RISC 报告 23-01

精化望远镜算法在 RΠΣ-扩张中降低分母次数

CARSTEN SCHNEIDER

Abstract. 我们在差分环扩张的框架下提出了一个通用框架，使得人们能够找到不定嵌套和的改进表示，从而降低被加项中出现的分母次数。底层的（参数化）望远镜算法可以在建立于一般ΠΣ-域之上的 RΠΣ-环扩张中执行。该工具箱的一个重要应用是简化由递推关系得到的达朗贝尔解和刘维尔解，其中所出现的和的分母无法进行良好因式分解。

arXiv:2302.03563v1 [cs.SC] 7 Feb 2023

1. Introduction

参数化伸缩求和是符号求和的一个核心范式，可以在差分环（或域）（$\mathbb{A}$, σ）中引入如下。$\mathbb{A}$ 是对求和对象进行建模的环（或域），$\sigma\colon \mathbb{A}\to\mathbb{A}$ 是一个环（或域）自同构，用于限定移位算子，而 $\mathbb{K}=\text{const}_\sigma\mathbb{A}=\{c\in\mathbb{A}\mid \sigma(c)=c\}$ 是构成 $\mathbb{A}$的子环（或子域）的常数集合；其中，$\mathbb{K}$ 始终是一个也称为常数域的域。于是，我们关注以下问题。

在 $(\mathbb{A},\sigma)$ 中的问题 PT（常数域为 $\mathbb{K}=\text{const}_\sigma\mathbb{A}$）。给定 $f_1,\dots,f_m\in\mathbb{A}\setminus\{0\}$。求 $h\in\mathbb{A}$ 和 $(c_1,\dots,c_m)\in\mathbb{K}^m\setminus\{\mathbf{0}\}$，使得

$$\sigma(h)-h=c_1f_1+\dots+c_df_m. \tag{1}$$

对于特殊情形 $m=1$，这就化为望远镜求和问题。

在 $(\mathbb{A},\sigma)$ 中的问题 T。给定 $f\in\mathbb{A}\setminus\{0\}$。求 $h\in\mathbb{A}$，使得

$$\sigma(h)-h=f. \tag{2}$$

若 σ 表示 k 中的移位，则方程 (2) 变为 $h(k+1)-h(k)=f(k)$。将此方程对 k 从 a 求和至 b，得到 $\sum_{k=a}^{b}f(k)=h(b+1)-h(a)$。类似地，Zeilberger 创造性望远镜求和范式 [57] 用于求定和的递推关系，这可通过令 $f_i=F(n+i-1,k)\in\mathbb{A}$（对 $1\le i\le m$）纳入问题 PT。

这些求和技术的突破是 Gosper 针对超几何乘积 [25] 提出的望远镜算法，以及 Zeilberger 将其扩展为创造性望远镜法 [57]。此后，这些算法经过优化，并进一步扩展到其他输入类别，例如（q–）超几何乘积 [36, 37, 10, 21, 20, 19] 或全纯序列 [56, 23, 33]。另一项里程碑是 Karr 求和算法 [28, 29]，它解决了 ΠΣ-域中的问题 T 和 PT。

定义 1. 差分域 $(\mathbb{F},\sigma)$ 对差分域 $(\mathbb{G},\sigma)$ 的扩张称为 ΠΣ-域扩张，若 $\mathbb{G}=\mathbb{G}_0\le\mathbb{G}_1\le\dots\le\mathbb{G}_e=\mathbb{F}$ 是一个有理函数域扩张塔，且对 $1\le i\le e$ 有 $\mathbb{G}_i=\mathbb{G}_{i-1}(t_i)$，并且 $\text{const}_\sigma\mathbb{F}=\text{const}_\sigma\mathbb{G}$，其中对所有 $1\le i\le e$，以下条件之一成立:

Key words and phrases. 望远镜求和、差分环、既约分母、嵌套和。由奥地利科学基金会（FWF）项目 P33530 资助。

- $\frac{\sigma(t_i)}{t_i} \in (\mathbb{G}_{i-1})^*$ (t_i 称为 Π-域单项式）；
- $\sigma(t_i) - t_i \in \mathbb{G}_{i-1}$ (t_i 称为一个 Σ-域单项式)。这样的一个 $(\mathbb{F}, \sigma)$

称为 $\mathbb{K}$ 上的 ΠΣ-域，当 $\text{const}_\sigma \mathbb{G} = \mathbb{G} = \mathbb{K}$。

结合 RΠΣ-扩张 [51, 52] （见定义2），可以完全自动地重新表述由嵌套乘积定义的不定嵌套和 [42, 9, 49, 34, 35, 53]；另见 [9, 18]。特别是，改进后的（参数化）望远镜求和算法 [45, 47, 48, 9, 50] 已在求和软件包 Sigma[44, 54] 中实现，以找到具有最小嵌套深度的表示。对于有理情形$\mathbb{K}(x)$， [5, 36] 中还引入了其他重要的简化方法： $\sigma(x) = x + 1$ 能够针对给定的 $f \in \mathbb{K}(x)$，在 $\mathbb{K}(x)$ 中或在一个 ΠΣ-域 $\mathbb{K}(x)(t)$ 中求得一个 h，使得式（2）成立，且 f' 的分母次数最小；关于在 ΠΣ-域（$\mathbb{F}(x)$ σ）中的推广，参见 [43]。

在本文中，我们旨在改进这种伸缩求和方法 [5, 36, 43] （例如，也与 [6, 22, 17]相关），使得生成元 x 也可以出现在扩张塔中。例如，考虑下式中的和

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{-2+k}{10(1+k^2)} + \frac{(1-4k-2k^2)}{10(1+k^2)(2+2k+k^2)}S_1(k) + \frac{(1-4k-2k^2)}{5(1+k^2)(2+2k+k^2)}S_3(k)\Big) = \frac{(n^2+4n+5)}{10(n^2+2n+2)}S_1(n) - \frac{(n-1)(n+1)}{5(n^2+2n+2)}S_3(n) - \frac{2}{5}S_2(n). \quad (3)$$

其中， k 中的分母无法在 $\mathbb{Q}$上良好地分解；这里 $S_o(n) = \sum_{i=1}^{k} 1/i^o$ 表示调和数。借助我们的新算法，可以将（3）的右端计算为分母可线性分解的和。一般而言，我们假设 $\mathbb{A}$ 中的和与乘积在 x （此处为 k）上具有良好的分母，即对于某个给定的 $d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，其不可约因子的次数至多为 d。于是，我们可以通过算法判定问题 T 和 PT 是否在 $\mathbb{A}$ 中可解，或者是否在其某个扩张中可解，其中附加的和再次具有良好的分母。

这些算法在化简超几何乘积的达朗贝尔解和刘维尔解 [38,40, 8, 27, 39] 以及其在 ΠΣ-域 [7]中的推广方面发挥着关键作用。例如，在来自粒子物理 [12, 14, 15] 的计算中，我们已经获得了嵌套深度达到 40 的和解，其中这些和的分母由次数最高达 1000 的不可约多项式构成。借助我们的新工具箱，我们获得了最优的和表示，其分母中仅含线性因子。这些化简对于以调和和及其推广形式 [13, 55, 2, 3, 1]获得解至关重要。特别是，这些工具可以与准洗牌代数 [11, 4]高效结合。

本文结构如下。第 2 节介绍精化的 RΠΣ-扩张及其主要性质。第 3 节详细讨论分母约化表示。这一思路在第 4 节导出了新的望远镜算法。第 5 节给出结论。

2. Basic notions and properties

所有域和环的特征均为零。若 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{E}$ 的子环（或子域），且满足 $\sigma|_{\mathbb{A}} = \sigma'$，则称 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 是 $(\mathbb{A}, \sigma')$ 的差分环（或域）扩张；下文不再区分 σ 和 σ'。

若差分域或差分环 $(\mathbb{A}, \sigma)$ 的常数域为 $\mathbb{K}$，且 σ 可计算、能够在 $\mathbb{A}$ 中执行标准运算，并能判定一个元素是否为 0，则称其为可计算的。若此外还能计算出 $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{A}$ 的 $\mathbb{K}$-向量空间的一组基，则称其为 LA-可计算。

$$\text{Ann}_{\mathbb{K}}(f_1, \dots, f_m) = \{(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{K}^m \mid c_1 f_1 + \dots + c_m f_m = 0\}.$$

在（$\mathbb{F}$， σ）的 ΠΣ-域扩张（$\mathbb{F}(x)$ σ）中，如果不存在满足 $\sigma^n(h)/h \in \mathbb{F}$ 的 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，则我们将 $h \in \mathbb{F}^*$ 的周期定义为 $\text{per}(h) = 0$；否则，$\text{per}(h)$ 是具有此性质的最小 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$。

我们依赖以下性质：这些性质已针对 [28] 中的 ΠΣ-域以及 [16, 41] 中的 ΠΣ-域扩张得到证明。

引理1. 设 $f, g \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$ 属于 $(\mathbb{F}, \sigma)$ 的一个 ΠΣ-扩张（$\mathbb{F}(x)$ σ）。
1. 若 $\operatorname{per}(f) > 0$，则 $\frac{\sigma(x)}{x} \in \mathbb{F}$ 且 $f = c\,x^m$，其中 $c \in \mathbb{F}^*, m \in \mathbb{Z}$。2. 假设 $\sigma(x^x) \notin \mathbb{F}$），或者二者并非都具有 $c\,x^m$ 的形式，其中 $c \in \mathbb{F}^*, m \in \mathbb{Z}$，即 f, g。那么至多存在一个 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $\sigma^k(f)/g \in \mathbb{F}$。
因此，$\mathbb{F}(x)$ 中的任意元素的周期均为 0 或 1。此外，唯一周期为 1 的首一不可约多项式就是 Π-单项式 x 本身。写作 $f = f_1^{n_1} \dots f_u^{n_u} \in \mathbb{F}(x)$，其中不可约多项式 f_i 两两互素，且 $n_i \in \mathbb{Z}$。我们称 f 具有 x-次数 $\le d$，其中 $d \in \mathbb{N}_{\ge 0}$，若对于任意满足 $1 \le i \le u$ 的周期为 0 的因子 f_i，都有 $\deg_x(f_i) \le d$；注意：f 可能含有周期为 1 的因子。若存在一个 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $\sigma^k(f)/g \in \mathbb{F}$，则称不可约多项式 $f, g \in \mathbb{F}[x]$ 为 σ-等价。否则，称它们为 σ-互素。
我们引入 RΠΣ-扩张 [51, 52] 来建模，例如 $(-1)^n$。
定义2. 差分环 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 的差分环扩张 $(\mathbb{A}, \sigma)$ 称为 RΠΣ-扩张，如果 $\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \le \mathbb{A}_1 \le \dots \le \mathbb{A}_e = \mathbb{E}$ 是环扩张塔，且 $\operatorname{const}_\sigma \mathbb{E} = \operatorname{const}_\sigma \mathbb{A}$，其中对于所有 $1 \le i \le e$，以下条件之一成立：

- $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{i-1}[t_i]$ 是在关系 t_i^ν约束下的环扩张 $= 1$ 对于某个 $\nu > 1$，其中 $\sigma(t_i) t_i \in (\mathbb{A}_{i-1})^*$ 是一个原始 ν阶单位根（t_i 称为 R-单项式，并且我们定义 $\nu = \operatorname{ord}(t_i)$）；
- $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{i-1}[t_i, t_i^{-1}]$ 是一个 Laurent 多项式环扩张，满足 $\frac{\sigma(t_i)}{t_i} \in (\mathbb{A}_{i-1})^*$（$t_i$ 称为一个 Π-单项式）；
- $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{i-1}[t_i]$ 是一个多项式环扩张，满足 $\sigma(t_i) - t_i \in \mathbb{A}_{i-1}$（$t_i$ 称为一个 Σ-单项式）。

根据 RΠΣ-单项式的出现情况，这种扩张也称为 R-/Π-/Σ-/RΠ-/RΣ-/ΠΣ-扩张。
如果对于所有 RΠ-单项式 t_i，都有 $\sigma(t_i) t_i = u\, t_1^{m_1} \dots t_{i-1}^{m_{i-1}}$，且 $u \in \mathbb{A}^*$ 以及当 t_j 为 Σ-单项式时 $m_j = 0$，则称 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 是 $(\mathbb{A}, \sigma)$ 的一个简单 RΠΣ-环扩张。如果 t_i 是一个 R-单项式，则还要求 u 是一个单位根，并且当 t_j 是一个 ΠΣ-单项式时 $m_j = 0$。
例 1。取差分域 $(\mathbb{Q}(x)$ $\sigma)$，其中 $\sigma(x) = x + 1$。由于 $\operatorname{const}_\sigma \mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q}$，它是 $\mathbb{Q}$上的一个 ΠΣ-域。我们在 $(\mathbb{Q}(x)$ $\sigma)$ 上引入如下 RΠΣ-扩张 $(\mathbb{E}, \sigma)$，即 $\operatorname{const}_\sigma \mathbb{E} = \mathbb{Q}$；关于验证此性质的算法技术，请参阅 [28, 51]。

1. $(\mathbb{E}, \sigma)$ 与多项式环 $\mathbb{E} = \mathbb{Q}(x)[h_1][h_2]$, $\sigma(h_1) = h_1 + \frac{1}{1+x}$ 和 $\sigma(h_3) = h_3 + \frac{1}{(1+x)^3}$是 $(\mathbb{K}(x)$ $\sigma)$ 的一个简单 Σ-扩张。
2. 取环 $\mathbb{E}_0 = \mathbb{K}(x)[z]$，满足关系 $z^2 = 1$，并在其上定义 Laurent 多项式环 $\mathbb{E} = \mathbb{E}_0[\tau_1, \tau_1^{-1}][\tau_2, \tau_2^{-1}]$。那么 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 与 $\sigma(z) = -z$, $\sigma(\tau_1) = (x+1)\tau_1$ 和$\sigma(\tau_2) = (x+1)\tau_1$ 是 $(\mathbb{Q}(x)$ $\sigma)$ 的一个简单 RΠΣ-扩张。

3. 取多项式环 $\mathbb{E} = \mathbb{E}_0[h_1]$。那么 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 与 $\sigma(z) = -z$ 和 $\sigma(h_1) = h_1 + \frac{-z}{1+x}$ 是 $(\mathbb{Q}(x)$ $\sigma)$ 的一个简单 RΠΣ-扩张。

为方便起见，我们使用 $\mathbb{A}\langle t \rangle$ 表示三种不同的含义：如果 t 是一个阶为 ν 的 R-单项式，它表示满足关系 $t^\nu = 1$ 的环 $\mathbb{A}[t]$；如果 t 是一个 Σ-单项式，它表示多项式环 $\mathbb{A}[t]$；如果 t 是一个 Π-单项式，它表示 Laurent 多项式环 $\mathbb{A}[t, t^{-1}]$。
设 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 是 $(\mathbb{A}, \sigma)$ 的一个简单 RΠΣ-环扩张，且满足 $\mathbb{E} = \mathbb{A}\langle t_1 \rangle \dots \langle t_e \rangle$。$\mathbb{E}$ 中的元素由幂积 $\mathbf{t}^{\mathbf{n}} = t_1^{n_1} \dots t_e^{n_e} \in \mathbb{E}$ 张成，其中 $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_e) \in \mathbb{Z}^e$，若 t_i 是一个 Σ-单项式，则 $n_i \ge 0$。若 $\mathbf{n}$ 是约化的，即在 t_i 是一个 R-单项式的情况下，若 $0 \le i < \operatorname{ord}(t_i)$，则这些幂积是唯一确定的。特别地，$\mathbf{t}^{\mathbf{n}} \in \mathbb{A}$ 意味着 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$。此外，可以对 $\mathbb{E}$ 中的生成元重新排序，使得先添入 R-单项式，再添入 Π-单项式，最后添入 Σ-单项式。

接下来，令 $\mathbb{A} = \mathbb{F}(x)$，其中 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F},\sigma)$ 的一个 $\Pi\Sigma$-域扩张。令 $f = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^e} f_{\mathbf{i}}\,\mathbf{t}^{\mathbf{i}} \in \mathbb{E}$，其中 $f_{\mathbf{i}} = \frac{p_{\mathbf{i}}}{q_{\mathbf{i}}}$，且多项式 $p_{\mathbf{i}}, q_{\mathbf{i}} \in \mathbb{F}[x]$ 互素。定义 $q = \operatorname{lcm}_{\mathbf{i}}(q_{\mathbf{i}}) \in \mathbb{F}[x]$ 为首一的。于是称 $f = \frac{h}{q}$ 满足 $h = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^e} f'_{\mathbf{i}}\mathbf{t}^{\mathbf{i}} \in \mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$ 且 $f'_{\mathbf{i}} = f_{\mathbf{i}}\,q/q_i \in \mathbb{F}[x]$，为约化表示，并用 $\operatorname{den}(f)$ 表示 q。接下来，我们将使用以下性质：若 $\operatorname{den}(h)$、$\operatorname{den}(g)$ 满足 $h,g\in\mathbb{E}$，且具有 x-次数$\le d$，则 $\operatorname{den}(h^+_\bullet g)$ 具有 x-次数$\le d$。此外，若 $\operatorname{den}(h)$ 具有 x-次数$\le d$，但 $\operatorname{den}(g)$ 不具有，则 $\operatorname{den}(h^+_\bullet g)$ 不具有 x-次数$\le d$。

最后，我们进一步细化如下的简单 RΠΣ-扩张。

定义 3. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F},\sigma)$ 的一个 $\Pi\Sigma$-域扩张，并设 $(\mathbb{E},\sigma)$ 是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的一个简单 RΠΣ-扩张，其中 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$。若对所有 $\Pi\Sigma$-单项式 t_i，以下性质之一成立，则此扩张具有 x-次数$\le d$，且$d\in\mathbb{N}_{\ge 0}$：

- 若 t_i 是一个 Π-单项式，则 $\frac{\sigma(t_i)}{t_i} = u\,t^{n_1}\dots t^{n_{i-1}}$，其中 $n_j\in\mathbb{Z}$，且 $u\in\mathbb{F}(x)^*$ 的 x-次数为。
- 若 t_i 是一个 Σ-单项式，则 $\sigma(t_i) - t_i = f$，其中 $\operatorname{den}(f)$ 的 x-次数为$\le d$。

在 $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$ 的条件下，例 1 中所有差分环均具有 x-次数≤ 1。

引理 2. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F},\sigma)$ 的一个 $\Pi\Sigma$-域扩张，并设 $(\mathbb{E},\sigma)$ 是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的一个简单 RΠΣ-扩张，其次数为 x-degree$\le d\in\mathbb{N}_{\ge 0}$。1. 设 $f\in\mathbb{E}$ 满足 $\operatorname{den}(f)$ 的次数为 x-degree$\le d$。那么对于任意 $k\in\mathbb{Z}$，$\operatorname{den}(\sigma^k(f))$ 的次数为 x-degree$\le d$。2. 设 $f\in\mathbb{E}$ 满足 $\operatorname{den}(f) = b\,c$，其中 $c\in\mathbb{F}[x]$ 恰好包含次数大于 d 的周期为 0 的不可约因子，且 b 的次数为 x-degree$\le d$。那么对于任意 $k\in\mathbb{Z}$，存在一个次数为 x-degree$\le d$ 的 $B\in\mathbb{F}[x]$，使得 $\operatorname{den}(\sigma^k(f)) = \sigma^k(c)B$。3. 对于 $g\in\mathbb{E}$ 和一个满足 $\deg_x(q) > d$ 的周期为 0 的不可约 $q\in\mathbb{F}[x]$，以下结论成立：(i) 若 $q\mid \operatorname{den}(g)$ 且 $\sigma(q)\nmid\operatorname{den}(g)$，则 $\sigma(q)\mid\operatorname{den}(\sigma(g)-g)$。(ii) 若对于任意 $k\in\mathbb{Z}$，$\sigma^k(q)\nmid\operatorname{den}(g)$，则对于任意 $k\in\mathbb{Z}$，$\sigma^k(q)\nmid\operatorname{den}(\sigma(g)-g)$。

证明。（1）我们通过对 e 作归纳法证明命题 1。基础情形 $e=0$ 显然成立。现在假设该引理对 $e-1$ 个扩张成立，并考虑下一个 RΠΣ-单项式 t_e，其满足 $\sigma(t_e) = \alpha\,t_e + \beta$。如果 t_e 是一个 $R\Pi$-单项式，那么 $\beta = 0$，且 $\alpha = u\,m$ 满足 $u\in\mathbb{F}(x)^*$，$m = t_1^{z_1}\dots t_{e-1}^{z_{e-1}}$ 满足 $z_i\in\mathbb{Z}$；这里，对于所有 $1\le i<e$，若 t_i 是一个 Σ-单项式，则 $z_i = 0$。注意，$\sigma^k(t_e) = \alpha_k t_e + \beta_k$ 满足 $\beta_k = 0$，且若 $k\ge 0$，则 $\alpha_k = \prod_{i=0}^{k-1}\sigma^i(u\,m)$；若 $k<0$，则 $\alpha_k = \prod_{i=1}^{-k}\sigma^{-i}(u^{-1}\,m^{-1})$。由于 u 的 x-次数为$\le d$（它 t_e 是一个 R-单项式，$u\in\mathbb{F}^*$ 是一个单位根），可以应用归纳假设，因此对于任意 $k\in\mathbb{Z}$，$\operatorname{den}(\alpha_k)$ 的 x-次数为$\le d$。否则，假设 t_e 是一个 Σ-单项式，满足 $\alpha=1$，且 $\beta = \sigma(t_e) - t_e\in\mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle\dots\langle t_{e-1}\rangle$。那么 $\sigma^k(t_e) = \alpha_k\,t_e + \beta_k$ 满足 $\alpha_k = 1$，且若 $k\ge 0$，则 $\beta_k = \sum_{i=0}^{k-1}\sigma^i(\beta)$；若$k<0$，则 $\beta_k = -\sum_{i=1}^{k}\sigma^{-i}(\beta)$。由于 $\operatorname{den}(\beta)$ 的 x-次数为$\le d$，我们可以再次应用归纳假设，因此对于任意 $k\in\mathbb{Z}$，$\operatorname{den}(\beta_k)$ 的 x-次数为$<d$。现在考虑满足 $f_i\in\mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle\dots\langle t_{e-1}\rangle$ 的 $f = \sum_i f_i\,t_e^i\in\mathbb{E}$。那么 $\sigma^k(f) = \sum_i \sigma^k(f_i)(\alpha_k\,t_e+\beta_k)^i$，其中所有分量的 x-次数均为$\le d$。因此，$\sigma^k(f)$ 的 x-次数为$\le d$。

(2) 令 $f = \frac{a}{b\,c}$，其中 $a\in\mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$ 且 $\operatorname{den}(f) = b\,c$，如陈述 2 所述。令 $k\in\mathbb{Z}$，并考虑 $\sigma^k(f) = \frac{A}{B\,C}$，其中 $\operatorname{den}(\sigma^k(f)) = B\,C$，这里 C 恰好包含所有具有大于 d 的 x- 次数的周期为 0 的不可约因子，且 B 的 x-次数为$\le d$。由陈述 1 可知，$\sigma^k(a) = \frac{a'}{b'}$，其中 $a'\in\mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$ 且 $b' = \operatorname{den}(\sigma^k(a))\in\mathbb{F}[x]$ 的 x-次数为$\le d$。因此，$\sigma^k(f) = \sigma^k(a)\,\sigma^k(b)\,\sigma^k(c) = \frac{a'}{b'\sigma^k(b)}\sigma^k(c)$，其中 $\sigma^k(c)$ 包含 $\operatorname{den}(f)$ 的所有次数大于 d 的周期为 0 的不可约因子，而 $b'\sigma^k(b)$ 的 x- 次数为$\le d$。注意，可能发生约去。不过，$C\mid\sigma^k(c)$。现在考虑 $f = \sigma^{-k}(A)\,\sigma^{-k}(B)\sigma^{-k}(C)$。类似地，我们得到 $f = \frac{A'}{B'\sigma^{-k}(C)}$，其中 $A'\in\mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$，且 $B'\in\mathbb{F}[x]$ 的 x-次数为$\le d$。这意味着 $c\mid\sigma^{-k}(C)$，从而 $\sigma(c)\mid C$。因此，对于某个 $u\in\mathbb{F}^*$，有 $c = C\,u$，命题得证。

(3) 写作 $g = \frac{a}{b\,c}$，其中 $a \in \mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle \dots \langle t_e\rangle$ 且 den(g) $= b\,c$，其中 $b, c \in \mathbb{F}[x]$；b 的 x-次数为 $\le d$，而 c 包含所有 x-次数大于 d 的周期为 0 的不可约因子。于是 $\sigma(g) = \frac{A}{B}\sigma(c)$，其中 den($\sigma(g)$) $= B\,\sigma(c)$，根据陈述 2，$B \in \mathbb{F}[x]$ 的 x-次数为 $\le d$。(i) 假设 $q \mid$ den(g)。因此 $q \mid c$，故 $\sigma(q) \mid \sigma(c)$，从而 $\sigma(q) \mid$den($\sigma(g)$)。由第二个假设，$\sigma(q) \nmid$ den(g)，可知 $\sigma(q) \mid$ den($\sigma(g) - g$)。

(ii) 若对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，$\sigma^k(q)$ 都不是 den(g) 的因子，则它也不是 c 的因子，因而也不是 $\sigma(c)$ 的因子。因此，它不是 den($\sigma(g)$) 的因子。特别地，它不可能是 den($\sigma(g) - g$) 的因子。□

3. Refined representations

我们先给出以下定义和引理，以获得给定输入被加项的分母的规范化表示。

定义 4. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F}, \sigma)$ 的一个 $\Pi\Sigma$-域扩张，且 $d \in \mathbb{N}_{\ge 0}$。若有限个首一不可约多项式组成的集合 $Q \subseteq \mathbb{F}[x]$ 满足其次数大于 d、周期为 0 且两两 σ-互素，则称其为 (d, x)-集。设 $f \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$。若对于任意满足 $\deg_x(h) > d$ 的 f 的不可约因子 h，都存在 $q \in Q$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $\sigma^k(q)/h \in \mathbb{F}$，则称 (d, x)-集 Q 为 (d, f)-完备集。

下文要求能够解决问题 SE；算法细节请见下文的定理 3。

$(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 中的问题 SE（移位等价） 给定 $(\mathbb{F}, \sigma)$ 的 $\Pi\Sigma$-域扩张 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 以及不可约的 $f, g \in \mathbb{F}[x]$。构造性地判定是否存在一个 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $\sigma^k(f)/g \in \mathbb{F}$。

引理 3. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F}, \sigma)$ 的一个 $\Pi\Sigma$-域扩张，其中可以解决问题 SE，也可以进行多项式因式分解。设 $f \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{N}_{\ge 0}$ 和 $Q \subseteq \mathbb{F}[x]$ 构成一个 (d, x)-集。那么可以计算出一个集合 $Q' \supseteq Q$，它是 (d, f)-完备的。

证明。计算 f 的所有不可约、两两互素、周期为 0 的因子 $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{F}[x]$，满足 $\deg_x(f_i) > d$。若 $m = 0$, Q，则这就是所需结果。否则，令 $Q' := Q$，并对每个 $i = 1 \dots m$ 检查是否存在一个 $q \in Q'$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $\sigma^k(f_i)/q$；若不存在，则令$Q' := Q' \cup \{f_i\}$。所得的 Q' 是 (d, f)-完备的。□

根据这些概念，我们得到如下表示；它可视为部分分式分解的一种变体，并与 [5, 36, 6, 22, 43, 17] 给出的构造有关。

引理 4. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F}, \sigma)$ 的 $\Pi\Sigma$-域扩张，且 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的一个简单 R$\Pi\Sigma$-扩张，其 x-次数为$\le d$，其中 $d \in \mathbb{N}_{\ge 0}$ 且 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle \dots \langle t_e\rangle$。设 $f \in \mathbb{E}$，并设 $Q = \{q_1, \dots, q_r\}$ 是 $(d,$ den(f))-完备的。那么存在 $f', g \in \mathbb{E}$，使得

$$\sigma(g) - g + f' = f \tag{4}$$

其中 f' 可以写成 σ-约化形式

$$f' = \frac{p_1}{q_1^{n_1}} + \frac{p_r}{q_r^{n_r}} + \frac{p}{q} \tag{5}$$

其构成要素如下：

1. $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_{\ge 1}$；2. $q \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$，其 x-次数为 $\le d$；3. $p \in \mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle \dots \langle t_e\rangle$；4. 以及 $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle \dots \langle t_e\rangle$，其中 $\deg_x(p_i) < \deg_x(q_i)\, n_i$。如果可以对 $\mathbb{F}[x]$ 中的多项式进行因式分解，并且能够在可计算的（$\mathbb{F}(x)\ \sigma$）中解决问题 SE，则可以计算出 g 和满足（5）的 f'。

证明。将 $f=\frac{a}{b}$ 与 $a\in\mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$ 写成约化表示，并令 $b\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ 为首一多项式。如果 $\mathbb{F}$ 是可计算的，则可使用欧几里得算法完成此操作。特别地，写成 $b=q'\,b'$，其中 $q'\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ 的 x-次数为 $\le d$，并且 $b'=v_1^{n_1}\dots v_r^{n_r}\in\mathbb{F}[x]$ 与 $v_i\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$是首一不可约且周期为 0 的因子，满足 $\deg_x(v_i)>d$。注意，Q 是 (d,b')-完备的。如果 $b'=1$，我们可以取 $p=a$、$q=b$、$r=0$ 和 $g=0$，于是得证。否则，取 s、$t\in\mathbb{F}[x]$使得 $1=s\,b'+t\,q'$；由于 $\gcd(b',q')=1$，这样的 s 和 t 确实存在，并且当 $\mathbb{F}$ 可计算时，可以通过扩展欧几里得算法计算得到。因此 $\frac{a}{b}=\frac{s\,a}{q'}+\frac{t\,a}{b'}$。现在我们重复使用这一策略，迭代地对 $\frac{s\,a}{b'}$ 进行处理，以分离 $v_i^{n_i}$中的互素因子，这些因子位于 b' 的分母中，并得到

$$\frac{a}{b}=\frac{s\,a}{q'}+\frac{u_1}{v_1^{n_1}}+\dots+\frac{u_r}{v_r^{n_r}} \tag{6}$$

关于 $u_i\in\mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$。不妨设 v_1、…、v_k 是所有与 $q_1\in Q$ σ-等价的因子。因此，对于所有 $1\le i\le k$、$c_i:=\sigma^{s_i}(q_1)\,{}_{v_i}\in\mathbb{F}$，其中 $s_i\in\mathbb{Z}$ 唯一确定；参见引理 1.2。定义 f_i'、$\gamma_i\in\mathbb{E}$，其中 $f_i'=\sigma^{-s_i}{}_{(u_i\,c_i^{n_i})q_1^{n_i}}$；若 $s_i\ge0$，则定义 $\gamma_i=\sum_{j=0}^{s_i-1}\sigma^j(\sigma^{-s_i}(u_i\,c_i^{n_i})q_1^{n_i})$，若 $s_i<0$，则定义 $\gamma_i=-\sum_{j=1}^{-s_i}\sigma^{-j}(\sigma^{-s_i}(u_i\,c_i^{n_i})q_1^{n_i})$。于是，通过望远镜求和以及 $\sigma^{s_i}(q_1)=c_i\,v_i$，我们得到

$$\sigma(\gamma_i)-\gamma_i+f_i'=\sigma^{s_i}\left(\sigma^{-s_i}(u_i\,c_i^{n_i})/q_1^{n_i}\right)=\frac{u_i\,c_i^{n_i}}{\sigma^{s_i}(q_1)^{n_i}}=\frac{u_i}{v_i^{n_i}}.$$

由于 $u_i\,c_i^{n_i}\in\mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$，根据引理 2.1，$\operatorname{den}(\sigma^{-s_i}(u_i\,c_i^{n_i}))$ 没有次数大于 d 的 x-不可约因子。因此，我们可以写成 $f_i'=\frac{\alpha_i}{\beta_i\,q_1^{n_1}}$，其中 $\alpha_i\in\mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$，且 $\beta_i\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ 的不可约因子具有 x-次数 $\le d$。由于 $\gcd(q_1^{n_1},\beta_i)=1$，我们可以写成 $s_i'\,\beta_i+t_i'\,q_1^{n_1}=1$，其中 s_i'、$t_i'\in\mathbb{F}[x]$（并且如果 $\mathbb{F}$ 可计算，还可以再次计算它）。因此 $f_i'=\phi_i+h_i$，其中 $\phi_i=\frac{\alpha_i\,s_i'}{q_1^{n_1}}$ 和 $h_i=\frac{\alpha_i\,t_i'}{\beta_i}$。现在取 $g':=\gamma_1+\dots+\gamma_k\in\mathbb{E}$。进一步令 $\frac{H_1}{H_2}=h_1+\dots+h_k$，其中 $H_1\in\mathbb{F}[x]\langle t_1$、…、$t_e\rangle$，以及 $H_2\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$，后者的 x-次数为 $\le d$。此外，定义 $w_1\in\mathbb{F}[x]\langle t_1$、…、$t_e\rangle$，其中 $\frac{w_1}{q_1^{n_1}}=\phi_1+\dots+\phi_k$。于是 $\sigma(g')-g'+\frac{w_1}{q_1^{n_1}}+\frac{H_1}{H_2}=\frac{u_1}{v_1^{n_1}}+\dots+\frac{u_k}{v_k^{n_k}}$. 由于 $q_1^{n_1}\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$，$q_1^{n_1}$ 的首项系数是一个单位元。因此，通过多项式除法（并将 x 视为最高变量），我们可以计算出 $w_1=\tilde q_1\,q_1^{n_1}+p_1$，其中 p_1、$\tilde q_1\in\mathbb{F}[x]\langle t_1$、…、$t_e\rangle$，且 $\deg_x(p_1)<\deg_x(q_1^n)$。这给出 $\frac{w_1}{q_1^{n_1}}=\frac{p_1}{q_1^{n_1}}+\tilde q_1$。定义 $p''\in\mathbb{F}[x]\langle t_1$、…、$t_e\rangle$

并且 $q''\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ 与 $\frac{p''}{q''}=\frac{a\,a}{q'}+\tilde q_1+\frac{H_1}{H_2}$；注意：$q''$ 仅有次数为 x-degree$\le d$ 的因子。因此，将各项代入 (6) 得到

$$\frac{a}{b}=\sigma(g')-g'+\frac{p''}{q''}+\frac{p_1}{q_1^n}+\overbrace{\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}^{m_{k+1}}}+\dots+\frac{u_r}{v_r^{m_r}}}^{R}.$$

对 R 重复此变换，即可得到所需的表示 (5)。如果能够在 $\mathbb{F}[x]$ 中分解多项式，并且能够在 $(\mathbb{F}(x),\sigma)$ 中求解问题 SE，就可以计算出这一表示。□

例 2. 1. 取自例1.1的差分环 $(\mathbb{E},\sigma)$。在此，我们可以用下式改写 (3) 左侧的被加项

$$f=\frac{-2+x}{10(1+x^2)}+\frac{h_1(1-4x-2x^2)}{10(1+x^2)(2+2x+x^2)}+\frac{h_3(1-4x-2x^2)}{5(1+x^2)(2+2x+x^2)}\in\mathbb{E}. \tag{7}$$

$Q=\{q_1\}$ 在 $q_1=1+x^2$ 下是 $(1,f)$-完备的。我们可以计算

$$g=\frac{h_3(1+2x)}{10(1+x^2)}+\frac{h_3(1+2x)}{5(1+x^2)}-\frac{(1+2x)(2+x^2)}{10x^3(1+x^2)} \tag{8}$$

以及满足 (4) 的 $f' = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p}{q}$、 $p_1 = 0$ 和 $\frac{p}{q} = \frac{-2-4x+x^2}{10x^3}$。2. 取自 Example 1.3 的差分环 $(\mathbb{E}, \sigma)$，并考虑

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) = \Big(\frac{h_1(x+z+x^2z)}{x(1+x^2)}, \frac{h_1}{2+2x+x^2}, \frac{xz}{1+x^2}\Big) \in \mathbb{E}^3. \tag{9}$$

$Q = \{q_1\}$ 对于 $1 \le i \le 3$，$Q = \{q_1\}$ 与 $q_1 = 1+x^2$ 是 $(1, f_i)$-完备的。对于 $\sigma(g_i) - g_i + f_i' = f_i$，我们得到 $g_i \in \mathbb{E}$，而 σ-约化形式为 $f_i' = {}^{p_i,\ 1}_{\ q_1} + \rho_i$，其中 $\rho_i = p_i'/q_i'$。也就是说，$p_{1,\ 1} = h_1$，$\rho_1 = \frac{h_1 z}{x}$, $g_1 = 0$，以及$p_{2,\ 1} = h_1 + xz$, $\rho_2 = -\frac{z}{x}$, $g_2 = \frac{h_1 x - z}{x\ 1+x^2()}$，和 $p_{3,\ 1} = xz$, $\rho_3 = 0$, $g_3 = 0$。

引理 5. 设 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 是 $(\mathbb{H}, \sigma)$ 的一个简单 $R\Pi$-扩张，其中 $\mathbb{E} = \mathbb{H}\langle t_1\rangle \dots \langle t_e\rangle$。设 $f = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^e} f_{\mathbf{i}}\, \mathbf{t}^{\mathbf{i}} \in \mathbb{E}$ 且 $g = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^e} g_{\mathbf{i}}\, \mathbf{t}^{\mathbf{i}} \in \mathbb{E}$，其中 $\sigma(g) - g = f$。那么，对于每个约化的 $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^e$，都存在唯一的约化 $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^e$，使得 $u = {}^{\sigma}(\mathbf{t}^{\mathbf{i}})\, \mathbf{t}^{\mathbf{j}} \in \mathbb{H}^*$。反过来，对于每个约化的 $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^e$，都存在唯一的约化 $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^e$，使得 $u = {}^{\sigma}(\mathbf{t}^{\mathbf{i}})\, \mathbf{t}^{\mathbf{j}} \in \mathbb{H}^*$。对于满足 $= u = {}^{\sigma}(\mathbf{t}^{\mathbf{i}})\, \mathbf{t}^{\mathbf{j}} \in \mathbb{H}^*$ 的此类元组 $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$，我们有$u\, \sigma(g_{\mathbf{i}}) - g_{\mathbf{j}} = f_{\mathbf{j}}$。

证明。设 $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^e$ 是约化的，并取 $h = \sigma(\mathbf{t}^{\mathbf{i}})$。根据定义，我们有 $h = u\mathbf{t}^{\mathbf{j}}$，其中 $u \in \mathbb{H}^*$，且 $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^e$ 是约化的，即 ${}^{\sigma}(\mathbf{t}^{\mathbf{i}})\, \mathbf{t}^{\mathbf{j}} = u \in \mathbb{H}^*$。假设 ${}^{\sigma}(\mathbf{t}^{\mathbf{i}})\, \mathbf{t}_{\mathbf{k}} = u' \in \mathbb{H}^*$，其中另一个约化的 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^e$。那么 $\mathbf{t}^{\mathbf{j}-\mathbf{k}} = u'/u \in \mathbb{H}^*$，这意味着 $\mathbf{j} = \mathbf{k}$，也就是说，$\mathbf{j}$ 唯一确定。类似地，设 $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^e$ 是约化的，并取 $h = \sigma^{-1}(\mathbf{t}^{\mathbf{j}})$。根据定义，我们有 $h = u'\mathbf{t}^{\mathbf{i}}$，其中 $u' \in \mathbb{H}^*$，且 $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^e$ 是约化的，即 $\mathbf{t}^{\mathbf{i}}/\sigma^{-1}(\mathbf{t}^{\mathbf{j}}) = 1/u' \in \mathbb{H}^*$，因此 ${}^{\sigma}(\mathbf{t}^{\mathbf{i}})\, \mathbf{t}^{\mathbf{j}} = u$，其中 $u = \sigma(1/u') \in \mathbb{H}^*$。此外，假设 ${}^{\sigma}(\mathbf{t}^{\mathbf{k}})\, \mathbf{t}^{\mathbf{j}} = u' \in \mathbb{H}^*$，其中另一个约化的 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^e$。那么 $\sigma(\mathbf{t}^{\mathbf{i}-\mathbf{k}}) = u/u'$，因此 $\mathbf{t}^{\mathbf{i}-\mathbf{k}} = \sigma^{-1}(u/u') \in \mathbb{H}^*$。这意味着 $\mathbf{i} = \mathbf{k}$，从而证明了 $\mathbf{i}$ 的唯一性。现在取这样一个由约化元素构成的元组 $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$，满足 $u = {}^{\sigma}(\mathbf{t}^{\mathbf{i}})\, \mathbf{t}^{\mathbf{j}} \in \mathbb{H}^*$。在 $\sigma(g) - g = f$ 中关于 $\mathbf{t}^{\mathbf{j}}$ 进行系数比较，得到 $\sigma(g_{\mathbf{i}}\, \mathbf{t}^{\mathbf{i}}) - g_{\mathbf{j}}\, \mathbf{t}^{\mathbf{j}} = f_{\mathbf{j}}\, \mathbf{t}^{\mathbf{j}}$。由 $\sigma(g_{\mathbf{i}}\, \mathbf{t}^{\mathbf{i}}) = \sigma(g_{\mathbf{i}})\, u\, \mathbf{t}^{\mathbf{j}}$，两边除以 $\mathbf{t}^{\mathbf{j}}$，得到$u\, \sigma(g_{\mathbf{i}}) - g_{\mathbf{j}} = f_{\mathbf{j}}$。□

引理 6. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F}, \sigma)$ 的一个 $\Pi\Sigma$-域扩张，且 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的一个简单 $R\Pi$-扩张，其次数为 x-degree$\le d$。设 $f \in \mathbb{E}$ 满足 $\mathrm{den}(f) = v\, q^n$，其中 $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$, $q \in \mathbb{F}[x]$ 是一个不可约零周期因子，且 $\deg_x(v) > d$，并且 $v \in \mathbb{F}[x]$ 不含任何与 q σ-等价的因子。那么不存在满足 $\sigma(g) - g = f$. 的 $g \in \mathbb{E}$。

证明. 假设存在这样的 $g = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^e} g_{\mathbf{i}}\, \mathbf{t}^{\mathbf{i}} \in \mathbb{E}$，满足 $g_{\mathbf{i}} = \frac{\gamma_{\mathbf{i}}}{\delta_{\mathbf{i}}}$，其中 $\gamma_{\mathbf{i}} \in \mathbb{F}[x], \delta_{\mathbf{i}} \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$，且 $\gcd(\gamma_{\mathbf{i}}, \delta_{\mathbf{i}}) = 1$。写作 $f = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^e} f_{\mathbf{i}}\, \mathbf{t}^{\mathbf{i}} \in \mathbb{E}$，满足 $f_{\mathbf{i}} = \frac{a_{\mathbf{i}}}{b_{\mathbf{i}}}$，其中 $a_{\mathbf{i}}, b_{\mathbf{i}} \in \mathbb{F}[x]$，且 $\gcd(a_{\mathbf{i}}, b_{\mathbf{i}}) = 1$，其中 $b_{\mathbf{i}}$ 可以含有 q 作为因子，但不含满足 $k \ne 0$ 的 $\sigma^k(q)$。必定存在一个分母 $\delta_{\mathbf{i}}$，其中含有某个 $\lambda \in \mathbb{Z}$ 的 $\sigma^{\lambda}(q)$。否则，由引理 2.3.(ii) 可得 $q \nmid \mathrm{den}(\sigma(g) - g)$，这就产生矛盾。在所有 $g_{\mathbf{j}} \ne 0$ 中，取 $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^e$，使得 $\sigma^{\lambda}(q) \mid \delta_{\mathbf{j}}$，并且$\lambda \in \mathbb{Z}$ 最大。由引理 5，可取 $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^e$，使得 $u = {}^{\sigma}(\mathbf{t}^{\mathbf{i}})\, \mathbf{t}_{\mathbf{i}} \in \mathbb{H}^*$，且 $u\, \sigma(g_{\mathbf{j}}) - g_{\mathbf{i}} = f_{\mathbf{i}}$。注意，$u = v\sigma^{z_1}(t_1) \dots \sigma^{z_e}(t_e)$ 满足 $z_i \in \mathbb{Z}$，其中 $v \in \mathbb{F}[x]$ 的 x-次数为 $\le d$。于是 $\sigma^{\lambda+1}(q) \mid \sigma(\delta_{\mathbf{j}})$，但$\sigma^{\lambda+1}(q) \nmid \delta_{\mathbf{i}}$。因此 $\sigma^{\lambda+1}(q) \mid \mathrm{den}(f_{\mathbf{i}}) = b_{\mathbf{i}}$。故对于最大选择 λ，有 $\lambda = -1$。在所有$g_{\mathbf{j}} \ne 0$ 中，取 $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^e$，使得 $\sigma^{\lambda}(q) \mid \delta_{\mathbf{j}}$，并且 λ 最小。注意，$\lambda < 0$（因为最大选择为 -1）。由引理 5，可取 $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^e$，使得 $u = {}^{\sigma}(\mathbf{t}^{\mathbf{i}})\, \mathbf{t}^{\mathbf{j}} \in \mathbb{H}^*$，且 $u\, \sigma(g_{\mathbf{i}}) - g_{\mathbf{j}} = f_{\mathbf{j}}$。同理，可得 $\sigma^{\lambda}(q) \nmid \mathrm{den}(u\, \sigma(g_{\mathbf{i}}))$，并由此得出 $\sigma^{\lambda}(q) \mid \mathrm{den}(f_{\mathbf{j}}) = b_{\mathbf{j}}$，其中 $\lambda < 0$，矛盾。因此，不存在满足 $\sigma(g) - g = f$ 的 $g \in \mathbb{E}$。□

现在我们可以给出 $R\Pi\Sigma$-扩张的主要性质，这可视为 [5, 36, 6, 22, 43, 17] 中所述结果的推广；在那里，分母由 σ-等价因子分解。

命题 1. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F},\sigma)$ 的一个 $\Pi\Sigma$-域扩张，且 $(\mathbb{E},\sigma)$ 是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的一个简单 R$\Pi\Sigma$-扩张，其中 $\mathbb{E}=\mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$ 且具有 x-次数$\leq d$。设 $p\in\mathbb{E}$ 和 $q\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$具有 x-次数$\leq d$。设 $\{q_1,\dots,q_r\}\subseteq\mathbb{F}[x]$是一个 (d,x)-集，$n_1,\dots,n_r\in\mathbb{N}_{\geq 1}$和 $p_1,\dots,p_r\in\mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$，且 $\deg_x(p_i)\leq\deg_x(q_i^{n_i}$ 若存在一个$\in\mathbb{E}$使得

$$\sigma(g)-g=\frac{p_1}{q_1^{n_1}}+\frac{p_r}{q_r^{n_r}}+\frac{p}{q}\qquad(10)$$

那么 $p_1=\dots=p_r=0$，且 $\operatorname{den}(g)$ 的 x-次数为$\leq d$。

证明。写作 $\mathbb{E}=\mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$。不失一般性，可以假设先添加所有 R-单项式，接着添加 Π-单项式，最后添加 Σ-单项式；否则我们相应地重新排列它们。我们通过对$\mathbb{E}$中的 Σ-扩张数量进行归纳法来证明该命题。在基础情形中，假设 $\mathbb{E}$ 仅由简单的 $R\Pi$-扩张构成，且存在一个 $g\in\mathbb{E}$ 满足 (10)。此外，假设存在 i，使得 p_i 非零。将 $\frac{p_i}{q_1^{n_i}}=\frac{p_i'}{q_1^{\mu}}$ 写成关于 $\mu\leq n_i$的约化表示。由于 $\deg_x(p_i)<\deg_x(q_i^{n_i})$，可得 $\mu\geq 1$。特别地，我们可以将 (10) 的右端写成关于 $f=\frac{p'}{v\,q_i^{\mu}}$ 的约化表示，其中 $p'\in\mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$，且 $v\in\mathbb{F}[x]$的不可约因子与 q_i是 σ-互素的。由引理 6，满足 (10) 的解 $g\in\mathbb{E}$ 不可能存在，矛盾。因此，对所有 i，均有 $p_i=0$，从而得到 $\sigma(g)-g=\frac{p}{q}$，其中 $g\in\mathbb{E}$。假设 $\operatorname{den}(g)$ 中存在不可约零周期因子 v，且 $\deg_x(v)>d$。由引理 1.1，在 $\operatorname{den}(g)$ 中与 v 等价的因子里，我们可以选取一个仅通过负向 σ-移位映射到其他因子的因子。由引理 2.3.(i)，$\sigma(v)\mid\operatorname{den}(\sigma(g)-g)$，矛盾。因此，$\operatorname{den}(g)$ 的 x-次数为$\leq d$。

现在考虑 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的简单 R$\Pi\Sigma$-扩张 $(\mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle,\sigma)$，其 x-次数为 $\leq d$with $\sigma(t_e)=t_e+\beta$，并假设命题对于 $(\mathbb{H},\sigma)$ with $\mathbb{H}=\mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle\dots\langle t_{e-1}\rangle$ 成立。令 $g\in\mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$ 使得 (10) 成立。根据 [51, 引理 7.2]，可知对于 $b=\deg_{t_e}(f)+1$，有 $\deg_{t_e}(g)\leq b$。我们对 b 再作一次归纳来证明该命题。如果 $b=0$，则可知 f 不含 t_e，由主要归纳假设可得结论成立。现在假设对于次数小于 b 的解，命题成立。定义 $\phi:=\operatorname{coeff}(f,t_e,b)\in\mathbb{H}$ 以及 $\gamma:=\operatorname{coeff}(g,t_e,b)\in\mathbb{H}$，它们分别是 t_e^b 在 f 和 g 中的系数。于是 $g=\gamma\,t_e^b+w$ with $w\in\mathbb{F}(x)\langle t_1,\dots,t_{e-1}\rangle[t_e]$，其中 $\deg_{t_e}(w)<b$。通过系数比较可知 $\sigma(\gamma)-\gamma=\phi$。定义 $h_i:=\operatorname{coeff}(p_i,t_e,b)\in\mathbb{H}$ 以及 $u:=\operatorname{coeff}(p,t_e,b)\in\mathbb{H}$。于是 $\phi=\frac{h_1}{q_1^{n_1}}+\dots+\frac{h_r}{q_r^{n_r}}+\frac{u}{q}$ 在 $\mathbb{H}$ 中成立。因此，根据关于 $\mathbb{H}$ 的归纳假设，我们得到 $h_1=\dots=h_r=0$，且 $\operatorname{den}(\gamma)$ 的 x-次数为 $\leq d$。现在定义 $U=\frac{p}{q}-(\sigma(\gamma\,t^b)-\gamma\,t^b)\in\mathbb{H}[t_e]$。根据构造，$\sigma(w)-w=\frac{p_1}{q_1^{n_1}}+\dots+\frac{p_r}{q_r^{n_r}}+U$，且 $\deg_{t_e}(U)<b$。此外，根据引理 2.1，$\operatorname{den}(\sigma(\gamma\,t^b))$ 的 x-次数为 $\leq d$。由于 q 和 $\operatorname{den}(\gamma)$ 的 x-次数也为 $\leq d$，我们得到 $\operatorname{den}(U)$ 的 x-次数为 $\leq d$。结合第二归纳假设（关于 b 的归纳），可知 $p_1=\dots=p_r=0$，且 $\operatorname{den}(w)$ 的 x-次数为 $\leq d$。因此，$\operatorname{den}(\gamma\,t^b+w)$ 的 x-次数为 $\leq d$。证明完毕。□

下面我们将用到 [52, 定理 7.10] 中给出的定理 1；关于带有$m=1$ 的域版本，见 [28]；关于一般情形 $m\in\mathbb{N}_{\geq 0}$，见 [46]；这一结果也与 [26] 有关。

定理 1（[52]）。设（$\mathbb{A}$，σ）是常数域为 $\mathbb{K}=\operatorname{const}_\sigma\mathbb{A}$ 的差分环，并设f_1，...，$f_m\in\mathbb{A}$。那么，（$\mathbb{A}$，σ）存在一个 Σ-扩张（$\mathbb{A}[s_1]\dots[s_m]$，$\sigma$），其中 $\sigma(s_i)=s_i+f_i$ 对于$1\leq i\leq m$成立，当且仅当不存在满足（1）的（c_1，...，c_m）$\in\mathbb{K}^m\setminus\{\mathbf{0}\}$和 $h\in\mathbb{A}$。

利用这一结果，我们得到某些简单 R$\Pi\Sigma$-扩张类的如下刻画。下面将在定义 5 中引入这些扩张，它们将构成我们望远镜算法的基础。

定理 2. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F},\sigma)$ 的一个 $\Pi\Sigma$-域扩张，且 $\mathbb{K}=\operatorname{const}_\sigma\mathbb{F}$；设 $(\mathbb{E},\sigma)$ 是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的一个简单 R$\Pi\Sigma$-扩张，且具有 x-次数$\leq d$ 和 $\mathbb{E}=\mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle\dots\langle t_e\rangle$。设 $\{q_1,\dots,q_r\}\subseteq$

$\mathbb{F}[x]$ 是一个 (d,x)-集，$n_1,\ldots,n_r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，并且对于 $1 \leq i \leq r$ 和 $1 \leq j \leq e_i$，若 $e_i \geq 1$，则令 $p_{i,j} \in \mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle \ldots \langle t_e\rangle \setminus \{0\}$，其中 $\deg_x(p_{i,j}) < \deg_x(q_i)n_i$。那么以下命题等价。

1. $Ann_{\mathbb{K}}(p_{i,1},\ldots,p_{i,e_i}) = \{\mathbf{0}\}$ for all $1 \leq i \leq r$；2. 不存在 $g \in \mathbb{E}$ 和 $c_{i,j} \in \mathbb{K}$（不全为零），使得

$$\sigma(g) - g = \sum_{i,j} c_{i,j} \frac{p_{i,j}}{q_i^{n_i}}; \tag{11}$$

3. 多项式环下，$(\mathbb{S},\sigma)$ 对 $(\mathbb{E},\sigma)$ 的差分环扩张

$$\mathbb{S} = \mathbb{E}[s_{1,1},\ldots,s_{1,e_1},\ldots,s_{r,1},\ldots,s_{r,e_r}]$$

且 $\sigma(s_{i,j}) = s_{i,j} + \frac{p_{i,j}}{q_i^{n_i}}$ 是一个 Σ-扩张，即 $\mathrm{const}_\sigma\mathbb{S} = \mathrm{const}_\sigma\mathbb{F}$。

证明。（1）$\Rightarrow$（2）令 $c_{i,j} \in \mathbb{K}$ 不全为零，并令 $g \in \mathbb{E}$ 使得 $\sigma(g) - g = \sum_{i,j} c_{i,j} \frac{p_{i,j}}{q_i^{n_i}} = \sum_{1\leq i\leq r} \frac{p_i}{q_i^{n_i}}$，其中 $p_i = \sum_{j=1}^{e_i} c_{i,j}p_{i,j} \in \mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle \ldots \langle t_e\rangle$ 对于 $1 \leq i \leq r$。由于 $\deg_x(p_{i,j}) < \deg_x(q_i)n_i$，我们有 $\deg_x(p_i) < \deg_x(q_i)n_i$。因此可以应用命题 1，从而得到对所有 i 均有 $p_i = 0$。根据假设，我们可以取 i、j，使得 $c_{i,j} \neq 0$。于是 $\mathbf{0} \neq (c_{i,1},\ldots,c_{i,e_i}) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{K}}(p_{i,1},\ldots,p_{i,e_i})$。

(2) $\Rightarrow$ (1) 假设存在 i，使得 $V_i = \mathrm{Ann}_{\mathbb{K}}(p_{i,1},\ldots,p_{i,e_i}) \neq \{\mathbf{0}\}$。那么我们可以取 $g = 0 \in \mathbb{E}$ 和 $(c_{i,1},\ldots,c_{i,e_i}) \in V_i \setminus \{\mathbf{0}\}$，其中所有其他 $c_{k,j}0$ 均设为零。由此得到 (11)。(2) $\Leftrightarrow$ (3) 由定理 1 得出。□

4. Refined telescoping algorithms

我们将假设基域 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 满足某些算法性质。

Here 我们可以利用以下结果。

定理 3 ([28, 52])。设 $\mathbb{K} = A(y_1,\ldots,y_\lambda)$ 是代数数域 A 上的有理函数域，$(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 $\Pi\Sigma$-域，且 $(\mathbb{E},\sigma)$ 是 $(\mathbb{F},\sigma)$ 的一个简单 $R\Pi\Sigma$-扩张。那么：

1. 可以在 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 中求解问题 SE。2. $(\mathbb{E},\sigma)$ 是 LA-可计算的，且问题 T 和 PT 在 $\mathbb{E}$ 中可解。

定理 3 的陈述 1 由 [28, 24, 42] 得出，陈述 2 则由 [28, 52] 得出。若 $\mathbb{F}$ 满足某些算法性质，则可以构造更一般的差分域 $(\mathbb{F},\sigma)$；参见 [51, 第 2.3 节。3] 例如，可以取 $\Pi\Sigma$-域扩张以及自由差分域 [31, 30] 上的根式域扩张 [32]。

接下来，我们将给出一种改进的望远镜求和算法，适用于简单 $R\Pi\Sigma$-扩张的以下子类；请注意，这些扩张恰好是定理 2 所刻画的那些扩张。

定义5. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F},\sigma)$ 的一个 $\Pi\Sigma$-域扩张，$d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ 且 $Q \subseteq \mathbb{F}[x]$ 是 (d,x)-集 Q。若扩张是简单的，且经（对生成元重新排序后）可改写为形式 $\mathbb{S} = \mathbb{E}\langle s_1\rangle \ldots \langle s_u\rangle$，其中 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle \ldots \langle t_e\rangle$，并满足

- $(\mathbb{E},\sigma)$ 是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的 $R\Pi\Sigma$ 扩张，且具有 x-次数$\leq d$;
- $(\mathbb{S},\sigma)$ 是 $(\mathbb{E},\sigma)$ 的 Σ 扩张，且具有 $\sigma(s_i) - s_i = p_i/q_i^{m_i}$，其中 $m_i \geq 1$、$p_i \in \mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle \ldots \langle t_e\rangle \setminus \{0\}$ 和 $q_i \in Q$，且 $\deg_x(p_i) < m_i \deg_x(q_i)$。$s_1$、.....、$s_u$ 也称为 Q-贡献。

给定这样一个（d，x，Q）-约化的 $R\Pi\Sigma$-扩张（$\mathbb{S}$，σ），其基域为（$\mathbb{F}$（x）σ），并且 $f \in \mathbb{E}$（通过迭代应用下述算法），可以构造一个 Σ-扩张，该扩张再次是（d，x，Q'）约化扩张（带有 $Q \subseteq Q'$），并且其中可以找到 $h \in \mathbb{S}'$，满足（2）。

算法 1.（求降次数表示）
输入：一个（$\mathbb{F}$（x） σ）上的 $\Pi\Sigma$-域扩张（$\mathbb{F}$，σ），其中问题 SE 可解；$d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，一个（$\mathbb{F}$（$x$） σ）的简单 R$\Pi\Sigma$-扩张（$\mathbb{E}$，σ），其 x-次数为 $\leq d$，该次数是 LA-可计算的，并且其中可以求解问题 T；以及一个（d，x）-集合 $Q = \{q_1, \ldots, q_\lambda\} \subseteq \mathbb{F}[x]$，使得（$\mathbb{E}$，$\sigma$）的 Σ-扩张（$\mathbb{S}$，σ）是（d，x，Q）-约化的 R$\Pi\Sigma$-扩张，其基域为（$\mathbb{F}$（x） σ）；$f \in \mathbb{E}$。

输出：一个 (d, x) 集合 $Q' \supseteq Q$；一个 $(\mathbb{S}, \sigma)$ 的 Σ-扩张 $(\mathbb{S}', \sigma)$，它是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的一个 (d, x, Q')-约化 R$\Pi\Sigma$-扩张 $(\mathbb{S}', \sigma)$，并附带方程 (2) 的一个解 $h \in \mathbb{S}'$。设 $\mathbb{S} = \mathbb{E}[s_{1,1}, \ldots, s_{1,e_1}, \ldots, s_{\lambda,1}, \ldots, s_{r,e_\lambda}]$，其中 $e_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $\sigma(s_{i,j}) = s_{i,j} + \frac{p_{i,j}}{q_i^{n_{i,j}}}$, $n_{i,j} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，且 $p_{i,j} \in \mathbb{E}$ 满足 $\deg_x(p_{i,j}) < n_{i,j}\deg_x(q_i)$。~1 计算 $Q \subseteq Q = \{q_1, \ldots, q_r\} \subseteq \mathbb{F}[x]$，使其为 $(d, \operatorname{den}(f))$-完备；参见引理 3。令 $e_i = 0$ 对应于 $\lambda < i \leq r$（即元素 $Q \setminus Q$）。2 计算 $f', g \in \mathbb{E}$，使得 (4) 成立，其中 f' 写成形式 (5)，且满足引理 4 中给出的性质 (1)–(4)。3 令 $Q' = \tilde{Q}, \mathbb{S}_0 = \mathbb{S}, u = 0$ 和 $w = 0$。4 对 $i = 1$ 至 r 执行 5 若 $p_i \neq 0$，则 6 若 $e_i = 0$，则令 $B = \{\}$；否则令 $\mu_i =$ 为 $\max(n_i, n_i, 1, \ldots, n_{i,e_i})$，并计算 $V_i =$ 的一个基 B：$\operatorname{Ann}_{\mathbb{K}}(q^{\mu_i - n_i}{}_{,i}{}^{1}p_i, 1, \ldots, q^{\mu_i - n_i}{}_{,i}{}^{e_i}p_{i,e_i}, q_i^{\mu_i - n_i}p_i)$ 7 若 $B = \{\}$，则 8 令 $u = u + 1$ 和 $Q' = Q' \cup \{q_i\}$。9 取一个新的变量 s_u，使其在 $\mathbb{S}_{u-1}$ 上超越，并构造 $(\mathbb{S}_{u-1}, \sigma)$ 的差分环扩张 $(\mathbb{S}_u, \sigma)$，其中 $\mathbb{S}_u = \mathbb{S}_{u-1}[s_u]$，且 $\sigma(s_u) = s_u + \frac{p_i}{q_i^{n_i}}$。10 令 $w = w + s_u \in \mathbb{S}_u$。否则 11 令 $w = w + c_1\, s_{i,1} + \cdots + c_{e_i}\, s_{i,e_i}$，其中 $B = \{(c_1, \ldots, c_{e_i}, -1)\}$。结束若 结束若 结束循环 12 若可能，计算一个 $\gamma \in \mathbb{E}$，使得 $\sigma(\gamma) - \gamma = \frac{p}{q}$。若存在这样的 γ，则令 $g' = \gamma$ 和 $\mathbb{S}' = \mathbb{S}_u$。否则，定义 $(\mathbb{S}_u, \sigma)$ 的环扩张 $(\mathbb{S}', \sigma)$，其中包含多项式环 $\mathbb{S}' = \mathbb{S}_u[t]$，且 $\sigma(t) = t + \frac{p}{q}$，并令 $g' = s_u$。13 返回 (12)

$$(h, (\mathbb{S}', \sigma)\ Q') \text{ 其中 } h = g + g' + w \in \mathbb{S}'.$$

命题 2. 算法 1 正确，并且可在定理 3 所述的 $\Pi\Sigma$-域（$\mathbb{F}(x)$ σ）中执行。

证明。考虑满足 $1 \leq i \leq r$ 的第 i 个循环。对于步骤 6 中的特殊情形 $e_i = 0$，由 $p_i \neq 0$ 可得，我们有 $V_i = \{\mathbf{0}\}$，其基为 $B = \{\}$。否则，我们计算 V_i 的一个基 B，然后继续。如果步骤 7 中 $B = \{\}$，则引入一个新变量 s_u；在后续论证中，我们也将其记为 $s_{i,e_i'}$，其中 $e_i' = e_i + 1$。特别地，令 $p_{i,e_i'} = p_i$ 和 $n_{i,e_i'} = n_i$，并得到 $\sigma(s_{e_i'}) - s_{e_i'} = p_{i,e_i'}/q_i^{n_{i,e_i'}}$。

否则，若 $B \neq \{\}$，则环保持不变，并定义 $e_i' = e_i$。注意，$|B| = 1$。也就是说，假设我们可以取两个元素 $\mathsf{c} = (c_1, \ldots, c_{e_i+1})$、$\mathsf{d} = (d_1, \ldots, d_{e_i+1}) \in B$，使得 $\mathsf{c} \neq \mathsf{d}$。若两个向量的最后一个分量均非零，则可将向量乘以 $\mathbb{K}$ 的适当元素，使该分量为 1。这些归一化后的向量仍必定不同（因为 B 是一个基）。因此，$\mathsf{e} = \mathsf{c} - \mathsf{d} \neq \mathbf{0}$，其最后一项为 0。去掉最后一项后，得到 $\operatorname{Ann}_{\mathbb{K}}(q^{\mu_i - n_i}{}_{,i}{}^{1}p_i, 1, \ldots, q^{\mu_i - n_i}{}_{,i}{}^{e_i}p_{i,e_i})$ 中的一个向量，且 $\deg_x(q^{\mu_i - n_i}{}_{,i}{}^{1}p_i, 1) < \mu_i \deg_x(q_i)$。因此我们可以应用定理 2：$(\mathbb{S}, \sigma)$ 不是 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 的 Σ-扩张，矛盾。故可假设 $B = \{(c_1, \ldots, c_{e_i}, -1)\}$，如步骤 11 所述。

现在考虑输出的 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 的差分环扩张 $(\mathbb{S}', \sigma)$。重新排序并使用上文的重命名后，我们得到如下的 $\mathbb{S}' = \mathbb{E}'[s_{1,1}, \ldots, s_{1,e_1'}, \ldots, s_{r,1}, \ldots, s_{r,e_\lambda'}]$：

(1) $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$ 在找到一个满足 $\sigma(\gamma) - \gamma = \frac{p}{q}$ 的 $\gamma \in \mathbb{E}$ 的情况下，或者在不存在这样的 γ 时为 $\mathbb{E}' = \mathbb{E}[t]$。在这种情况下，根据定理 1，带有 $\mathbb{E}' = \mathbb{E}[t]$ 的 $(\mathbb{E}', \sigma)$ 是带有 x-次数$\leq d$的 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 的 Σ-扩张；
(2) 我们有 $\sigma(s_{i,\ j}) = s_{i,\ j} + p_{i,\ j}/q_i^{n_i}$其中 $q_i \in Q'$，$\deg_x(p_{i,\ j}) < n_i \deg_x(q_i)$ 且 $V_i = \{\mathbf{0}\}$ 满足 (12)，并且 $\deg_x(q^{\mu_i - n_i}{}_{i} {}^{1}p_i) < \mu_i \deg_x(q_i)$。根据定理 2，$(\mathbb{S}', \sigma)$ 是 $(\mathbb{E}', \sigma)$ 的一个 Σ-扩张。
总之，$(\mathbb{S}', \sigma)$ 是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的一个 (d, x, Q')-约化 RΠΣ-扩张。最后，我们注意到，在步骤9 或11 中，我们有 $\sigma(s_u) - s_u = p_i/q_i^{n_i}$且 $q_i \in Q'$，或者 $\sigma(b) - b = p_i/q_i^{n_i}$且$b = c_1 s_{i,\ 1} + \cdots + c_{e_i} s_{i,\ e_i}$。因此，退出 for循环后，我们得到 $\sigma(w) - w = \sum_{i=1}^{r} p_i/q_i^{n_i}$。结合步骤12 和 (5)，$\sigma(g' + w) - (g' + f) = f'$。因此，取 $h = g + g' + w$，

$$\sigma(h) - h = (\sigma(g) - g) + (\sigma(g' + w) - (g' + w)) \overset{(4)}{=} (f - f') + f' = f. \tag{13}$$

所有步骤均可按照定理 3 在 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 中执行。 □

例3。我们将算法 1 应用于 $(\mathbb{S}, \sigma)$，其中 $\mathbb{S} = \mathbb{E}$ 由例 1.1 给出，$Q = \{q_1\} = \{1 + x^2\}$和 f 如 (7) 所示。步骤 4 参见例 2.1。由于 $\mathbb{S} = \mathbb{E}$ 和 $|Q| = 1$，因此有 $r = 1$和 $e_1 = 0$。此外，$p_1 = 0$。于是我们进入步骤 12，此时 $\frac{p}{q} = \frac{-2-4x+x^2}{10x^3}$。由于不存在满足$\sigma(\gamma) - \gamma = \frac{p}{q}$的 $\gamma \in \mathbb{E}$，我们可以将 Σ-单项式 t添入 $\mathbb{E}$，使其满足 $\sigma(t) = t + \frac{p}{q}$，并得到解 $h = g + t$，其中 g由 (8) 给出。我们将 t重新解释为 $\sum_{i=2}^{k} \frac{3-6i+i^2}{10\ -1+i}{}^{)3} = \frac{2+4k-k^2}{10k^3} - \frac{1}{5}S_3(k) - \frac{2}{5}S_2(k) + \frac{1}{10}S_1(k)$。将 h 重新表述为给定的求和对象，并将 (2) 对 k 从 1 到 n 求和，即得到 (3) 的右端;

例4。将左侧的被加项记为

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1 + k + ((1+k)^2 + k!)k!)(1 + k!) - k(1+k)(k!)^4}{(1+k)(1 + (1+k)k!)(k!)^3(1 + k!)} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{n! + nn!} - \frac{1}{1 + n! + nn!} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i!)^3} + \frac{1}{1 + n! + nn!} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \tag{14}$$

$F(k)$。取以 $\mathbb{Q}$ 为底的 ΠΣ 域 $(\mathbb{Q}(x)(\tau)\ \sigma)$，其中 $\sigma(x) = x + 1$，$\sigma(\tau) = (x+1)\tau$，并考虑 $(\mathbb{Q}(x)(\tau)\ \sigma)$ 的简单 RΠΣ-扩张 $(\mathbb{E}, \sigma)$，其中 $\sigma(s) = s + {}^{1}(x+1)_\tau$。~~于是~~，我们可以将 $F(k+1)$ 改写为 $f = (-\tau^4 s~~x(1+x)+(1+\tau)(1+x+\tau(\tau+(1+x)^2)))~~ \tau^3(1+\tau)(1+x)(1+\tau(1+x)) \in \mathbb{E}$。这里令 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(x)$，而 Π 单项式 τ 将起到 x 的作用。注意，τ^3 是一个周期1因子。因此，$(\mathbb{Q}(x)(\tau)\ \sigma)$ 的扩张 $(\mathbb{E},$ $\sigma)$ 的 τ-次数为 $\leq 0 = d$。此外，$Q = \{q_1\}$ 与 $q_1 = \tau + 1$ 是 $(0, f)$-完备的。我们应用算法 1，取 $\mathbb{S} = \mathbb{E}$，得到 $g \in \mathbb{E}$ 和 $f' \in \mathbb{E}$，其中$f' = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p}{q}$。也就是说，$p_1 = 0$、$\frac{p}{q} = \frac{1+x-\tau^2 x}{\tau^3\ 1+x}(\ )$ 和 $g = -\frac{1}{\tau} + \frac{s}{1+\tau}$。由于不存在满足 $\sigma(\gamma) - \gamma = \frac{p}{q}$ 的 $\gamma \in \mathbb{E}'$，我们可以构造 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 的 Σ-扩张 $(\mathbb{E}[t], \sigma)$，其中 $\sigma(t) = t + \frac{p}{q}$。特别地，$h = g + t$ 是 (2) 的一个解。最后，我们~~将 h 改写回~~求和~~对象~~。这里，t 可解释为 $\sum_{i=1}^{k} {}^{i^3+}(i!)^2 - i(\ _{i} = -\ _{1}!)^2\ (i!)\ (k!)$ ${}_3 + \frac{1}{k}! + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}(!)^3$。最后，对 k 对 (2) 求和，即得到 (14) 的右端。

例5。我们希望用$F_1(k) = {}^{(1-(-1)^j)j\ (3-3j+j^2)(j!)_2} \prod_{i=1}^{j} i!$ 对和 $T_1(n) = \sum_{k=1}^{n} F_1(k)$ 以及 $T_2(n)$ $= \sum_{k=2}^{n} ~~F_2(k)$ 进行~~建模，并且

$$F_2(k) = \Big((-1)^{k-1}(3 + (-3+k)k)(1 + (-1+k)k)(k!)^2 + (k-1)\Big(\prod_{i=1}^{k} i!\Big)\Big) \times$$
$$\Big((-1 + (-1)^k)k(1+n)(1 + (-1+k)k) + (1 + (-1)^k)(3 + (-3+k)k)k!\Big) \Big/$$
$$\Big((-1+k)(3 - 3k + k^2)(1 - k + k^2)(k!)^2\Big)$$

在一个差分环中进行。这里我们从例1.2中给出的（$\mathbb{E},\sigma$）开始。首先，通过将对象 k、$(-1)^k$、$k!$ $\prod_{i=1}^{k} i!$ 替换为 x、z、τ_1、τ_2，我们在 $\mathbb{E}$ 中重新表述 $F_1(k+1)$，得到 $f_1 \in \mathbb{E}$。注意，$Q=\{q_1\}$与 $q_1 = x^2 - x + 1$ 一起是 $(1, f_1)$-完备的。接下来，调用算法 1，我们得到输出，即 (x, Q)-约化的 RΠΣ-扩张 $(\mathbb{S},\sigma)$，它由 $(\mathbb{E},\sigma)$ 以及 $\mathbb{S}=\mathbb{E}[s_{1,1}]$ 和 $\sigma(s_1,1) - s_1$、$_1 = {}^{p_1}$、$_{q_1}{}^1 (= f_1)$ 构成，其中 p_1、$_1 = \tau_2/\tau_1(1+z)$。现在我们转向 T_2。如上所述，我们在 $\mathbb{S}$ 中重新表述 $F_2(k+1)$，得到$f := f_2$。注意，Q 再次是 $(1, f)$-完备的。由于不存在满足 (2) 的 $h \in \mathbb{E}$，我们可以调用定理 1（使用 $m=1$），从而得到关于 $\mathbb{S}$ 的 Σ-单项式 t，其中 $\sigma(t) = t + f$。但我们还可以做得更好。再次调用算法 1，我们计算出 $g = {}^{\tau_2}(1+z)\,\tau_1($ $_{1-x+x^2}) \in \mathbb{E}$ 和 $f' \in \mathbb{E}$，使得 (4) 成立，其中 f' 具有带 $r=1$ 的 σ-约化形式 (5)。具体而言，我们得到 $p_1 = \tau_2/\tau_1(-n-nz)$ 和 $\frac{p}{q} = \frac{z}{x}$。注意，这一次我们有 $p_1 \neq 0$ 和 $e_1 = 1$。因此，在第 6 步中，我们为 $i=1$ 计算值$\mu_1 = 0$ 以及 $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Q}}(p_1,1,p_1)$ 的基 $B=\{(-n,-1)\}$，从而得到 $w = -n\,s(= -n\,s_1,1)$。由于不存在满足 $\sigma(\gamma) - \gamma = \frac{p}{q}$ 的 $\gamma \in \mathbb{E}$，我们可以将 Σ-单项式 t 添加入 $\mathbb{S}$，其中 $\sigma(t) - t = \frac{p}{q} = \frac{z}{x}$，并得到作为 (2) 输出的解 $h = w + t + g = {}^{\tau_2}(1+z)\,\tau_1(1-x+x^2) - n\,s_1 + t \in \mathbb{S}[t]$。$t$ 可以重新解释为 $\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}/(i-1)$。使用给定的求和对象重新表述 h，并对 k 求和 (2)，得到

$$T_2(n) = 2n - n\,T_1(n) + \frac{1+(-1)^n}{(1-n+n^2)n!}\prod_{i=1}^{n} i! + \sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i-1}.$$

算法 1 给出了一种策略，用于寻找分母具有 x-次数$\leq d$的望远镜求和解。下文将证明，这是唯一可能的策略，并且只要在某个适当的扩张中存在解，该策略就总能得到一个良好的解。

定理 4. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F},\sigma)$ 的一个 ΠΣ-域扩张，并设 $Q=\{q_1,\dots,q_r\} \subseteq \mathbb{F}[x]$ 是一个 (d,x)-集。设 $(\mathbb{S},\sigma)$ 连同 $\mathbb{S}=\mathbb{E}[s_{1,1},\dots,s_{1,e_1},\dots,s_{r,1},\dots,s_{r,e_r}]$ 是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的一个 (d,x,Q)-约化 RΠΣ-扩张，其中 $e_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，且 $s_{i,j}$ 是 Q-贡献，其中 $\sigma(s_{i,j}) = s_{i,j} + {}^{p_i}/_{q^{n_i}}$，$_j$，其中 $n_{i,j} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 且 $p_{i,j} \in \mathbb{E}$。对于 $f \in \mathbb{E}$，取 f'，$g \in \mathbb{E}$ 使得 (4) 成立，其中 f' 按引理 4 中给出的、具有性质 (1)–(4) 的形式 (5) 表示。则存在一个满足 (2) 的 $h \in \mathbb{S}$，当且仅当对于所有 $1 \leq i \leq r$，存在 $c_{i,j} \in \mathbb{K} = \mathsf{const}_\sigma \mathbb{F}$，使得

$$q_i^{\mu_i - n_i} p_i = c_{i,1} q_i^{\mu_i - n_{i,1}} p_{i,1} + \cdots + c_{i,e_i} q_i^{\mu_i - n_{i,e_i}} p_{i,e_i} \tag{15}$$

对于 $\mu_i = \max(n_i, n_{i,\ 1}、\ \dots、\ n_{i,\ e_i})$，并且存在一个 $g' \in \mathbb{E}$，其中

$$\sigma(g') - g' = \frac{p}{q}; \tag{16}$$

如果情况确实如此，$\mathsf{den}(g')$ 具有 x-次数$\leq d$，于是我们得到解

$$h = g + g' + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{e_i} c_{i,j} s_{i,j} \in \mathbb{S}. \tag{17}$$

证明。假设存在一个 $h \in \mathbb{S}$，满足 (2)。那么结合 (4)，我们得到 $\sigma(\gamma) - \gamma = f'$，其中 $\gamma = h - g \in \mathbb{S}$。特别地，由 [4, 命题 6.4] 可知，$\gamma = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{e_i} c_{i,j} s_{i,j} + g'$，其中 $c_{i,j} \in \mathbb{K}$ 且$g' \in \mathbb{E}$。因此，$\sigma(g') - g' = \frac{p_1'}{q_1^{\mu_1}} + \cdots + \frac{p_r'}{q_r^{\mu_r}}$，其中 $p_i' = q_i^{\mu_i - n_i} p_i - (c_{i,1} q^{\mu_i - n_i}{}_{,i}\ {}^1 p_{i,1} + \cdots + c_{i,e_i} q^{\mu_i - n_i}{}_{,i}\ {}^{e_i} p_{i,e_i})$。由于 $\deg_x(p_i') < \deg_x(q_i)\mu_i$，我们可以应用命题 1，得到 $p_1' = \cdots = p_r' = 0$。因此 (15) 和 (16) 成立。此外，由命题 1，$\mathsf{den}(g')$ 的 x-次数为 $\leq d$。反过来，若 (15) 成立，且存在一个 $g' \in \mathbb{E}$ 满足 (16)，那么对于 $w = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{e_i} c_{i,j} s_{i,j}$，我们得到

$$\sigma(g'+w) - (g'+w) = \frac{p}{q} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{e_i} c_{i,j}\frac{p_{i,j}}{q_i^{n_{i,j}}}$$

$$= \frac{p}{q} + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{q_i^{\mu_i}} \sum_{j=1}^{e_i} c_{i,j} q_i^{\mu_i - n_{i,j}} p_{i,j} = \frac{p}{q} + \sum_{i=1}^{r} \frac{q_i^{\mu_i - n_i} p_i}{q_i^{\mu_i}} = f'.$$

因此，结合 (17) 可知 (13) 成立，证明完毕。 □

由此，定理 4 化为推论 1。

推论 1. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F}, \sigma)$ 的 $\Pi\Sigma$-域扩张，并设 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的一个简单 RΠΣ-扩张，满足 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle \dots \langle t_e\rangle$ 且具有 x-次数$\leq d$。对于 $f \in \mathbb{E}$，取 $f', g \in \mathbb{E}$ 使得 (4) 成立，其中 f' 写成具有引理 4 中给出的性质 (1)–(4) 的形式 (5)。那么，存在满足 (2) 的 $h \in \mathbb{E}$ 当且仅当 $p_1 = \dots = p_r = 0$，并且存在满足 (16) 的 $g' \in \mathbb{E}$；若此条件成立，则 den(g') 的次数为 x-次数$\leq d$，且 $h = g + g' \in \mathbb{E}$ 是一个解。

算法 1 的以下“最优”性质成立。

推论 2. 设 $(\mathbb{S}, \sigma)$ 是 (d, x, Q)-约化的 RΠΣ-扩张，$(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 满足算法 1 中的假设，且 Q'、$(\mathbb{S}', \sigma)$ 以及满足 (2) 的 $h \in \mathbb{S}'$ 是算法 1 的输出。若存在 $(\mathbb{S}, \sigma)$ 的一个简单 RΠΣ-扩张 $(\mathbb{H}, \sigma)$，其 x-次数为 $\leq d$，且满足 $h' \in \mathbb{H}$，其中 $\sigma(h') - h' = f$，则以下结论成立。

1. $Q' = Q$ 和 $(\mathbb{S}', \sigma)$ 是 $(\mathbb{S}, \sigma)$ 的一个 Σ-扩张，其 x-次数为 $\leq d$。 2. 若 $\mathbb{H} = \mathbb{S}$，则 $\mathbb{S}' = \mathbb{S}$。
3. 若扩张 $\mathbb{H}$ 中的 h' 不含 Q 贡献（即不含 $s_{i,\ j}$），则 h 也不含 Q 贡献。

证明。假设存在这样的（$\mathbb{H}$，σ），其中 $\sigma(h') - h' = f$，且 $h' \in \mathbb{H}$。那么 $\mathbb{H} = \mathbb{E}'[s_{1,1}, \dots, s_{1,e_1'}, \dots, s_{r,1}, \dots, s_{r,e_\lambda'}]$，其中（$\mathbb{E}'$，$\sigma$）是（$\mathbb{G}(x)\ \sigma$）的一个简单 RΠΣ-扩张，其 x-次数为$\leq d$。现在我们应用定理 4（将其中的 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{E}$ 分别替换为 $\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{E}'$），并得出存在 $c_{i,\ j} \in \mathbb{K}$，使得对于 $1 \leq i \leq r$ 满足（15）。如果 $e_i = 0$，则 $p_i = 0$。否则，我们有 $V_i \neq \{\mathbf{0}\}$，其基为 $B = \{(c_1, \dots..., c_{e_i}, -1)\}$。因此，我们不会进入步骤 8–10，从而 $Q = Q'$ 和 $\mathbb{S}_u = \mathbb{S}$。如果 $\mathbb{H} = \mathbb{S}$，则由定理 4 可知存在一个 $g' \in \mathbb{S}$，满足（16）。因此，结果将在$\mathbb{S}' = \mathbb{S}$中返回。否则，我们得到 $\mathbb{S}' = \mathbb{S}_u[t] = \mathbb{S}[t]$，其中 t 是一个 Σ-单项式，其 x-次数为$\leq d$。这证明了命题的陈述 1 和 2。此外，如果 h' 不含 $s_{i,\ j}$，则可推出 $c_{i,\ j} = 0$ 满足（15）。特别地，对于所有 $1 \leq i \leq r$，都有 $p_i = 0$。因此，我们绝不会进入步骤 6–11，从而 $w = 0$。因此，h 不含 $s_{i,\ j}$，陈述 3 得证。□

上述结果可以转化为参数化版本。这里我们只扩展推论 1，从而得到下面的算法 1。

推论 3. 设 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 是 $(\mathbb{F}, \sigma)$ 的一个 $\Pi\Sigma$-域扩张，并设 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 是 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的一个简单 RΠΣ-扩张，且 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(x)\langle t_1\rangle \dots \langle t_e\rangle$ 的 x-次数为 $\leq d$。对于 $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{E}^*$，设 $Q = \{q_1, \dots, q_r\} \subseteq \mathbb{F}[x]$ 是 (d, f_i)-完备的，且满足 $1 \leq i \leq m$。取 $f_i', g_i \in \mathbb{E}$，使得 $\sigma(g_i) - g_i + f_i' = f_i$，其中 f_i' 由下式给出

$$f_i' = \frac{p_{i,1}}{q_1^{n_{i,1}}} + \frac{p_{i,r}}{q_r^{n_{i,1}}} + \frac{p_i'}{q_i'} \tag{18}$$

满足引理 4 中给出的性质 (1)–(4)（将 p_j, n_j 替换为 $p_{i,\ j}, n_{i,\ j}$，并将 p, q 替换为 p_i', q_i'）。令 $\mu_i = \max(n_{1,i}, \dots, n_{m,i})$ and

$$V_i = Ann_{\mathbb{K}}(q_1^{\mu_1 - n_{1,j}} p_{1,j}, \dots, q_1^{\mu_m - n_{m,j}} p_{m,j}). \tag{19}$$

那么，对于 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{K}^m$，以下结论成立。

1. 存在一个 $h \in \mathbb{E}$，使得 (1) 成立，当且仅当存在一个 $g' \in \mathbb{E}$，使得

$$\sigma(g') - g' = c_1 \frac{p_1'}{q_1'} + \dots + c_m \frac{p_m'}{q_m'} \tag{20}$$

且 $\mathsf{c} \in V_i$ 对所有 $1 \leq j \leq r$ 都成立；若如此，$\mathsf{den}(g')$ 的 x-次数为 $\leq d$，且 $h = g' + \sum_{i=1}^{m} c_i\, g_i \in \mathbb{E}$ 是 (1) 的一个解。

2. 如果对于所有 $1 \leq j \leq r$，$\in V_i$，但不存在满足 (20) 的 $g' \in \mathbb{E}$，那么存在 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 的 Σ-扩张 $(\mathbb{E}[t], \sigma)$，其 x-次数为 $\leq d$，其中 $\sigma(t) - t = c_1 \frac{p_1'}{q_1'} + \cdots + c_m \frac{p_m'}{q_m'}$，且 $h = t + \sum_{i=1}^{m} c_i\, g_i$ 满足 (1)。

证明. (1) 定义 $f := \sum_{i=1}^{m} c_i\, f_i$, $g := \sum_{i=1}^{m} c_i\, g_i$, $f' = \sum_{i=1}^{m} c_i\, f_i'$, $p_j = \sum_{i=1}^{m} c_i\, p_{i,\,j}$，以及 $p \in \mathbb{F}[x]\langle t_1\rangle \dots \langle t_e\rangle$, $q \in \mathbb{G}[x]$，使得 $\frac{p}{q} := \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{p_i'}{q_i'}$。对于 $1 \leq i \leq m$，由 $f_i = \sigma(g_i) - g_i + f_i'$ 可得

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i = \sigma\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i g_i\Big) - \sum_{i=1}^{m} c_i g_i + \sum_{i=1}^{m} c_i f_i' = \sigma(g) - g - f'. \tag{21}$$

可以验证，对于 f'，具有性质 (1)–(4) 的表示 (5) 成立。因此，根据推论 1 可知，存在一个满足 (2) 的 $h \in \mathbb{E}$（即 (1) 成立），当且仅当对于所有 $1 \leq j \leq r$，$p_j = 0$（即对于所有 j，$\mathsf{c} \in V_j$），并且存在一个满足 (16) 的 $g' \in \mathbb{E}$（即 (20) 成立）。最后，g' 的分母中的不可约因子具有 x-次数$\leq d$，且 $h = g' + g \in \mathbb{E}$ 是 (1) 的一个解。

(2) 假设对于所有 $1 \leq j \leq r$，$\mathsf{c} \in V_i$。由于不存在满足 (20) 的 $g' \in \mathbb{E}$，我们可以取 $m = 1$ 应用定理 1，由此可知，陈述 2 中给出的 t 是 $\mathbb{E}$ 上的一个 Σ- 单项式，其中 $\mathsf{den}(\sigma(t) - t)$ 的 x-次数为 $\leq d$。此外，$g' = t$ 是 (1) 的一个解。因此，我们可以将 $\mathbb{E}$ 替换为 $\mathbb{E}[t]$，应用陈述 1，由此可知，$h = g' + g = t + g$（其中 c_1，……，c_m）是 (1) 的一个解。□

算法 2.（精化参数化望远镜求和）

输入：一个 $(\mathbb{F}, \sigma)$ 的 $\Pi\Sigma$-域扩张 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$，其中问题 SE 可解；$d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ 以及一个 $(\mathbb{F}(x)\ \sigma)$ 的 LU-可计算简单 R$\Pi\Sigma$-扩张 $(\mathbb{E}, \sigma)$，其次数为 x-$\mathsf{degree}\leq d$，且其中问题 PT 可解；$\mathsf{f} = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{E}^m$。

输出：若存在，则给出 (1) 的一个解 $\mathsf{c} = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{K}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ 和 $h \in \mathbb{E}$。否则，构造性地判定是否存在 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 的一个 Σ-扩张 $(\mathbb{S}, \sigma)$，其次数为 x-$\mathsf{degree}\leq d$，且 (1) 存在解 $\mathsf{c} \in \mathbb{K}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ 和$h \in \mathbb{S}$。

1 对于 $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{E}$，计算 $Q = \{q_1, \dots, q_r\} \subseteq \mathbb{F}[x]$，使其为 (d, f_i)-完备；这里可以使用引理 3 的一个变体。此外，计算 $f_i', g_i \in \mathbb{E}$，使得 $\sigma(g_i) - g_i + f_i' = f_i$，其中 f_i'按引理 4 所述写成具有性质 (1)–(4) 的形式 (18)（p_j, n_j 替换为 $p_{i,j}, n_{i,j}$，而 p, q 替换为 p_i', q_i'）。

2 计算 $1 \leq i \leq r$ 中由 (19) 给出的 V_i 的基 B_i，其中 $\mu_i = \max(n_{1,i}, \dots, n_{m,i})$。若 $B_i = \{\}$，则停止并输出“无解”。

3 计算 $V = V_1 \cap \cdots \cap V_m$ 的一个基 $B = \{(d_{i,1}, \dots, c_{i,m})\}_{1 \leq i \leq u}$。
若 $B = \{\}$，即 $V = \{\mathbf{0}\}$，则停止并输出“无解”。

4 计算 $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_u)^t = D \left(\frac{p_1'}{q_1'}, \dots, \frac{p_m'}{q_m'}\right)^t$，其中 $D = (d_{i,j}) \in \mathbb{K}^{u \times m}$。

5 若可能，计算 $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_u) \in \mathbb{K}^u \setminus \{\mathbf{0}\}$ 和 $\tilde{g} \in \mathbb{E}$，其中

$$\sigma(\tilde{g}) - \tilde{g} = \kappa_1 \tilde{f}_1 + \cdots + \kappa_u \tilde{f}_u. \tag{22}$$

6 若不存在这样的解，则取 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 的差分环扩张 $(\mathbb{S}, \sigma)$，其多项式环扩张为 $\mathbb{S} = \mathbb{E}[t]$，且 $\sigma(t) = t + \tilde{f}_1$。令 $\tilde{g} = t$, $\kappa = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^u$。

7 返回 $(\mathsf{c}\ h, (\mathbb{S}, \sigma))$，其中 $\mathsf{c} = \kappa D \in \mathbb{K}^m$, $h = \tilde{g} + \sum_{i=1}^{m} c_i\, g_i \in \mathbb{S}$。

命题 3. 算法 2 正确，并可在定理 3 所指定的 $\Pi\Sigma$-域（$\mathbb{F}(x)\ \sigma$）中执行。

证明。假设 $V = V_1 \cap \cdots \cap V_m = \{\mathbf{0}\}$。根据推论 3.1，不存在 $\mathsf{c} = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{K}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$and h in $(\mathbb{E}, \sigma)$ or in a Σ-extension $(\mathbb{S}, \sigma)$ of $(\mathbb{E}, \sigma)$ with x-次数$\leq d$ 满足 (1)。因此，步骤 2 和 3 中输出“无解”的停止是正确的。现在假设存在

这样一个解 $h \in \mathbb{E}$ with $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$。根据推论 3.1，我们得出 $\mathbf{c} \in V$ 成立，并且存在一个 $g' \in \mathbb{E}$ 满足 (20)。由于 B 是 V 的一组基，因此存在 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_u) \in \mathbb{K}^u \setminus \{\mathbf{0}\}$ with $\mathbf{b}D = \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$。因此

$$b_1 \tilde{f}_1 + \cdots + b_u \tilde{f}_u = \mathbf{b}(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_u)^t = \overbrace{\mathbf{b}D}^{\mathbf{c}}(\frac{p'_1}{q'_1}, \ldots, \frac{p'_m}{q'_m})^t = \sigma(g') - g'.$$

因此，我们还在步骤 5 中找到满足 (22) 的 $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_u) \in \mathbb{K}^u \setminus \{\mathbf{0}\}$ 和 $\tilde{g} \in \mathbb{E}$。现在考虑步骤 7 给出的输出。于是

$$\begin{aligned} c_1 f'_1 + \cdots + c_m f'_m &= \mathbf{c}(f'_1, \ldots, f'_m)^t = \kappa D(f'_1, \ldots, f'_m)^t \\ &\overset{(*)}{=} \kappa D(\frac{p'_1}{q'_1}, \ldots, \frac{p'_m}{q'_m})^t = \kappa(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_u)^t = \sigma(\tilde{g})) - \tilde{g}; \end{aligned}$$

此处 (*) 成立，因为 D 消去了分母因子具有大于 d 的 x-次数的项。结合 $\sigma(g_i) - g_i + f'_i = f_i$ 和 (21)，我们得到满足 $h = g' + \sum_{i=1}^m c_i g_i$ 的 $\sum_{i=1}^m c_i f_i = \sigma(h) - h$。总之，如果能够在 $\mathbb{E}$ 中求解问题 PT，该算法就会找到这样的解。否则，我们无法找到满足 (22) 的 $\kappa_i \in \mathbb{K}$ 和 $\tilde{g} \in \mathbb{E}$。根据定理 1，步骤 6 中给出的 $(\mathbb{S}, \sigma)$ 是 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 的 Σ-扩张，其 x-次数为 $\leq d$；此外，对于 κ_i 和 $g' = t$，我们有 (22)。在这种情况下，输出 $h \in \mathbb{S}$ 也会给出所需的解。显然，该算法可按定理 3 中的规定应用。□

例 6. 给定来自例 1.3 的 $(\mathbb{E}, \sigma)$ 以及 (9) 中给出的 $\mathbf{f} \in \mathbb{E}$，我们开始算法 2。步骤 1 已在例 2.2 中完成。接下来，我们计算 $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Q}}(p_1, 1, p_2, 1, p_3, 1)$ 的一个基。也就是说，$B = \{\mathbf{d}\}$，其中 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) = (1, -1, 1)$。最后，我们得到 $\tilde{f}_1 = \sum_{i=1}^3 d_i \rho_i = \frac{h_1 z}{x} + \frac{z}{x}$，其中 $u = 1$。由于不存在满足 (22) 的 $\kappa_1 \neq 0$ 和 $\tilde{g} \in \mathbb{E}$，我们可以添入 Σ-单项式 t，其中 $\sigma(t) - t = \tilde{f}_1 = \frac{h_1 z}{x} + \frac{z}{x}$，并令 $\kappa = (1)$ 和 $\tilde{g} = t$。因此，$\mathbf{c} = \kappa(d_1, d_2, d_3) = (1, -1, 1)$ 且 $h = \tilde{g} + g_1 - g_2 + g_3 = t - \frac{h1x - z}{x\,1+x^2}$ ( ) 是 (1) 的一个解，其中 $m = 3$。

备注。如果只想在 $\mathbb{E}$ 中（而不在扩张 $\mathbb{S}$ 中）求解问题 PT，也可以使用 [51, 52] 中的算法；参见定理 3。不过，与 [19], 中的观察类似，我们的优势在于，当出现复杂分母时，算法 2（与 [51, 52] 中的算法相比）能够加快运算速度。

5. 结论

我们提出了望远镜算法，使人们能够通过算法判定输入被加项 f 中的不可约因子是否可以消去。这些算法要求 f 中出现的嵌套和已经具有分母形式良好的表示。为了提高灵活性，我们在定义 5 中考察了和扩张，其中最外层的和可以具有不理想的分母。若能将这一方法进一步推广到更复杂的和，将会很有意义。这里，[5, 36, 6, 22, 43, 17] 中的思想或许有助于消去不需要的移位等价类中的分母因子。

此外，也可以尝试处理含有多个 $\Pi\Sigma$的单项式（而不仅仅是 x）。这将产生能够处理不仅是（q–）有理情形，还包括多基和混合情形 [10]的算法。

上述算法已在 Sigma 软件包中实现，并与 [45, 47, 48, 9, 50] 中给出的算法相结合，以便在算法 1 的第 12 步和算法 2 的第 5 步求解问题 T 和 PT。因此，还可以进一步搜索具有最优嵌套深度的和表示。这个高度灵活的工具箱对于简化复杂的和表达式至关重要，例如来自粒子物理学的表达式 [12, 14, 15]。

References

[1] J. Ablinger、J. Bl¨umlein、C. G. Raab 和 C. Schneider。迭代二项式和及其相关的迭代积分。 *J. Math. Phys.*，55(112301)：1–57，2014年。arXiv:1407.1822。[2] J. Ablinger、J. Bl¨umlein 和 C. Schneider。由分圆多项式生成的调和和与多重对数。 *J. Math. Phys.*，52(10)：1–52，2011年。arXiv:1007.0375。[3] J. Ablinger、J. Bl¨umlein 和 C. Schneider。广义调和和与多重对数的解析与算法方面。 *J. Math. Phys.*，54(8)：1–74，2013年。arXiv:1302.0378。[4] J. Ablinger 和 C. Schneider。由（分圆）调和和生成的数列的代数独立性。*Annals of Combinatorics*，22(2)：213–244，2018年。arXiv:1510.03692。[5] S. A. Abramov。具有有理右端项的一阶线性递推关系解的有理分量。 *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.*，15：216–221，1975年。译自 Zh. vychisl. mat. mat. fiz. 15，第 1035–1039 页，1975年。[6] S. A. Abramov。Zeilberger 算法何时奏效？ *Adv. Appl. Math.*，30(3)：424–441，2003年。[7] S. A. Abramov、M. Bronstein、M. Petkov˘sek 和 C. Schneider。关于 $\Pi\Sigma^*$ 域扩张上线性常差分方程的有理解与超几何解。 *J. Symb. Comput.*，107：23–66，2021年。arXiv:2005.04944 [cs.SC]。[8] S. A. Abramov、P. Paule 和 M. Petkov˘sek。 q q *Discrete*-差分方程 *Math*，180 1 3 3 的超几何解。，（-）：–22，1998年。[9] S. A. Abramov 和 M. Petkov˘sek。多项式环自同构、有理（w,σ）规范形式与指派问题。 *J. Symbolic Comput.*，45(6)：684–708，2010年。[10] A. Bauer 和 M. Petkov˘sek。多基与混合超几何 Gosper 型算法。 *J. Symbolic* ， *Comput.* 28 4 5 711 736, 1999 （–）：–。[11] J. Bl¨umlein。调和和与相关量之间的代数关系。 *Comput. Phys. Commun.*，159 1 19 0311046 54，2004 年（）：–。arXiv:hep-ph/。[12] J. Bl¨umlein、M. Kauers、S. Klein 和 C. Schneider。利用计算机代数，根据梅林矩确定 $O(a_s^3)$ 反常维数和威尔逊系数的闭式。 *Comput. Phys.* ，：– *Commun.* 180 2143 0902 4091 2165，2009年。arXiv:。[13] J. Bl ¨ 60, umlein 和 1999 S. Kurth。两圈阶以内的调和和与梅林变换。 *Phys. Rev.*，D。[14] J. Bl¨umlein、P. Marquard、C. Schneider 和 K. Sch¨onwald。深度非弹性结构函数的无质量三圈威尔逊系数 F_2、F_L、xF_3 和 g_1。 *Journal of High Energy Physics*，（论文编号 156）：1–83，2022年。arXiv:2208.14325 [hep-ph]。[15] J. Bl¨umlein、P. Marquard、C. Schneider 和 K. Sch¨onwald。由非壳算符矩阵元得到的三圈极化单态反常维数。 *Journal of High Energy Physics*，2022(193)：0–32，2022年。arXiv:2111.12401 [hep-ph]。[16] M. Bronstein。关于系数域上线性常差分方程的解。 *J. Symbolic Com-* ，（）：–。 *put.* 29 6 841 877, 2000 [17] S. Chen、F. Chyzak、R. Feng、G. Fu 和 Z. Li。关于混合超几何项的望远镜算子存在性。 *J. Symbolic Comput.*，68（第 1 部分）：1–26，2015 年。[18] S. Chen 、 R. Feng 、 G. Fu 和 Z. Li。关于相容有理函数的结构。载于 *Proceedings of ISSAC 2011* 91 ，第 –98 页，2011年。[19] S. Chen、H. Huang、M. Kauers 和 Z. Li。超几何项的修正 Abramov-Petkovsek 约化与创造性望远镜法。载于 K. Yokoyama、S. Linton 和 D. Robertz 编， *Proc. ISSAC 2015*，第 117–124 页。美国计算机协会，2015年。[20] S. Chen、M. Jaroschek、M. Kauers 和 M. F. Singer。去奇异化解释了 Ore 算子的阶-次数曲线。载于 M. Kauers 编， *Proc. of ISSAC 2013*，第 157–164 页，2013年。[21] S. Chen 和 M. Kauers。超几何创造性望远镜法的阶-次数曲线。载于 J. van der Hoeven 和 M. van Hoeij 编， *Proceedings of ISSAC 2012*，第 122–129 页，2012年。[22] W. Y. C. Chen、Q. Hou 和 Y. Mu。Zeilberger 算法的 q 类比的适用性。 *J. Symb.* ，（）：–。 *Comput.* 39 2 155 170, 2005 [23] F. Chyzak。将 Zeilberger 快速算法扩展到一般全纯函数。 *Discrete Math.*，217 115 134，2000年：–。[24] G. Ge。 *Algorithms related to the multiplicative representation of algebraic numbers*。博士论文，加州大学伯克利分校，1993年。[25] R. W. Gosper。不定超几何求和的判定过程。 *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. A.*，75 40 42，1978年：–。[26] C. Hardouin 和 M. F. Singer。线性差分方程的微分伽罗瓦理论。 *Math. Ann.*，342 2 333（）：–377，2008年。

[27] P. A. Hendriks 和 M. F. Singer。有限项差分方程求解。 *J. Symbolic Comput.*，27(3)：239– 259，1999年。[28] M. Karr。有限项求和。 *J. ACM*，28：305–350，1981年。[29] M. Karr。有限项求和理论。 *J. Symbolic Comput.*，1：303–315，1985年。[30] M. Kauers 和 C. Schneider。在符号求和中应用未指定序列。载于 J. Dumas 编，*Proc. ISSAC'06.*，第 177–183 页。ACM Press，2006年。[31] M. Kauers 和 C. Schneider。对未指定被加数进行不定求和。 *Discrete Math.*，306 17 2021 2140，2006 ( )：– 。[32] M. Kauers 和 C. Schneider。根式表达式的符号求和。载于 C. Brown 编，*Proc.* ，第 *ISSAC'07* 219 226, 2007 – 页。[33] C. Koutschan。全纯函数的创造性望远镜法。载于 C. Schneider 和 J. Bl¨umlein 编， *Computer Algebra in Quantum Field Theory: Integration, Summation and Special Functions*，《符号计算丛书》，第 171–194 页。施普林格，2013年。arXiv:1307.4554。[34] E. D. Ocansey 和 C. Schneider。在差分环中表示（q-）超几何乘积及其混合形式。载于 C. Schneider 和 E. Zima 编， *Advances in Computer Algebra. WWCA 2016.*，《符号计算丛书》第 226 卷，第 175–213 页。施普林格，2018年。arXiv:1705.01368。[35] E. D. Ocansey 和 C. Schneider。在差分环中表示更高嵌套深度的超几何乘积。RISC 报告系列 20-19，符号计算研究所（RISC），林茨约翰·开普勒大学，Schloss Hagenberg，4232 Hagenberg，奥地利，2020年。arXiv:2011.08775。[36] P. Paule。最大阶乘分解与符号求和。 *J. Symbolic Comput.*，20 268，1995 3 235( )：– 。[37] P. Paule 和 A. Riese。基于代数动机的 q类比 Mathematica 版 Zeilberger 算法，用于 q超几何望远镜求和。载于 M. Ismail 和 M. Rahman 编，*Special Functions, q-Series and Related Topics*，第 14 卷，第 179–210 页。AMS，1997年。[38] M. Petkov˘sek。具有多项式系数的线性递推的超几何解。*J. Symbolic Com-* ，(-)：– *put.* 14 2 3 243 264, 1992 。[39] M. Petkov˘sek 和 H. Zakraj˘sek。求解具有多项式系数的线性递推方程。载于 C. Schnei-der 和 J. Bl¨umlein 编，*Computer Algebra in Quantum Field Theory: Integration, Summation andSpecial Functions*，《符号计算丛书》，第 259–284 页。施普林格，2013年。[40] M. van Hoeij。有限奇点与线性递推方程的超几何解。*J. Pure Appl.* ，(-)：– *Algebra* 139 1 3 109 131, 1999 。[41] C. Schneider。差分域中的符号求和。技术报告 01-17，RISC-Linz，J. Kepler Univer-sity，2001 年 11 月。博士论文。[42] C. Schneider。 ΠΣ域中的乘积表示。 *Ann. Comb.*，9(1)：75–99，2005年。[43] C. Schneider。化简 ΠΣ扩˙张中的和。 *J. Algebra Appl.*，6(3)：415–441，2007年。[44] C. Schneider。符号求和助力组合学。*Sém. Lothar. Combin.*，56：1–36，2007年。文章 B56b。[45] C. Schneider。用于符号求和的精化差分域理论。*J. Symbolic Comput.*，43 644，2008 9 611 0808 2543 1 ( )：– 。arXiv：。v。[46] C. Schneider。参数化望远镜求和证明和的代数独立性。 *Ann. Comb.*，14 552，2010 533 0808 2596 2007：– 。arXiv：。；初步版本见 FPSAC。[47] C. Schneider。符号求和的结构定理。 *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*，21(1)：1– 32，2010年。[48] C. Schneider。通过符号求和方法寻找最优嵌套和表示。载于 A. Carey、D. Ell-wood、S. Paycha 和 S. Rosenberg 编，*Motives Quantum Field Theory and Pseudodifferential Oper-* ，，，*ators* 12 285 308 2010 0808 2543 *Clay Mathematics Proceedings*卷，第 – 页。美国数学学会，。arXiv：。。[49] C. Schneider。精简的差分环理论：不定嵌套和、交错符号与参数化望远镜问题。载于 F. Winkler、V. Negru、T. Ida、T. Jebelean、D. Petcu、S. Watt 和 D. Zaharie 编，*Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC) 2014 15th* ，第 *International Symposium* 26 33 2014 1412 2782 – 页。IEEE 计算机学会，。arXiv：。。[50] C. Schneider。差分域中精化参数化望远镜求和的快速算法。载于 M. W. J. Guitierrez、J. Schicho 编， *Computer Algebra and Polynomials*，《计算机科学讲义》（LNCS）第 8942 号，第 157–191 页。施普林格，2015年。arXiv:1307.7887。[51] C. Schneider。用于符号求和的差分环理论。*J. Symb. Comput.*，72：82–127，2016年。arXiv:1408.2776。[52] C. Schneider。求和理论 II：$R\Pi\Sigma$ 扩张 *J. Symb. Comput.* 80 3 616 664, 2017 1603 04285 的刻画及算法方面。，( )：– 。arXiv：。。[53] C. Schneider。单嵌套乘积的最小表示与代数关系。*Programming and Computer Software* 46 2 133 161, 2020 1911 04837 ，( )：– 。arXiv：。。

[54] C. Schneider。用于符号求和的项代数、规范表示与差分环理论。载于 J. Bl¨umlein 和 C. Schneider 编，
Anti-Differentiation and the Calculation of Feynman Amplitudes，《符号计算丛书》，第 423–485 页。施普林格，
2021年。arXiv:2102.01471 [cs.SC], RISC-Linz 报告系列第 21-03 号。[55] J. A. M. Vermaseren。调和和、梅林变换与
积分。 *Int. J. Mod. Phys.*，A14 2976，1999年 2037：– 。[56] D. Zeilberger。特殊函数恒等式的全纯系统方法。
J. Comput. Appl. Math.，32：321– 368，1990年。[57] D. Zeilberger。创造性望远镜求和法。
J. Symbolic Comput.，11：195–204，1991年。

Johannes Kepler University Linz, Research Institute for Symbolic Computation, A-4040 Linz,
Aus-tria*Email address*: Carsten.Schneider@risc.jku.at