S}}$）和局部膜速度（$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{S}}$）的表面投影（Li 和 Zhang，2019）。按照 Li 和 Zhang，2019 的方法，我们采用标准线性固体模型来计算 $\boldsymbol{\tau}_\nu$。我们在每个三角形单元 j 上评估应力张量 $\boldsymbol{\tau}_{(j)\nu}$（即将该三角形单元旋转至 xy平面），随后计算其顶点 i 上的力，

$$\boldsymbol{\varphi}_i(x,y)=A_j\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(j)}\cdot\boldsymbol{\nabla}N_i\,, \tag{13}$$

其中，$N_i(x,\ y)=a_ix+b_iy+c_i$为线性形函数，张量 $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(j)}=\left[\boldsymbol{\tau}_\nu\cdot(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1})^T\right]^{(j)}$，其中 $(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1})^T$是变形梯度张量 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ 逆矩阵的转置（Krüger 2012；Li 和 Zhang，2019；Guglietta 等，2020）。

2.2.3 体积守恒

除了前两项对节点力的贡献外，我们还通过在式（9）所给的弹性自由能中添加另一项来施加体积守恒:

$$W_{\mathrm{V}} = k_V \frac{(V - V_0)^2}{2V_0} \,. \tag{14}$$

k_V是一个人工模量，用于调节体积守恒的强度； V是胶囊的总体积（下标 0 表示静止时的体积，即 $V_0 = 4\pi R^3/3$）（Krüger 2012；Aouane、Scagliarini 和 Harting 2021）。随后，节点力以与弹性模型相同的方式计算（式（10））。

2.2.4 胶囊间排斥

最后，为避免胶囊彼此穿透，我们引入一个力

$$\boldsymbol{\varphi}_{ij} = \begin{cases} \bar{\epsilon}\left[\left(\frac{\Delta x}{d_{ij}}\right)^2 - \left(\frac{\Delta x}{\delta_0}\right)^2\right]\hat{\boldsymbol{d}}_{ij} & \text{if } d_{ij} < \delta_0 \,, \\ 0 & \text{if } d_{ij} \geq \delta_0 \,, \end{cases} \tag{15}$$

该力作用于属于两个不同胶囊的节点 i 和 j，其中 d_{ij} 是节点 i 和 j之间的距离，$\hat{\boldsymbol{d}}_{ij} = \frac{\boldsymbol{d}_{ij}}{d_{ij}}$ 是连接它们的单位向量， δ_0 是相互作用范围，且 $\bar{\epsilon} \approx 100/3k_{\mathrm{S}}$。参数 $\bar{\epsilon}$ 的选取使得悬浮液的宏观行为不受这一额外节点力贡献的影响（Aouane、Scagliarini 和 Harting 2021 提供了更多细节）。

2.3 膜几何

胶囊的几何形状信息可从惯性张量中获得，其定义如下（Krüger 2012；Ramanujan 和 Pozrikidis 1998）

$$\mathcal{I}_{\alpha\beta} = \frac{\rho_p}{5} \sum_i A_i (\boldsymbol{r}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha} r_{i\beta}) r_{i\gamma} n_{i\gamma} \,. \tag{16}$$

其中， ρ_p 是粒子的密度（在我们的情形中， $\rho_p = 1$）， $\boldsymbol{r}_i$ 是一个从囊泡质心指向面 i形心的向量。 A_i 和 $\boldsymbol{n}_i$ 分别是面 i的面积和单位法向量。现在考虑惯性椭球，即具有相同惯性张量$\mathcal{I}$的等效椭球。三个特征值（$\mathcal{I}_1$、 $\mathcal{I}_2$ 和 $\mathcal{I}_3$）可用于计算该椭球三个半轴的长度，其密度为 ρ_p，体积为 V（Krüger 2012；Ramanujan 和 Pozrikidis 1998）：

$$r_1 = \sqrt{\frac{5(\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_1)}{2\rho_p V}} \,, \tag{17}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{5(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_2)}{2\rho_p V}} \,, \tag{18}$$

$$r_3 = \sqrt{\frac{5(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3)}{2\rho_p V}} \,, \tag{19}$$

其中 $r_1 \geq r_2 \geq r_3$。与图1对比可知， r_1 和 r_3 分别是剪切平面内最长和最短的半径，而 r_2 是沿涡量方向（y轴）的半径。

Once 我们知道两个主半轴 r_1 和 r_3的长度，因此可以计算变形指数 x

$$D(t) = \frac{r_1(t) - r_3(t)}{r_1(t) + r_3(t)} \,, \tag{20}$$

当球形胶囊未发生变形时（即 $r_1 = r_3$），该指数等于零。

最后，倾斜 角度 θ（见图1）是最长半径 r_1 与流动方向（x–轴）形成的夹角).

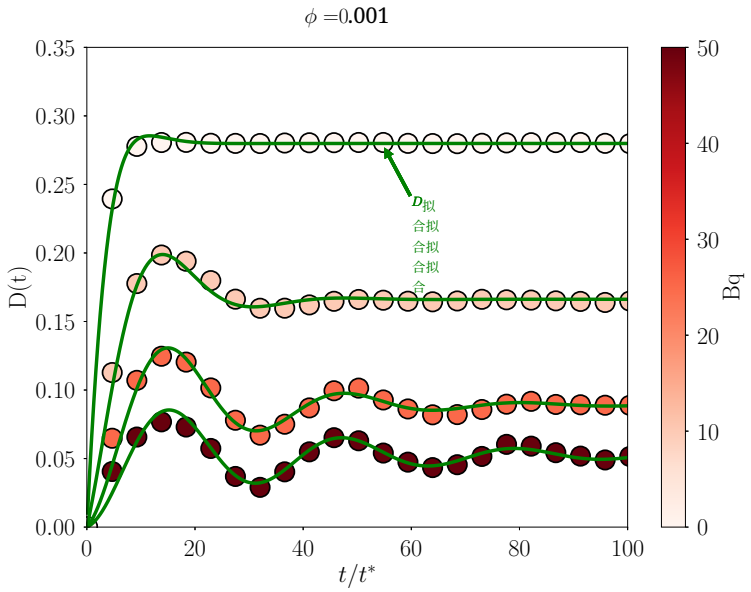

图2：单个胶囊的变形（$\phi = 0.001$）随 t/t^* 变化的关系，其中 Ca $= 0.2$，且 Bq 取不同值（Bq $= 0$ ( )、Bq $= 10$( )、Bq $= 25$ ( )、Bq $= 50$ ( )）。实线表示对方程（26）的最佳拟合。

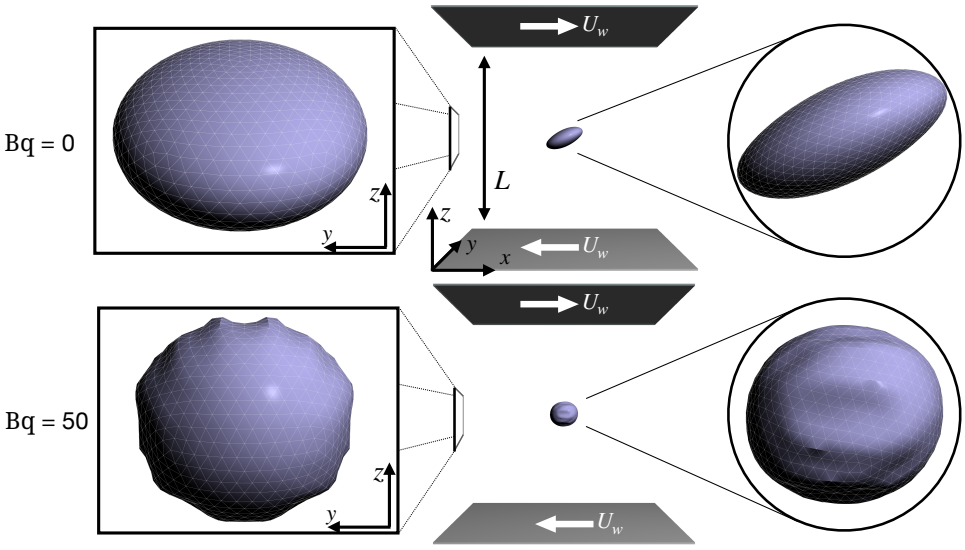

图3：Ca $= 0.5$时，单个胶囊（$\phi = 0.001$）在剪切流中的稳态构型。上图：Bq $= 0$时单个胶囊的构型。下图：Bq $= 50$时单个胶囊的构型。左侧：yz平面内的侧视图。右侧：xz平面内的侧视图。

L	（区域长度）	$128\,\Delta x$
R	（球形胶囊半径）	$8\,\Delta x$
Re	（雷诺数）	~ 0.01
Ca	（毛细数）	0.05 - 1.0
Bq	（布辛涅斯克数）	0 - 50
ϕ	（体积分数）	0.001 - 0.4

表1：格子单位下的模拟参数。

3 模拟设置和物理参数

数值设置包括一个具有 L^3 晶格节点的立方体欧拉域，其中 $L = 128\,\Delta x$。该区域沿 z 轴由两面平面壁界定，在壁面处施加恒定速度 U_w，以产生具有恒定剪切速率 $\dot{\gamma}$ 的简单剪切流（见图1）。黏弹性囊泡的初始半径为 $R = 8\,\Delta x$，相应的网格由 2420 个三角形单元组成。每个囊泡初始化为刚性球体，以便在模拟开始时使表面处于零应力和零变形状态。此外，囊泡表面之间的距离不能小于一个格子间距。

描述系统动力学时，可能会涉及若干无量纲数。首先，雷诺数

$$\mathrm{Re} = \frac{\dot{\gamma} R^2 \rho}{\mu} \tag{21}$$

表示惯性力与黏性力之间的平衡。我们选择了足够小的 Re（Re $\sim 10^{-2}$），以忽略惯性效应。毛细数

$$\mathrm{Ca} = \frac{\dot{\gamma} R \mu}{k_s} \tag{22}$$

则衡量流体黏度相对于膜弹性的重要性：我们选择 Ca 的范围，尽可能接近小变形状态，同时避免强非线性效应（Ca $\in [0.05, 1]$）。本文特意将弹性膨胀模量（k_α）与弹性剪切模量（k_S）设为相等。这样做是为了降低数值模拟中的参数复杂度，并使研究重点与我们的主要目标一致，即探究表面黏度的影响。表征膜黏度的无量纲数 μ_m 是布辛涅斯克数

$$\mathrm{Bq} = \frac{\mu_\mathrm{m}}{\mu R}\,, \tag{23}$$

该数描述膜黏度相对于流体黏度的重要性（本文考察的 Bq 范围为 $\in [0, 50]$）。注意，μ_m 描述的是二维膜的黏度：因此，其单位为 [m Pa s],，而流体黏度的单位为 [Pa s]。最后，对于浓悬浮液，定义体积分数{

$$\phi = \frac{\sum_i V_i}{L^3}\,, \tag{24}$$

其范围为 $\phi \in [0.001, 0.4]$（即从 1 到 400 个胶囊）。在式（24）中，$\sum_i V_i$ 与黏弹性球体所占的总体积相同。计算时间以毛细时间归一化，表示为

$$t^* = \frac{R\mu}{k_s}\,. \tag{25}$$

需要注意的是，在本研究中，黏度比为 1，这意味着胶囊内部流体的黏度与外部流体的黏度相同。上述主要物理量也汇总于表 1 中。

我们还简要提及膜黏度和内部流体黏度所起的作用。事实上，为了模拟膜黏度的影响，Keller and Skalak 1982 首次提出了有效黏度比，该比值等于黏度比 λ 加上一个用于计入膜黏度所致耗散的项。然而，近期一些研究表明，尽管这两种黏度的定性影响相似，但在定量上表现不同 Guglietta et al. 2021a; Li and Zhang 2021; Matteoli, Nicoud, and Mendez 2021; Noguchi and Gompper 2005; Noguchi and Gompper 2007。我们决定保留黏度比 $\lambda = 1$，以便专注于膜黏度的影响，并避免进一步扩大本已庞大的参数空间。

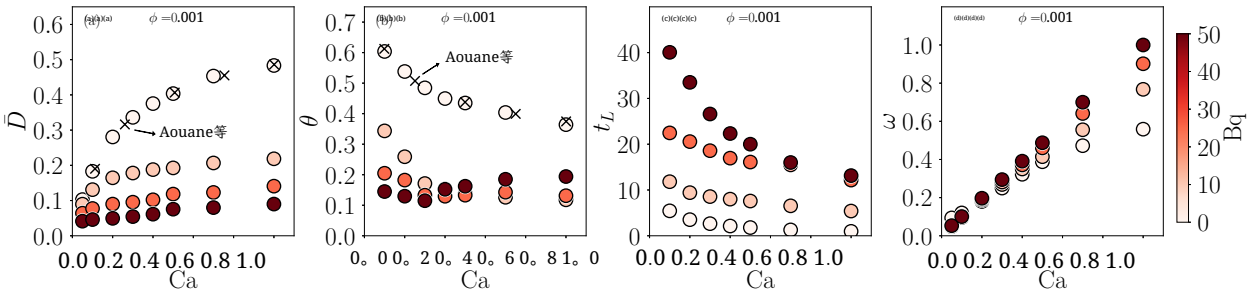

图4：单个囊泡情形（$\phi = 0.001$）在不同 Bq 值下的数据（Bq _ $= 0$ ○ $= 10$ ()、Bq ( )、Bq $= 25$ ( )、Bq $= 50$( )）。面板（a）：稳态变形 D 随毛细数 Ca 的变化，其中黑色叉号表示来自 Aouane、Scagliarini 和 Harting 2021 的数据。面板（b）：倾斜角 θ 随毛细数 Ca 的变化。面板（c）：加载时间 t_{L} 随毛细数 Ca 的变化。面板（d）：频率 ω 随毛细数 Ca 的变化。

为了研究并量化黏弹性胶囊的瞬态变形，我们使用阻尼振子的解来描述变形随无量纲时间变化的行为：

$$D_{\mathrm{fit}}\left(\frac{t}{t^*}\right) = \bar{D}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{t^* t_{\mathrm{L}}}\right)\cos\left(\omega\frac{t}{t^*}\right)\right] \tag{26}$$

其中，D 表示变形的稳态值，t_{L} 为无量纲加载时间（即囊泡发生变形所需的时间），而 ω 对应于变形振荡的无量纲频率。为展示方程（26）与数值模拟数据的拟合情况，图2给出了单个囊泡情形下测得的变形 D 随无量纲时间 t/t^* 的变化。不同颜色对应不同的 Bq 值，所有数据均对应 Ca $= 0.2$的情形。图2显示，$D_{\mathrm{fit}}(t)$（实线）与数值模拟结果（圆圈）吻合极佳，证实方程（26）可用于估算动力学观测量 t_{L} 和 ω。

关于如何将时间无量纲化，主要有两种选择：使用剪切速率 $\dot{\gamma}$ 或毛细时间 t^*（Diaz、Pelekasis 和 Barthès-Biesel（2000）；Maffettone 和 Minale（1998）；Barthès-Biesel（2016））。具体而言，Barthès-Biesel（2016）研究了简单剪切流中具有膜黏度的囊泡，并观察到，以本征时间无量纲化后的响应（加载）时间会随毛细数增大而减小。此外，Guglietta 等，2020；Guglietta 等，2021b 研究了简单剪切流中红细胞的瞬态动力学。为将数值结果与实验进行比较，他们报告了特征加载时间和弛豫时间（在 $[s]$ 中作为 y轴变量）随剪切速率 $\dot{\gamma}$（在 $[s^{-1}]$ 中作为 x轴变量）的变化。因此，我们决定以此为例，使用毛细时间 t^*对 x 轴和 y 轴均进行归一化，从而得到随毛细数 Ca 变化的无量纲加载时间 t_L。

4 结果

本节展示单个球形囊泡（第 4.1 节）和颗粒悬浮液（第 4.2 节）的变形 D 和加载时间 t_{L} 相关数值结果。

4.1 单个胶囊

本节报告单个胶囊（$\phi = 0.001$）在剪切流下的变形和加载时间的数值结果，作为下一节研究囊泡悬浮液的参考。图 3 显示了胶囊在剪切流下、钙 $= 0.5$ 时的稳态构型，其中 Bq 有两个取值（Bq $= 0$，上图；Bq $= 50$，下图）。胶囊初始位于通道中央；白色箭头表示壁面的速度 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{w}}$。图 3 的左右两部分分别显示了 yz 平面和 xz 平面的侧视图。图 3 显示，随着 Bq 增大，表面出现了一些皱褶。这些结果与 Yazdani 和 Bagchi 2013 的观察一致。需要指出的是，向膜模型中引入弯曲能可能会抑制这些皱褶的形成，正如 Yazdani 和 Bagchi 2013 中详细讨论的那样。对于纯弹性囊泡（Bq $= 0$），当毛细数足够大时（Ca $\gtrsim 0.1$）不会出现皱褶；但当毛细数较小时（Ca $= 0.05$），则会出现一些皱褶。我们强调，这些皱褶并非数值伪影，因为实验中也观察到了它们（Walter、Rehage 和 Leonhard 2001；Unverfehrt、Koleva 和 Rehage 2015），且已有研究对其进行了理论分析（Finken 和 Seifert 2006）。

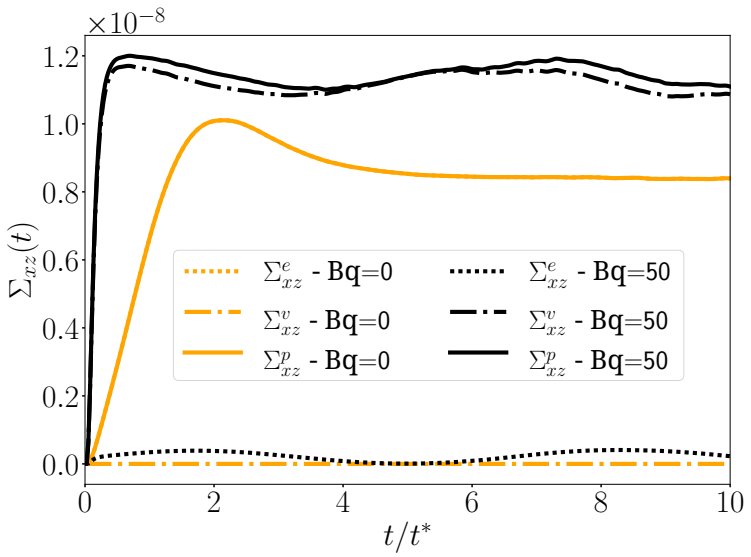

图5：单个胶囊的颗粒应力 Σ^p_{xz} xz 分量随时间的演化，其中 Bq=0 （橙色线）和 Bq=50 （黑色线）。点线和点划线分别表示应力的弹性（Σ^e_{xz}）和黏性（Σ^v_{xz}）贡献的 xz 分量；实线表示颗粒应力 $\Sigma^p_{xz} = (\Sigma^e + \Sigma^v)_{xz}$。

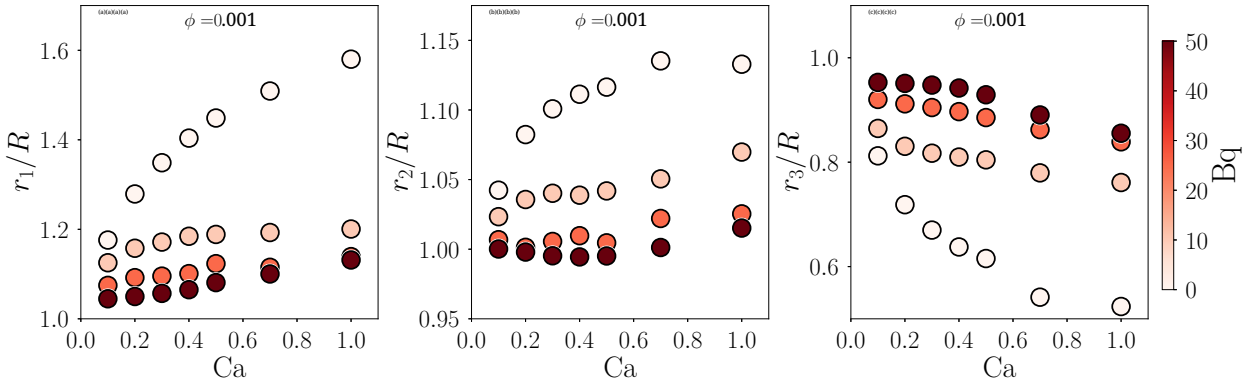

图6：三个主要半　径（$\phi = 0.001$）随 Ca 的变化，针对不同的 Bq 值（Bq $= 0$ （　　○），Bq $= 10$（　），Bq $= 25$（　），Bq $=$ 50（　））， 以静止时的胶囊半径 R 归一化。

在图 4(a) 中，我们展示了稳态变形值 D 随毛细数 Ca 的变化关系，涵盖不同的 Bq 值（颜色越深，Bq 值越高）。我们还报告了 Aouane、Scagliarini 和 Harting 2021 的结果（黑色叉号），作为实现方法的基准；该结果对应于无膜黏度的情形。

图4(a)显示，增大 Bq 会减小变形，这一趋势此前也在其他研究中观察到（Yazdani 和 Bagchi 2013；Li 和 Zhang，2019；Guglietta 等，2020；Guglietta 等，2021b）。这可以用能量角度解释：对于固定的弹性模量 k_S 和给定的剪切速率强度 $\dot{\gamma}$（即毛细数 Ca 相同），注入系统的能量相同。然而，简单剪切流可以分解为两个贡献，分别对应胶囊的旋转和伸长：

$$\nabla \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

这意味着，施加的剪切流所注入的能量不仅促成胶囊的变形，也促成其旋转。因此，增加膜黏度会导致表面因黏性摩擦产生的耗散效应增强，进而减少可用于变形的能量。如果不使用流动，而是通过直接作用于膜的外力使胶囊变形（例如使用光镊对红细胞进行的典型拉伸

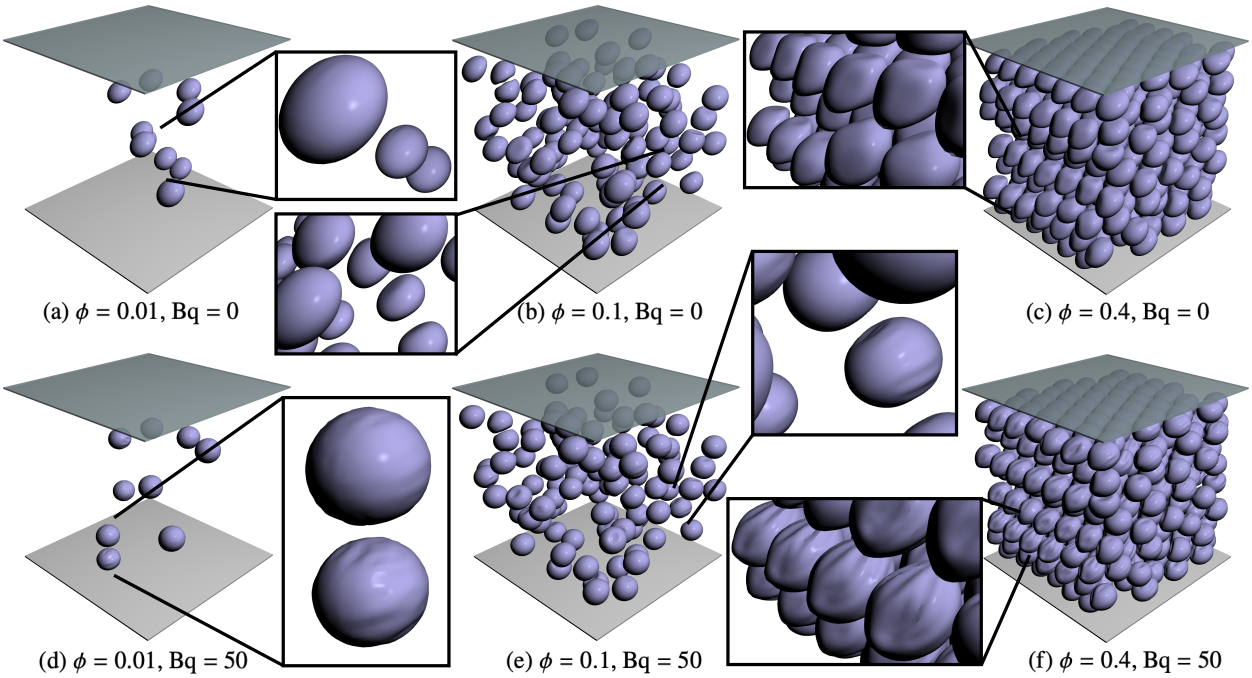

图 7：悬浮液的快照。所示构型对应于 Ca $= 0.1$ 和 Bq $= 0$（上图，(a)–(c)）以及 Bq $= 50$（下图，(d)–(f)）。

实验（Suresh 等，2005年）），变形的稳态值对膜黏度的依赖性显然会消失（Guglietta 等，2020；Guglietta 等，2021b）。此外，在伸长流中，由于膜的旋转受到抑制，变形的稳态值不依赖于 Bq 的数值（Guglietta 等，2021b）。

倾斜角 θ 的稳态值见图 4(b)。正如预期，在没有膜黏度的情况下（Bq $= 0$），倾斜角 θ 随毛细数增大而减小，这与 Aouane、Scagliarini 和 Harting 2021 的结果非常吻合。引入膜黏度后，倾斜角会减小；有趣的是，当 Bq $= 50$时，它呈现非单调变化。

图 4(c) 显示，加载时间 t_{L} 取决于 Ca 和 Bq。具体而言，一方面，随着 Ca 增大，加载时间会缩短，并似乎趋于一个常数值。另一方面，膜黏度增大时，t_{L} 也随之增加，这是由于界面处的黏性耗散所致。即使施加伸长流或进行拉伸实验，加载时间 t_{L} 仍取决于 Bq（Guglietta 等，2021b）。这一行为与稳态变形值相反；仅存在膜变形时，稳态变形值并无这种依赖关系。

图 4(d) 描绘了变形振荡的频率 ω。该频率并未表现出对膜黏度的显著依赖，而仅取决于毛细数 Ca。这意味着这一特征时间仅随流动的特征时间 $\dot{\gamma}^{-1}$ 缩放。t_{L} 和 ω 的结果与简单剪切流中单个红细胞的结果（Guglietta 等，2021b）定性一致。

文献中已经观察到变形振荡（Yazdani 和 Bagchi 2013；Li 和 Zhang，2019），也有相关的解析预测（Barthès-Biesel 和 Sgaier，1985）。值得注意的是，简单剪切流中的液滴也会出现此类振荡（Gounley et al. 2016），这说明振荡并非严格取决于界面能的类型或是否存在皱褶——因为在这种情况下，表面张力会阻止界面上出现皱褶。事实上，正如 Gounley et al. 2016 所解释的，当流动时间尺度与弛豫时间尺度相差显著时，便会出现这些振荡。

我们还考察了颗粒应力的 xz 分量 Σ^{p}_{xz} 随时间的演化，该应力由弹性贡献和黏性贡献（分别为 Σ^{e}_{xz} 和 Σ^{v}_{xz}）之和给出。我们希望通过将加载时间 t_{L} 与应力达到稳态值所需的特征时间联系起来，架起微观流变学与宏观流变学之间的桥梁（见图5）。当膜黏度为零（Bq $= 0$）时，颗粒应力完全由弹性贡献构成；当 Bq > 0 时，则

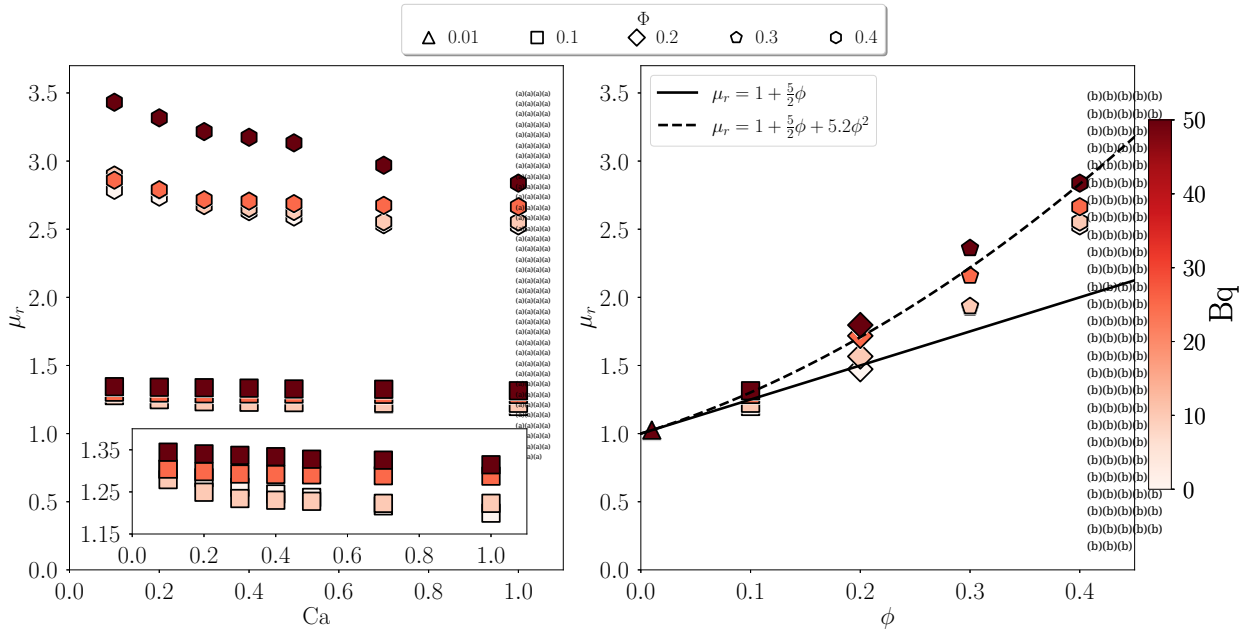

图8：面板（a）： μ_r 作为不同 Bq 值以及 $\phi = 0.1$ 和 0.4 条件下 Ca 的函数。插图展示了围绕 $\phi = 0.1$ 数据的放大区域。面板（b）： μ_r 作为不同 Bq 值和 Ca $= 1$条件下 ϕ 的函数。实线和虚线分别表示 Einstein 1906 以及 Batchelor 和 Green 1972 的理论预测。

主要由黏性贡献主导。由于 Σ^{v}_{xz} 取决于表面上的速度梯度（见式（11）），剪切流一开始，它便会突然增大，从而使 Σ^{p}_{xz} 的特征时间几乎降为零。这种行为与我们对加载时间 t_{L}的观察恰好相反，后者与变形有关。

由于式（20）中定义的变形仅包含剪切平面内主轴的信息，因此无法完整描述囊泡在三维空间中的变形情况。因此，我们分别考察了三个主半径 r_1, r_2 和 r_3 （分别见图6的面板（a）、（b）和（c））。半径以初始半径 R 进行归一化， R即囊泡静止时的半径。在这三种情况下，半径长度相对于其静止状态数值的变化 r_i （$i = 1,2,3$）均随着膜黏度增加而减小（这与变形测量结果的预期一致）。然而，最显著的变化出现在 r_1 和 r_3 （即剪切平面内），而当 Bq $= 0$时， r_2 仅发生轻微变化；当 Bq $= 50$时，其几乎保持不变。

4.2 悬浮液

我们采用与此前相同的数值设置，但现在将囊泡数量增加至 N 400，对应的体积分数 ϕ 增加至 0.4。我们引入以下胶囊平均量：

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_i A_i \,, \tag{28}$$

其中，求和遍历粒子数量 N，而 A_i 是针对第 $i-$ 个囊泡测量的一般观测量（例如，变形 D的稳态值、加载时间 t_{L}、半径 r_i 等）。本节报告的数据均附有误差棒，它们由标准差除以 $\sqrt{N}$ 归一化后计算得到。

图 7 展示了 ϕ 的三个不同取值（各列）和 Bq 的两个取值（各行）下的一些稳态构型。数据对应 Ca $= 0.1$。值得注意的是，当 Bq $= 0$ 时，表面不会出现皱褶；而当 Bq $= 50$ 时，则可观察到皱褶。不过，在后一种情况下，体积分数似乎也起到了一定作用：具体而言， $\phi = 0.01$ 和 $\phi = 0.1$ 两种情况中，只有少数粒子出现轻微皱褶（分别见面板 (d) 和 (e)）；而体积分数最高的情况（面板 (f)）中，更多粒子出现了更明显的皱褶。

我们希望研究该系统的瞬态动力学，并比较不同体积分数 ϕ 下的结果。为使比较尽可能公平，对于稠密

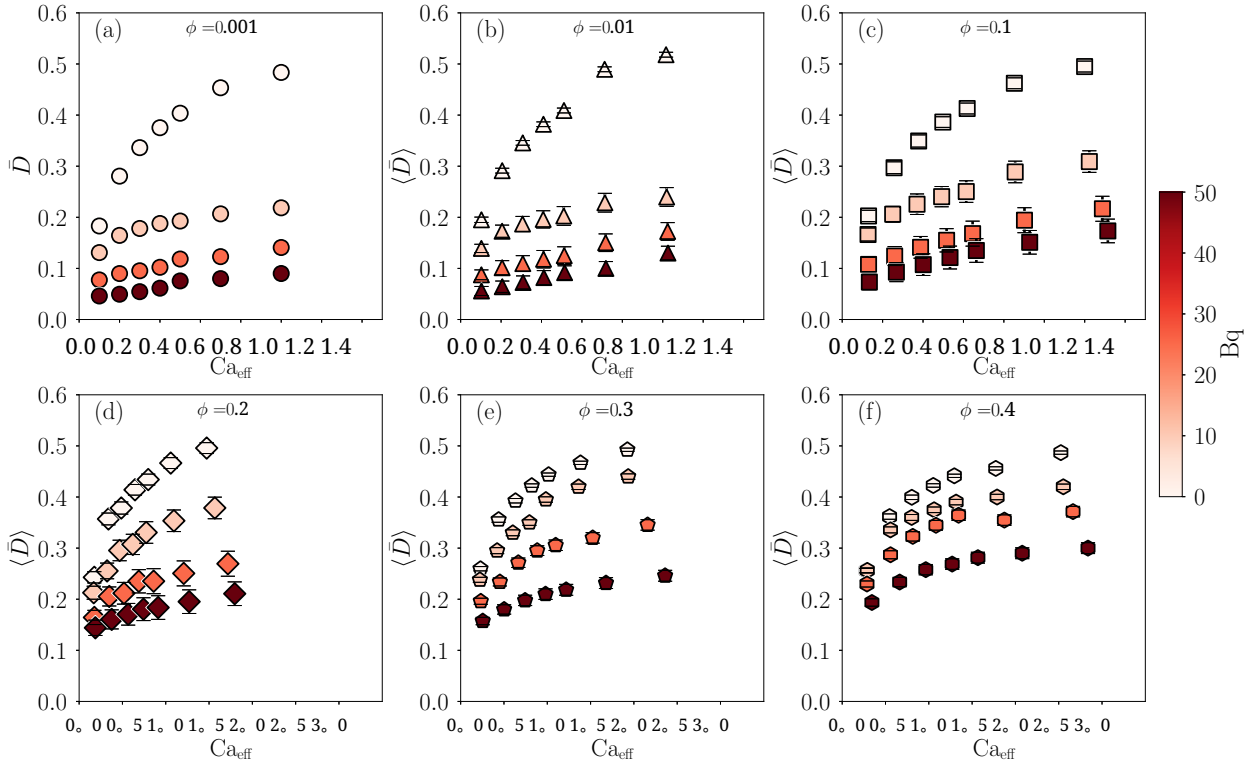

图 9：不同ϕ 值下，胶囊平均稳态变形 $\langle D\rangle$ （见公式 (26)）随 $\mathrm{Ca}_{\mathrm{eff}}$ 的变化（面板（a）： $\phi = 0.001$；面板（b）： $\phi = 0.01$；面板（c）： $\phi = 0.1$；面板（d）： $\phi = 0.2$；面板（e）： $\phi = 0.3$；面板（f）： $\phi = 0.4$），以及不同 Bq 值（Bq $= 0$、 [○, △, □, ◇, ⬠, ○]；Bq $= 10$、 [○, △, □, ◇, ⬠, ○]；Bq $= 25$、 [●, ▲, ■, ◆, ⬟, ●]；Bq $= 50$、 [●, ▲, ■, ◆, 、]）。

情况，我们同样将系统初始化为无膜预应力，因为稀悬浮液也是如此。为了在不使胶囊变形的情况下达到较高的体积分数（$\phi > 0.1$），我们将系统初始化为面心立方晶体构型（见图 7(c) 和 (f)）。

在分析单粒子情形中研究的相同量之前，我们先考察悬浮液的流变性质。我们考虑胶囊应力 Σ^p_{xz} 的 xz 分量及其弹性和黏性分量（分别为 Σ^e_{xz} 和 Σ^ν_{xz}）。图 8 报告了相对黏度 $\mu_{\mathrm{r}} = \frac{\mu_s}{\mu} = 1 + \frac{\Sigma^p_{xz}}{\dot{\gamma}\mu}$，其中 μ_s 为悬浮液的有效黏度。对于非常稀的悬浮液（$\phi = 0.01$），相对黏度 $\mu_{\mathrm{r}} \approx 1$。随着体积分数 ϕ 增大，我们观察到 μ_{r} 如预期般上升。图 8 的面板（a）报告了 μ_{r} 随毛细数 Ca 的变化，涵盖不同的 Bq 值。为清晰起见，我们仅报告 $\phi = 0.1$ 和 $\phi = 0.4$的数据。在这两种情况下，相对黏度均随 Bq 增大而上升。为更清楚地了解$\phi = 0.1$ 情况下的这种依赖关系，我们在插图中放大了该部分；插图显示，无论 Bq 值如何，剪切变稀行为都存在，但在 Bq $= 50$ 时更为显著。图 8 的面板（b）报告了 μ_{r} 随体积分数 ϕ 的变化，涵盖不同的 Bq 值。同样，为了提高图表的可读性，我们仅选取毛细数最高时的数据，即 Ca $= 1$。我们还报告了根据 Einstein 1906（$\mu_{\mathrm{r}} = 1 + \frac{5}{2}\phi$，黑色实线）和 Batchelor 和 Green 1972（$\mu_{\mathrm{r}} = 1 + \frac{5}{2}\phi + 5.2\phi^2$，黑色虚线）得出的 μ_{r}（$\bar{\phi}$）理论预测；这些预测分别适用于稀和半稀近似下的硬球悬浮液。值得注意的是，Bq 较小时的情况与 Batchelor 和 Green 1972 的预测不同，但仍呈现二次行为；而 Bq 较大时的数据则更接近硬球理论的预测值。其原因可能是，较高的膜黏度会减小胶囊的变形，使其成为硬球的更好近似，至少从几何角度而言。相对黏度的变化要求我们重新定义毛细数。当 ϕ 增大时，悬浮液的黏度也会增大（如图 8 所示）。因此，我们引入有效毛细数 $\mathrm{Ca}_{\mathrm{eff}}$，以考虑悬浮液的黏度 μ_s：

$$\mathrm{Ca}_{\mathrm{eff}} = \frac{\dot{\gamma} R \mu_s}{k_s} = \mathrm{Ca}\ \mu_{\mathrm{r}}\ . \tag{29}$$

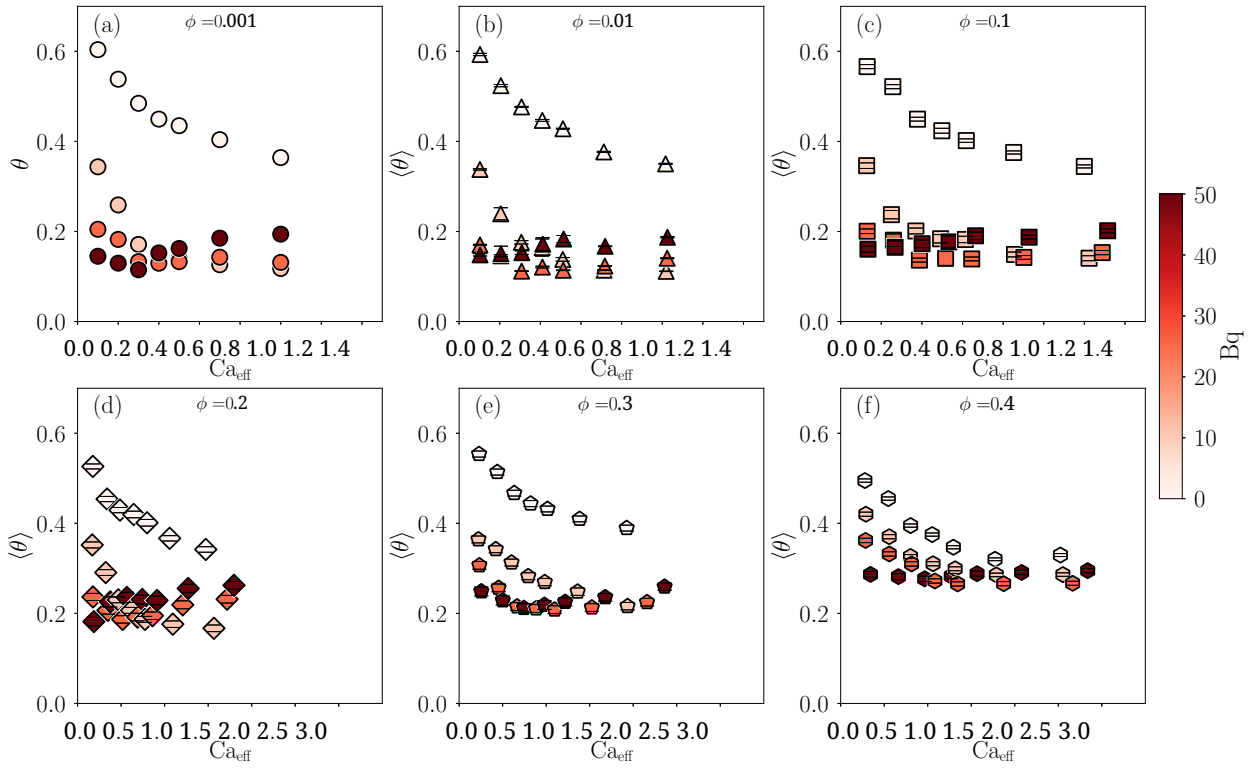

图10：不同 ϕ 取值下（面板（a）：$\phi = 0.001$；面板（b）：$\phi = 0.01$；面板（c）：$\phi = 0.1$；面板（d）：$\phi = 0.2$；面板（e）：$\phi = 0.3$；面板（f）：$\phi = 0.4$）及不同 Bq（Bq $= 0$，[○, △, □, ◇, ⬠, ○]；Bq $= 10$，[○, △, □, ◇, ⬠, ○]；Bq $= 25$，[●, ▲, ■, ◆, ⬟, ●]；Bq $= 50$，[●, ▲, ■, ◆, ⬟, ●]）时，胶囊平均稳态倾角 $\langle\theta\rangle$ 随 Ca_{eff} 的变化。

图 9 展示了不同 Bq 值和 ϕ 下，胶囊平均稳态变形随 Ca_{eff} 的变化。图中还列出了单个胶囊（$\phi = 0.001$）的数据以供比较（图 9，面板（a））。与先前在无膜黏度的情况下对弹性囊的观察一致，我们的数据表明，胶囊平均稳态变形 $\langle D\rangle$ 会随 ϕ 增大而略微增加（Aouane、Scagliarini 和 Harting 2021）。值得比较的是面板（a）和（f），它们对应于我们模拟的两个极端情况（即 $\phi = 0.001$ 和 0.4）。我们观察到，在没有膜黏度时（Bq $= 0$），$\langle D\rangle$（$\phi = 0.4$）比 $\langle D\rangle$（$\phi = 0.001$）高约 $5 - 10\%$；而当 Bq $= 50$ 时，则增加约 250%。这表明，对于较高的 ϕ，膜黏度对减小变形的影响较弱。图 9 中所示的所有 ϕ 值下，均可观察到这一总体趋势。我们注意到，在 Bq $= 50$ 时，$\langle D\rangle$ 会随着 ϕ 增大而增大（从面板（a）到（f））；但当 Bq 较小时，$\langle D\rangle$ 的差异会缩小。

图10报告了倾斜角 θ 随 Ca_{eff} 的变化。体积分数最高达到 $\phi = 0.3$时，结果与单个胶囊的情况非常相似；当 Bq 为 $\neq 0$时，倾斜角略有增加。然而，在模拟的最高密度情况下，若不存在膜黏度，倾斜角略有降低（相对于单个胶囊的情况），而在其他情况下则有所增加。值得注意的是，当有效毛细数较高时，θ 会趋于重合，$Ca_{eff} > 1.5$。

关于图11所示的胶囊平均加载时间 $\langle t_L\rangle$，我们再次观察到，体积分数 ϕ会减弱膜黏度存在的影响，尤其是在毛细数增大时。事实上，对于较低的 ϕ，$\phi \leq 0.01$ 时 $\langle t_L\rangle$ 随 Bq 增大而明显上升的现象（图 (a)–(c)）并未出现在较高的 ϕ 下（图 (d)–(f)）。此外，值得注意的是，对于 Bq $= 0$，$\langle t_L\rangle$ 对体积分数 ϕ 略有依赖，而 $\phi = 0.001$ 和 $\phi = 0.4$ 的数据几乎完全重合。当毛细数 Ca 较小时（接近线性响应），即着重考察膜的内在性质时，$\langle t_L\rangle$ 对 ϕ 和 Bq 的依赖甚至更加明显：对于体积分数 $\phi \geq 0.1$，$\langle t_L\rangle$ 仍然依赖于 Bq，但随着毛细数 Ca 增大，数据趋于汇聚到同一条曲线上。这意味着，对于浓度为 $\phi \geq 0.1$ 的悬浮液，当有效毛细数 Ca_{eff} 较高时，膜黏度的影响几乎消失。体积分数增大后膜黏度影响减弱，其原因可追溯至式（11）中定义的黏性张量：弹性贡献仅取决于囊泡的几何形状（即变形），而

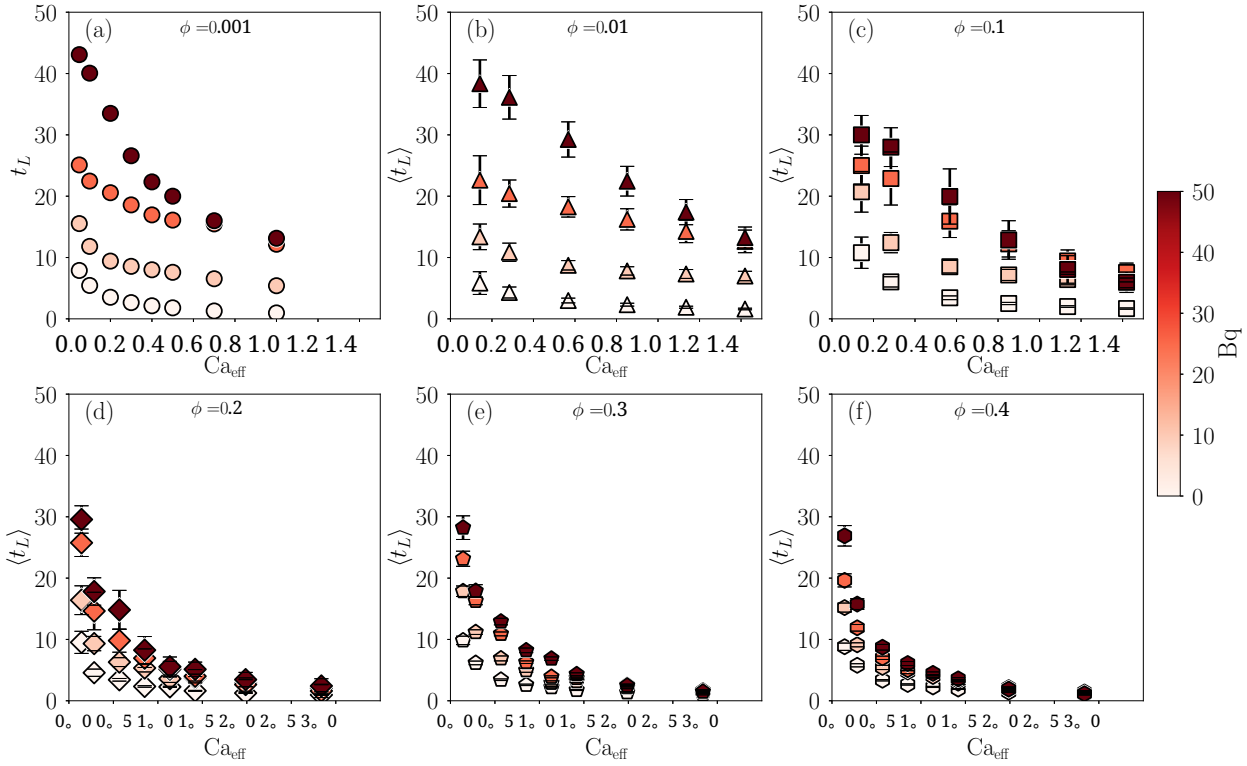

图11：不同 ϕ 取值（面板（a）：$\phi = 0.001$；面板（b）：$\phi = 0.01$；面板（c）：$\phi = 0.1$；面板（d）：$\phi = 0.2$；面板（e）：$\phi = 0.3$；面板（f）：$\phi = 0.4$）和Bq（Bq $= 0$，[○, △, □, ◇, ⬠, ⬡]；Bq $= 10$，[○, △, □, ◇, ⬠, ⬡]；Bq $= 25$，[●, ▲, ■, ◆, ⬟, ⬢]；Bq $= 50$，[●, ▲, ■, ◆, ⬟, ⬢]）条件下，胶囊平均加载时间 $\langle t_L \rangle$（见式（26））随Ca_{eff} 的变化。

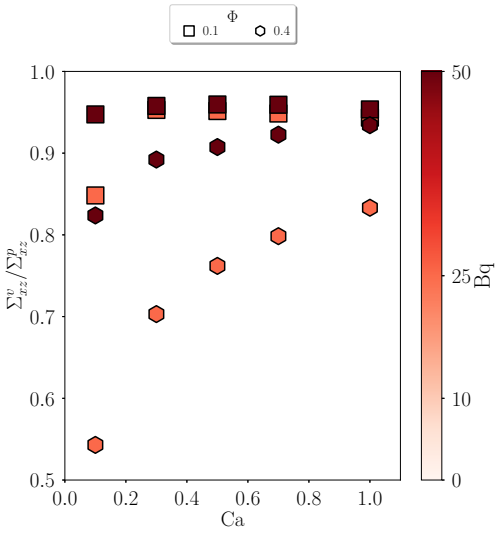

图12：Bq $= 25$，[■,●] 和Bq $= 50$，[■,●]条件下，颗粒应力中黏性贡献（Σ^v_{xz}）与颗粒总应力（$\Sigma^p_{xz} = (\Sigma^v + \Sigma^e)_{xz}$）之比的稳态值。

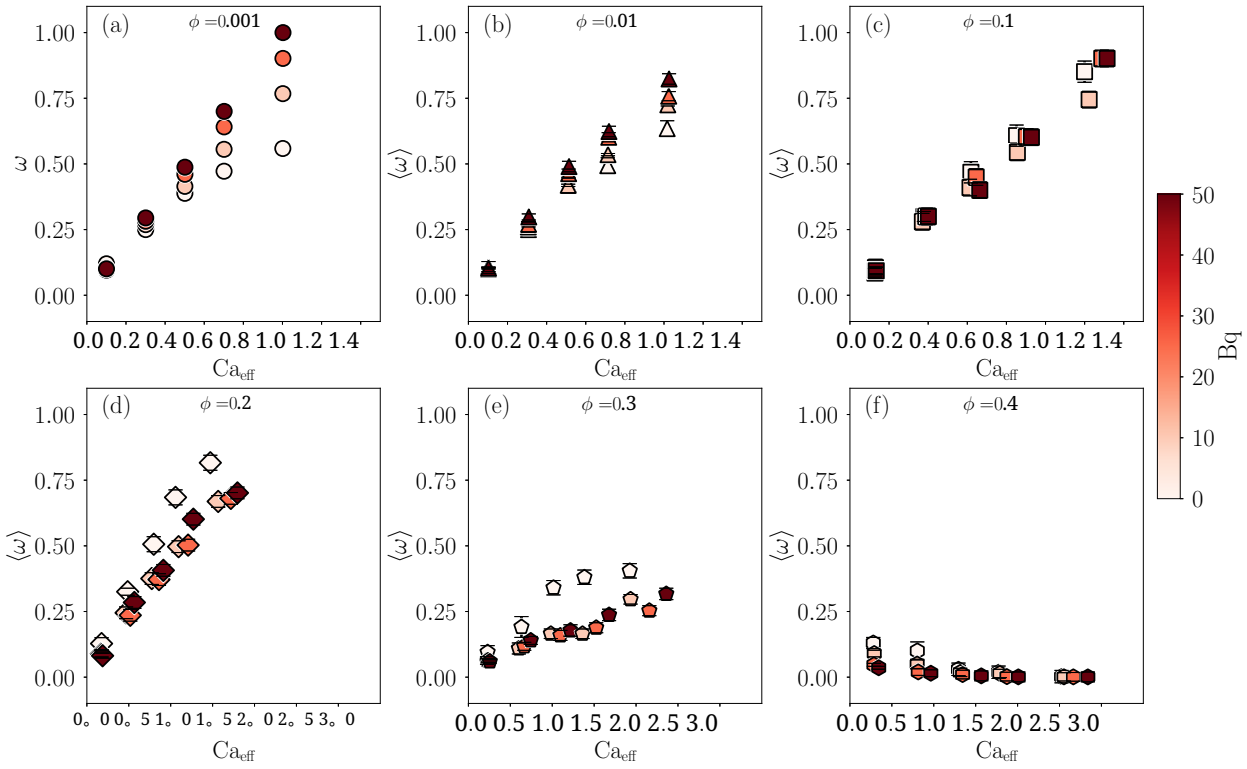

图 13：不同 ϕ 取值下的胶囊平均频率 $\langle\omega\rangle$（见式（26））随 $\mathrm{Ca}_{\mathrm{eff}}$ 的变化（面板（a）：$\phi = 0.001$；面板（b）：$\phi = 0.01$；面板（c）：$\phi = 0.1$；面板（d）：$\phi = 0.2$；面板（e）：$\phi = 0.3$；面板（f）：$\phi = 0.4$），以及不同 Bq 值（Bq $= 0$、[○, △, □, ◇, ⬠, ○]；Bq $= 10$、[○, △, □, ◇, ⬠, ○]；Bq $= 25$、[●, ▲, ■, ◆, ⬟, ●]；Bq $= 50$、[●, ▲, ■, ◆, ⬟, ●]）。

囊泡的黏性张量仅取决于表面速度梯度 $\boldsymbol{\nabla^S u^S}$。因此，当体积分数$\phi$ 增大时，应变张量 $\boldsymbol{e}$（见式（12））减小，膜黏度的影响也随之减弱。图 12 展示了比值 $\Sigma^v_{xz}/\Sigma^p_{xz}$ 随毛细数 Ca 的变化，其中体积分数取两个值（$\phi = 0.1$ 和 $\phi = 0.4$），Bq 也取两个值（Bq $= 25$ 和 Bq $= 50$）。我们观察到，体积分数增大时，Σ^v_{xz} 的贡献减小；而对于稀悬浮液，比值 $\Sigma^v_{xz}/\Sigma^p_{xz}$ 接近 1。这表明，随着体积分数增大，黏性耗散减少，剩余能量则用于弹性变形。

关于振荡的胶囊平均频率 ω，我们观察到，当体积分数最高达到 $\phi = 0.1$ 时，该频率对 Bq 的依赖较弱（见图13，(a)–(c)面板）；然而，对于 $\phi > 0.1$ （(d)–(f)面板），变形振荡消失，因此 ω 在较大的 Ca 下趋于零$_{\text{eff}}$。这可能是由于碰撞（即强烈的胶囊间相互作用）阻碍了胶囊的变形自由振荡。我们还考察了模拟中最密集情形（$\phi = 0.4$）下若干胶囊的变形，发现其变形围绕平均值呈现微小且嘈杂的波动：同样，这些振荡可归因于胶囊间碰撞。通过考察悬浮液中若干胶囊的变形，我们还确认，胶囊平均变形的行为能够很好地反映单个胶囊的行为，因此式（26）仍可用于估算t_{L} 和 ω。为进一步确认拟合过程的可靠性，读者可查看图9–11中给出的误差棒。

如上一节对单个胶囊所述，图14展示了胶囊平均的归一化半径 $\langle r_1\rangle/R$、$\langle r_2\rangle/R$ 和 $\langle r_3\rangle/R$ 的数值（分别对应子图(a)-(d)、(e)-(h)和(i)-(l)）。我们观察到，在给定体积分数下，膜黏度会明显减小这三个半径的变形。体积分数的影响在 $\phi > 0.1$时变得显著，也就是说，此时胶囊开始相互作用。即使体积分数增加，大部分变形仍发生在剪切平面内（即，r_2 受影响的程度小于r_1 和 r_3）。体积分数的影响在 $\phi > 0.1$时变得显著：事实上，对于我们模拟的所有 Bq 值，当 $\phi = 0.4$ 时，半径 r_1 和 r_3 （子图(d)和(l)）与 $\phi \leq 0.1$的情况不同。这可能是由于 $\phi = 0.4$时胶囊间的强相互作用，这再次证实膜黏度的影响在高体积分数下会减弱。关于涡量方向上的变形，r_2，它

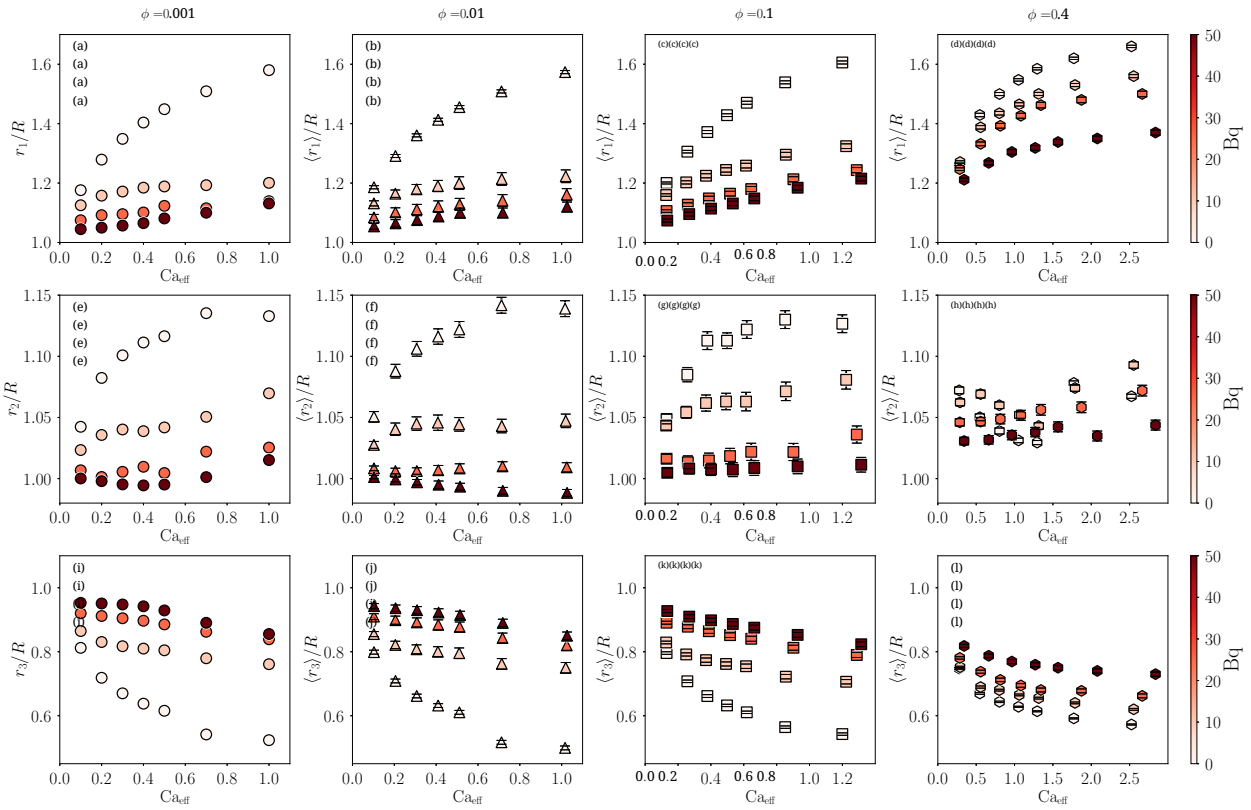

图1 4：囊泡 $\langle r_1\rangle$（面板 (a)-(d)）、$\langle r_2\rangle$（面板 (e)-(h)）和 $\langle r_3\rangle$（面板 (i)-(l)）的三个主半径的胶囊平均长度，以静止时球形胶囊的半径 R 归一化，作为 Ca_{eff} 的函数；不同的 ϕ 值（面板 (a)、(e)、(i)：$\phi = 0.001$；面板 (b)、(f)、(j)：$\phi = 0.01$；面板 (c)、(g)、(k)：$\phi = 0.1$；面板 (d)、(h)、(l)：$\phi = 0.4$）及 Bq（Bq $= 0$、[○, △, □, ○]；Bq $= 10$、[○, △, □, ●]；Bq $= 25$、[●, △, □, ●]；Bq $= 50$、[●, ▲, ■, ●]）。

对于 Bq $= 0$，为 $\sim 10\%$；对于 Bq > 0，为 $\lesssim 5\%$。虽然 r_2 在 $\phi < 0.4$时呈现出明显的 Bq 层级关系，但在 $\phi = 0.4$时则表现出更复杂的行为。不过，我们讨论的是非常小的变形（小于 5%），这意味着 r_2 的长度变化约为 $0.4\Delta x$。我们得出结论，涡量方向上的变形通常较小，尤其是在体积分数增加时。为了更定量、精确地研究 r_2 的行为，应当使用更大的胶囊进行数值模拟（因此也需要分辨率更高的网格）；然而，对涡量方向变形开展如此详细的研究超出了本文的范围。

5 结论

本研究针对不同体积分数 ϕ，参数化考察了膜黏度对黏弹性球形胶囊悬浮液瞬态动力学的影响。为此，我们采用浸入边界-格子玻尔兹曼方法进行了数值模拟。结果表明，以无量纲布辛涅斯克数 Bq 衡量的膜黏度效应对单个胶囊的动力学有显著影响。然而，随着体积分数 ϕ 增大，这种影响会减弱。将单胶囊情形（$\phi = 0.001$）与所模拟的最高浓度情形（$\phi = 0.4$）进行比较后发现，尽管膜黏度的存在会显著影响胶囊平均变形 $\langle D\rangle$，但当 $\phi = 0.4$ 时，胶囊平均加载时间 t_L 与 Bq 并无明显关联。因此，我们可以得出结论：对于本研究模拟的流动条件（即表 1 所列的 Re ~ 0.01和钙 Ca $\in [0.05, 1]$），当体积分数足够高时，膜黏度不会显著影响特征时间，但仍会对变形产生显著影响。

未来，研究稀悬浮液和浓悬浮液流经小通道时的动力学将很有价值。在此背景下，膜黏度与限域之间的相互作用尚待研究。此外，研究膜黏度对不同几何形状和膜模型的影响也值得关注，并以红细胞为例进行探讨。

6 致谢

本研究获得了德国研究联合会（DFG）资助，资助项目为“液体界面催化”SFB 1452（项目编号：431791331）和研究组FOR2688“脉动流中的不稳定性、分岔与迁移”（项目编号：417989464）。本研究还获得意大利大学与研究部（MUR）FARE计划的资助，项目名称为“Smart-HEART”。作者谨此感谢高斯超级计算中心（www.gauss-centre.eu）为本项目提供资助，并通过约翰·冯·诺伊曼计算研究所（NIC）在于利希超级计算中心（JSC）的GCS超级计算机JUWELS上提供计算时间（于利希超级计算中心，2019年）。

参考文献

Barthès-Biesel, D.（2016年1月）。“流动中弹性胶囊和囊泡的运动与变形”。载于：《流体力学年度评论》48.1，第25–52页。ISSN：0066-4189, 1545-4479。DOI：10 . 1146 / annurev- fluid-122414-034345。Luo, Z. Y. 和 B. F. Bai（2019年）。“弹性囊泡流经微流控通道狭窄段时的溶质释放”。载于：《流体物理学》31.12，第121902页。DOI：10.1063/1.5129413。Bah, M. G., M. Bilal H, 和 J. Wang（2020年）。“复杂微胶囊的制备与应用：综述”。载于：《软物质》16.3，第570–590页。ISSN：1744-683X, 1744-6848。DOI：10.1039/C9SM01634A。Kim, K. 等（2009年）。“利用力反馈MEMS微夹持器对用于药物递送的微胶囊进行弹性和黏弹性表征”。载于：Biomedical microdevices 11.2，第421–427页。DOI：10.1007/s10544-008-9248-6。Sun, F. 等（2021年）。“双功能膨胀型阻燃/自修复水性胶合板涂层”。载于：Progress in Organic Coatings 154，第106187页。Zhang, J., P. C. Johnson, 和 A. S. Popel（2007年12月）。“一种用于模拟可变形液态囊体的浸入边界格子玻尔兹曼方法及其在微观血流中的应用”。载于：Physical biology 4.4，第285–295页。ISSN：1478-3975。DOI：10.1088/1478-3975/4/4/005。Krüger, T.（2012年）。《红细胞浓悬浮液中集体现象的计算机模拟研究》，关于剪切。

施普林格科学与商业媒体。Shen, Z. 等（2018）。“血液晶体：壁面约束剪切流下红细胞涌现出的有序结构”。载于：《物理评论快报》120，页码：268102。DOI：10.1103/PhysRevLett.120.268102。Gekle, S.（2016）。“血流中活性粒子的边集现象显著加速”。载于：《生物物理学杂志》110.2，页码：514–520。Bächer, C. 等（2018）。“分支血管附近微粒和血小板的反边集现象”。载于：《生物物理学杂志》115.2，页码：411–425。Tomaiuolo, G. 等（2011）。“红细胞膜黏弹性的微流控分析”。载于：《芯片实验室》11.3，页码：449–454。Tomaiuolo, G. 和 S. Guido（2011年7月）。“微毛细管流动中红细胞的启动形状动力学”。载于：《微血管研究》82.1，页码：35–41。ISSN：00262862。DOI：10.1016/j.mvr.2011.03.004。Tomaiuolo, G. 等（2016年1月）。“红细胞的微受限流动行为”。载于：《医学工程与物理》38.1，页码：11–16。ISSN：13504533。DOI：10.1016/j.medengphy.2015.05.007。Braunmüller, S. 等（2012）。“流体动力学变形揭示红细胞松弛的两种耦合模态/时间尺度”。载于：《软物质》8.44，页码：11240。ISSN：1744-683X, 1744-6848。DOI：10.1039/c2sm26513c。Prado, G. 等（2015年5月）。“受限红细胞的黏弹性瞬态”。载于：《生物物理学杂志》108.9，页码：2126–2136。ISSN：00063495。DOI：10.1016/j.bpj.2015.03.046。arXiv：1409.5049 [凝聚态物理]。Tran-Son-Tay, R., S.P. Sutera 和 P.R. Rao（1984年7月）。“通过坦克履带式运动的流变光学观测测定红细胞膜黏度”。载于：《生物物理学杂志》46.1，页码：65–72。ISSN：00063495。DOI：10.1016/S0006-3495(84)83999-5。Barthès-Biesel, D. 和 J.M. Rallison（1981）。“线性剪切流中自由悬浮囊泡的时变形变”。载于：《流体力学杂志》113，页码：251–267。DOI：10.1017/S0022112081003480。Barthès-Biesel, D.（1980年10月）。“线性剪切流中自由悬浮球形微胶囊的运动”。载于：《流体力学杂志》100.4，页码：831–853。ISSN：0022-1120, 1469-7645。DOI：10 . 1017 / S0022112080001449。–（1991年3月）。“界面性质对剪切流中囊体运动与变形的影响”。载于：《物理学A辑：统计力学及其应用》172.1-2，页码：103–124。ISSN：03784371。DOI：10.1016/0378- 4371(91)90314-3。–（1993年1月）。“剪切流中囊体运动与变形的理论建模”。载于：《生物材料、人工细胞与固定化生物技术》21.3，页码：359–373。ISSN：1055-7172。DOI：10 . 3109/10731199309117374。

Barthès-Biesel, D., A. Diaz 和 E. Dhenin（2002年6月）。“二维膜本构定律对流动诱导的囊体变形的影响”。载于：《流体力学杂志》460，页码：211–222。ISSN：0022-1120, 1469- 7645。DOI：10.1017/S0022112002008352。Chang, K. S. 和 W. L. Olbricht（1993年5月）。“稳态和非稳态简单剪切流中合成囊体变形与破裂的实验研究”。载于：《流体力学杂志》250，页码：609–633。ISSN：0022-1120, 1469-7645。DOI：10.1017/S0022112093001582。Walter, A., H. Rehage 和 H. Leonhard（2001年7月）。“剪切诱导的微胶囊变形：形状振荡与膜折叠”。载于：《胶体与表面A：物理化学与工程学》183–185，页码：123– 132。ISSN：09277757。DOI：10.1016/S0927-7757(01)00564-7。Pozrikidis, C.（1995年8月）。“简单剪切流中弹性膜包裹的液态囊体的有限变形”。载于：《流体力学杂志》297，页码：123–152。ISSN：0022-1120, 1469-7645。DOI：10 . 1017/ S0022112095003030X。Ramanujan, S. 和 C. Pozrikidis（1998年4月）。“简单剪切流中弹性膜包裹的液态囊体的变形：大变形及流体黏度的影响”。载于：《流体力学杂志》361，页码：117–143。ISSN：0022-1120, 1469-7645。DOI：10.1017/S0022112098008714。Aouane, O., A. Scagliarini 和 J. Harting （ 2021 年 3 月）。“ 球形应变硬化囊体悬浮液的结构与流变学 ”。载于：《流体力学杂志》 911，A11。ISSN：0022-1120, 1469-7645。DOI：10.1017/jfm. 2020.1040。Pranay, P., R. G. Henríquez-Rivera 和 M. D. Graham（2012年6月）。“牛顿流体和黏弹性流体中弹性囊体悬浮液的耗尽层形成”。载于：《流体物理学》24.6，页码：061902。ISSN：1070-6631, 1089-7666。DOI：10.1063/1.4726058。Karyappa, R. B., S. D. Deshmukh 和 R. M. Thaokar（2014年12月）。“均匀电场中弹性囊体的变形”。载于：《流体物理学》26.12，页码：122108。ISSN：1070-6631, 1089-7666。DOI：10.1063/1.4903838。Clausen, J. R. 和 C. K. Aidun（2010年12月）。“剪切流中的囊体动力学与流变学：颗粒压力和法向应力”。载于：《流体物理学》22.12，页码：123302。ISSN：1070-6631, 1089-7666。DOI：10.1063/1.3483207。Clausen, J. R., D. A. Reasor 和 C. K. Aidun（2011年10月）。“可变形囊体浓悬浮液的流变学与微观结构”。载于：《流体力学杂志》685，页码：202–234。ISSN：0022-1120, 1469-7645。DOI：10.1017/jfm.2011.307。Rorai, C. 等（2015年5月）。“狭窄微通道中弹性囊体的运动”。载于：《欧洲物理学杂志E》38.5，页码：49。ISSN：1292-8941, 1292-895X。DOI：10.1140/epje/i2015-15049-8。Dodson, W. R. 和 P. Dimitrakopoulos（2009年12月）。“通过用于弹性膜的界面谱边界元算法研究强平面拉伸流中应变硬化和应变软化囊体的动力学”。载于：《流体力学杂志》641，页码：263–296。ISSN：0022-1120, 1469-7645。DOI：10.1017/S0022112009991662。Krüger, T., B. Kaoui 和 J. Harting（2014）。“惯性与可变形性对囊体悬浮液流变性质的相互作用”。载于：《流体力学杂志》751。另见：http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2014.443，页码：725–745。DOI：10.1017/jfm.2014.315。电子预印本：arXiv:1311.3650。URL：https://dx.doi.org/10.1017/ jfm.2014.315。Krüger, T., F. Varnik 和 D. Raabe（2011）。“利用浸入边界格子玻尔兹曼有限元组合方法，高效准确地模拟浸没于流体中的可变形颗粒”。载于：《计算机与应用数学》61.12，页码：3485–3505。DOI：10.1016/j.camwa.2010.03.057。Esposito, G. 等（2022年7月）。“通过惯性微流控进行细胞分选的数值模拟”。载于：《流体物理学》34.7，页码：072009。ISSN：1070-6631, 1089-7666。DOI：10.1063/5.0096543。Diaz, A., N. Pelekasis 和 D. Barthès-Biesel（2000年5月）。“囊体对变化流动条件的瞬态响应：内部流体黏度和膜弹性的影响”。载于：《流体物理学》12.5，页码：948–957。ISSN：1070-6631, 1089-7666。DOI：10.1063/1.870349。Tran, S. B. Q. 等（2020年9月）。“利用浸入边界法模拟黏性流中的可变形囊体”。载于：《流体物理学》32.9，页码：093602。ISSN：1070-6631, 1089-7666。DOI：10.1063/5.0016302。Cordasco, D. 和 P. Bagchi（2013年9月）。“剪切流中囊体和红细胞的轨道漂移”。载于：《流体物理学》25.9，页码：091902。ISSN：1070-6631, 1089-7666。DOI：10.1063/1.4820472。Wouters, M. P. J. 等（2020）。“穿过薄液膜凸出的软囊体之间的毛细相互作用”。载于：《软物质》16，页码：10910。DOI：10.1039/D0SM01385D。Bielinski, C. 等（2021）。“将多个软颗粒挤入狭窄通道：向堵塞的转变”。载于：《物理评论E》104，页码：065101。DOI：10.1103/PhysRevE.104.065101。Alizad Banaei, A. 等（2017年3月）。“剪切流中含细胞核弹性囊体的数值模拟”。载于：《欧洲计算力学杂志》26.1-2，页码：131–153。ISSN：1779-7179, 1958-5829。DOI：10.1080/ 17797179.2017.1294828。Kessler, S., R. Finken 和 U. Seifert（2008年6月）。“剪切流中弹性囊体的摆动与翻滚”。载于：《流体力学杂志》605，页码：207–226。ISSN：0022-1120, 1469-7645。DOI：10.1017/S0022112008001493。

Bagchi, P. 和 R. M. Kalluri（2011年2月）。“弹性囊稀悬浮液的动态流变学：囊体绕转、摆动和翻滚的影响”。载于：《流体力学杂志》669，页码 498–526。ISSN：0022-1120，1469-7645。DOI：10.1017/S0022112010005161。Barthès-Biesel, D. 和 H. Sgaier（1985）。“膜黏度对剪切流中球形胶囊取向与变形的作用”。载于：J. Fluid Mech. 160，页码 119–135。DOI：10.1017/S002211208500341X。Yazdani, A. 和 P. Bagchi（2013）。“膜黏度对剪切流中囊泡动力学的影响”。载于：《流体力学杂志》718，569–595。DOI：10.1017/jfm.2012.637。Li, P. 和 J. Zhang（2019）。“一种用于黏弹性膜囊泡动力学浸入边界模拟的带子采样有限差分法”。载于：International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering 35.6，e3200。DOI：10.1002/cnm.3200。Guglietta, F. 等（2020）。“膜黏度对红细胞瞬态动力学的影响”。载于：《软物质》16（26），页码 6191–6205。DOI：10.1039/D0SM00587H。Guglietta, F. 等（2021b）。“红细胞的加载与松弛动力学”。载于：《软物质》17（24），页码 5978–5990。DOI：10.1039/D1SM00246E。Guglietta, F. 等（2021a）。“格子玻尔兹曼模拟中的翻滚到坦克履带式运动转变：膜黏度的影响”。载于：《皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》379.2208，页码 20200395。DOI：10.1098/rsta.2020.0395。Rezghi, A.、P. Li 和 J. Zhang（2022）。“管流中黏弹性胶囊的横向迁移”。载于：《流体物理学》34.1，页码 011906。DOI：10.1063/5.0078544。Li, P. 和 J. Zhang（2021）。“膜黏度与内部流体黏度在剪切流囊泡动力学中的相似但不同作用”。载于：《心血管工程与技术》12.2，页码 232–249。DOI：10.1007/s13239-020-00517-4。Diaz, A.、D. Barthès-Biesel 和 N. Pelekasis（2001）。“膜黏度对轴对称囊动态响应的影响”。载于：《流体物理学》13.12，页码 3835–3838。DOI：10.1063/1.1403697。Zhang, Y. 等（2020年10月）。“黏弹性胶囊在稳态和振荡剪切流中的动态模式”。载于：《流体物理学》32.10，页码 103310。ISSN：1070-6631，1089-7666。DOI：10.1063/5.0023098。Rezghi, A. 和 J. Zhang（2022年8月）。“剪切流中红细胞的坦克履带式运动动力学：膜黏度流变学”。载于：《生物物理学杂志》，S0006349522006762。ISSN：00063495。DOI：10.1016/j.bpj.2022. 08.016。Li, P. 和 J. Zhang（2020年12月）。“用于黏弹性膜浸入边界模拟中麦克斯韦黏性应力计算的有限差分与积分格式”。载于：《生物力学与机械生物学建模》19.6，页码 2667–2681。ISSN：1617-7959，1617-7940。DOI：10.1007/s10237-020-01363-y。Benzi, R.、S. Succi 和 M. Vergassola（1992）。“格子玻尔兹曼方程：理论与应用”。载于：Physics Reports 222.3，页码 145–197。ISSN：0370-1573。DOI：https://doi.org/10.1016/0370-1573(92)90090- M. Chapman, S.andT. G. Cowling（1990）。《非均匀气体的数学理论：动理论概述》气体中的黏度、剑桥大学出版社。Guo, Z., C. Zheng, and B. Shi (2002). “格子玻尔兹曼方法中强迫项的离散格子效应”。载于：《物理评论E》65 (4)，第 046308 页。DOI：10.1103/PhysRevE.65.046308。Qian, Y., D. d’Humières, and P. Lallemand (1992). “用于纳维–斯托克斯方程的格子BGK模型”。载于：EPL（《欧洲物理快报》）17.6，第 479 页。DOI：10.1209/0295-5075/17/6/001。Krüger, T. 等 (2017). “格子玻尔兹曼方法”。载于：Springer International Publishing 10.978-3，第 4–15 页。Peskin, C. S. (2002). “浸入边界法”。载于：《数值分析纪事》11，第 479–517 页。DOI：10 . 1017/ S0962492902000077。Skalak, R. 等 (1973). “红细胞膜的应变能函数”。载于：《生物物理学杂志》13.3，第 245–264 页。ISSN：0006-3495。DOI：10.1016/S0006-3495(73)85983-1。Keller, Stuart R and Richard Skalak (1982). “剪切流中坦克履带式运动椭球形颗粒的运动”。载于：《流体力学杂志》120，第 27–47 页。Matteoli, P, Franck Nicoud, and Simon Mendez (2021). “膜黏度对红细胞坦克履带式运动行为的影响”。载于：《物理评论流体》6.4，第 043602 页。Noguchi, Hiroshi and Gerhard Gompper (2005). “剪切流中流体囊泡的动力学：膜黏度和热涨落的影响”。载于：《物理评论E》72.1，第 011901 页。DOI：10.1103/PhysRevE.72.011901。– (2007). “剪切流中流体囊泡的摆动与翻滚”。载于：《物理评论快报》98.12，第 128103 页。Maffettone, PL and Mario Minale (1998). “黏性流动中椭球形液滴的变化方程”。载于：《非牛顿流体力学杂志》78.2-3，第 227–241 页。Unverfehrt, A., I. Koleva, and H. Rehage (2015). “简单剪切流中微胶囊的变形、取向与破裂：起皱过程、翻滚和摆动运动”。载于：《物理学会议系列杂志》。第 602 卷。1. IOP Publishing，第 012002 页。DOI：10.1088/1742-6596/602/1/012002。

Finken, R and U Seifert（2006年4月）。“剪切流中微胶囊的起皱”。载于：《物理学杂志：凝聚态》18.15，第L185–L191 页。ISSN:0953-8984,1361-648X。DOI：10.1088/0953- 8984/18/15/L04。Suresh, S. 等 (2005). “单细胞生物力学与人类疾病状态之间的联系：胃肠道癌症和疟疾”。载于：《生物材料学报》1.1，第 15–30 页。DOI：10.1016/j.actbio.2004.09.001。Gounley, J. 等 (2016). “表面黏度对剪切流中液滴的影响”。载于：《流体力学杂志》791，464–494。DOI：10.1017/jfm.2016.39。Einstein, A. (1906年). “分子尺寸的新测定”。载于：《物理年鉴》324 (2)，第 289–306 页。Batchelor, G. K. and J. T. Green (1972年12月). “球形颗粒悬浮液中体应力的确定（至 c 2 阶）”。载于：《流体力学杂志》56.03，第 401 页。ISSN：0022-1120, 1469-7645。DOI：10.1017/ S0022112072002435。（访问日期：2022年9月2日）。于利希超级计算中心 (2019). “JUWELS：于利希超级计算中心的模块化 Tier-0/1超级计算机”。载于：《大型科研设施杂志》5.A135。DOI：10.17815/jlsrf-5-171。URL：http://dx. doi.org/10.17815/jlsrf-5-171。