arXiv:2302.03612v1 [gr-qc] 7 Feb 2023

圈量子引力微分同胚不变希尔伯特空间的福克空间结构及其应用

Hanno Sahlmann [1], **Waleed Sherif** [2]
量子引力研究所，物理系，弗里德里希-亚历山大埃尔朗根-纽伦堡大学（FAU），Staudtstraße7，91058 埃尔朗根，德国

电子邮件： [1] hanno.sahlmann@gravity.fau.de， [2] waleed.sherif@gravity.fau.de

2023年2月7日

摘要。 圈量子引力（LQG）是一种基于量子场论原理和广义相对论广义协变性的引力量子化方案。圈量子引力的量子态描述时空空间切片上嵌入图中的引力激发。我们证明，在对微分同胚类作出某些假设的条件下，微分同胚不变态的空间具有福克空间结构。在这一结构中，单粒子激发由基于具有单个（相连）分支的图的微分同胚不变态担当。然而，这意味着微分同胚不变希尔伯特空间的大量结构仍未通过这一结构得到解释。我们展示了如何利用福克结构，在精确意义上将群场论的至少某些凝聚态写成圈量子引力的微分同胚不变相干态。我们还展示了如何利用这一福克结构构造其他有趣的态。最后，我们探究单粒子态和多粒子态的量子几何，并初步观察到它们分别与具有单个或多个分支的几何存在某种相似性。

1. 引言

一种完全成功且自洽的量子引力理论仍未出现。人们提出了多种理论 [1], ，各自取得的成果、观点和技术问题也各不相同。圈量子引力（LQG）是一种务实的引力量子化方案，基于量子场论（QFT）的原理以及广义相对论的广义协变性。它取得了一系列重要成果，并以坚实的数学基础为依托[2, 3, 4]。

圈量子引力的量子态与众不同，它描述的是基于嵌入时空空间切片中的图的引力激发。粗略地说，这些激发的交汇点（顶点）形成空间体积，而激发本身则是空间面积的通量管。在群场论（GFT）中，已有一种形式体系被

发展出来，其中顶点态是多粒子理论的单粒子态[5, 6], ，多粒子凝聚态则描述例如宇宙学 [7, 8, 9, 10]。群场论的态被组织在福克空间中，与圈量子引力的态非常相近，但仍存在一些细微的技术差异，主要涉及网络嵌入 [6, 11, 12, 13]。

沿着其他思路，也建立了与多粒子图景和福克空间的联系。已有研究表明，自由场论的福克空间可以纳入圈量子引力的数学框架 [14, 15, 16, 21], ，而最近的研究进一步表明 [17]。

此外，矢量约束 $\mathscr{H}^{\text{vtx}}$ [18]的希尔伯特空间中某些部分解 子空间，可以赋予福克空间的结构 [19, 20]。更准确地说，研究表明，可以将 $\mathscr{H}_{\text{顶点}}$ 分解为可分离子空间，其动机来自带有特定正则化的哈密顿约束作用。这些子空间定义在祖先图上；祖先图满足某些标准，并且其余图可以由此生成（详情见 [19, 20] ）。用多粒子系统的语言来说，在这种情况下所产生的“粒子”将是这些图的顶点处的局域激发，而该多粒子系统是定义在若干祖先图上的福克空间的直和。

最后，已有研究表明，采用圈量子引力的方法对标量场进行量子化时，微分同胚不变量希尔伯特空间 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 呈现为福克空间 [22]的形式。

在本文中，我们为圈量子引力的多粒子图景作出了贡献。我们证明，在对所采用的流形范畴作出某些假设的条件下，微分同胚不变态空间 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 具有福克空间结构。对于这一结构，单粒子激发由基于由一个单一分支‡组成的图的微分同胚不变态来扮演。基于多个不相连分支的态构成多粒子态。该结果在数学上是严谨的，并采用了 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ [23, 2]的精确定义。因此，所采用的流形范畴的确切性质与该结果相关。由于圈量子引力中采用了若干范畴（例如：解析[24, 23], 半解析 [25], 分层 [26], 光滑 [27, 28, 29]），我们选择基于若干假设展开分析，这些假设涉及微分同胚以局部方式实现图之间某些映射的能力。我们确信这些假设至少在半解析范畴中成立，但尚未给出形式化证明。

不过，我们应当强调，将福克结构建立在单分量图之上，必然会舍弃微分同胚不变量结构中的许多内容

‡ 需要提醒读者的是，我们所说的单分量图既包括 γ 零阶同伦群平凡的图 $\pi_0(\gamma)$ ，也包括彼此相连、但具有多个拓扑分量的图。

希尔伯特空间尚未解决。单个图分量的结构可能任意复杂，而我们不打算降低这种复杂性。在单个分量内部，应使用 [19, 20] 等方法进一步理解其结构。

我们证明，按照一种精确的意义，我们的结果使得至少某些有趣的群场论多粒子态可以写成圈量子引力的微分同胚不变态。我们还展示了如何利用新的福克结构构造其他有趣的态。 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 的定义中所用的群平均过程相当技术性，因此，能够更直接地呈现希尔伯特空间结构某些方面的结果是有益的。我们还通过考察空间流形的一般叶状结构及其量子几何性质，探究单粒子态和多粒子态的量子几何。通过将这些性质与经典黎曼流形中此类叶状结构的几何性质进行比较，我们收集到了一些证据，表明单分量图对应于单分量黎曼流形，而基于彼此不链接的多分量图的态则对应于具有多个分量的黎曼流形。

更具体地说，本文内容安排如下：在第2节中，我们明确推导福克空间 $\mathfrak{F}$ 与 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 之间的同构，之前先介绍一些必要的数学工具。我们采取务实的方式，首先通过定义常用的记号、术语和空间来搭建数学框架。接着，我们将图对称群 GS 在任意图上进行分解，并研究由此产生的子群结构的对称性以及其哈尔测度的分解。利用这些结果，我们将 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 上的微分同胚不变内积分解为其分支形式（即按照图中彼此无链接的分量数，将希尔伯特空间作直和分解）。随后，我们构造分支福克空间 $\mathfrak{F}$ ，并建立 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 与 $\mathfrak{F}$ 之间的显式同构。

第3节讨论定义在 $\mathfrak{F}$上的态的物理应用。我们首先证明，可以获得具有有趣性质的相干态，而使用圈量子引力的标准数学语言来获得这些态会相当困难，甚至不可能。随后，我们将所得结果与群场论量子引力方法中的研究工作联系起来 [5, 6], ，特别是与凝聚态相关的研究 [7, 8, 9, 10]。最后，我们通过对定义在 $\mathfrak{F}$上的一般态给出几何解释来作结。具体而言，我们介绍两个案例研究，对面积算符和体积算符这两个几何可观测量的候选者进行定性考察，从而探索使用这种福克结构所得到的几何。

2. 圈量子引力微分同胚不变希尔伯特空间的福克结构

在圈量子引力中，时空及其微分同胚的光滑性类别在某些技术发展中发挥着作用。人们已经针对这一类别提出了若干方案，例如：解析 [24, 23], 半解析 [25], 分层 [26], 光滑 [27, 28, 29]。在下文中，我们不采用某个特定类别，而是对微分同胚的类别作出一些假设（见下文的假设 1）。引力场的态包含位于空间超曲面中的一维激发 Σ。为避免涉及技术细节，我们假设在拓扑上 $\Sigma \simeq \mathbb{R}^3$。

我们介绍一些重要的概念和记号。下文中，我们用 Γ表示所有图的集合。此外，对于 $\gamma \in \Gamma$，我们用 $\mathrm{Comp}\,(\gamma)$ 表示非链接分量的集合。这里，所谓 γ的一个非链接分量，是指 γ 的一个或多个分支，它们与图的其余部分不相链接，但彼此相链接。如果能够找到一些微分同胚，使图的一部分保持不变，同时根据$\mathbb{R}^3$上的某个基准平直度量，将另一部分任意远地移开，我们就称图的这两部分互不链接。由 n 个非链接分量构成的所有图的集合记为

$$\Gamma_n := \{\gamma \in \Gamma || \mathrm{Comp}\,(\gamma)\,| = n \in \mathbb{N}_0\}\,. \tag{2.1}$$

现在我们引入定义 $\mathscr{H}_{\mathrm{diff}}$ 所需的记号。记 $\mathrm{Diff}_\gamma \subseteq \mathrm{Diff}_\Sigma$ 为将图 γ 映射到自身的微分同胚群。此外，记 TDiff_γ 为 γ 的平凡微分同胚群，它将其映射到自身，同时保持图的每条边 $e \in E(\gamma)$ 及其定向不变。最后，$\mathrm{GS}_\gamma = \mathrm{Diff}_\gamma/\mathrm{TDiff}_\gamma$ 表示 γ [2]的图对称群。

圈量子引力的态由沿图的边定义的 $\mathrm{SU}(2)$ 联络的平行移动 h 来表述。泛函 $f[A] \in \mathrm{Cyl}^\infty_\gamma$ 称为关于 γ 的光滑柱函数，当且仅当存在一个光滑函数 $f : \mathrm{SU}(2)^{|E(\gamma)|} \to \mathbb{C}$，使得$f[A] = f(h_{e_1}[A], \cdots, h_{e_{|E(\gamma)|}}[A])$ [24]。空间 $\mathrm{Cyl}^\infty_\gamma$ 关于哈尔测度 $d\mu^0_H$ [30] 具有自然的内积。相对于阿什特卡-莱万多夫斯基测度对其进行柯西完备化，可得到一个希尔伯特空间，记作 $\mathscr{H}'_\gamma$，它同构于一致测度空间 $L^2(\bar{\mathscr{A}}, d\mu^0_\gamma)$，其中 $\bar{\mathscr{A}}$ 是广义联络的紧豪斯多夫空间 [30]。因此，可以在所有图上构造一个希尔伯特空间 $\mathscr{H}$，使得

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathscr{H}'_\gamma. \tag{2.2}$$

这里，空间 $\mathscr{H}'_\gamma$ 是由定义在 γ 上的规范不变自旋网络张成的空间，并满足一些附加条件（没有平凡二价顶点，也没有平凡表示） [2]。由于内积使得

构造在任意两个不同图 $\gamma \in \Gamma_n$、 $\gamma' \in \Gamma_m$ 上，其中 $n \neq m$, n

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_n} \mathscr{H}'_\gamma =: \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}'_n. \tag{2.3}$$

为获得微分同胚不变希尔伯特空间，进而得到圈量子引力中微分同胚约束的解空间，需要相对于图的微分同胚对柱函数进行群平均。这分两步进行。首先，对于任意给定的图 γ，相对于 GSγ进行平均，从而将 $\mathscr{H}'_\gamma$中的元素投影到其在 GSγ作用下不变的子空间上。该投影可自然地扩展到所有图。接下来，我们相对于所有会移动该图的微分同胚进行平均。由于群 Diff_Σ 是非紧的，这会立即导致一个问题：这些态不再是可归一化的。因此，人们不再在柱函数的希尔伯特空间本身中处理，而是在其对偶空间中处理；并且利用配架映射 η，为每个 $\Psi_\gamma \in \mathscr{H}'_\gamma$ 赋予一个 $(\eta(\Psi_\gamma)| \in \mathrm{Cyl}^{\infty^\star}$ § 中的元素，并通过其在 $|\Phi_{\tilde{\gamma}}\rangle \in \mathrm{Cyl}^\infty$ 上的作用来定义它（详情见 [2, 3]）

$$(\eta(\Psi_\gamma)|\Phi_{\tilde{\gamma}}\rangle := \frac{1}{|\mathrm{GS}_\gamma|} \sum_{\varrho \in \mathrm{Diff}/\mathrm{Diff}_\gamma} \sum_{\varphi \in \mathrm{GS}_\gamma} \langle\, \varrho^* \varphi^* \Psi_\gamma \,,\, \Phi_{\tilde{\gamma}} \,\rangle_{\mathscr{H}}\,. \tag{2.4}$$

利用群平均映射 η ，现在可以通过定义将其像转化为希尔伯特空间

$$(\eta(\Psi)|\eta(\Phi)) = (\eta(\Psi)|\Phi\rangle\,. \tag{2.5}$$

由于具有不同分支的图永远不可能微分同胚，因此总的微分同胚不变希尔伯特空间为

$$\mathscr{H}_{\mathrm{diff}} := \eta(\mathscr{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \eta(\mathscr{H}'_n). \tag{2.6}$$

现在的目标是研究定义在 $\mathscr{H}_{\mathrm{diff}}$ 上的内积 (2.5)，并将其化简至最简形式。具体而言，我们从群平均过程入手。在此过程中，我们将研究某个$\gamma \in \Gamma_n$的图对称群 GSγ 的结构。首先构造一个群同态，记作 ρ，它定义在 GSγ与 S_n 之间，其中 S_n 是由 n 个元素组成的对称群。令 $I := \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ 为一个标记 Comp (γ)中各元素的指标集，也就是说，我们固定一个从 I 到 Comp (γ)的一一映射。

考虑 $[g] \in$ GSγ。由于每个 $g \in [g]$ 都是连续的，它必定将一个分支 $c_i \in$ Comp (γ) 映射到某个 $c_j \in$ Comp (γ)，同时允许其边发生置换和定向改变，其中 $i,\ j \in I$。因此，我们可以定义一个映射

$$\rho : \mathrm{GS}_\gamma \to \mathrm{S}_n, \qquad g(c_k) = c_{\rho([g])(k)}, \qquad g \in \mathrm{Diff}_\gamma, k \in I. \tag{2.7}$$

很容易看出， ρ 是一个群同态，

$$\rho([g_1 \circ g_2]) = \rho([g_1]) \circ \rho([g_2]). \tag{2.8}$$

§ 这里，$\mathrm{Cyl}^{\infty^\star}$ 是Cyl^∞ 的对偶空间：$= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{Cyl}^\infty_\gamma$

现在我们将利用这个映射，将图对称群分解为两个子群：一个由将图分量映射到其自身的对称组成，另一个由置换图分量的图对称组成。众所周知，

$$\mathrm{H}_\gamma := \ker \rho \equiv \{[g] \in \mathrm{GS}_\gamma \,|\, \rho([g]) = \mathbb{I}_{\mathrm{S}_n}\} \tag{2.9}$$

是 GS_γ 的正规子群，而像 $\rho(\mathsf{GS}_\gamma)$ 是一个与.....同构的群

$$\widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma := \mathrm{GS}_\gamma / \mathrm{H}_\gamma. \tag{2.10}$$

注意，对 γ 的分支重新标记，会使 ρ 通过与 S_n 中一个元素共轭而改变，但不会改变 ρ 的核，因此 H_γ 与这种标记方式无关，$\widetilde{\mathsf{GS}}_\gamma$ 也同样如此。利用这一分解，可以将对群元素的求和写成如下形式。

引理 2.1 (哈尔测度的分解)。群 GS_γ 的元素求和（即其哈尔测度）可以用 GS_γ 的等价类 $\widetilde{\ }$ 以及 H_γ 的元素表示为

$$\sum_{g \in \mathrm{GS}_\gamma} f(g) = \sum_{[g_i] \in \widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma} \sum_{h \in \mathrm{H}_\gamma} f(h g_i) \tag{2.11}$$

其中，$\{g_i\}$ 是一个代表元集合，每个等价类在 GS_γ 中各取一个代表元；f 是 GS_γ 上的任意函数。

证明。群 GS_γ 作为一个集合可分解为 $\mathsf{GS}_\gamma \times \mathsf{H}_\gamma$。$\mathsf{GS}_\gamma$ 中的共轭类可写为 $\mathsf{H}_\gamma g_1$，$\mathsf{H}_\gamma g_2$，..... 其中 $\{g_i\}$ 是一个代表元集合，每个等价类各取一个代表元。因此，根据这些代表元，任意 $g' \in \mathsf{GS}_\gamma$ 都可以写成 $g' = h g_i$，且所选代表元列表中恰有一个 g_i 满足这一条件。随后，h 被唯一确定为 $h = g'/g_i$。由此，可以对整个图上的图对称群元素求和，写为

$$\sum_{g \in \mathrm{GS}_\gamma} f(g) = \sum_{[g_i] \in \widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma} \sum_{h \in \mathrm{H}_\gamma} f(h g_i), \tag{2.12}$$

对于共轭类的任意一组代表元 $\{g_i\}$。 □

我们目前还无法十分具体地描述群 H_γ 和 GS_γ 的结构。它们的结构显然取决于 γ，也取决于群 Diff_γ 和 TDiff_γ，而后两者又取决于所采用的微分同胚范畴。为简化讨论，我们将对相关微分同胚群的规模作出一些假设。

假设 1. 对于任意彼此不相交、彼此无链接的 c、$c' \in \Gamma_1$、$\gamma \in \Gamma$，且c与c'彼此微分同胚：

A1. 存在一个微分同胚 $\varphi \in \mathsf{TDiff}_\gamma$，使得 φ 将 c 的边映射到 c' 的边上，允许定向相反；反过来也成立。我们稍微滥用记号，将其表示为

$$\varphi(c) = c', \qquad \varphi(c') = c. \tag{2.13}$$

对于任意 $\varphi \in \mathbf{Diff}_c$，我们都能找到 $\varphi' \in \mathbf{Diff}_{\gamma\cup c}$，使得

$$\varphi' \in \mathrm{TDiff}_\gamma, \qquad \varphi' \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{TDiff}_c. \tag{2.14}$$

追踪 γ 的哪些分支彼此微分同胚是有用的。这样便将 $\mathbf{Comp}\,(\gamma)$ 划分为

$$\mathrm{Comp}\,(\gamma) = r_1 \dot\cup r_2 \dot\cup \ldots \dot\cup r_k \tag{2.15}$$

其中，r_i 中的分支彼此微分同胚，但与 γ 中不属于 r_i 的任何分支都不微分同胚。于是有以下结果。

引理 2.2（GS 子群结构的对称性）。在假设*1*下，我们有

$$\mathrm{H}_\gamma \simeq \bigtimes_{c\in\mathrm{Comp}(\gamma)} \mathrm{GS}_c \qquad and \qquad \widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma \simeq \bigtimes_{i=1}^{k} \mathrm{S}_{|r_i|}. \tag{2.16}$$

证明。从 $g = [\varphi_1] \times \ldots \times [\varphi_k] \in \times_{i\in I} \mathbf{GS}_{c_i}$ 开始。利用假设 A2，对每个 φ_i，存在 $\varphi_i' \in \mathbf{TDiff}_{\gamma - c_i}$，使得

$$\varphi_i' \circ \varphi_i^{-1} \in \mathrm{TDiff}_{c_i}. \tag{2.17}$$

后者意味着 $[\varphi_i] = [\varphi_i']$，因此 $g = [\varphi_1'] \times \ldots \times [\varphi_k']$。于是，引理中的第一个同构可定义为

$$g \longmapsto [\varphi_1' \circ \ldots \circ \varphi_k']. \tag{2.18}$$

每个 φ_i' 只在相差 $\mathbf{TDiff}_\gamma$ 中元素的意义下确定，但这些元素不会改变右侧的等价类，因此该映射定义良好。它也是一个同态：对于 $\varphi_i' \in \mathbf{TDiff}_{\gamma-c_i}$ 和 $\xi_j' \in \mathbf{TDiff}_{\gamma-c_j}$，若 $i \neq j$，则有$[\varphi_i' \circ \xi_j'] = [\xi_j' \varphi_i']$，因此

$$\begin{aligned} [\varphi_1] \times \ldots \times [\varphi_k] \cdot [\xi_1] \times \ldots \times [\xi_k] \longmapsto & [\varphi_1' \circ \xi_1' \circ \ldots \circ \varphi_k' \circ \xi_k'] \\ & = [\varphi_1' \circ \ldots \circ \varphi_k' \circ \xi_1' \circ \ldots \circ \xi_k'] \\ & = [\varphi_1' \circ \ldots \circ \varphi_k'] \cdot [\xi_1' \circ \ldots \circ \xi_k']. \end{aligned} \tag{2.19}$$

至于第二个陈述，设 c_i, c_j 是 r_a 中的两个分支。由于它们微分同胚，根据假设 A1，存在一个微分同胚 $\varphi_{ij} \in \mathbf{TDiff}_{\gamma-\{c_i,c_j\}}$，它将 c_i 与 c_j 互换。因此我们定义一个映射

$$\widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma \ni [\varphi_{ij}] \longmapsto T_{ij} \in \mathrm{S}_{|r_i|}. \tag{2.20}$$

这是良定义的：如果用 H_γ 中的一个元素修改 φ，它仍会交换 c_i 和 c_j。很容易验证映射 (2.20) 保持乘积，因此它是一个同态。此外，由于 A1 保证任意两个微分同胚分量之间都存在一个映射，(2.20) 的像包含所有对换，因此它扩展为一个满射。它也是单射：如果 c_i 和 c_j 以两种不等价的方式微分同胚，可以很快看出，H_γ 中存在一个诱导的图对称性，能够将二者关联起来，$\widetilde{\ }$因此它们实际上对应于 $\mathbf{GS}_\gamma$ 中的同一个元素。上述论证可以从一组 r_a 分支推广到所有分支，由此证明了该断言。

□

现在我们已经证明，对于某个图 γ，其图对称群 GS_γ 可以用上述引理中所示的两个群来描述。这简化了对群平均过程的详细研究。

现在，我们将用 n 图分量来刻画 $\mathscr{H}'_n$ 上的微分同胚不变内积。这样做不失一般性，因为具有不同 n的扇区彼此正交，见式（2.3）。因此，我们考虑两个柱函数Ψ 和 $\Psi' \in \mathscr{H}'_\gamma$。我们可以将其展开为各分量 $c_i \in \mathrm{Comp}\,(\gamma)$上的广义自旋网络函数 $\mathcal{S}_i^{I_i}$的乘积:

$$\Psi = \sum_{I_1,\cdots,I_n} c_{I_1,\cdots,I_n} \mathcal{S}_1^{I_1}[A]\cdots\mathcal{S}_n^{I_n}[A], \qquad \Psi' = \sum_{I_1,\cdots,I_n} c'_{I_1,\cdots,I_n} \mathcal{S}_1^{I_1}[A]\cdots\mathcal{S}_n^{I_n}[A]. \quad (2.21)$$

这里，指标 I 表示对 $\mathscr{H}'_{c_i}$和 $n = |\mathrm{Comp}\,(\gamma)\,|$中的广义自旋网络求和。对于微分同胚不变内积，我们有

引理2.3（ $\mathscr{H}_{\mathrm{diff}}$上的内积分量分解）。 与 $\eta(\Psi'_\gamma)$在 $\mathscr{H}_{\mathrm{diff}}$ 上的内积可写为

$$(\eta(\Psi),\eta(\Psi')) = \frac{1}{|\widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma|} \sum_{\tilde\zeta\in\widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma} \sum_{\{I\},\{I'\}} \overline{c_{\rho(\tilde\zeta)(I_1)\ldots\rho(\tilde\zeta)(I_n)}} c_{\{I'\}} \prod_k^n \left(\eta(\mathcal{S}_k^{I_k}),\eta(\mathcal{S}_k^{I'_k})\right) \quad (2.22)$$

其中， $k\in\{1、\cdots、n\}$和 I是自旋网络标记。

Proof. 根据定义，微分同胚不变内积的形式为

$$(\eta(\Psi),\eta(\Psi')) = \frac{1}{|\mathrm{GS}_\gamma|} \sum_{\varphi\in\mathrm{Diff}/\mathrm{Diff}_\gamma} \sum_{\zeta\in\mathrm{GS}_\gamma} \langle \varphi^*\zeta^*\Psi,\Psi'\rangle\,. \quad (2.23)$$

根据引理 2.1，对图对称性的平均可以按照式 (2.11) 拆分，因此

$$(\eta(\Psi),\eta(\Psi')) = \frac{1}{|\widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma|} \sum_{\varphi\in\mathrm{Diff}/\mathrm{Diff}_\gamma} \sum_{\tilde\zeta\in\widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma} \left(\prod_i^n \frac{1}{|\mathrm{GS}_{c_i}|}\right) \sum_{\zeta^{(i)}\in\mathrm{H}_{c_i}} \times \quad (2.24)$$
$$\times \left\langle \varphi^*\tilde\zeta^* \left(\prod_i^n \zeta^{(i)*}\right)\Psi,\Psi' \right\rangle.$$

由于运动学内积中的两个函数都定义在同一图上，因此只有当 φ 属于以下微分同胚的等价类时，才会得到非零贡献:

恒等微分同胚。我们进一步发现

$$\left\langle \widetilde{\zeta}^* \left(\prod_i^n \zeta^{(i)*} \right) \Psi, \Psi' \right\rangle = \sum_{\{I\},\{I'\}} \overline{c_{\{I\}}} c_{\{I'\}} \left\langle \widetilde{\zeta}^* \left(\prod_i^n \zeta^{(i)*} \right) \prod_{k=1}^n \mathcal{S}_k^{I_k}, \prod_{j=1}^n \mathcal{S}_j^{I'_j} \right\rangle \tag{2.25}$$

$$= \sum_{\{I\},\{I'\}} \overline{c_{\{I\}}} c_{\{I'\}} \left\langle \widetilde{\zeta}^* \prod_{k=1}^n \zeta^{(k)*} \mathcal{S}_k^{I_k}, \prod_{j=1}^n \mathcal{S}_j^{I'_j} \right\rangle \tag{2.26}$$

$$= \sum_{\{I\},\{I'\}} \overline{c_{\{I\}}} c_{\{I'\}} \left\langle \prod_{k=1}^n \left(\zeta^{\rho(\widetilde{\zeta})(k)} \right)^* \mathcal{S}^{I_k}_{\rho(\widetilde{\zeta})(k)}, \prod_{j=1}^n \mathcal{S}_j^{I'_j} \right\rangle \tag{2.27}$$

$$= \sum_{\{I\},\{I'\}} \overline{c_{\rho(\widetilde{\zeta})(I)}} c_{\{I'\}} \left\langle \prod_{k=1}^n \zeta^{(k)*} \mathcal{S}_k^{I_k}, \prod_{j=1}^n \mathcal{S}_j^{I'_j} \right\rangle \tag{2.28}$$

$$= \sum_{\{I\},\{I'\}} \overline{c_{\rho(\widetilde{\zeta})(I)}} c_{\{I'\}} \prod_{k=1}^n \left\langle \zeta^{(k)*} \mathcal{S}_k^{I_k}, \mathcal{S}_k^{I'_k} \right\rangle, \tag{2.29}$$

其中我们引入了简写

$$\rho(\widetilde{\zeta})(I) \equiv \rho(\widetilde{\zeta})(I_1 \dots I_n) := (I_{\rho(\widetilde{\zeta})(1)} \dots I_{\rho(\widetilde{\zeta})(n)}) \tag{2.30}$$

~表示置换 $\rho(\zeta)$对自旋网络系数指标的重排作用。因此，我们可以将 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 上的内积写为

$$(\eta(\Psi), \eta(\Psi')) = \frac{1}{|\widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma|} \sum_{\varphi \in \mathrm{Diff}/\mathrm{Diff}_\gamma} \sum_{\widetilde{\zeta} \in \widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma} \sum_{\{I\},\{I'\}} \overline{c_{\rho(\widetilde{\zeta})(I)}} c_{\{I'\}} \prod_{k=1}^n \frac{1}{|\mathrm{GS}_{c_k}|} \times \times \sum_{\zeta^{(k)} \in \mathrm{H}_{c_k}} \left\langle \varphi^* \zeta^{(k)*} \mathcal{S}_k^{I_k}, \mathcal{S}_k^{I'_k} \right\rangle \tag{2.31}$$

$$= \frac{1}{|\widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma|} \sum_{\widetilde{\zeta} \in \widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma} \sum_{\{I\},\{I'\}} \overline{c_{\rho(\widetilde{\zeta})(I)}} c_{\{I'\}} \prod_{k=1}^n \left(\eta(\mathcal{S}_k^{I_k}), \eta(\mathcal{S}_k^{I'_k}) \right). \tag{2.32}$$

□

现在我们可以将这一结果稍作推广：对于不与 $\gamma \in \Gamma_n$ 微分同胚的 $\gamma' \in \Gamma_n$ 和$\Psi_\gamma \in \mathscr{H}'_\gamma$，$\Psi'_{\gamma'} \in \mathscr{H}'_{\gamma'}$ 我们有

$$\left(\eta(\Psi_\gamma), \eta(\Psi'_{\gamma'}) \right) = 0 \tag{2.33}$$

这是(2.4)、(2.5)的直接推论。由于 η 在微分同胚作用下保持不变，因此，微分同胚但不相等的 γ，γ' 的情形可化归为 $\gamma = \gamma'$的情形。由此我们可以给出以下推广。

推论1. 对于 γ、$\gamma' \in \Gamma_n$和 $\Psi_\gamma \in \mathscr{H}'_\gamma$、$\Psi'_{\gamma'} \in \mathscr{H}'_{\gamma'}$，我们有

$$\left(\eta(\Psi_\gamma), \eta(\Psi'_{\gamma'}) \right) = \frac{1}{|\widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma|} \sum_{\widetilde{\zeta} \in \widetilde{\mathrm{GS}}_\gamma} \sum_{\{I\},\{I'\}} \overline{c_{\rho(\widetilde{\zeta})(I)}} c_{\{I'\}} \prod_{k=1,j=1}^n \left(\eta(\mathcal{S}_k^{I_k}), \eta(\widetilde{\mathcal{S}}_j^{I'_j}) \right). \tag{2.34}$$

~其中，$\mathcal{S}$ 是$\mathscr{H}'_{\gamma'}$ 的基，类似于 $\mathscr{H}'_\gamma$的 $\mathcal{S}$ 。

因此，微分同胚不变内积呈现出一种显著的结构，仿佛存在一个关于图分量的底层张量积，以及对微分同胚分量的对称化。因此，我们不禁想尝试看看能否确实构造出一个同构的福克空间。为此，我们考虑 $\eta(\mathscr{H}_1')$上的对称福克空间：

$$\mathfrak{F} := \mathscr{F}_{\mathrm{S}}[\eta(\mathscr{H}_1')]. \tag{2.35}$$

我们将这个空间称为分支福克空间。考虑 n粒子态。我们固定n 个单分量图 c_k、$k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$，以及 $\mathscr{H}_{c_k}'$的自旋网基 $\{\mathcal{S}_k^I\}_I$。给定单分量图上的自旋网络基，我们可以将基于 c_k、$k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$ 的 n粒子态展开为

$$|\mathfrak{f}) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n}\sum_{\{I\}}\mathfrak{f}_{\{I\}}\bigotimes_{l=1}^{n}\left|\eta(\mathcal{S}_{\gamma_{\sigma(l)}}^{I_{\sigma(l)}})\right\rangle \tag{2.36}$$

其中 $\mathfrak{f}_{\{I\}} \in \mathbb{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 是与之前相同的归一化广义自旋网络函数。为便于记账，我们将分支 $\{c_k\}$ 划分为若干微分同胚分量的集合，并用 m_l表示 l^{th} 个集合的大小。我们有

$$\sum_{k=1}^{N} m_k = n, \tag{2.37}$$

其中 N 是该划分中不相交集合的总数。我们用 S_n^p 表示对称群 S_n 中保持给定划分不变的子群。它确实是一个子群，并且我们可以用其共轭类来表示对置换的求和，

$$\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} f(\sigma) = \sum_{[\pi]\in \mathrm{S}_n/\mathrm{S}_n^p}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n^p} f(\sigma\circ\pi). \tag{2.38}$$

n粒子态 (2.36) 因而具有如下形式

$$|\mathfrak{f}) = \frac{1}{|\mathrm{S}_n^p|}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{[\pi]\in \mathrm{S}_n/\mathrm{S}_n^p}\sum_{\{I\}}\mathfrak{f}_{\{I\}}\bigotimes_{l=1}^{n}\left|\eta(\mathcal{S}_{c_{\pi(l)}}^{I_{\sigma\circ\pi(l)}})\right\rangle, \tag{2.39}$$

其中 $|\mathsf{S}_n^p| = m_1!\ \ldots m_N!$，且 $|\mathsf{S}_n| = n!$。此外，可以通过置换 σ 对分支$\mathfrak{f}_{\{I\}}$ 进行对称化，因此，在这样的基中展开的态最终可以写成

$$|\mathfrak{f}) = \frac{1}{|\mathrm{S}_n^p|}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{[\pi]\in \mathrm{S}_n/\mathrm{S}_n^p}\sum_{\{I\}}\mathfrak{f}_{\{\sigma I\}}\bigotimes_{l=1}^{n}\left|\eta(\mathcal{S}_{c_{\pi(l)}}^{I_{\pi(l)}})\right\rangle, \tag{2.40}$$

其中 $\sigma I \equiv \sigma(I_1, I_2, \ldots) := I_{\sigma(1)}, I_{\sigma(2)}, \ldots$。现在我们相应地展开 $\mathfrak{F}$的内积，并证明其形式与引理2.3中的形式非常相似。

引理2.4 （$\mathfrak{F}$上的内积）。设 $\mathfrak{F}$ 如上，并设 $|\mathfrak{f})$、$|\mathfrak{f}')$ n分别为 $\mathfrak{F}$ 中形如（2.36）、定义在单分量图 c_1、$\ldots c_n$ 上的粒子态，而 n'、$\ldots c_{n'}'$为定义在单分量图 c_1'、$\ldots c_{n'}'$上的粒子态。则

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = 0 \tag{2.41}$$

如果 $n \neq n'$ 或 $\{[c_k]\} \neq \{[c'_k]\}$，其中 $[\,\cdot\,]$ 表示微分同胚等价类，并且

$$(\mathfrak{f}\,,\mathfrak{f}')=\frac{1}{|\mathrm{S}_n^p|}\sum_{\pi\in\mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{\{I\},\{I'\}}\bar{\mathfrak{f}}_{\{\pi I\}}\mathfrak{f}'_{\{I'\}}\prod_{l=1}^{n}\left(\eta(\mathcal{S}_{c_l}^{I_l}),\eta(\mathcal{S}_{c'_l}^{I'_l})\right) \tag{2.42}$$

否则。

证明。对于任意福克空间，粒子数不同的态彼此正交；对于形如 (2.36) 的态，若每个求和项中有一个构成该项的单分量态与另一项所包含的所有单粒子态正交，这些态也彼此正交。当 $\{[c_k]\} \neq \{[c'_k]\}$ 时，情况正是如此，因此我们证明了引理的第一部分。下文假设 $n = n'$ 且 $\{[c_k]\} = \{[c'_k]\}$。因此，通过重新标记，不失一般性地可假设 $[c_k] = [c'_k]$；又由于单粒子内积具有微分同胚不变性，对于 $k = 1, \ldots, n$，有 $c_k = c'_k$。然后，利用 (2.40)，

$$\begin{aligned}(\mathfrak{f}\,,\mathfrak{f}')=\frac{1}{|\mathrm{S}_n^p|}\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{[\pi]\in\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_n^p}\frac{1}{|\mathrm{S}_n^p|}\sum_{\sigma'\in\mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{[\pi']\in\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_n^p}\sum_{\{I\},\{I'\}}\bar{\mathfrak{f}}_{\{\sigma I\}}\mathfrak{f}'_{\{\sigma' I'\}}\times\\ \times\prod_{l=1}^{n}\left(\eta(\mathcal{S}_{c_{\pi(l)}}^{I_{\pi(l)}}),\eta(\mathcal{S}_{c_{\pi'(l)}}^{I'_{\pi'(l)}})\right).\end{aligned} \tag{2.43}$$

注意，只有当 $[\pi] = [\pi']$ 时，自旋网络的乘积才非零。这意味着

$$\pi'\circ\pi^{-1}\in\mathrm{S}_n^p \tag{2.44}$$

因此，对任意 l，$\gamma_{\pi(l)}$ 与 $\gamma_{\pi'(l)}$ 微分同胚。由此，求和式 $\sum_{[\tilde{\pi}']\in\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_n^p}$ 中只剩下一项，以及前因子 $|\mathrm{S}_n^p|/|\mathrm{S}_n|$。最后，作用于系数 $\mathfrak{f}$ 和 $\mathfrak{g}$ 的对称化投影只需施加于其中一者，因此内积可简化为

$$(\mathfrak{f}\,,\mathfrak{f}')=\frac{1}{|\mathrm{S}_n^p|}\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{[\pi]\in\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{\{I\},\{I'\}}\bar{\mathfrak{f}}_{\{\pi I\}}\mathfrak{g}_{\{I'\}}\prod_{l=1}^{n}\left(\eta(\mathcal{S}_{\gamma_{\tilde{\pi}(l)}}^{I_{\tilde{\pi}(l)}}),\eta(\mathcal{S}_{\gamma_{\tilde{\pi}(l)}}^{I'_{\tilde{\pi}(l)}})\right), \tag{2.45}$$

$$=\frac{1}{|\mathrm{S}_n^p|}\sum_{\pi\in\mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{[\tilde{\pi}]\in\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{\{I\},\{I'\}}\bar{\mathfrak{f}}_{\{\pi I\}}\mathfrak{g}_{\{I'\}}\prod_{l=1}^{n}\left(\eta(\mathcal{S}_{\gamma_{\tilde{\pi}(l)}}^{I_{\tilde{\pi}(l)}}),\eta(\mathcal{S}_{\gamma_{\tilde{\pi}(l)}}^{I'_{\tilde{\pi}(l)}})\right)\delta_{I_{\tilde{\pi}(l)},I'_{\tilde{\pi}(l)}}, \tag{2.46}$$

$$=\frac{1}{|\mathrm{S}_n^p|}\sum_{\pi\in\mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{[\tilde{\pi}]\in\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{\{I\},\{I'\}}\bar{\mathfrak{f}}_{\{\pi I\}}\mathfrak{g}_{\{I'\}}\prod_{l=1}^{n}\left(\eta(\mathcal{S}_{\gamma_l}^{I_l}),\eta(\mathcal{S}_{\gamma_l}^{I'_l})\right), \tag{2.47}$$

$$=\frac{1}{|\mathrm{S}_n^p|}\sum_{\pi\in\mathrm{S}_n^p}\frac{|\mathrm{S}_n^p|}{|\mathrm{S}_n|}\sum_{\{I\},\{I'\}}\bar{\mathfrak{f}}_{\{\pi I\}}\mathfrak{g}_{\{I'\}}\prod_{l=1}^{n}\left(\eta(\mathcal{S}_{\gamma_l}^{I_l}),\eta(\mathcal{S}_{\gamma_l}^{I'_l})\right), \tag{2.48}$$

它是图的各个分支上的自旋网络的 n重乘积。注意，在第二行中，剩下的非平凡项仅为自旋网络指标全部相同的项，

这些项的自旋网络指标均相同。因此，由于指标全部匹配，下一行中指标上的置换 $\tilde{\pi}$ 被省略；结果，对置换 $[\tilde{\pi}] \in \mathrm{S}_n/\mathrm{S}_n^p$ 求和恰好等于群的阶，于是得到最后一行。

□

在上述引理中，我们证明了由单分支图的希尔伯特空间构造出的福克空间 $\mathfrak{F}$ 带有一种内积，该内积与在 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$上得到的内积非常相似。因此，在下面的定理中，我们将构造这两个空间之间的一个显式同构。

定理 2.5（$\mathfrak{F}$ 与 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$之间的同构）。考虑映射

$$\mathfrak{T} : |\eta(\Psi_\gamma)) \longmapsto \frac{c_\gamma}{n!} \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \sum_{\{I\}} \psi_{\{I\}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left|\eta(\mathcal{S}_{\gamma_{\sigma(l)}}^{I_{\sigma(l)}})\right), \qquad c_\gamma = \sqrt{\frac{n!}{m_1! \cdots m_k!}} \tag{2.49}$$

其中，γ 是一个具有 n 个非链接分量 γ_1、$\ldots \gamma_n$的图，这些分量中，大小为m_1、m_2、**...**、m_k 的子集分别彼此微分同胚，但与其余分量不同。$p = (m_1$、m_2、**.....**、$m_k)$被视为 n的一个划分，而 S_n^p 是固定 p的置换子群。此外

$$\Psi = \sum_I \psi_{\{I\}} \prod_{l=1}^{n} \mathcal{S}_{\gamma_l}^{I_l}. \tag{2.50}$$

是 $\mathscr{H}_\gamma'$中的一个柱函数。那么 $\mathfrak{T}$

- 是从 $\mathscr{H}_\gamma'$ 到 $\mathfrak{F} = \mathscr{F}_S[\eta(\mathscr{H}_1')]$的良定义映射，• 是一个部分等距，• 线性延拓为一个酉映射 $\mathscr{H}_{\text{diff}} \to \mathfrak{F}$。

证明。首先，我们必须证明 $\mathfrak{T}$ 是定义良好的。为此，注意到根据引理2.3，与 $\eta(\Psi_\gamma)$ 的内积——因而 $\eta(\Psi_\gamma)$ 本身——可表示为

- 微分同胚等价类列表 $[\gamma_1]$，**.....**，$[\gamma_n]$•与群平均自旋网络 $\Psi_{I_1,\ldots,I_n}$ 相对应的系数，并具有如下对称性质

$$\Psi_{I_1,I_2,\ldots I_n} = \Psi_{I_{\pi(1)},I_{\pi(2)},\ldots,I_{\pi(n)}}, \qquad \pi \in \mathrm{S}_n^p, \tag{2.51}$$

以及由于对 $\mathrm{H}\gamma$进行平均而施加于 $\Psi_{\{I\}}$ 上的对称性，即由各分支的图对称性生成的对称性（见引理 2.1）。我们可以将其写成

$$\Psi_{I_1,I_2,\ldots I_n} = \Psi_{\sigma_1(I_1),\sigma_2(I_2),\ldots,\sigma_n(I_n)}, \tag{2.52}$$

其中，$\sigma_i = \sigma_i(\varphi)$，$\varphi \in \mathrm{H}\gamma$ 对应于边标签的置换。

这组数据的指定方式是唯一的，但图分量和边的顺序可以重新排列：对这组数据做任何其他改动都会改变内积，进而改变态。尽管如此，$\mathfrak{T}$ 仍然是良定义的，因为像态只取决于

上文列出的数据，而且它对这些数据的依赖方式使得重新排列图分量的顺序不会改变像。边的顺序甚至不会被明确使用。

接下来需要证明 $\mathfrak{T}$是部分等距的。由 (2.49) 中的前置因子c_γ 以及引理 2.3、2.4 可保证这一点，简单计算即可验证。

最后我们证明 $\mathfrak{T}$ 可扩展为酉映射 $\mathscr{H}_{\text{diff}} \to \mathfrak{F}$。首先注意，根据定义， n粒子扇区中的所有态都是形如 (2.36) 的态的线性组合。后者可简化为 (2.40)，因此它们恰好由一列非链接分量的微分同胚等价类 $[\gamma_1]$，$\ldots$，$[\gamma_n]$ 以及具有对称性质 (2.51)、(2.52) 的系数 $\mathfrak{f}_{\{\sigma I\}}$ 描述。因此映射

$$\mathfrak{T} : \eta(\mathscr{H}_n') \longrightarrow \mathrm{Sym} \bigotimes_{k=1}^{n} \eta(\mathscr{H}_1'), \tag{2.53}$$

其中 Sym 表示张量积的对称化，该映射是满射，因此是酉映射。最后，我们再次通过线性延拓到具有不同 n 的扇区，从而延拓到整个 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$。所得映射显然是满射。具有不同 n 的扇区彼此正交，无论是在 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 中还是在 $\mathfrak{F}$中。因此，延拓后的映射仍保持内积，故$\mathfrak{T} : \mathscr{H}_{\text{diff}} \to \mathfrak{F}$ 是酉映射。

□

由此可见，圈量子引力的微分同胚不变希尔伯特空间可以视为一个福克空间，它由单分量图上的态所构成的微分同胚不变希尔伯特空间构造而成。这一同构将量子场论中通常遇到且熟悉的福克结构引入了圈量子引力的背景中。这为理解 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 中的态开辟了新的视角。可以将量子几何理解为具有一种原子式结构，其中每个图分量都扮演一个原子的角色。‖ 对于$\gamma \in \Gamma_n$，我们拥有一个由 n 个此类粒子构成的时空。

不过请注意， $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 上的这种福克空间结构未必是唯一可能的。近期另一项研究为 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 的子空间赋予了福克空间结构，将图顶点处的激发视为单粒子态 [19, 20], ，就是一个例子。

在接下来的章节中，我们将利用这一新的福克结构与群场论建立联系。我们还将在下文尝试阐明原子的几何本质，即单分量图上的态。

3. 福克空间结构的应用与诠释

在本文这一部分，我们将在具有物理意义的背景下探讨福克空间结构。首先，我们研究相干态，以强调这样一个事实：我们可以

‖ 或许更贴切的图景是将单分量态视为分子，而分子本身由原子（顶点态）组成。

利用福克结构，可以简洁地写出这些态。例如，体积期望值集中在某个特定值附近的相干态。我们还考虑体积期望值为无穷大的态。接下来，我们比较在 $\mathfrak{F}$ 中得到的态与群场论中使用的多粒子凝聚态。我们表明，尽管推导这些态的方式不同，但最终结果相同，从而在两种方法之间建立了定量联系。最后，我们通过研究量子理论和经典理论中与叶状分解的叶相关联的几何可观测量，对如何理解分量福克态的几何有所认识。

3.1. 相干态

相干态是研究量子系统的重要工具之一。利用相干态，可以考察量子涨落对所研究量子系统底层相应经典描述的影响。分量福克态是由无穷多个分支组成的态的叠加，这些态在图上呈柱状。在 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 的语境下，这并不容易实现。

在福克空间 $\mathfrak{F}$ 上，我们有满足标准正则对易关系的产生与湮灭算符。接下来考虑一个归一化为 1 的单粒子态 $|\mathfrak{g})$。为简洁起见，我们还记作

$$\mathfrak{a}^\dagger := \mathfrak{a}^\dagger_{|\mathfrak{g})}, \quad \mathfrak{a} := \mathfrak{a}_{|\mathfrak{g})}. \tag{3.1}$$

我们注意到，$\mathfrak{a}|\mathfrak{o}) = 0$，其中 $|\mathfrak{o})$ 只是 $\mathfrak{F}$ 中阿什特卡-勒万多夫真空的（像）。

根据上述数学框架，很容易在 $\mathfrak{F}$ 中构造出如下形式的相干态

$$|\mathfrak{f}) := e^{-|c|^2/2} e^{c\,\mathfrak{a}^\dagger} |\mathfrak{o})\,. \tag{3.2}$$

不难看出，这类态是归一化的。研究这类态性质的一种方法，是考察某个可观测量对它们的作用。体积算符是一个很好的候选对象。尽管其本征值谱较为复杂 [31]，但它能直接揭示由这类福克结构描述的时空的几何结构。众所周知，存在定义在 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ [31] 上的体积算符 V 的本征态。我们将定义在 $\mathfrak{F}$ 上的体积算符 $\mathfrak{V}$ 定义为

$$\mathfrak{V} := \mathfrak{T} V \mathfrak{T}^{-1} \tag{3.3}$$

将单粒子态 $|\mathfrak{g}\rangle$ 取为 $\mathfrak{V}$ 的本征态，其本征值为 λ，然后考察这类算符的期望值，可得

$$\langle \mathfrak{V} \rangle_{|\mathfrak{f}\rangle} = e^{-|c|^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} \langle \mathfrak{o} | \bar{c}^m \mathfrak{a}^m \mathfrak{V} c^n (\mathfrak{a}^\dagger)^n | \mathfrak{o} \rangle, \tag{3.4}$$

$$= \lambda e^{-|c|^2} \sum_m \sum_n n \frac{\bar{c}^m}{m!} \frac{c^n}{n!} n! \delta_{m,n}, \tag{3.5}$$

$$= \lambda |c|^2. \tag{3.6}$$

此外，很容易看出，在此态中， $\mathfrak{V}$ 本征值的概率服从泊松统计。这表明，在 $\mathfrak{F}$中构造具有有趣性质的态是多么简单。

另一个例子是考虑体积期望值发散的态。由于 V 是无界的，这类不属于 V 定义域的态必然存在。它们或许有助于描述量子理论中的非紧致空间几何。我们可以利用福克结构轻松构造这类态。为此，再次考虑任意单粒子态 $|\mathfrak{l}\rangle$，令其归一化，并且是本征值为 λ的体积本征态。现在，由态$|\mathfrak{l}\rangle$ 构造 m 重张量积态

$$|\mathfrak{l}_\mathfrak{m}\rangle := |\mathfrak{l}\rangle^{\otimes m}. \tag{3.7}$$

接着，我们可以考虑这类张量积态的线性组合。也就是说，对于$c_k \in \mathbb{C}$ ，我们定义

$$|\mathfrak{L}\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\mathfrak{l}_\mathfrak{n}\rangle. \tag{3.8}$$

容易验证，一般而言，体积算符 $\mathfrak{V}$ 的作用就是单粒子希尔伯特空间 $\eta(\mathscr{H}_1')$上体积算符 V的二次量子化。因此

$$\mathfrak{V}|\mathfrak{L}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathfrak{V}|\mathfrak{l}_\mathfrak{n}\rangle = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} n c_n |\mathfrak{l}_\mathfrak{n}\rangle. \tag{3.9}$$

此类态是张量积态的线性组合，其对体积算符谱的贡献可以任意高。由于每个 $|\mathfrak{l}\rangle$ 都归一化为 $\mathbf{1}$，显然 $||\,|\mathfrak{l}_\mathfrak{m}\rangle\,||^2 = 1$ 也如此。现在我们选择系数 $c_k \in \mathbb{C}$，使得 $c_0 = 0$ 且 $c_{n>0} = 1/n$。在这种情况下， $|\mathfrak{L}\rangle$ 的范数变为

$$||\,|\mathfrak{L}\rangle\,||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{\pi^2}{6} \tag{3.10}$$

对体积算符的期望值进行相当直接的计算可得

$$\langle \mathfrak{V} \rangle_{|\mathfrak{L}\rangle} = \frac{1}{||\,|\mathfrak{L}\rangle\,||^2} \sum_{n=0}^{\infty} n\lambda |c_n|^2 = \lambda \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \tag{3.11}$$

这正是发散的调和级数。因此，我们构造了一个简单的例子：大体积本征态（基于大型图）以足够大的权重参与其中，使得 Σ 的体积变为无穷大。

3.2. 与群场论的联系

本节将福克态与群场论中遇到的多粒子凝聚态进行比较。我们将说明，尽管这两种方法构造态的方式不同，但所得的态在定量上相同。

我们首先概述在群场论背景下构造多粒子凝聚态的过程。我们参照 Gielen等人 [7, 32, 33] 的工作。首先引入一个玻色场，记为 $\phi(g_I) := \phi(g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4)$ 其中 $g_I \in \mathrm{SO}(4)$，可将其展开为定义在给定图 γ 的每个顶点上的场算符，使得

$$\hat{\phi}(g_I) := \sum_{v \in V(\gamma)} \phi_v(g_I) a_v. \tag{3.12}$$

这里，a_v 表示湮灭算符，其谱受真空态 $|0\rangle$ 满足 $a_v|0\rangle = 0$这一条件的限制，下界有界。$a_v^\dagger$ 表示相应的产生算符。态的几何可如下理解。产生算符 $\phi^\dagger(g_I)$ 生成量子几何，可将其解释为具有某种几何结构的四面体；该几何可通过沿着与其各面对偶的链路平行输运引力 $\mathrm{SO}(4)$联络的元素 g_I 而得到。随后，可按照 [7], 的定义为四面体的每个面关联一个双矢量，使得

$$B^{AB}_{\Delta_I} \sim \int_{\Delta_I} e^A \wedge e^B, \tag{3.13}$$

其中 e 是一种编码单纯形几何的余标架场。不过，双向量必须满足两个条件，才能确保其具有恰当的几何解释 [7]。首先是简单性约束，可通过施加如下条件得到：对每个 $(h_I) \in \mathrm{SO}(3)^3$

$$\phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = \phi(g_1 h_1, g_2 h_2, g_3 h_3, g_4 h_4) =: \phi(g_I h_I) \tag{3.14}$$

其中，选择了 $\mathrm{SO}(3)$ 的一个特定子群 $\mathrm{SO}(4)$ ，使前者作用于后者。因此，场 ϕ 实际上依赖于 $\mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(3)$ ~$\mathrm{SU}(2)$ 的四个副本。第二个条件是规范不变性，可通过如下方式施加:

$$\forall h \in \mathrm{SO}(4) : \phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = \phi(g_1 h, g_2 h, g_3 h, g_4 h) \tag{3.15}$$

因此，可以定义一个自然具有规范不变性的双粒子凝聚态:

$$|\xi\rangle := e^{\hat{\xi}} |0\rangle \qquad , \qquad \hat{\xi} := \frac{1}{2} \int dg_1 \cdots dg_4 \int dh_1 \cdots dh_4\, \xi(g_I h_I^{-1}) \hat{\phi}^\dagger(g_I) \hat{\phi}^\dagger(h_I) \tag{3.16}$$

其中 ξ 是 $\mathrm{SO}(4)^4$ 上的某个函数。在自旋网络图像中可以看到，算符 $\hat{}\phi^\dagger(g_I)\hat{}\phi^\dagger(h_I)$ 创建了一个态，其几何对应于两个带有四个开放端点的四价顶点。随后，这些开放端点通过实施规范不变性的积分彼此连接。请注意，通过调整表达式中的场算符数量，可以定义单粒子（或 $n>2$ 粒子）凝聚态。

$|\xi\rangle$ 的定义在定性上与相干态（3.2）的定义相似。不过，这种相似性不只是定性的。下面来考察，当 ξ 选为规范自旋网络态时，如何简化 ξ

$$\xi(g_I) := (\iota_0)_{b_1\dots b_4}\,(\iota_1)^{a_1\dots a_4}\,\pi_{j_1}(g_1)_{a_1}{}^{b_1}\dots\pi_{j_4}(g_4)_{a_4}{}^{b_4}. \tag{3.17}$$

这是一个具有两个顶点、由 4 条边连接的态。这里， ι和 π分别表示交织算符和带有自旋标记的 SU(2)表示。对于这个 ξ，上文定义的算符 ξ 变为

$$\hat{\xi} = \int dg_1\cdots dg_4 \int dh_1\cdots dh_4 \sum_{c_I} (\iota_0)_{b_1\dots b_4}\,(\iota_1)^{a_1\dots a_4}\,\pi_{j_1}(g_1)_{a_1}{}^{c_1}\pi_{j_1}(h_1^{-1})_{c_1}{}^{b_1}\dots\pi_{j_4}(g_4)_{a_4}{}^{c_4}\times \\ \times\,\pi_{j_4}(h_4^{-1})_{c_4}{}^{b_4}\hat{\phi}^\dagger(g_I)\hat{\phi}^\dagger(h_I). \tag{3.18}$$

为了计算这个积分，可以将变量 g_I 和 h_I 分离，使得

$$\hat{\xi} = (\iota_0)_{b_1\cdots b_4}\,(\iota_1)^{a_1\cdots a_4}\sum_{c_I}\left(\int dg_1\cdots dg_4\,\pi_{j_1}(g_1)_{a_1}{}^{c_1}\cdots\pi_{j_4}(g_4)_{a_4}{}^{c_4}\hat{\phi}^\dagger(g_I)\right)\times \\ \times\left(\int dh_1\cdots dh_4\,\pi_{j_1}(h_1^{-1})_{c_1}{}^{b_1}\cdots\pi_{j_4}(h_4^{-1})_{c_4}{}^{b_4}\hat{\phi}^\dagger(h_I)\right). \tag{3.19}$$

这可以改写为一个规范不变态，它由成对的产生算符构成；这些算符通过连接从两个顶点伸出的自由边发挥作用，而这两个顶点分别关联着交织算符 ι_0 。因此，在计算完积分后

$$\hat{\xi} = (\iota_0)_{b_1\dots b_4}\,(\iota_1)^{a_1\dots a_4}\sum_{c_I}\left(a^\dagger_{j_1}\right)_{a_1}{}^{c_1}\dots\left(a^\dagger_{j_4}\right)_{a_4}{}^{c_4}\left(a^\dagger_{j_1}\right)_{c_1}{}^{b_1}\dots\left(a^\dagger_{j_4}\right)_{c_4}{}^{b_4}. \tag{3.20}$$

在圈量子引力的语言中，我们看到 ξ 通过连接附着在两个顶点上的自由边发挥作用。在这个具体例子中，结果是一个四价双顶点图。同样的方案适用于构造具有任意数量顶点和边的图。现在，我们可以在 $\mathfrak{F}$中构造凝聚态 $|\xi\rangle$ 的对应物。为此，令 $\xi_\gamma \in \mathscr{H}_{\text{kin}}$ 为基于嵌入Σ中的双顶点四边偶极图 γ 的自旋网。于是， $|\xi\rangle$ 可以等同于相干态

$$|\xi) := e^{\mathfrak{a}^\dagger_{\eta(\xi_\gamma)}}\,|\,\mathfrak{o}\,) \quad \in \mathfrak{F}. \tag{3.21}$$

该态具有与式（3.16）中的 $|\xi\rangle$ 相同的物理性质，不过现在考察的是 $\mathfrak{F}$ 上的可观测量。这些可观测量可以通过二次量子化由 $\eta(\mathscr{H}_1')$ 上的算符得到；更一般地，也可以通过 $\mathfrak{T}$ 由 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$上的算符得到。因此我们可以看到，两种方法中构造最终态的过程有所不同，但可以在定量上将两者对应起来。

3.3. 多粒子态的几何解释

本节旨在阐明 $\mathfrak{F}$上数算符本征态的几何解释，即具有固定 n的 n粒子态。 n 是否具有几何对应物？为探讨这一问题，我们将考察与 Σ 的叶状分解相关的面积算符和体积算符，其中各叶的拓扑为 S^2。首先，我们从量子图景入手，考察作用于自旋网络态上的面积算符；在群平均下，该态最终会落入双粒子扇区。我们关注沿叶状分解的叶推进时，期望值的定性变化。接下来，我们寻找一种经典几何，使其产生与量子图景中相似的结果。我们再次研究与叶状分解相关的面积。我们比较这两种情形，并基于经典理论给出几何解释。随后，我们概述基于体积算符的类似分析，并以简短讨论如何在态上施加微分同胚不变性作结。

3.3.1. 叶状分解中的面积：量子图景

本节中，我们在量子图景下研究某个面积算符的整体行为。我们考虑圈量子引力文献中常见的标准面积算符 [34]。由于这主要是一项定性研究，我们不明确写出该算符的定义（详情见 [34]）。我们确实指出，原则上，只要能参照物理场固定曲面，面积算符便可以在 $\eta(\mathscr{H}_1')$ 上得到良好定义。随后，它也可以转移到 $\mathfrak{F}$。不过，本文不作此处理。

我们首先指定嵌入在 Σ 中的图。为简便起见，我们考虑一个图 $\gamma \in \Gamma_2$。接下来，我们考虑 S_t 的一个叶状分解，其中 Σ 由 S^2 构成，并从 Σ 中的某个点 S_0 （即一个退化叶）开始。¶ 我们要求叶状分解的曲面具有良好的性质。具体而言，对于图 $\gamma \hookrightarrow \Sigma$ 的任意一条边 e，如果曲面 S_t 与之相交的次数有限（且小于某个任意给定的数 $n_{\max}$），那么就称该曲面为良好的，如图1所示。这一限制确保

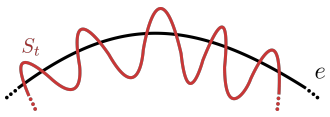

图1. 图示说明一维情形下某个图 γ 的一条边 e 与时空超曲面 Σ的某个叶状分解中的曲面 S_t 。我们看到，该曲面 S_t 与 e 相交的次数有限。我们称这样的曲面为良态曲面。

面积算符的期望值不会发散。例如，考虑图2所示的两种不同叶状结构。

¶例如，我们可以利用几何二维球面 S_t 构造这样的叶状分解：$= S(R(t))$ 其半径为 $R(t)$，满足 $R(t_1) < R(t_2)$ （ $t_1 < t_2$），其中所用的是某个参考度量。

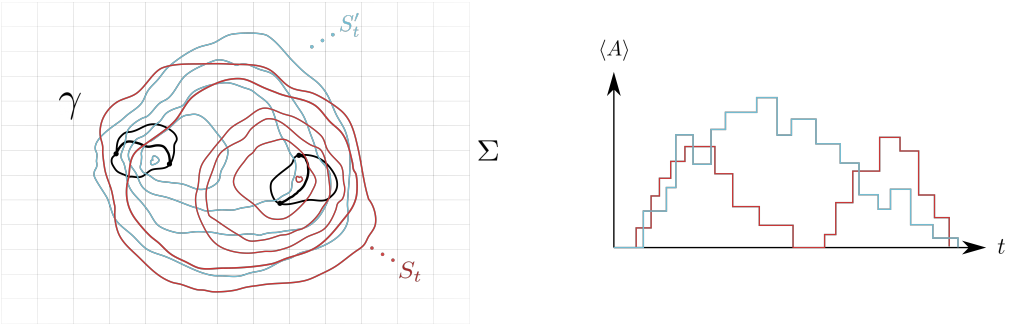

图2. 左侧展示了时空空间超曲面 Σ 的一部分。需要注意的是，它向各个方向无限延伸；为便于说明，图中的维度已简化为 2。黑色部分表示图 γ 的两个非链接分量，红色和蓝色部分表示 Σ 的两种不同叶状结构。右侧展示了两种叶状结构中各曲面的面积期望值定性图。

图中，图 γ 的非链接分量以黑色显示。 Σ 的两种不同叶状结构分别以红色和蓝色显示。前者中，曲面以逐个分支的方式覆盖 Σ 。也就是说，在开始覆盖下一个分支之前，叶状结构中的某个曲面 S_t 必须先将第一个图分量完全包围起来。另一方面，蓝色所示的叶状结构则没有这一条件。这对应于这些曲面面积期望值的两种不同全局行为。具体出现哪种行为取决于叶状结构的选择。

图的一条给定边与某个曲面 S_t 的交点数量有限。这是因为该曲面性质良好，并且图的任意一条边与该曲面的每个交点都仅位于叶状分解中的一个曲面内。无论给定图的结构如何，从任意点 $x \in \Sigma$ 和叶状分解参数 $t = t_0$ 开始的任意叶状分解 S_t ，其面积期望值都将从零开始。经过某个截止值 $t = t_c$后，图与叶状分解各曲面之间的所有交点都已计入，因此面积算符的期望值会再次回到零并保持为零。在 t_0 与 t_c之间，面积期望值非零，由此可以推断图 γ 的几何结构。特别值得注意的是，存在具有双峰结构的叶状分解，即面积期望值回到零后又再次增大。

从图2可以看出，叶状分解的选择有助于理解图的几何结构，并赋予其物理解释。人们很容易将 γ 的不同分支视为空间的不同部分。不过，我们还可以进一步探寻所得量子图景结果的经典类比。

3.3.2. 叶状分解中的面积：经典图景

本节将探寻量子区制中得到的面积期望值谱的经典类比。回想一下，时空在拓扑上被分解为 $\mathscr{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$。因此，寻找经典类比归结为寻找一种 Σ 的几何结构，该结构可以进行叶状分解，并且能呈现与叶状分解所关联的面积值相似的图景。

作为第一个例子，我们考虑 $\Sigma = \mathbb{R}^3$ ，并为其配备某个黎曼度量。面积算符的作用是给出 Σ中一个有界区域的面积。设 Σ 中的 x 为任意一点，并用一个一般的叶状分解将 $\Sigma \backslash \{x\}$ 分解为叶，这些叶是拓扑二维曲面，记为 S_t ，叶状分解参数为$t \in [0, \infty)$。于是，对于每个 t，面积算符都会测量区域 S_t 内的面积。

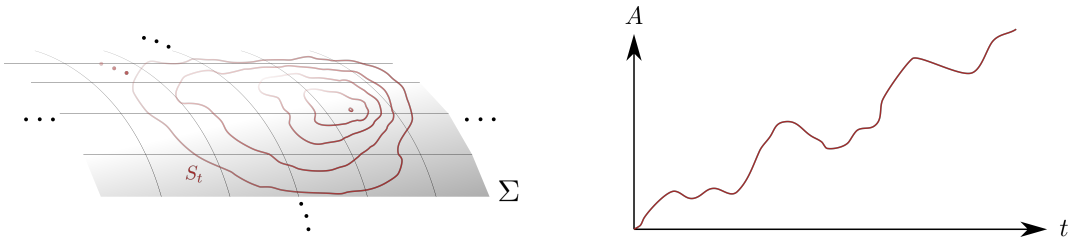

图 3. 左侧展示了 $\Sigma = \mathbb{R}^3$ 的一个区域。为便于说明，维数降低了 1。请注意， Σ 向所有方向无限延伸。图中以红色标出了 Σ的叶状分解中最初的几个曲面 S_t 。右侧展示了每个曲面 S_t 面积的定性曲线图。可以观察到一种整体趋势：随着t 增大，相应曲面 S_t 的面积也随之增大。

请注意，图 3 中所示的表示纯粹出于说明目的而减少了一个维度。很容易看出，在这样一个由良好曲面 S_t叶状分解的空间超曲面中，随着叶状分解参数 t 增大，面积算符的值总体上会增大，如图 3 所示。这里，所谓良好，是指我们要求叶状分解的叶具有小于某个固定值 $K_{\max}$ 的外曲率。这确保叶不会以某种方式变化，从而使面积在参数有界t时无限增长。在经典图景中，我们考虑的所有叶状结构都必须满足这一要求。回想一下，在量子区制中也施加了类似的限制，这也进一步说明并支持了施加此类限制的理由。

也可以将空间超曲面视为几何的 $\Sigma = S^3$ 处；为便于说明，如图4所示，我们再次画出低一个维度的对应图景。与前面 $\Sigma = \mathbb{R}^3$的情形类似，考虑适当的叶状分解后，可以看出面积算符的值会呈现特定的变化趋势。也就是说，面积算符总是从零开始，最终回到零。这是意料之中的

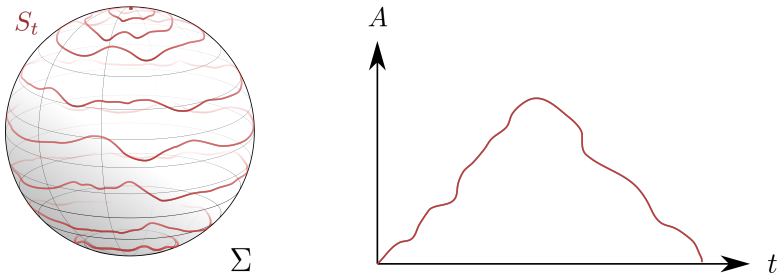

图4. 左图展示了一个拓扑为 $\Sigma = S^3$ 的空间超曲面。为便于说明，维数降低了1。该空间超曲面的叶状分解由曲面 S_t 构成，如红色部分所示。右图定性地绘出了随着 t 趋于无穷大，曲面 S_t 的面积变化。我们可以看到，正如右图所示，曲面 S_t 的面积从零开始，最终也回到零。

因为我们将球面从任意选定的一个极点向另一个极点进行叶状分解，无论选择哪一种叶状分解曲面。我们在经典图景中考虑的最后一个例子如图5所示；同样，为便于说明，维度降低了1。

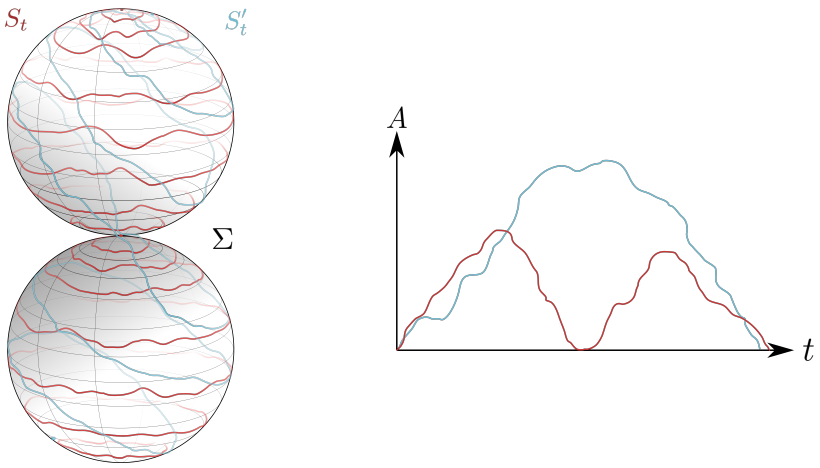

图5. 左图展示了时空中空间超曲面 Σ的示意图，其中红色和蓝色分别表示两种不同的叶状分解。前者恰好经过两个球体的粘合点，而后者则没有。右图定性地绘出了这两种叶状分解所产生的曲面的面积。对于红色曲线，可以看到每个峰值都代表一个球体；具有这种面积变化特征的叶状分解，让我们得以窥见 Σ的几何。

可以用不同的方式对超曲面 Σ进行叶状分解。最值得注意的是，可以选择一种经过两个球体“粘合”点的叶状分解（也就是说，叶状分解中存在一个曲面 S_{t_k} ，它恰好位于两个球体的粘合点处）。这样，我们会观察到面积算符的值先出现一个下降，随后又逐渐增加，因此呈现出类似于两个球体情况下所得到的谱。不过，如蓝色的第二种叶状分解所示，通过选择不同的叶状分解，我们也可以得到一种看不到这一效应的

谱。尽管两种情况都成立，但前一种情况的存在让我们得以深入了解超曲面的几何结构，以及如何将其可视化。

此外，这一经典图景中的结果与量子区制中得到的结果十分相似。这表明，我们可以用不同的方式理解这类图 $\gamma \in \Gamma_n$ 的几何，其中一种理解是，这些图类似于空间的“气泡”，本质上是彼此不同的空间块。这也为进一步诠释留下了余地，例如认为这些气泡属于同一个宇宙，或各自构成独立的宇宙。尽管这种诠释确实引人深思，但仍应谨慎看待，因为这只是理解这类对象的方式之一。

3.3.3. 量子理论中叶状分解内的体积

本节概述一项与面积算符研究类似的研究，不过这里考察的是体积算符。在经典图景中，体积算符测量的是空间超曲面 Σ 中由叶状分解曲面 S_t 围成区域的体积。若考虑与经典图景中的面积情形相同的三种几何 Σ，不难看出，经典图景中的体积定性谱总是从零开始持续增长（无论是否无限增长），且永远不会回到零。

转到量子图景，我们回顾一下，在圈量子引力中，对于区域 R in Σ，体积算符定义为（详情见 [31]）

$$V(R) \sim \sum_{v \in R} V_v, \tag{3.22}$$

其中，V_v 表示顶点 v处的体积。与面积算符的情形一样，我们再次考虑一个简单的双分量图。由于这种图上的分量福克态由自旋网络函数构成，体积算符具有已知但较为复杂的离散本征值谱 [31, 35]。不过，这并不妨碍我们的讨论，因为我们可以选择一个顶点体积的本征态，或者直接考虑体积期望值。请注意，与面积算符的情形不同，体积算符的期望值是对空间超曲面 Σ的叶状分解中的各个区域求和得到的。真空态对应的体积算符本征值为零。此外，我们还可以在 Σ 上任取一点 x，并构造围绕 x 的叶状分解。也就是说，要求 x 位于邻域 U 中，而该邻域位于区域 R_{t_1} 中，后者又位于 R_{t_2} 内，依此类推；其中 t 再次表示一个从 0 到 ∞变化的叶状分解参数。这样，对于给定福克态，体积算符的本征值谱便能确保从零开始。由于该谱具有可加性，因此它只会随着每个区域 R_{t_k}的增加而增大。

因此，与面积算符相比，可以看到类似的行为。对于

图 $\gamma \hookrightarrow \Sigma$的每个分量，体积算符的本征值谱增加到某个值，并在叶状曲面 R_t 遇到另一个分量之前保持该值不变。在这种情况下，如何推断几何结构并不十分清楚。

3.3.4. 施加微分同胚不变性

更为严谨的分析应当适当地施加微分同胚不变性，但这项任务并不简单。在 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$上定义此类面积和体积算符有多种方式。一种方法是利用贯穿时空 [36, 37, 38, 39, 40, 41]的标量参考场。曲面可以定义为参考场取某个预先规定值的位置处的曲面。基于以这种方式微分同胚不变地定义的叶状结构进行的分析，可能会得出不同于我们基于微分同胚非不变态所作分析的结论。

4. 讨论与展望

在这项工作中，我们表明，在某些假设下（见假设1），圈量子引力的微分同胚不变希尔伯特空间 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 同构于一个对称福克空间 $\mathfrak{F}$ ，这揭示了 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$依赖图分支的结构。为此，我们首先选择了 $\Sigma = \mathbb{R}^3$，随后便能够将任意给定的图 $\gamma \hookrightarrow \Sigma$ 分解为其非链接分量 $c_k \in \mathsf{Comp}\,(\gamma)$。将图对称群对这类图的作用映射到对称群$\mathsf{S}_n$后，$\mathsf{GS}_\gamma$ 被分解为置换微分同胚图分支的子群H_γ 及其$\widetilde{\text{陪集}}\mathsf{GS}_\gamma$。利用这些结构，我们在引理2.3中给出了 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 上内积的一个简单公式。在 $\eta(\mathscr{H}_1')$上构造了一个福克空间 $\mathfrak{F}$，我们称之为分支福克空间。为了在 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 与福克空间$\mathfrak{F}$之间得到同构，后者必须是一个对称福克空间。这与引力场的玻色性质十分契合。对 $\mathfrak{F}$ 上内积的研究促成了显式同构 $\mathfrak{T}$的构造，

$$\mathfrak{T}\colon\ \mathscr{H}_{\text{diff}} \longrightarrow \mathfrak{F}, \tag{4.1}$$

$$|\eta(\Psi_\gamma)) \longmapsto \frac{c_\gamma}{n!} \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \sum_{\{I\}} \psi_{\{I\}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left|\eta(\mathcal{S}_{\gamma_{\sigma(l)}}^{I_{\sigma(l)}})\right), \qquad c_\gamma = \sqrt{\frac{n!}{m_1!\cdots m_k!}} \tag{4.2}$$

由此建立了圈量子引力的完整微分同胚不变希尔伯特空间与 $\mathfrak{F}$ 之间的同构。我们再次指出，该映射是在对所考虑的微分同胚类别作出假设的基础上得到的。这些假设在哪些范畴（光滑、半解析.....）中成立，仍有待回答。

接下来，我们探讨了这种结构的一些应用实例。具体而言，我们展示了如何利用它构造具有有趣性质的态，例如不属于体积算符定义域的态，或某种特定类型的相干态。

借助福克结构 $\mathfrak{F}$，可以轻松地构造这些态。这得益于在 $\mathfrak{F}$ 上使用产生与湮灭算符。

此外，我们证明了利用福克结构构造的相干态与群场论中得到的某些凝聚态密切相关。具体而言，我们考察了群场论中的双粒子凝聚态，并展示了一种具有相同性质的福克相干态。显然，这种对应关系将延续到 n 粒子凝聚态。我们注意到，两种方法中的态并未全部得到研究。由于群场论的福克空间包含具有许多开放腿的顶点，并将其视为单粒子态，因此存在一些难以转换为 $\mathfrak{F}$ 的态和操作。进一步考察群场论中的态与 $\mathfrak{F}$ 中的态之间的对应关系，将是值得的。

最后，我们通过研究这些福克态的几何结构，探讨了它们的物理解释。为此，我们考察了与 Σ 的叶状结构相关的候选几何可观测量，以及它们沿叶状结构中的叶移动时的定性变化，例如叶的面积和所包围的体积。我们在一些经典几何以及单粒子和多粒子福克态中都考察了相同的可观测量。由此得到一些线索：基于具有多个非链接分量的图的态，可以理解为描述具有彼此分离、互不连通分量的几何，而非一个连通流形的几何。不过，这一讨论是启发式的，且未施加微分同胚不变性。结果是否会因此受到影响，还有待观察。

进一步探讨我们所报告结果提出的未决问题将很有意义。首先，可以在半解析范畴中对我们所作的假设进行形式化检验。或许还可以适当放宽这些假设，同时仍保留我们所展示的结果。其次，应当更全面、更审慎地研究与群场论（GFT）的联系。多粒子态的几何诠释也是如此，因为这同样关系到群场论（GFT）中相应的态。最后，本研究完全忽略了哈密顿约束。若能弄清福克结构是否可用于构造解，将会很有意思。

尽管可能存在局限和未解问题，所得结果仍表明，可以构建一种与引力为玻色理论相一致的对称福克结构；它自然地出现在 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 层级的圈量子引力背景下，并为圈量子引力带来多粒子图景。这为 $\mathscr{H}_{\text{diff}}$ 中态的几何与结构、与群场论的严格联系，以及在圈量子引力背景下运用量子场论中常见的福克空间这一熟悉语言所带来的新工具，提供了新的视角。

致谢

H.S. 感谢 COST 行动 CA18108 的贡献。

参考文献

[1] D. Oriti, 《量子引力研究进路：迈向对空间、时间与物质的新理解》, 剑桥大学出版社, 2009, ISBN 978-0-521-86045-1, 978-0-511-51240-7[2] A. Ashtekar 和 J. Lewandowski, 《背景独立量子引力：现状报告》, Class. Quant. Grav. 21 (2004), R53 doi:10.1088/0264-9381/21/15/R01 [arXiv:gr-qc/0404018 [gr- qc]].[3] T. Thiemann, 《现代正则量子广义相对论》, 剑桥大学出版社, 2007, ISBN 978-0-511-75568-2, 978-0-521-84263-1 doi:10.1017/CBO9780511755682[4]C. Rovelli, 《圈量子引力 Zakopane 讲座》, PoS QGQGS2011 (2011), 003 doi:10.22323/1.140.0003 [arXiv:1102.3660 [gr-qc]].[5]L. Freidel, 《群场论：概述》, Int. J. Theor. Phys. 44 (2005), 1769-1783 doi:10.1007/s10773-005-8894-1 [arXiv:hep-th/0505016 [hep-th]].[6] D. Oriti, 《作为圈量子引力二次量子化的群场论》, Class. Quant. Grav. 33 (2016) no.8, 085005 doi:10.1088/0264-9381/33/8/085005 [arXiv:1310.7786 [gr-qc]].[7]S. Gielen、D. Oriti 和 L. Sindoni, 《量子引力群场论形式体系中的宇宙学》, Phys. Rev. Lett. 111 (2013) no.3, 031301 doi:10.1103/PhysRevLett.111.031301[arXiv:1303.3576 [gr-qc]].[8] S. Gielen、D. Oriti 和 L. Sindoni, 《作为群场论凝聚态的均匀宇宙学》, JHEP 06 (2014), 013 doi:10.1007/JHEP06(2014)013 [arXiv:1311.1238 [gr-qc]].[9] L. Marchetti 和 D. Oriti, 《量子引力中的有效关系宇宙学动力学》, JHEP 05 (2021), 025 doi:10.1007/JHEP05(2021)025 [arXiv:2008.02774 [gr-qc]].[10] A. F. Jercher、D. Oriti 和 A. G. A. Pithis, 《洛伦兹 Barrett-Crane 张量群场论模型中的量子引力涌现宇宙学》, JCAP 01 (2022) no.01, 050 doi:10.1088/1475-7516/2022/01/050 [arXiv:2112.00091 [gr-qc]].[11] D. Oriti、J. P. Ryan 和 J. Th¨urigen, 《适用于所有圈量子引力的群场论》, New J. Phys. 17 (2015) no.2, 023042 doi:10.1088/1367-2630/17/2/023042 [arXiv:1409.3150 [gr-qc]].[12] D. Oriti, 《群场论与圈量子引力》, [arXiv:1408.7112 [gr-qc]].[13] D. Oriti, 《群场论与圈量子引力》, doi:10.1142/9789813220003 0005[14] M. Varadarajan, 《从 U(1) holonomy 代数得到的 Fock 表示》, Phys. Rev. D 61 (2000), 104001 doi:10.1103/PhysRevD.61.104001 [arXiv:gr-qc/0001050 [gr-qc]].[15] M. Varadarajan, 《量子化电通量表示中的光子》, Phys. Rev. D 64 (2001), 104003 doi:10.1103/PhysRevD.64.104003 [arXiv:gr-qc/0104051 [gr-qc]].[16] M. Varadarajan, 《线性化引力圈表示中的引力子》, Phys. Rev. D 66 (2002), 024017 doi:10.1103/PhysRevD.66.024017 [arXiv:gr-qc/0204067 [gr-qc]].[17]M. Assanioussi 和 J. Lewandowski, 《SU(N) 规范理论的圈表示与 r-Fock 测度》, Phys. Rev. D 105 (2022) no.10, 104025 doi:10.1103/PhysRevD.105.104025[arXiv:2204.07119 [gr-qc]].[18] J. Lewandowski 和 H. Sahlmann, 《圈量子引力的对称标量约束》, Phys. Rev. D 91, no.4, 044022 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.044022 [arXiv:1410.5276 [gr-qc]].[19] M. Assanioussi, 《联络理论的聚合物量子化：图相干态》, Phys. Rev. D 98 (2018) no.4, 045016 doi:10.1103/PhysRevD.98.045016 [arXiv:1805.05299 [hep-th]].[20] M. Assanioussi, 《圈量子引力的图相干态》, Phys. Rev. D 101 (2020) no.12, 124022 doi:10.1103/PhysRevD.101.124022 [arXiv:2004.08876 [gr-qc]].[21] T. Thiemann, 《量子广义相对论的复化子相干态》, Class. Quant. Grav. 23, 2063-2118 (2006) doi:10.1088/0264-9381/23/6/013 [arXiv:gr-qc/0206037 [gr-qc]].[22] H. Sahlmann, 《探索标量场的微分同胚不变希尔伯特空间》, Class.

Quant. Grav. 24 (2007), 4601-4616 doi:10.1088/0264-9381/24/18/003 [arXiv:gr-qc/0609032 [gr- qc]].[23]A. Ashtekar、J. Lewandowski、D. Marolf、J. Mourao 和 T. Thiemann, 《具有局域自由度的联络微分同胚不变理论的量子化》, J. Math. Phys. 36 (1995), 6456-6493 doi:10.1063/1.531252 [arXiv:gr-qc/9504018 [gr-qc]].[24] A. Ashtekar 和 J. Lewandowski, 《解析整体性 C* 代数的表示论》, [arXiv:gr-qc/9311010 [gr-qc]].[25] J. Lewandowski、A. Okolow、H. Sahlmann 和 T. Thiemann, 《整体性-通量代数上微分同胚不变态的唯一性》, Commun. Math. Phys. 267 (2006), 703-733 doi:10.1007/s00220-006-0100-7 [arXiv:gr-qc/0504147 [gr-qc]].[26] C. Fleischhack, 《量子几何中 Weyl 代数的表示》, Commun. Math. Phys. 285 (2009), 67-140 doi:10.1007/s00220-008-0593-3 [arXiv:math-ph/0407006 [math-ph]].[27] J. C. Baez 和 S. Sawin, 《联络空间上的泛函积分》, [arXiv:q-alg/9507023[math.QA]].[28]J. Lewandowski 和 T. Thiemann, 《以网为基础的联络微分同胚不变量子场论》, Class. Quant. Grav. 16 (1999), 2299-2322 doi:10.1088/0264- 9381/16/7/311 [arXiv:gr-qc/9901015 [gr-qc]].[29] C. Fleischhack, 《Lewandowski 和 Thiemann 猜想的证明》, Commun. Math. Phys. 249 (2004), 331-352 doi:10.1007/s00220-004-1052-4 [arXiv:math-ph/0304002 [math-ph]].[30] A. Ashtekar 和 J. Lewandowski, 《规范理论的射影技术与泛函积分》, J. Math. Phys. 36 (1995), 2170-2191 doi:10.1063/1.531037 [arXiv:gr-qc/9411046 [gr- qc]].[31] A. Ashtekar 和 J. Lewandowski, 《几何量子理论。2. 体积算符》, Adv. Theor. Math. Phys. 1 (1998), 388-429 doi:10.4310/ATMP.1997.v1.n2.a8 [arXiv:gr-qc/9711031 [gr- qc]].[32] S. Gielen 和 A. Polaczek, 《群场论中的广义有效宇宙学》, Class. Quant. Grav. 37 (2020) no.16, 165004 doi:10.1088/1361-6382/ab8f67 [arXiv:1912.06143 [gr-qc]].[33] S. Gielen 和 L. Sindoni, 《群场论凝聚态的量子宇宙学：综述》, SIGMA 12 (2016), 082 doi:10.3842/SIGMA.2016.082 [arXiv:1602.08104 [gr-qc]].[34] A. Ashtekar 和 J. Lewandowski, 《几何量子理论。1：面积算符》, Class. Quant. Grav. 14 (1997), A55-A82 doi:10.1088/0264-9381/14/1A/006 [arXiv:gr-qc/9602046 [gr-qc]].[35]J. Brunnemann 和 D. Rideout, 《圈量子引力中体积算符的性质。I. 结果》, Class. Quant. Grav. 25 (2008), 065001 doi:10.1088/0264-9381/25/6/065001[arXiv:0706.0469 [gr-qc]].[36] J. D. Brown 和 K. V. Kuchar, 《作为正则量子引力中空间和时间标准的尘埃》, Phys. Rev. D 51 (1995), 5600-5629 doi:10.1103/PhysRevD.51.5600 [arXiv:gr-qc/9409001[gr-qc]].[37] C. Rovelli 和 L. Smolin, 《非微扰量子引力中的物理哈密顿量》, Phys. Rev. Lett. 72 (1994), 446-449 doi:10.1103/PhysRevLett.72.446 [arXiv:gr-qc/9308002 [gr-qc]].[38] K. Giesel 和 T. Thiemann, 《标量物质参考系与圈量子引力》, Class. Quant. Grav. 32 (2015), 135015 doi:10.1088/0264-9381/32/13/135015 [arXiv:1206.3807 [gr- qc]].[39] J. Lewandowski 和 H. Sahlmann, 《与标量场耦合的圈量子引力》, Phys. Rev. D 93 (2016) no.2, 024042 doi:10.1103/PhysRevD.93.024042 [arXiv:1507.01149 [gr-qc]].[40]K. Giesel、A. Herzog 和 P. Singh, 《利用几何时钟构造宇宙学微扰理论的规范不变量》, Class. Quant. Grav. 35, no.15, 155012 (2018) doi:10.1088/1361- 6382/aacda2 [arXiv:1801.09630 [gr-qc]].[41]K. Giesel、B. F. Li 和 P. Singh, 《在显式规范不变微扰理论中将尘埃参考模型与常规系统联系起来》, Phys. Rev. D 104, no.2, 023501 (2021) doi:10.1103/PhysRevD.104.023501 [arXiv:2012.14443 [gr-qc]].