arXiv:2302.03624v2 [math.NT] 6 Aug 2024

利用洛必达法则求幂和

˜EDUARDO DUENEZ、ASIMINA S. HAMAKIOTES 和 STEVEN J. MILLER

ABSTRACT. 设 d 为正整数，令 $p_d(n) := 0^d + 1^d + 2^d + \cdots + n^d$；也就是说，$p_d(n)$ 是截至 n 的前 d^{th} 次幂之和。众所周知，$p_d(n)$ 是关于 n 的 $d+1$ 次多项式。通常用归纳法证明这一点，但当 d 不小时，证明颇具挑战，因为归纳步骤需要知道该多项式的形式。我们将展示如何利用洛必达法则，简单地证明 $p_d(n)$ 是关于 n 的 $d+1$ 次多项式，从而绕过这一难题；并说明如何进一步利用克莱姆法则确定系数。这体现了一个普遍原则，也是本文的主旨：通往目标的道路不止一条，不同方法各有优缺点，而掌握的技巧越多，就越有可能成功解决问题。

1. INTRODUCTION

我们接触一个数列时，首先会遇到的问题之一就是将数列中的数相加，而往往会得到简洁优美的公式。例如，公比为 r 、首项为 a_0 的几何级数有 n^{th} 项 $a_n = a_0 r^n$，因此

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \;=\; a_0(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) \;=:\; a_0 S_r(n).$$

因此，我们只需确定 $a_0 = 1$ 时这个更简单情形下的答案。常用的技巧是乘以 r 后再相减，并注意到我们得到的是一个裂项级数：

$$\begin{array}{rcl} S_r(n) & = & 1 + r + r^2 + \cdots + r^n \\ \underline{rS_r(n)} & = & \quad r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1} \\ (1-r)S_r(n) & = & 1 \qquad\qquad\qquad\quad - r^{n+1}. \end{array}$$

Thus

$$S_r(n) \;=\; 1 + r + \cdots + r^n \;=\; \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \;=\; \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r},$$

这样我们就得到了有限几何级数的求和公式。如果 $|r| < 1$，我们可以令 $n \to \infty$，取极限，从而得出无穷几何级数的和为 $1/(1-r)$。本文的主要目的是介绍其他方法，因此我们请读者参阅 [M]，了解另一种利用篮球比赛和无记忆过程的方法。[1]

掌握几何级数公式后，许多其他求和问题也能迎刃而解（包括本文的主要内容：幂和）。例如，将斐波那契数定义为 $F_0 = 0$、$F_1 = 1$ 和 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$，即可证明比内公式[2]：

$$F_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

通过反复应用，我们可以求出斐波那契数任意次幂的和，不过这种方法得到的表达式可能并非最简；因此，或许还有更好的方法来得出这些结果！例如，$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$。我们可以利用几何级数公式并通过平方来证明这一点，也可以用归纳法证明；但有趣的是，还有一种古老的几何证明，.....

Date: 2024年8月7日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 11C06（主要），40D05、26A06（次要）。

Key words and phrases. 幂和、洛必达法则、伯努利数、几何级数公式。感谢我们的学生以及同事 ´Alvaro Lozano-Robledo 提供了有益的讨论。

[1]另请观看第三位署名作者在其概率论课程中的第一讲视频：https://youtu.be/aD7tIOOCGyg（35:19）；幻灯片可在此处获取：https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/341Fa21/talks/firstlecture341.pdf。[2]毫不意外，这一结果有许多证明方法，包括归纳法、生成函数，以及有趣的组合证明（见 [BQ]）。

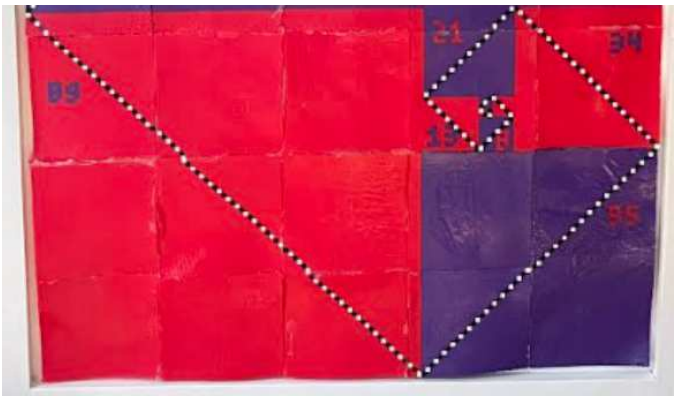


FIGURE 1. 由 Kayla 和 Steven Miller 制作的熔珠拼贴：用边长为斐波那契数的正方形铺满平面。

第三位署名作者曾多次在面向幼儿园年龄儿童的数学推广活动中使用这种方法。对于每个 $n \le 13$，给学生小组恰好一个 $n \times n$ 正方形，并告诉他们尽可能多地把正方形平放在桌面上，规则是所有正方形都必须平放在桌面上，而且每次添加一个正方形后，整个形状在任何时刻都必须是一个矩形。各小组很快就会发现，正方形不能超过一个，因为边长无法对齐；因此，要想成功，他们需要更多正方形。我们能提供的最少增量是再加一个 1×1 正方形，随后每个小组都会发现铺满平面的斐波那契数列；见图 1。

我们可以用两种方法计算这个矩形的面积。首先，面积就是长乘以宽，即 $89 \cdot 144 = F_{11} \cdot F_{12}$。其次，面积等于这些正方形的面积之和，即 $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_{12}^2$，这就证明了我们的公式！

接下来常见的幂和是等差数列，其中每一项都比前一项多 d。因此，如果我们再次以 a_0 作为第零项，那么 $a_n = a_0 + nd$ 经过简单的代数运算后，我们得到

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \;=\; (n+1)a_0 + d(0 + 1 + 2 + \cdots + n).$$

因此，求出它的和，等价于计算从 1 到 n 的整数之和。

更一般地，我们考虑计算 d^{th} 次幂和的问题，其中 d 是正整数；在课程中，这通常被用作检验微积分基本定理的一种方法：通过计算 $f(x) = x^d$ 的黎曼和的极限。我们将 $p_d(n) := 0^d + 1^d + 2^d + \cdots + n^d$ 定义为从 1 到 n 的前 d^{th} 次幂之和。许多学生都是通过年轻的高斯的故事接触这类问题的：有一次，他的老师心情不好，让全班计算 $p_1(100) = 0 + 1 + 2 + \cdots + 100$，以为学生会逐项进行繁琐的加法，自己便能清闲一会儿。然而，高斯很快就注意到，如果把这个和倒序写出，再与原式相加，结果就是

$$2p_1(100) \;=\; (100+0) + (99+1) + (98+2) + \cdots + (0+100) \;=\; 100 \cdot 101,$$

这就得到 $p_1(100) = 50 \cdot 101 = 5050$。更一般地说，这个巧妙的方法可以得出

$$p_1(n) \;:=\; 0 + 1 + 2 + \cdots + n \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \;=\; \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

我们还可以从这个公式中发现许多有趣的现象。

(1) 首先，$p_1(n)$ 是一个次数比所求幂次高一的多项式；也就是说，$p_1(n)$ 对一次幂求和，所得是一个二次多项式。(2) 其次，从 $p_1(n) = (1/2)n^2 + (1/2)n$ 可以看出，系数并非整数。首项的系数为 $1/2$，而且没有常数项。

不难看出，这两条等式对于更多的 d 也成立。通过简单的归纳论证，我们可以验证平方和为

$$p_2(n) \;=\; 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \;=\; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \;=\; \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

而立方和为

$$p_3(n) \;=\; 0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3 \;=\; \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \;=\; \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

注意到， $p_2(n)$ 和 $p_3(n)$ 也没有常数项，且首项的系数为 $1/(d+1)$（ $p_2(n)$ 的首项系数为 $1/3$，而 $p_3(n)$ 的首项系数为 $1/4$）。根据这些观察，自然可以猜想， $p_d(n)$ 是一个次数为 $d+1$、没有常数项且首项为 $1/(d+1)$ 的多项式。之所以这些结论在 d 较小时可以很容易地用归纳法证明，是因为我们已经猜到了该多项式的公式。如果我们不知道这个多项式，就必须先猜出它。可以先假设一个多项式关系，取 $n=0$、1、2、.....、 d 的值，然后通过插值来确定多项式；见§4。

注意，如果 $p_d(n)$ 是一个多项式，那么首项必须是 $n^{d+1}/(d+1)$；我们可以通过用积分近似该和式来说明这一点：

$$0^d+1^d+\cdots+n^d \;\approx\; \int_0^n x^d dx \;=\; \frac{x^{d+1}}{d+1}\bigg|_0^n \;=\; \frac{1}{d+1}n^{d+1}.$$

再多花一点努 力，我们就能得到近似值精确程度的上下界。

再多做一些工作，我们就可以使用欧拉-麦克劳林公式（例如参见 [GKP] 中的第 9.5 节）证明 $p_d(n)$ 是一个多项式。对于在区间 $[0,n]$ 上 k 次连续可微的函数 $f(x)$， $f(x)$ 的求和与积分之差为

$$\sum_{m=0}^{n} f(m)-\int_0^n f(x)dx \;=\; \sum_{j=1}^{k}\frac{B_j}{j!}\Big(f^{(j-1)}(n)-f^{(j-1)}(0)\Big)+R_k,$$

其中 B_j 是 j^{th} 伯努利数， R_k 是误差项。误差项可用周期化伯努利函数表示，即 $P_j(x)=B_j(x-\lfloor x\rfloor)$，并且为

$$R_k \;=\; (-1)^{k+1}\int_0^n f^{(k)}(x)\frac{P_k(x)}{k!}dx.$$

如果我们求 $d+1$ 阶导数，那么就不存在误差项，因为 $f(x)=x^d$，因此 $p_d(n)$ 是关于 n 的多项式。通过对下式反复应用分部积分，我们可以推导出带有误差项的欧拉-麦克劳林公式：

$$R_k \;=\; (-1)^{k+1}\int_0^n f^{(k)}(x)\frac{P_k(x)}{k!}dx \;=\; (-1)^{k+1}\left(f^{(k+1)}(n)\frac{P_k(n)}{k!}-f^{(k+1)}(0)\frac{P_k(0)}{k!}\right)+R_{k-1},$$

对于 $k\ge 2$。边界项构成欧拉-麦克劳林公式中的主要项，而余项积分构成误差项。因此，利用 $f(x)=x^d$，我们可以很快得到一个证明 $p_d(n)$ 是多项式的积分证明。

我们的目标是运用洛必达法则，给出一个新的、简洁的证明（我们未能在文献中找到这样的证明），说明 $p_d(n)$ 必定是一个多项式，从而避免使用归纳论证。因此，下面的求导论证补充了前面的积分方法，并突显了数学中的一个关键事实：通常，求得答案不止一种方法，而不同方法各有优缺点。

定理 1.1. 设 $p_d(n)$ 是直到 n 为止的 d^{th} 次幂之和。那么，洛必达法则表明， $p_d(n)$ 是一个次数为 $d+1$、首项为 $1/(d+1)$ 且常数项为零的多项式。

我们可以用以下步骤求出这个多项式；下一节将详细介绍。先从有限等比级数公式开始

$$1+x+x^2+\cdots+x^n \;=\; \frac{x^{n+1}-1}{x-1},$$

并将 $x\frac{d}{dx}$ 两边各应用 d 次，然后在 $x=1$ 处计算左边，并求右边当 x 趋近于 1 时的极限。这需要应用 2^d 次洛必达法则。虽然我们可以明确求出系数，但即便 d 不大，这样做的计算也会相当繁琐，因此我们将在 §4 中讨论如何利用克莱姆法则，在已知它是一个多项式的前提下求出系数。采用类似的方法，但改为应用 $\frac{d}{dx}$，我们也能得到相关求和的类似结果，这些结果同样很有意思。

2. Differentiation Method for Computing $p_d(n)$

我们的方法提供了一种简单而新颖的证明方式，证明 $p_d(n)$ 必须是一个多项式，并且还能用于明确求出该多项式。不幸的是，实际操作中一旦 d 较大，计算就会变得非常繁重；正如我们将在下文看到的， $d = 2$已经需要相当多的工作。

如前所述，我们从引言中证明的有限和的几何级数公式开始；注意，除了不能等于 1 之外，对 x 没有其他限制（在这种情况下，右边的和就是 $n + 1$）。

引理 2.1（有限几何级数公式）。对于 $x \neq 1$，我们有

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n \;=\; \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

由于 $S_n(x)$ 是有限和，因此我们不必担心 $|x| < 1$ 是否成立，不过我们确实需要$x \neq 1$ ，以确保分母不为零；当然，如果 $|x| < 1$ ，我们可以取极限，从而得到无限几何和的公式。

由于这个和是有限的，我们可以逐项求导，因为有限和的导数等于各项导数之和。这一点很容易用归纳法证明；但对于无限和，这并不总是成立。我们从几何级数开始

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n \;=\; \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

并应用算子 $x\frac{d}{dx}$；我们也可以只应用 $\frac{d}{dx}$，但这样选择能使每一项的指数保持不变，这在我们通过反复求导来证明一般情形 d 的结果时会很有用。我们得到

$$\begin{aligned} 0 + 1x + 2x^2 + \cdots + nx^n \;&=\; x\left[\frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}\right], \\ &=\; \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}, \end{aligned}$$

其中使用商法则对右侧求导。注意，分母的次数为 2，其中$x - 1$。[3]

注意，如果我们取 $x = 1$，左侧就变成截至 n 的一次幂之和

$$0 + 1(1) + 2(1)^2 + \cdots + n(1)^n \;=\; 0 + 1 + 2 + \cdots + n,$$

而右侧则变为 $0/0$:

$$\frac{n(1)^{n+2} - (n+1)(1)^{n+1} + (1)}{((1) - 1)^2} \;=\; \frac{n - n - 1 + 1}{0} \;=\; \frac{0}{0}.$$

我们使用洛必达法则来计算右侧。左侧的结果很简洁，因此我们知道右侧也应得到简洁的结果。若令 x 趋近于 1，并应用两次洛必达法则，则得到

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} \;&=\; \lim_{x\to 1} \frac{n(n+2)x^{n+1} - (n+1)(n+1)x^n + 1}{2(x-1)}, \\ &=\; \lim_{x\to 1} \frac{n(n+2)(n+1)x^n - (n+1)^2 nx^{n-1}}{2}, \\ &=\; \frac{(n^3 + 3n^2 + 2n) - (n^3 + 2n^2 + n)}{2}, \\ &=\; \frac{n^2 + n}{2}, \end{aligned}$$

[3]由于

$$x\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{(x-1)^k} = \frac{x(x-1)f'(x) + kxf(x)}{(x-1)^{k+1}}$$

对于任意多项式 $f(x)$，显然，对几何级数连续应用算子 $x(d/dx)$ 共 d 次，所得表达式的形式为 $g(x)/(x-1)^{d+1}$。

这就是所声称的公式 $p_1(n) = n(n+1)/2$。

在应用洛必达法则之前，我们可以先试着推断右边应该是什么。正如前面所说，从黎曼和可知

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n \approx \int_0^n x dx = \frac{1}{2}n^2$$

右边的首项必须是 $n^2/2$。取 $n = 0$ 后可知，如果它是一个多项式，那么常数项必须为零。我们还知道，分母不会带来任何 n 相关项，因为分母始终是 $(x-1)$ 的幂；应用 $x\frac{d}{dx}$ 和洛必达法则时，分母中也从来不会出现任何 n 相关项。至于分子，取足够多次导数使分母变为常数后，我们会发现，取 $x = 1$ 时，x 的指数是多少并不重要，因为结果都会是 1。因此，分子是关于 n 的多项式。于是，应用两次洛必达法则后可知，右边是关于 n 的二次多项式。

现在我们来求平方和的公式，不过代数运算要繁琐一些。和之前一样，我们先对有限等比级数公式两边应用 $x\frac{d}{dx}$：

$$0 + 1x + 2x^2 + \cdots + nx^n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2},$$

然后再次应用 $x\frac{d}{dx}$，得到

$$x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + n^2x^n = \frac{n^2x^{n+4} + (-3n^2 - 2n + 1)x^{n+3} + (3n^2 + 4n)x^{n+2} - (n+1)^2x^{n+1} - x^3 + x}{(x-1)^4}.$$

应用 $x = 1$ 后，左边是求和至 n 的平方和，而右边则变为$0/0$:

$$\frac{n^2(1)^{n+4} + (-3n^2 - 2n + 1)(1)^{n+3} + (3n^2 + 4n)(1)^{n+2} - (n+1)^2(1)^{n+1} - (1)^3 + 1}{(1-1)^4}$$
$$= \frac{n^2 + (-3n^2 - 2n + 1) + (3n^2 + 4n) - (n+1)^2 - 1 + 1}{(1-1)^4} = \frac{0}{0}.$$

注意到右侧分母为 $(x-1)^4$,，其中不依赖于 n。唯一与 n相关的部分在分子中。取极限后，右侧是一个多项式，因为每次应用洛必达法则时，我们都会得到从 x 的幂的指数中降下来的 n 多项式。在 $x = 1$ 处求值时，单项式 x^k 无论其次数是多少都贡献 1，于是剩下的是一个关于 n 的次数为 3 的多项式。我们必须谨慎处理各项如何约去，但由于我们知道左侧形式良好，因此经过一些代数运算后，我们也知道右侧必然具有良好的极限。此外，由于通过黎曼和的计算，我们知道首项应当是什么，因此可以确定它将是一个次数为 $d+1$ 的多项式。

令 x 趋近于 1，取右侧的极限并应用四次洛必达法则后，我们得到

$$\lim_{x\to 1} \frac{n^2x^{n+4} + (-3n^2 - 2n + 1)x^{n+3} + (3n^2 + 4n)x^{n+2} - (n+1)^2x^{n+1} - x^3 + x}{(x-1)^4} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6},$$

这就是所需的 $p_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6$。注意，我们知道必须恰好应用四次洛必达法则，因为极限存在，而应用次数少于四次会导致分母为零。

我们可以继续应用 $x\frac{d}{dx}$ 和洛必达法则，从而得到 $p_3(n)$ $p_4(n)$ $p_5(n)$ 等的公式。我们不仅会发现这些和是多项式，还能得到它们的系数。遗憾的是，对于 d^{th} 次幂的和，我们需要使用洛必达 2^d 次，所得的代数运算虽然可以完成，却会变得十分繁琐。因此，更好的做法是直接注意到，这一论证立即表明它必定是某个常数项为零、首项为 $x^{d+1}/(d+1)$ 的多项式，然后另寻方法确定其系数。这可以通过克莱姆法则完成；这一论证是标准的，为完整起见，§4 中给出了相关内容。接下来，我们转而分析应用 $\frac{d}{dx}$ 而不是 $x\frac{d}{dx}$ 时会发生什么。

3. Algebraic remarks

回顾如下定义的"下降幂"

$$(y)_k \;:=\; \prod_{i=1}^{k}(y-i+1) \;=\; y(y-1)\cdots(y-k+1)$$

对于 $k\in\mathbb{N}$ （采用通常的"空积"约定（y）$_0=1$）。令

$$f_n(x) \;:=\; 1+x+x^2+\cdots+x^n \;=\; \frac{x^{n+1}-1}{x-1},$$

and

$$g_k(x) \;:=\; \left(x\frac{d}{dx}\right)^k f_n(x) \;=\; x+2^kx^2+3^kx^3+\cdots+n^kx^n,$$

$$h_k(x) \;:=\; \frac{d^k f_{n+k}}{dx^k} \;=\; (k)_k+(k+1)_kx+(k+2)_kx^2+(k+3)_kx^3+\cdots+(n+k)_kx^n.$$

注意，g_0（x）$=1+x+\cdots+x^n$ 以项 $1=0^0$开头；按目前的写法，上方关于 g_0的表达式仅在 $k\geq 1$ 时成立（在该表达式中加上看起来有些奇怪的项 0^k，就能使它始终成立）。前（$n+1$）个"下降 k 次幂"之和，

$$q_k(n) \;:=\; h_k(1) \;=\; (k)_k+(k+1)_k+\cdots+(n+k)_k,$$

有简单的闭式 q_k（n）$=$（$n+k+1$）$_k$/（$k+1$）。用归纳法很容易证明这一点。与前面论证类似，我们还可以反复应用洛必达法则，证明它是关于 n 的次数为 $k+1$ 的多项式。

固定 k 后，稍加思考便可看出，$\{g_0,\ldots,g_k\}$ 和 $\{h_0,\ldots,h_k\}$（例如在 $\mathbb{R}$ 上）张成同一个多项式线性空间。事实上，这可由一个更简单的观察得出：不定元 y 的下降幂（y）$_0$，（y）$_1$，....., （y）$_k$ 张成的空间——由次数至多为 k 的多项式构成——与单项式 1、y、y^2、.....、y^k 张成的空间相同。因此，第 2 节的微分方法中隐含着一种执行基变换的方法。欢迎感兴趣的读者将这一构造明确写出，把标准单项式 y^k 表示成如下形式

$$y^k \;=\; \sum_{j=0}^{k} S(k,j)(y)_k,$$

从而得到系数 $S(k,j)$ 的一个（众所周知的）递归定义；这些系数就是第二类斯特林数。[4]

4. Matrix Method for Computing $p_d(n)$

根据定理 1.1，我们知道 $p_d(n)$ 是一个次数为 $d+1$、首项为 $n^{d+1}/(d+1)$ 且常数项为零的多项式。正如前面提到的，证明这一点的标准方法是归纳法，例如参见 [MT-B],，但归纳法的难点在于我们需要知道目标是什么。具体来说，我们需要一个关于 $p_d(n)$ 的多项式。我们用洛必达方法立即证明了该和是一个多项式，但确定其系数却是一项繁琐的计算。下面说明如何通过插值法轻松求出这些系数；请注意，这也可以用来构造归纳法证明。

假设 $p_d(n)=a_1n+\cdots+a_dn^d+a_{d+1}n^{d+1}$。定理 1.1 告诉我们 $a_{d+1}=1/(d+1)$ 和 $a_0=0$。若在 $n=1$、2、.....、$d+1$ 处计算 $p_d(n)$，则得到以下方程组：$d+1$

$$\begin{aligned}
p_d(1) \;&=\; a_11+\cdots+a_d1^d+a_{d+1}1^{d+1} \;=\; 0^d+1^d,\\
p_d(2) \;&=\; a_12+\cdots+a_d2^d+a_{d+1}2^{d+1} \;=\; 0^d+1^d+2^d,\\
&\vdots\\
p_d(d+1) \;&=\; a_1(d+1)+\cdots+a_d(d+1)^d+a_{d+1}(d+1)^{d+1} \;=\; 0^d+1^d+\cdots+(d+1)^d.
\end{aligned}$$

[4] $S(k,j)$ 的标准组合定义是：将一个含有 n 个元素的集合划分为 k 个（非空）部分的划分数。

我们可以建立以下矩阵形式，以求出系数

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^{d+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (d+1) & (d+1)^2 & \cdots & (d+1)^{d+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{d+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_d(1) = 0^d + 1^d \\ p_d(2) = 0^d + 1^d + 2^d \\ \vdots \\ p_d(d+1) = 0^d + 1^d + \cdots + (d+1)^d \end{pmatrix}.$$

注意，左边的方阵是范德蒙德矩阵，并且由于各列互不相同，因此可逆；关于范德蒙德矩阵的更多内容，请参见 [PTVF] 中的第 2.8.1 节。我们可以使用克莱姆法则求出 a_i，如下所示：

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{d+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^{d+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (d+1) & (d+1)^2 & \cdots & (d+1)^{d+1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_d(1) \\ p_d(2) \\ \vdots \\ p_d(d+1) \end{pmatrix}.$$

现在我们有了系数，可以将它们代入公式 $p_d(n) = a_{d+1}n^{d+1} + a_d n^d + \cdots + a_1 n$，并求出多项式。因此，如果 $p_d(n)$ 是一个多项式，那么它只能是唯一的一个多项式，而我们也有办法求出它（不过，即使 n 不大，计算过程也并不轻松）。

我们用一个例子来结束本节，演示如何使用这种方法。

例 4.1（使用矩阵方法求 $p_1(n)$ 的公式）。回忆一下，$p_1(n) = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$。设 $p_1(n) = a_2 n^2 + a_1 n$，因为我们显然知道它没有常数项。通过列出以下

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(1) = 0 + 1 \\ p_1(2) = 0 + 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

我们可以求出这些系数

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

我们得到 $a_2 = 1/2$ 和 $a_1 = 1/2$，从而得到 $p_1(n) = (1/2)n^2 + (1/2)n = n(n+1)/2$。

5. Related Sums

我们看到，对有限几何级数应用 $x\frac{d}{dx}$ 会得到幂和。若改为应用 $\frac{d}{dx}$，则会得到相关求和；在组合数学中，从一个求和转化为相关求和是一个标准问题。通常，难点在于确定恰当的权衡：是进行一些组合数学推导更好，还是进行更复杂的计算更好?

我们再次从几何级数开始

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

如果我们对等式两边应用 $\frac{d}{dx}$，就得到

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},$$

注意，由于我们没有对分子应用 $x\frac{d}{dx}$，其次数较小，因此导数计算稍微简单一些。

再次对两边应用 $\frac{d}{dx}$，可得

$$0 + 2 + 6x + \cdots + n(n-1)x^{n-2} = \frac{(x-1)^2(n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1}) - (nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)(2(x-1))}{(x-1)^4}.$$

遗憾的是，取 $x = 1$时，从计算左边可以看出，我们得到的已不再是平方和，而是

$$1(0) + 2(1) + 3(2) + \cdots + n(n-1) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k(k-1),$$

由此我们可以得到一个 这个求和的公式：取右侧在 x 趋近于 1 时的极限，并像之前那样应用洛必达法则。尽管这并不会得到平方和，但我们可以利用它来求出平方和。注意 ve 我们可以将其改写为 如下形式的上方求和，

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{l=1}^{n} l.$$

既然我们知道 $\sum_{l=1}^{n} l$ 是 $p_1(n)$，即直到 n的一次幂之和，就可以确定 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 是 $p_2(n)$，即直到 n的平方和。如果我们知道 $\sum_{l=1}^{n} l$ 是一个多项式（确实如此），那么我们就知道 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 也必定是一个多项式；由于我们已有 $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$ 和 $\sum_{l=1}^{n} l$的多项式，就可以求出这个多项式。我们可以推广这一方法，并用归纳法类似地证明 $p_d(n)$ 是一个多项式，再求出其系数的公式。

6. Concluding Remarks

这篇笔记旨在强调，证明一个结果的方法不止一种。对于某些问题，往往一种技巧比另一种更有效，因此，你见到的思路越多，就越有可能在解决今后的问题时，找到可用的方法。我们从几何级数公式出发；虽然我们给出了标准的裂项求和证明，但正如所指出的，参见 [M]，以及脚注中提到的视频，其中介绍了利用博弈论和无记忆过程的另一种方法，进一步印证了本文的观点。一般来说，证明恒等式并不容易；这里的方法展示了如何仅用简单的求导，就能构造出无穷多个恒等式，这极具价值。对恒等式求导是概率论中一项非常重要的技巧，常用于求概率分布的矩。[5] 关于这一点的更多内容，请参见 [M] ，以及第三位作者基于本书为其概率课程开设的相应线上讲座，例如

https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/341Fa21/，尤其是第18讲和第19讲。

References

[B] A. F. Beardon, *Sums of powers of integers*, 《美国数学月刊》第 103 卷（1996 年），第 3 期，第 201–213 页。[BQ] A. Benjamin 和 J. Quinn, *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, 美国数学会，2003 年，共 194 页。[GKP] R. L. Graham、D. E. Knuth 和 O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley，马萨诸塞州雷丁，1994 年，共 625 页。[M] S. J. Miller, *The Probability Lifesaver*, 普林斯顿大学出版社，2017 年，共 752 页。[MT-B] S. J. Miller 和 R. Takloo-Bighash, *An Invitation to Modern Number Theory*, 普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2006 年，共 503 页。[MT] S. J. Miller 和 E. Trevi˜no, *On the sum of k-th powers in terms of earlier sums*, 《大学数学杂志》第 53 卷（2022 年），第 3 期，第 220–225 页。[PTVF] W. H. Press、S. A. Teukolsky、W. T. Vetterling 和 B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* 2007, 1235 ，剑桥大学出版社，纽约，页数。

Department of Mathematics, University of Texas at San Antonio, TX 78249,
Email address: eduardo.duenez@utsa.edu,

[5]连续密度 $p(x)$ 的 k^{th} 阶矩是一种非负且积分为 1 的函数（离散密度当然也有类似的表述），其形式为 $\int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)dx$。请注意，有些分布的矩对所有 k 都存在，例如均匀分布或高斯分布；而有些分布的矩只对有限多个值存在，例如柯西分布。

Department of Mathematics, University of Connecticut, Storrs, CT 06269,
Email address: asimina.hamakiotes@uconn.edu,

Department of Mathematics and Statistics, Williams College, Williamstown, MA 01267
Email address: sjm1@williams.edu