arXiv:2302.03607v2 [math.GT] 2 Jul 2023

关于虚拟勒让德结与链环的猜想

Vladimir Chernov，Rustam Sadykov

Abstract. 我们提出了将一些已知结果推广到虚拟勒让德结范畴的猜想。其中包括关于虚拟勒让德结与普通勒让德结之间关系的论断、关于 ST^*M 的纤维这一类不存在正的虚拟勒让德自同痕的论断，以及关于虚拟勒让德同痕与广义时空中因果性之间猜想关系的论断。我们证明了二维 M 时空和（$2+1$）维时空情形下的这些猜想。我们还提出并证明了阿诺德四尖点猜想在虚拟同痕情形下的版本。

1. Main Results and Definitions

我们在光滑范畴中工作，所有映射和流形均假定为光滑的，“光滑”一词表示 C^∞. 。除非我们讨论链环，否则所有流形、链环和结均假定为定向且连通的。

接触流形 N^{2k+1} 是一个奇数维流形，配备了超平面分布 ξ，该分布在局部可表示为某个 1-形式 α 的核，且 $\alpha\wedge d\alpha^k$处处非零。 k维流形 L^k 若处处与接触结构的超平面相切，则称为勒让德流形；若处处不与接触超平面相切，则称为横截的。

接触流形的标准例子包括球面余切丛ST^*M 和一阶喷射空间 J^1M，它们具有自然的接触结构。注意，对 M 进行手术得到流形 M'，会诱导接触流形 $ST^*M\mapsto ST^*M'$的变化。

在 ST^*M 中的虚拟勒让德各向同性变形，是由勒让德同痕、由对远离勒让德子流形前投影处的 ST^*M 进行手术所诱导的勒让德子流形修改，以及由流形 M 的微分同胚所诱导的 ST^*M的接触同胚构成的序列。虚拟勒让德结由 Cahn 和 Levi 的工作 [10]引入。

如果附着把手的指标小于 M 维数的一半，则该虚拟勒让德同痕是次临界的；如果附着把手的指标不超过 M. 维数的一半，则该虚拟勒让德同痕是可允许的。特别是，不涉及删除把手的 [10] 虚拟勒让德同痕都是可允许的。我们提出的所有猜想都针对可允许的虚拟勒让德同痕。

注意，对 M 的手术会在 J^1M 上引发一种修改，而 J^1M 中的虚拟勒让德同痕，其定义方式与 ST^*M 上的虚拟勒让德同痕类似。类似地，也可以分别为 ST^*M 和 J^1M. 定义虚拟横截同痕。我们注意到，与 ST^*M 中的虚拟同痕不同，在虚拟

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 53C24；次要分类 53C50、57D15、83C75。*Key words and phrases.* 虚结、勒让德结、因果性、时空、链接、Low猜想、正勒让德同痕、非负勒让德同痕。

勒让德同痕的情形下，虚拟勒让德结到 M 的投影是余维 0 的。在这两种情形下，虚拟勒让德结的手术都是在 M 中相对于该虚拟勒让德结投影的补集上进行的。

经典虚结由 Kauffman [24] 提出，是加厚曲面中的普通结 $F \times \mathbb{R}$，并被视为在远离结（或链环）投影的 F 上进行手术所诱导的同痕与修改 $F \times \mathbb{R}$ 的一系列变换下的对象。结的高斯图是圆上的有向弦图。弦连接图示投影中双重点的原像，并从上股的原像指向下股的原像。弦还带有符号 ± 1，该符号就是相应图示交叉的缠绕数。Polyak 和 Viro [32] 指出，结的高斯图唯一确定了定义在 $S^2 \times \mathbb{R}$.上的结

高斯图可以视为在通常结的 Reidemeister 变换的形式化图示版本下的对象；然而，利用这些变换，很容易得到一个不对应于平面结图的高斯图，因此它是虚拟的。Carter、Kamada、Saito [11] 证明，取这些形式化 Reidemeister 变换下的等价类，形式高斯图所得的等价类与虚拟结的等价类相同。

众所周知，ST^*M到 M 中勒让德结的余定向前投影完全决定了该勒让德结。曲面上的此类前投影可以用类似于高斯图的图表来描述，弦上的符号表示交叉点类型和尖点类型。Cahn 和 Levi [10] 证明，这类曲面前投影的广义“高斯图”的等价类，与 ST^*M.中的虚拟勒让德结的等价类一致。

一个自然的问题是，类似的结果是否适用于 J^1M 中的虚拟勒让德结与链环，或者适用于 ST^*M，针对 M 中的闭或非闭高维流形。

2. Virtual Positive Legendrian Isotopy

回忆一下，Y_ℓ^x流形是黎曼流形（M，g），满足存在一点 $x \in M$ 和一个正数 $\ell > 0$，使得所有从 x 出发的单位速测地线都在时间 ℓ. 内返回 x。对于这类流形，ST^*M 中的余测地流会诱导一个正勒让德同痕，使 x 上方的球面纤维映到其自身。回忆一下，若在变形后的勒让德子流形的所有点及所有时刻，接触形式在所有速度向量上的取值均为正，则该勒让德同痕称为正勒让德同痕。非负勒让德同痕的定义类似。

Berard-Bergery [3], [7] 的经典结果表明，若 M 具有黎曼度量，使其成为一个 Y_ℓ^x流形，那么 M 的万有覆盖是紧致的（因此 M 的 π_1(M)有限），且其万有覆盖的有理上同调代数由一个元素生成。在第一作者和 Nemirovski 的工作中，我们证明了 [14, 15]：若 M 满足这样的条件，即存在 ST^*M 在 M 的某个点上方的纤维到其自身的非恒定非负勒让德同痕，那么 M 的万有覆盖是紧致的。因此，在这项工作中，我们猜想，若存在这样的非负勒让德同痕，则万有覆盖的有理上同调代数由一个元素生成。

Frauenfelder、Labrouse 和 Schlenk [20] 证明了关于正勒让德同痕的这一猜想的一个稍强版本。他们在形式上证明了比我们所猜想的更多的内容，并表明万有覆盖的整数上同调环与某个紧致秩一对称空间（CROSS）的整数上同调环相同，即它是一个球面或某个

定义在 $\mathbb{C}$、$\mathbb{H}$、$\mathbb{C}a.$ 上的射影空间之一。这尤其意味着，Berard-Bergery 定理和 Bott-Samelson 定理 [9], [7] 的结论相同。利用 Nemirovski 和第一作者 [16] 的结果，可以将 [20] 的结果推广到非负勒让德同痕：该结果指出，若存在非负勒让德同痕，则也存在正勒让德同痕，尽管这个正勒让德同痕并非通过变形该非负勒让德同痕获得，而是通过变形其某个幂获得。（关于在 M 可由 $\mathbb{R}^m.$ 中的一个开域覆盖的情形下，纤维到自身的正同痕，也可参见 Colin、Ferrand 和 Pushkar [19] 与 [14] 。）

目前，我们所知满足这些代数拓扑条件、但不与 CROSS 微分同胚的单连通空间只有异球面，参见 Besse [7]。因此，这一代数拓扑条件或许意味着该单连通流形与 CROSS 同胚。

我们将强虚拟勒让德同痕定义为这样的虚拟勒让德同痕：在此过程中，底流形 M 的万有覆盖始终不同胚于 CROSS。

现在，我们提出第一个猜想

2.1. 猜想。不存在将 ST^*M 的球面纤维映到其自身的强可容许正（或非恒定非负）虚拟勒让德同痕。

2.2. 注。如果允许所有正虚拟勒让德同痕，而不只允许可容许的同痕，那么类似的说法并不成立。为此，考虑曲面 M^2 上某一点的纤维到一个结的正勒让德同痕，该结的前投影是一个小的向外余定向圆 $K.$。令 K_- 和 K_+ 为以 K 为圆心、向外余定向的圆形前沿，其半径分别略小于和略大于 $K.$。现在进行一次一阶手术，使粘合柄的其中一个足为 $K_-.$ 所围成的圆盘。接着沿 $K_+.$ 进行一次二阶手术。由此得到一个小的向内余定向前投影，它显然可以通过正勒让德同痕变为球面纤维。因此，如果不要求虚拟勒让德同痕是可容许的，那么从 ST^*M 的纤维到其自身的正虚拟勒让德同痕确实存在。不过，为避免这种现象，或许只需禁止涉及指标大于 M^m 维数一半的把手的某些手术（例如指标为 m 的把手），而不必禁止所有此类手术。

2.3. 定理。猜想 2.1 的陈述在 M 为曲面的情况下成立。

证明。设 M 是一个闭曲面。反设 ST^*M 的某个球面纤维 K_0 允许通过允许的非负虚拟勒让德同伦与另一个纤维相连。我们可以假设曲面 M 是连通的，并且只考虑指标为 1 的手术，将其称为稳定化。于是，允许的非负虚拟勒让德同伦是对该曲面进行有限次稳定化和正勒让德同痕的复合。

令 M_k 表示由 M 经 k 次稳定化得到的曲面。假设稳定化次数为 n，且 n 是极小的，即不存在稳定化次数少于 n 次的、将 K_0 变为另一纤维的允许的非负虚拟勒让德同伦。于是，允许的非负勒让德同伦的一部分将 K_0 变为 ST^*M_{n-1} 中的一个勒让德结 K_{n-1}，它满足以下两个性质：

- 勒让德结 K_{n-1} 无法通过非负勒让德同痕变为 ST^*M_{n-1} 中的一个纤维，并且
- 存在从结 K_{n-1} 的稳定化 $K_n \subset ST^*M_n$到 ST^*M_n中某个纤维的非负勒让德同痕。

曲面 M_n 是从曲面 M_{n-1} 中移除两个圆盘 $2D$ 后得到的，这两个圆盘位于 $p(K_{n-1})$的补集中；其中 p 是 ST^*M_{n-1} 到 M_{n-1}的投影，并沿新形成的边界附加一个把手 $H = [-1,1] \times S^1$。令 C表示把手 H上的子午线 $\{0\} \times S^1$。存在一个无限覆盖 $\pi\colon M_n \setminus C \to M_n$，它在 $M_n \setminus H$上限制为恒等映射。由于结 K_n 同痕于 ST^*M_n中的一个纤维，它有一个提升 π^*K_n，成为 $\pi^*ST^*M_n$中的勒让德结。此外，从 K_n 到 ST^*M_n 中某个纤维的非负勒让德同痕，提升后成为从 π^*K_n 到 $\pi^*ST^*M_n$中某个纤维的非负勒让德同痕。

另一方面，空间 $\pi^*(ST^*M_n)$ 可以识别为 $M_n \setminus C$ 的球面余切丛，而后者又与 $M_n \setminus H \cong M_{n-1} \setminus 2D$ 的球面余切丛接触同构。此外，我们可以选取一个接触同胚 $\psi\colon \pi^*(ST^*M_n) \cong ST^*(M_{n-1} \setminus 2D)$，使其覆盖一个微分同胚 $M_n \setminus C \to M_{n-1} \setminus 2D$，该微分同胚在 M_n 中限制为将 H 的小邻域之补集映至 M_{n-1} 中$2D$ 的小邻域之补集的映射。特别地，接触同胚 ψ 将勒让德结 K_n映至勒让德结 K_{n-1}。于是，K_n 到 ST^*M_n 中某个纤维的非负勒让德同痕，提升为 K_{n-1} 到ST^*M_{n-1} 中某个纤维的非负勒让德同痕。

这与 n 的极小性矛盾。因此，猜想 2.1 对闭曲面成立。

假设曲面 M 是有限亏格的非紧致曲面。那么它是有限亏格闭曲面 M' 的一个开子流形。与上文一样，我们得到曲面 M'_{n-1} 和 M'_n，其中 M'_n 是由 M'_{n-1} 经一次 1 阶手术得到的。再次令 C 为附着把手的子午线。那么存在一个覆盖 $\pi'\colon M'_n \setminus C \to M'_n$。类似地，我们得到开子流形 $M_{n-1} \subset M'_{n-1}$ 和 $M_n \subset M'_n$。我们可以假设 $C \subset M_n$。于是，通过将映射 π' 限制到 $(\pi')^{-1}M_n$，可得到一个覆盖 $\pi\colon M'' \to M_n$。另一方面，曲面 M'' 可以视为 $M \setminus 2D$ 的一个子曲面，其中 $2D$ 是沿其附着 1-把手的两个圆盘的不交并。因此，ST^*M_n 中一个结的非负勒让德同痕，提升为 ST^*M_{n-1} 中相应结的非负勒让德同痕。

现在假设 M 具有无限亏格。那么，非负虚拟勒让德各向同性变形的迹包含在所有相应曲面的一个紧致部分中。因此，这种情况可以归结为 M 具有有限亏格的情况。□

2.4. 推论。设 M 是一个曲面，L 是 ST^*M 中的一个二分量勒让德链环，并且它允许通过强允许的虚拟勒让德各向同性变形成为一对球面纤维。那么，不存在将 L 的一个分量变为另一个分量的非负强允许虚拟勒让德各向同性变形。

证明。证明与定理 2.3 的证明类似。事实上，定理 2.3 证明中的论证表明，存在一个将 L 变为一对球面纤维的允许的虚拟勒让德同痕，意味着存在一个将 L 变为 ST^*M 中一对纤维的勒让德同痕。因此，存在一个 ST^*M 的接触同胚 c_1，它将 L 映到链环 L'，该链环由 ST^*M 中的两个球面纤维组成。

类似地，定理 2.3 证明中的论证表明，存在一个从 L 的一个分量到另一个分量的非负允许的虚拟勒让德同痕，意味着存在一个从 L 的一个分量到另一个分量、位于 ST^*M 中的非负勒让德同痕 φ_t 。于是， $c_1 \circ \varphi_t$ 是从 L' 中一个球面纤维到另一个球面纤维的非负勒让德同痕，也就是说，从纤维 F 到纤维 F'。

存在一个接触同胚 c_2 ，它从 ST^*M 映射到自身，将纤维 F 映射到 F'，并将 F' 映射到 F。于是， $c_2 \circ c_1 \circ \varphi_t$ 是一条非负勒让德同痕，将纤维 F' 映射到 F。

最后，非负勒让德同痕 $c_1 \circ \varphi_t$ 与 $c_2 \circ c_1 \circ \varphi_t$ 的复合是一条非恒定非负勒让德同痕，它从 ST^*M 的一个纤维映射到自身。因此， M 是一个球面，参见 [14]。然而，推论 2.4 讨论的是强可允许虚拟勒让德各向同性，因此 M 不可能是球面。由此可知，不存在将一个分量映射到另一个分量的非负强可允许虚拟勒让德各向同性。□

2.5. 猜想。我们猜想，对于 M^m、$m \geq 3$（其万有覆盖不同胚于 CROSS），以及 ST^*M 中的二分量勒让德链环 L，若其允许的虚拟勒让德同痕可将其变为一对纤维，则不存在将 L 的一个分量映射到另一个分量的非负强可允许虚拟勒让德各向同性。

3. Generalization of Kuperberg result to virtual Legendrian knots and links in higher dimensions

根据 Kuperberg 定理 [25],，如果两个普通虚结在 $M^2 \times \mathbb{R}$ 中虚同痕，那么它们都可以通过一系列同痕以及由对 M^2 进行手术所诱导的修改来简化；这些修改会降低其复杂度，直至两个结之间的关系由 $M^2 \times \mathbb{R}$ 的自同构所确定，而该自同构由 M^2. 的自同构诱导。我们在 [18] 中证明了 ST^*M^2 中虚拟勒让德结的类似结果，其中 M^2 是闭的。

特别地，我们得到了以下推论：如果 ST^*S^2 中的两个勒让德结虚勒让德同痕，那么它们就是勒让德同痕的。由于 S^2 的亏格无法进一步降低，这一结论立即成立。

对于高维虚拟勒让德结，目前尚不清楚哪些手术能够降低底流形的复杂度，甚至也不清楚这种复杂度究竟是什么。不过，下面我们将在本文中提出一个推广上述推论的猜想。

3.1. 猜想。 ST^*S^m 或 $ST^*\mathbb{C}P^n$ 中的两个勒让德链环是勒让德同痕的，当且仅当它们在虚意义下勒让德同痕。（第一作者关于球面的这一猜想最早发表于 [10]。）对于 J^1S^m 和 $J^1\mathbb{C}P^n$. 中的勒让德链环，也提出了同样的猜想。另一个值得探讨的问题是，对于 ST^*M 的纤维是否也存在类似的结论，其中 M 是一个 CROSS。

4. Virtual Legendrian isotopies and causality

Low [26, 27, 28, 29] 提出了一个猜想，将天空的拓扑链接与因果性联系起来。回想一下，天空是穿过一个点的光线球面，位于所有未来定向的无参数光线（零测地线）的接触流形中。回想一下，在时空中，如果两个点之间

以光速或更慢速度传播的信息能够从一个事件点到达另一个事件点，也就是说，如果这两个点之间存在一条因果（非类空）曲线，那么这两个点就是因果相关的。

Low 猜想针对整体双曲时空，这类时空被定义为不含闭合因果轨迹（时间旅行机器）的时空，并且假设任意两个点的因果未来与因果过去的交集是紧的（当一个旅行粒子在未穿过观察者视线的情况下从其可观测宇宙中消失时，不存在裸奇点）；参见 [6], 或 [23] ，以了解一种更传统且等价的定义。整体双曲时空构成了最重要且研究最为深入的时空类别，彭罗斯强宇宙审查猜想 [31] 的一个版本指出，所有具有物理意义的时空都是整体双曲的。（时空中位于黑洞内部的部分与我们无关，因为粒子无法逃离黑洞视界。）

Geroch [22] 证明了整体双曲时空同胚于$\Sigma \times \mathbb{R}$，而 Bernal-Sanchez [4, 5] 证明了它事实上微分同胚于 $\Sigma \times \mathbb{R}$，其中每个 $\Sigma \times t$ 都是一个类空柯西曲面，即一个余维一子流形，每条不可延拓的因果曲线都恰好与其相交于一点，并且洛伦兹度量在其上的限制是黎曼的。

正如 Low 所指出的，对于这类时空，所有未来定向的无参数光线（光测地线）构成的接触流形与 $ST^*\Sigma$接触同构，这对每个类空柯西曲面 Σ.都成立。

Low猜想针对 $(2+1)$ 维时空中的拓扑链接，且Σ 是一个开二维曲面。Natario 和 Tod [30]将这一猜想改写为针对 $(3+1)$ 维时空中勒让德链接的猜想，其中 Σ 与 $\mathbb{R}^3$ 同胚。第一作者和 Nemirovski [14, 15, 13] 的研究证明了所有这些猜想。目前已知，只要柯西曲面的万有覆盖非紧，或者虽为紧致但其整数上同调不同于某个 CROSS 的整数上同调，那么任意维整体双曲时空中的勒让德链接就等价于因果性。

Antoniou、Kauffman 和 Lambropolou [2] 提出，时空上 Morse 函数的奇点可以视为对应于黑洞形成或类似现象的奇异性。经典时空是时间定向洛伦兹流形。我们将这一概念推广如下：广义时空是配备双线性对称形式的流形。此外，我们假设它可以配备一个 Morse 函数，使得该形式在临界点之外限制为洛伦兹度量；我们还假设该 Morse 函数在临界点之外是类时函数，也就是说，Morse 函数梯度的流线的速度向量与其自身的点积为负。我们还假设 Morse 函数的非临界水平集是类空柯西曲面。此定义秉承了 Borde 等人 [8]和 Sorkin [33] 的 Morse 时空思想。（另请参阅 Garcia-Haveling [21] 关于 Morse 时空的一些最新进展。）

我们不完全认同 [2] 将类空流形上的手术解释为黑洞形成（因为穿过黑洞形成时，Morse 函数的水平集拓扑不一定发生变化）。不过，我们注意到，如果 Morse 函数 f 的临界点之间的广义时空片段是整体双曲的，并且临界点的指标

使得它们对应于水平集上的允许手术，那么，穿过一点的光线球面（将其视为 ST^*M 中的勒让德结；对于 M，它是 Morse 类时函数的非临界水平集所对应的类空水平集）在从较高水平集向较低水平集穿越临界层时，会经历一次允许的虚拟勒让德同痕。我们称这样的广义时空为允许的。

显然，因果性的定义对于这类广义时空仍然有意义，我们表述如下

4.1. 猜想。广义允许时空中的两个点存在因果相关，当且仅当穿过这两个点的光线球面的勒让德链环不同痕于 ST^*M_t 水平集流形 M_t中 ST^*M_t 的两个纤维的链环，且二者不强允许虚拟勒让德同痕。这些勒让德球面可以在 ST^*M_t 中考虑，其中 M_t 是 Morse 函数的非临界层。我们称这类链环为非平凡链环。

后面的链环对应于因果无关事件。（之所以必须考虑强可允许虚拟勒让德各向同性变形，而不是通常的虚拟勒让德各向同性变形，是因为当柯西曲面允许 Y_ℓ^x 黎曼度量 [14]时，勒让德链接并不等价于因果性。）

还要注意，如果这两个点位于同一条光线上，那么相应的光线球面链环会有一个双重点，因此是奇异的。我们也将这类奇异链环称为非平凡链环，前文所述的链环亦然。

4.2. 注（如何尝试证明上述猜想）。这个猜想与关于不存在将纤维映射到自身的可允许强非负非常值虚拟勒让德各向同性变形的猜想密切相关。这种联系与 Nemirovski 和第一作者的论文 [14] 中所述的联系类似。具体而言，在时空中以不超过光速的速度将一个点向过去输运（因果轨迹），会在所有光线构成的接触流形中诱导出该点所经过的所有光线球面的非负勒让德同痕；关于类时轨迹，见 [14]，关于因果轨迹，见 [17]。

给定流形 M 上的 Morse 函数 f 以及任意子集 $I \subset \mathbb{R}$，令 M_I 表示 M 的子集 $f^{-1}(I)$。为简化记号，在 $I = \{t\}$ 的情形下，我们将写作 M_t，而不写 $M_{\{t\}}$。

设 p 和 q 是广义时空 M 中的两个事件，并且该时空配备了一个 Morse 函数 f，此函数在临界点的补集上是类时的。假设 $f(p) < f(q)$。我们可以对函数 f 做微小扰动，使得两个事件 p 和 q 都属于函数 f 的正则水平集。令 $c_1 < \cdots < c_n$ 为区间 $[f(p)\ f(q)]$ 中的所有临界值。选取正则值 a_i，使得

$$f(p) = a_0 < c_1 < a_1 < c_2 < \cdots a_{n-1} < c_n < a_n = f(q).$$

我们注意到，流形 $M_{(c_i,c_{i+1})}$ 是整体双曲的，而 $M_{(c_i,c_{i+1})}$ 上所有光线的流形 L_i，对于任意 $a \in (c_i, c_{i+1})$，都可以通过水平集 M_a 的球面余切丛 ST^*M_a 进行规范参数化。这些参数化非常不同。例如，相对于一种规范参数化，余切丛的一个纤维并不是相对于另一种规范参数化的余切丛纤维。对于 $M_{[a_0,a_n]}$ 中的点 x，我们将从 x 发出的 L_i 中的光线球面记为 $S_i(x)$。

假设事件 p 和 q 因果无关。选取一条未来指向类时路径 q^t，其中 $t \in [a_0, a_n]$，使得 $f(q^t) = t$, $q^{a_n} = q$，且路径 q^t

不经过函数 f的临界点。当 t 在区间$[a_0, c_1)$内增大时，球面 $S_0(q^t)$在 L_0中经由勒让德同痕发生变化。类似地，当 t在 (c_i, c_{i+1})内增大时，对于 $i = 1, ..., n-1$，路径 q^t 定义了 $S_i(q^t)$ 在 L_i 中的勒让德同痕；而当 t 在 $(c_n, a_n]$ 内增大时，路径 q^t 定义了 $S_n(q^t)$在 L_n中的勒让德同痕。此外，当 t 在所考虑的区间内变化时，对于 $i = 0, ..., n$，光线球面$S_i(p)$在 L_i 中保持不变。

回顾一下，光线流形 L_i 与流形 $ST^*M_{a_i}$有典范的同一识别。特别地，M_{a_i} 的每个自微分同胚都会诱导出 $ST^*M_{a_i}$的一个接触同胚。还要回顾一下，ST^*N中结 K的一次初等虚 Legendrian 修改，由对 N 进行手术所诱导的 ST^*N修改构成；该手术发生在结 K 的前投影之外，并产生流形 N'。此外，还包括由 N'的自微分同胚所诱导的 ST^*N'的一个接触同胚。

因此，除去由水平集 $M_{a_{i+1}}$的微分同胚所诱导的 L_{i+1} 上的接触同胚这一差异，配对 $(\mathrm{L}_{i+1}, S_{i+1}(q^{a_{i+1}}))$ 可通过对 $(\mathrm{L}_i, S(q^{a_i}))$ 进行初等虚 Legendrian 修改得到。我们强调，在这一步中，我们并未将 $ST^*M_{a_{i+1}}$ 中的光线与 $ST^*M_{a_i}$中的光线识别起来。相反，我们利用与限制的 Morse 函数 $f|M_{[a_i,a_{i+1}]}$相关联的 $M_{[a_i,a_{i+1}]}$ 的把手分解，进行离散变换。每个把手对应一次初等虚 Legendrian 修改。在这种变换下，M_{a_i} 中附着球面邻域的补集与 $M_{a_{i+1}}$中腰带球面邻域的补集相识别。此识别可延拓为球面余切丛之间的识别。在此识别下，余切丛 $\mathrm{L}_{i+1} = ST^*M_{a_{i+1}}$ 的纤维 $S_{i+1}(q^{a_{i+1}})$与余切丛 $\mathrm{L}_i = ST^*M_{a_i}$的纤维 $S(q^{a_i})$相识别。

类似地，我们断言，当 t从 $c_{i+1} - \varepsilon$ 增至 $c_{i+1} + \varepsilon$ 并穿过 $i = 1$ 的临界层 c_i 时，.....，n，光线球面 $S_i(p)$ 可通过有限次初等虚 Legendrian 修改变为光线球面 $S_{i+1}(p)$。事实上，我们可以假设临界层 c_i 只包含一个临界点。然后，利用 f 的梯度流，可以将 $M_{c_{i+1}-\varepsilon}$ 中附着球面邻域的补集与 $M_{c_{i+1}+\varepsilon}$ 中腰带球面邻域的补集识别起来。上述识别可扩展为球面余切丛之间的识别 ψ 。在此识别下，$\mathrm{L}_{i+1} = ST^*M_{c_{i+1}+\varepsilon}$ 中的光线球面 $S_{i+1}(p)$ 可能与 $\mathrm{L}_i = ST^*M_{c_{i+1}-\varepsilon}$ 中球面 $S_i(p)$ 的像 $\psi(S_i(p))$ 不重合，因为在 ψ 的定义中，f 的梯度流轨迹是相当任意的类时轨迹，与光线锥并无太大关系。不过，这可以通过由 $M_{c_{i+1}+\varepsilon}$ 的自微分同胚所诱导的 L_{i+1} 的接触同胚来修正。

因此，我们构造出了光线球面 $S_0(p)$ 到球面 $S_n(p)$ 的虚拟勒让德各向同性变形，以及球面$S_0(q^0)$ 到 $S_n(q)$ 的虚拟勒让德各向同性变形。此外，对每个 i，p 在 L_i 中的光线球面与 q 在 L_i 中的光线球面不相交，否则，对于因果无关事件 p 和 q，就会存在一条从 p 到 q 的因果轨迹。因此，我们构造出了两个纤维的链环 $(S_0(p)\ S_0(q^0))$ 到链环 $(S_n(p)\ S_n(q))$ 的虚拟勒让德各向同性变形。反向的同痕是一种强可允许虚拟勒让德各向同性变形，可将链环变为两个纤维的链环。

为证明该猜想的逆命题，假设 p 和 q 因果相关。于是存在一条因果路径 q^t，满足 $q^0 = p$ 和 $q^n = q$。类似于上述论证可知，现在存在一个非平凡非负

勒让德同痕，将纤维 $S_n(q^n)$ 变为纤维 $S_0(q^0)$。事实上，当 t 沿过去方向在区间 $[a_0, c_1)$、(c_i, c_{i+1}) 或 $(c_n, a_n]$ 中变化时，球面$S_i(q^t)$ 会经过一个非平凡非负虚拟勒让德各向同性变形。当 t沿负方向经过临界点 c_{i+1} 时，球面 $S_{i+1}(q^t)$ 经有限次初等虚 Legendrian 修改变为球面 $S_i(q^t)$。我们强调，对于较小的 t ，我们从不考虑球面 $S_n(q^t)$，因为由于临界点的存在， q^t 的光线可能无法到达水平集 a_n 。当t小于 c_1时，球面 $S_0(q^t)$ 转变为 $\mathrm{L}_0 = ST^*M_{a_0}$ 中的纤维 $S_0(q^0)$。

接下来，我们将所得的从 $S_n(q^n)$ 到 $S_0(q^0)$ 的非平凡非负虚拟勒让德各向同性变形，与由 $S_0(p) = S_0(q^0)$ 到 $S_n(p)$ 的虚拟勒让德各向同性变形复合。后者由初等虚拟勒让德修改以及由底层流形的微分同胚诱导的余切丛接触同胚组成。所得的各向同性变形 φ 是链环（$S_n(p)$ $S_n(q)$ 在 L^n 中一个分量到另一个分量的非平凡非负虚拟勒让德各向同性变形。

现在，假设与猜想的陈述相反，尽管存在一条从 p 到 q 的因果路径，链环（$S_n(p)$ $S_n(q)$）仍是一个平凡链环；也就是说，存在一个 L^n 的接触同胚 ψ ，将链环（$S_n(p)$ $S_n(q)$）映射到由两条纤维组成的链环。于是， ψ 将 φ 映射为一个非负的非平凡勒让德各向同性变形，该变形将一条纤维映射到另一条纤维。

根据推论 2.4，这意味着该猜想对于 $2+1$ 维允许的广义时空成立。

对于更高维的允许的广义时空，只要猜想 2.5 成立，同样可以推出该猜想。

特别地，我们证明了以下定理

4.3. 定理。猜想 4.1 对于 $(2+1)$ 维广义允许时空成立。

4.4. 注。所提出的猜想 4.1 的证明方法，主要基于这样一个猜想：球面纤维 ST^*M 到自身不存在非负的允许虚拟勒让德同痕。允许的虚拟同痕禁止对 M 进行涉及粘合指标大于 M. 维数一半的把手的手术。然而，我们所知的唯一一个通常的非负非恒定虚拟勒让德同痕将纤维映到自身的例子，涉及指标等于 M. 维数的把手。因此，如果放宽允许的虚拟勒让德同痕的定义，仅禁止某些涉及指标大于 M^m 维数一半的把手的手术（例如指标为 m 的把手），而非禁止所有这类手术，那么这些猜想或许成立。

5. A few words about non-existence of the generalization of Arnold's 4-cusp conjecture

Arnold [1] 提出了以下猜想。考虑 $ST^*\mathbb{R}^2$ 中的两个勒让德结，它们是经过微扰的圆纤维，分别投影到向内和向外的余定向椭圆前沿上。那么，它们之间的每个一般位置勒让德同痕都会经过一个时刻，此时前投影有四个尖点。

Chekanov 和 Pushkar [12] 证明了这一猜想。

利用标准覆盖技术 $\mathbb{R}^2 \to F^2$ ，显然阿诺德猜想对除球面以外的所有曲面都成立。对于球面，余测地流将

北极周围的扩张圆映到南极周围的收缩圆。这种传播不涉及任何尖点，因此猜想的陈述将是错误的。

这个猜想对虚拟勒让德结也不成立。

事实上，考虑一个向外扩张的小圆形平面波前，并通过粘接一个把手在平面上进行指标 1 手术，其中一个把手足是位于该波前内部的圆盘。让波前沿把手略微传播，然后沿着位于波前上方的圆切开，以此进行逆手术。此时，波前呈现为一个收缩的圆，而整个过程中完全没有出现尖点。

然而，下面的定理成立。

5.1. 定理。设 K_1和 K_2分别是 $ST^*M_1^2$和 ST^*M_2中的两个勒让德结，对应于内侧和外侧的小圆形余定向波前。此外，假设 $M_i \neq S^2$。那么，从 K_1 到 K_2 的每个一般强可允许虚拟勒让德同痕过程中，都必定有某个时刻结的前投影至少有四个尖点。

证明。取一个从 K_1 到 K_2的强可允许虚拟勒让德各向同性变形。它由以下部分组成：

- 个初等勒让德修改，得到曲面 M_0、M_1、.....、M_n，
- 个接触同胚（为简化记号，此处略去），以及
- 个勒让德结的同痕 $\varphi_{(i)\,t}$，$t \in [0,1]_{\,(i)} \subset ST^*M_i$，满足 $K_{(0)} = K_1$、$\varphi_{(n)\,1}(K_{(n)}) = K_2$；此外还有如下性质：$K_{(i+1)}$ 是 $\varphi_{(i)}(K_{(i)})$ 的稳定化。

对于 $i = 1$、.....、n，流形 M_i 由 M_{i-1} 附加一个把手得到。令 $S_i \subset M_i$ 表示附加到 M_{i-1} 上的把手的子午线。

如定理 2.3 的证明中所述，我们注意到存在一个覆盖 $M_i \setminus S_i \to M_i$，且 $M_i \setminus S_i$ 可以视为 M_{i-1}的一个子集。因此，$M_i \setminus S_i$ 中一个结在 M_i 中的同痕可以提升为 M_{i-1}中的同痕。于是，从 $i = n$出发，按递减的 i归纳，我们可以将同痕族 φ_t^i 提升为从 K_1 到一个具有内部共定向圆形前投影的结的勒让德同痕。根据曲面的阿诺德猜想，我们推得，在所得勒让德同痕的某一时刻，该结的前投影至少有四个尖点。因此，对于虚拟可允许勒让德同痕，结论同样成立。□

致谢。作者感谢 Roman Golovko 提出了许多启发性问题，并衷心感谢匿名审稿人提出的诸多修改意见和建议。

本研究部分获得了西蒙斯基金会的资助（#513272，资助对象为 Vladimir Chernov）。

References

[1] V. I. Arnol´d, *Topological invariants of plane curves and caustics*,（大学讲座丛书，第 5 卷）美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州（1994）[2] S. Antoniou、Stathis、L. Kauffman、S. Lambropoulou: *Black holes and topological surgery.*《结理论及其分支》29（2020），第 10 期，2042010，6 页。[3] L. B´erard-Bergery, *Quelques exemples de variétés riemanniennes où toutes les géodésiques issues d'un point sont fermées et de même longueur suivis de quelques résultats sur leur* , 《格勒诺布 *topologie* **27** 1977 231 249 尔傅里叶研究所年刊》（），–。[4] A. Bernal、M. S´anchez, *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem*, 《数学物理通讯》243（2003），461–470。

[5] A. Bernal、M. S´anchez, *Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic space-times* **257** 2005 43 50 《数学物理通讯》（），–。[6] A. Bernal、M. S´anchez, *Globally hyperbolic spacetimes can be defined as "causal" instead of "strongly causal"* **24** 2007 745 750 《经典与量子引力》（），–。[7] A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, 附录由 D. B. A. Ep- stein、J.-P. Bourguignon、L. B´erard-Bergery、M. Berger 和 J. L. Kazdan 撰写。数学及其边界领域成果，93。施普林格出版社，柏林—纽约，1978。[8] A. Borde、H. F. Dowker、R. S. Garcia、R. D. Sorkin 和 S. Surya, *Causal continuity in degenerate spacetimes.* 16 11 3457 3481 1999 《经典与量子引力》，（）：–（）。[9] R. Bott、H. Samelson, *Applications of the theory of Morse to symmetric spaces*, 《美国数学杂志》, **80** 1958 964 1029（），第 — 页。P. Cahn、A. Levi: [10] *Vassiliev invariants of virtual Legendrian knots.* 《太平洋数学杂志》273（ 2015 1, 21 46），第 – 期。[11] J. S. Carter、S. Kamada、M. Saito, *Stable Equivalence of Knots on Surfaces and Virtual Knot Cobordisms* 11 2002 311 322 ，《结理论及其分支》（），第 – 页。[12] Yu. V. Cherkanov 和 P. E. Pushkar: *Combinatorics of fronts of Legendrian links and the Arnold 4-conjectures* 60 1 2005 95 149 ，《俄罗斯数学评论》：（）–，以及《数学科学进展》 60 1 2005 99 154：（）–。V. Chernov: [13] *Causality and Legendrian linking for higher dimensional spacetimes.* 《几何与物理杂志》 **133** 2018 26 29（），—。V. Chernov、S. Nemirovski: *Legendrian links causality and the Low conjecture.* 《几何与泛函分析》19（2010），第 5 期，1320—1333。[14] [15] V. Chernov、S. Nemirovski: *Non-negative Legendrian isotopy in ST*M.* 《几何拓扑学》14（ 2010 1, 611 626），第 — 期。V. Chernov、S. Nemirovski: *Universal orderability of Legendrian isotopy classes.* 《辛几何杂志》 **14** 2016 1, 149 170（），第 — 期。V. Chernov、S. Nemirovski: [16] [17] *Interval Topology in Contact Geometry*, 《当代数学通讯》 22 2020 1950042（）。V. Chernov、R. Sadykov: *Virtual Legendrian isotopy.* 《基础数学》234（2016），第 2 期，127—137[18] [19] V. Colin、Vincent、E. Ferrand、P. Pushkar, *Positive isotopies of Legendrian submanifolds and applications.* 2017, 20, 6231 6254 《国际数学研究通知》IMRN，第 – 期。[20] U. Frauenfelder、C. Labrousse、F. Schlenk, *Slow volume growth for Reeb flows on spherizations and contact Bott–Samelson theorems* **7** 2015 3, 407 451 ，《拓扑分析杂志》（），第 — 期。[21] L. Garc´ıa-Heveling, , 《*Topology change with Morse functions: progress on the Borde-Sorkin conjecture* 2202 09833 2022 arXiv》：。（）[22] R. P. Geroch, *Domain of dependence*, 《数学物理杂志》11（1970），437–449。[23] S. W. Hawking 和 G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* 《剑桥数学物理专著》，剑桥大学出版社（1973）。[24] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory.* 《欧洲组合数学杂志》20（1999），第 7 期，663—690。[25] *What is a virtual link?* **3** 2003 587 591 G. Kuperberg, 。[26] *Causal relations and spaces of null geodesics.* 《代数与几何拓扑》。（）–。R. J. Low: 博士论文，牛津大学（1988）。[27] R. J. Low: *Stable singularities of wave-fronts in general relativity*, 《数学物理杂志》39(6)，3332（1998）。[28] R. J. Low: *The Space of Null Geodesics.* 《第三届世界非线性分析学家大会论文集》第 5 部分（卡塔尼亚，2000）；《非线性分析》47(5)，3005（2001）。[29] R. J. Low: *The Space of Null Geodesics(and a New Causal Boundary).* 《物理学讲义》692（施普林格，贝林、海德堡、纽约，2006）。[30] J. Natario、P. Tod: *Linking Legendrian linking and causality.* 《伦敦数学学会会刊》（第 3 辑） **88** 2004 1, 251 272（），第 – 期。[31] R. Penrose, *The question of cosmic censorship*, 《黑洞与相对论恒星》（伊利诺伊州芝加哥，1996），第 103–122 页，芝加哥大学出版社，伊利诺伊州芝加哥，1998。[32] M. Polyak、M. O Viro, *Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants.* 《国际数学研究通知》1994 年，第 11 期，第 445–453 页[33] R. D. Sorkin, *Consequences of spacetime topology.* 载于《第三届加拿大广义相对论与相对论天体物理会议论文集》，第 137–163 页（1989）

V. Chernov, Mathematics Department, 6188 Kemeny, Dartmouth College, HanoverNH 03755, USA*Email address*: Vladimir.Chernov@dartmouth.eduR. Sadykov, Mathematics Department 138 Cardwell Hall 1228 N. Martin Luther King Jr. Dr. Manhattan, KS 66506–2602, USA*Email address*: Sadykov@math.ksu.edu