arXiv:2302.03632v1 [math.GT] 7 Feb 2023

极小相干填充对的构造

HONG CHANG 和 WILLIAM W. MENASCO

摘要。令 S_g 表示亏格为 g 的闭可定向曲面。简单闭曲线的相干填充曲线对(α, β) 位于 S_g 中，是指其几何交数等于代数交数绝对值的填充对。位于 S_g 中的极小相交填充对 (α, β)，是指其交数在 S_g 的所有填充对中最小。本文从环面上的相干填充曲线对出发，给出一种在 S_g, $g \geq 3$, 上构造极小相交相干填充对的简单几何构造方法。相干填充对与方格铺砌曲面（也称为折纸曲面）存在自然对应关系；我们将讨论由该构造得到的折纸曲面。

1. 引言

紧致闭曲面 S_g 上的简单闭曲线，若其亏格为 $g \geq 2$ ，则称为本质的，如果它不围成一个圆盘。因此，以下“ S_g 中的曲线”均指 S_g 中的本质简单闭曲线。若两条曲线经过定向后所有交点的定向都相同，则称它们在 S_g 中相干相交。请注意，这与曲线的定向选择无关。如果两条曲线的交点数在其同伦类中达到最小，则称它们处于最简位置。显然，相干相交的曲线对已经在其同伦类中实现了最小交数。因此，对于相干相交的曲线，我们无需区分曲线对与其同伦类。若 S_g 中的一对曲线在其同伦类的所有代表元中，其在 S_g 中的补集都是圆盘的并，则称这对曲线填充。

设 $\alpha, \beta \subset S_g$ 是一个填充对。若交点数 $i(\alpha, \beta)$ 在 S_g 上所有填充对中达到最小值，我们称 (α, β) 为最小交点填充对。根据欧拉示性数，$i(\alpha, \beta) \geq 2g-1$。此外，由欧拉示性数可知，最小交点填充对具有这样的性质：$S_g \setminus (\alpha \cap \beta)$ 是一个单连通开圆盘。对于 $g = 1$ ，这一下界可通过子午线—经线对在几何上实现。对于 $g = 2$, 穷尽搜索交点数为 3 的填充对的有限种可能后，证实这样的填充对不存在，因此至少需要 4 个交点。然而，Aougab 和 Huang 在 [1] 中证明，对于所有 $g \geq 3$ ，都存在交点数达到 $2g-1$ 最小值的曲线填充对。（近期的相关研究还可参见 [7, 8]。）此外，如 [2], 所示，借助 α 和 β 的相干交点即可达到最小值，因此对于 $g \geq 3$, “最小交点填充相干对”并非空集。

在 [2] 中构造最小相交的填充相干对，很大程度上运用了来自对称群的代数技巧。本文提出一种替代性的几何构造方法，该方法采用简单的剪切与粘合技巧。借助这一构造，我们可以快速手工构造任意亏格的此类填充对。

1.1. 相干填充对与折纸曲面。对于一对填充曲线， α， $\beta \subset S_g$，将其置于各自的同伦类中，使 $|\alpha \cap \beta|$ 达到最小相交，则四价图 $\alpha \cup \beta = C^1 \subset S_g$ 可视为 S_g 上二维 CW 结构的 1-骨架。对偶图 $\widehat{C}^1 \subset S_g$ 也是一种 CW 结构的 1-骨架，其中每个 2-胞腔都是一个四边形，且包含一个 0-胞腔，即来自 $\alpha \cap \beta$（$\subset C^1$）的一个交点。为每个这样的四边形 2- 胞腔赋予 $[0,1]\times[0,1]$ 欧几里得正方形结构，便得到 S_g 的正方形铺砌。若 α 和 β 相交相干，则为这两条曲线赋予定向，可自然地将 “ 右侧、左侧、底部、顶部 ” 这几类分别对应到每块正方形瓦片的四条边界 1-胞腔。由此可知， $\widehat{C}^1$ 的每个 1-胞腔要么是两块正方形瓦片的左侧与右侧粘合，要么是底部与顶部粘合。也就是说，我们得到一个针对 S_g 的折纸曲面结构。具体而言，文献中有如下结果。

定理 1 ([5, 7])。 相干填充曲线对自然对应于 S_g上的折纸曲面。

折纸曲面的欧几里得正方形瓦片赋予我们一种平坦几何，但在有限个分支点处除外——CW 结构的每个 2-胞腔对应一个分支点——这些分支点对应于瓦片角点彼此粘合的位置。由相交的相干填充曲线对产生的折纸曲面称为具有一个 水平圆柱 和一个 垂直圆柱的折纸曲面。图 1 （ [2]中的图 1）展示了这样一个折纸曲面，该折纸曲面对应于 S_3 ，并且恰好是三阶亏格中除标记外唯一的折纸曲面 [4, 2]。

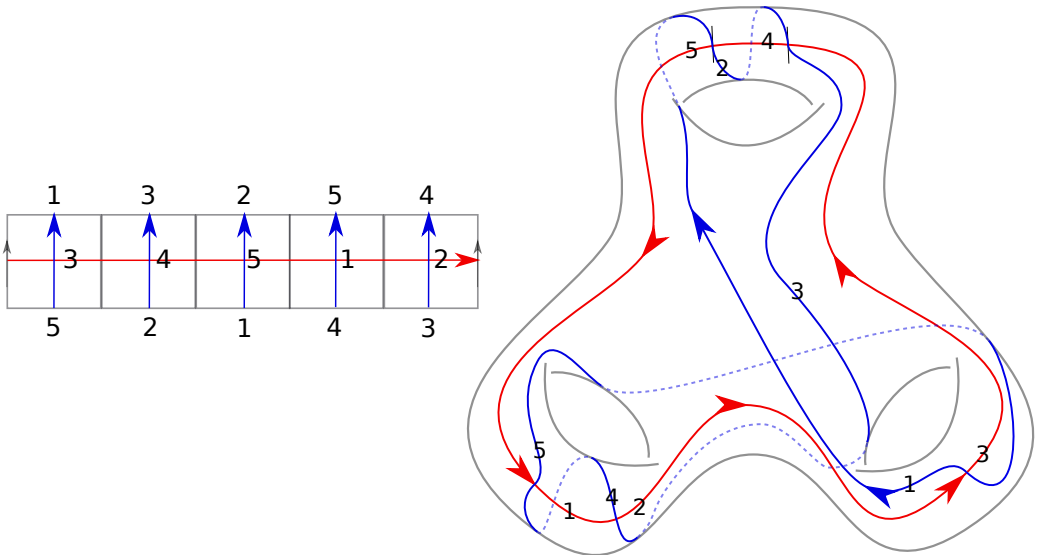

图 1。左侧展示了一个填充对（即 C^1）、相关的正方形瓦片，以及折纸曲面结构的左/右、下/上粘合对应关系。右侧展示了其在 S_3 上的几何实现。左侧对 C^1 的红色/蓝色边进行的数字标记，与右侧的数字标记相对应。注意，由于 $S_3 \setminus (\alpha \cup \beta)$ 只有一个分支点，因而恰好存在一个分支点。

由 S_g 上的欧几里得正方形铺砌所诱导的 S_g 平坦度量，在每块独立的正方形瓦片上生成水平叶状结构，并可将其延拓为 S_g 上的测度奇异叶状结构 $\mathcal{F}$ 。Hubbard-Masur 的一个基本定理将唯一的二次微分与这一水平叶状结构相关联，因此也与该正方形铺砌 [6]相关联。因此， S 的一种折纸曲面可以被视为单位面积空间中的一个点

二次微分。当 $\mathcal{F}$ 可定向时，该折纸曲面具有平移曲面的结构，相应的二次微分将是一个阿贝尔微分的平方。

1.2. **概述**。 在第2节中，我们介绍将要使用的剪切粘贴手术操作。这些手术操作具有这样的性质：从环面上的一对相干填充曲线出发，我们以增加曲面亏格为代价，减少填充对补集中的圆盘数量。当圆盘分支的数量减少到一个时，便可得到最小交填充曲线对。

以往关于构造和理解最小交填充曲线对的研究，主要关注不等价曲线对数量的增长 [1, 2, 3, 4]。因此，了解如何通过我们的手术构造出不等价的极小相干填充对，是一个值得研究的问题。在第 3节中，我们将使用“树图”分析来理解我们的手术构造如何产生不等价的填充对。

最后，在第 4 节中，我们将构造推广到$S_{g,\ p}$亏格为 g且具有 p 个穿孔的定向曲面。在带穿孔曲面的情形下，一对曲线填充对的补集是由圆盘和单穿孔圆盘组成的集合。

记号。在本文中，我们用 S_g 表示亏格为 g 的闭可定向曲面。$S_{g,\ p}$ 表示亏格为 g 、带有 p 个标记点或穿孔的闭可定向曲面。 ∂Y 表示紧曲面 Y 的边界。 $|X|$ 表示集合 X 的基数。

致谢。我们感谢 [2]的作者允许我们使用图1。这项工作的起源是第二作者与 Tarik Aougab 和 Mark Nieland 的合作，他感谢他们就本文主题进行的多次讨论。

2. 在 S_1 上的相干填充曲线对上的手术

我们构造亏格为 $g \geq 3$ 的可定向闭曲面上的极小相干相交填充对的策略，是从环面 S_1 上的一对相干相交填充曲线（α， β）开始，它们相交 g 次。（使用有序二元组 $\langle m, l\rangle$（$=$ 〈子午线，经线〉）来指定 S_1 上的曲线同伦类，读者可以将 $\alpha \subset S_1$ 看作 $\langle 0, 1\rangle$ 曲线，将 $\beta \subset S_1$ 看作 $\langle g, 1\rangle$ 曲线。）我们的构造需要分别考虑 g 为奇数和 g 为偶数两种情况。对于奇数情形，我们将在图 $\alpha \cup \beta \subset S_1$ 上进行一次简单手术，加入 $g-1$ 个新顶点。起初， $S_1 \setminus$（$\alpha \cup \beta$）有 g 个圆盘分支。对 β 进行简单手术会以亏格替换圆盘分支——每次手术都会使圆盘分支数量减少一个，同时使所得曲面的亏格增加一。最终曲面的亏格将为 $2g-1$ ，并且所得填充对（α， β'）的补集中恰有一个圆盘分支，适用于 S_{2g-1}。当 g 为偶数时，还需要再进行一次简单手术，以圆盘换亏格，直到达到 $2g-1$ 亏格。

2.1. 填充对上的两种简单手术。设 (α, β) 是 $S_{g\geq 1}$ 的一个填充对，并考虑图 $\alpha \cup \beta \subset S_g$ 的一个闭正则邻域 N。我们假设 α 和 β 的位置使它们在例如 β 的同伦类中相交次数最少。因此， ∂N 的每个边界分支都在 S_g 中围成一个圆盘。特别地，我们关注 $p \in \alpha \cap \beta$ 附近的任意小邻域 $\nu(p) \subset$ N，其中 $p \in \alpha \cap \beta$ 是四价交点之一——图2这一组图中的第一幅展示了 $\nu(p)$。 $\nu(p)$

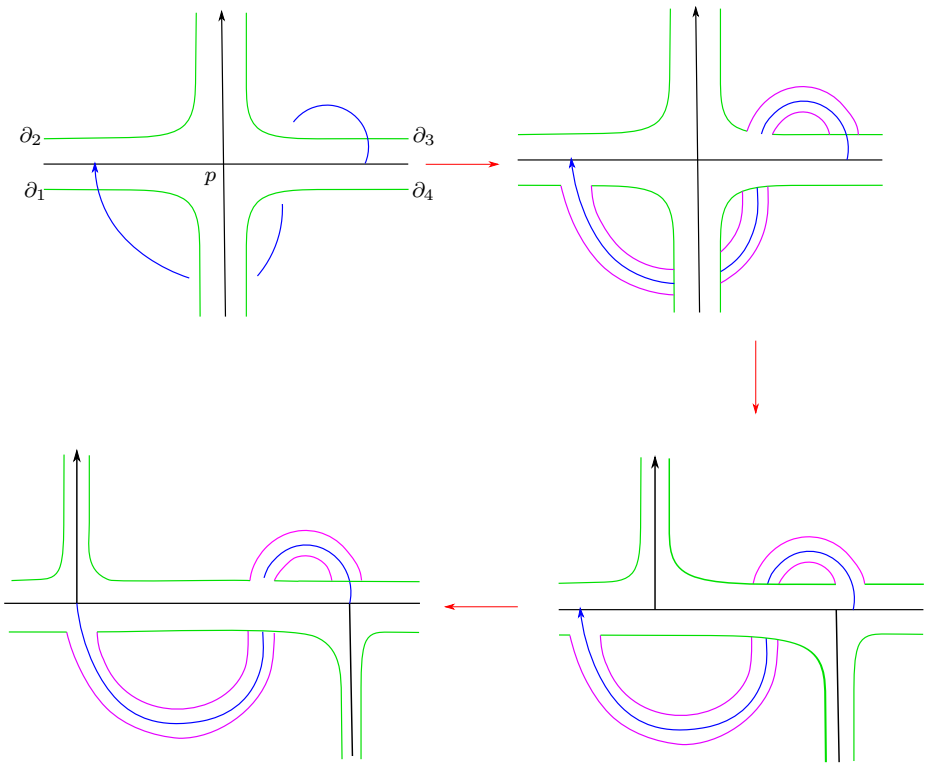

图2。序列中的第一幅图展示了待添加带的延伸核心，其端点位于 α 上。第二幅图展示了添加的带。序列中的第三幅和第四幅图展示了如何在 $\alpha \cap \beta$ 中“剪切”交点，并将其邻接，或“拼接”，到带的延伸核心的端点上。显著特征是 ∂_1 和 ∂_3 是由带连接的。

将包含四个边界分支的部分线段， ∂_1、 ∂_2、 ∂_3 和 ∂_4 如图2这一组图中的第一幅所示。2。我们注意到， ∂_i'的某些可能是 ∂N的同一分支。取 α 附近的 p 作为东西轴，并取 β 作为南北轴，四条边界线段的位置满足： ∂_1 位于西南（SW）， ∂_2 位于西北（NW）， ∂_3 位于东北（NE）， ∂_4 位于东南（SE）。

单个 1-柄手术—现在我们将一个1-柄$B(\cong [0,1]\times[0,1])$粘到子曲面$\mathbf{N}$上，该1-柄附着于 ∂_1 (SW)和 ∂_3 (NE)。

参见图中序列的第二幅图。2，我们取一条弧 γ，作为所附着的 B的延伸核心。显著特征是 γ 附着在 $\alpha\cap\nu$西侧部分的南侧（东侧部分的北侧）。然后 $\alpha\cup\beta\cup\gamma$ 将在 $\mathbf{N}\cup B$ 中构成一个图，其中有若干个 4价顶点——数量与 $|\alpha\cap\beta|$相同——以及两个 3价顶点，即 γ的两个端点。

图 2 中的序列第三幅图展示了对 剪切 β 在点p处进行剪切，产生了两个新的3价顶点。读者应注意到，现在 3 个价顶点依次排列在 α上。第四幅图展示了如何重新排列这四个 3价顶点并将它们拼接 起来，从而产生两个新的 4价顶点和一个新的 β'。最后的第四幅图的关键特征是，由这次拼接产生的 $\alpha\cap\beta'$ 两个交点处的定向与原来的定向一致，交点为 $\nu\cap(\alpha\cap\beta)$——交叉 α 由南向北。

我们注意到，若 $\partial_1 \neq \partial_3$，则 $\partial(\mathbf{N} \cup B)$ 的边界分支数会减少一个，而 $\mathbf{N} \cup B$ 的亏格会增加一。此外，曲线对 (α, β') 将构成一个填充对，所在曲面由用圆盘封闭 $\partial(\mathbf{N} \cup B)$ 的每个分支边界得到，即 S_{g+1}。另外，$|\alpha \cap \beta| + 1 = |\alpha \cap \beta'|$。

通过旋转和反射，可以显然地推广这个手术序列。

在本文中，我们将多次回溯这一剪切与拼接构造。

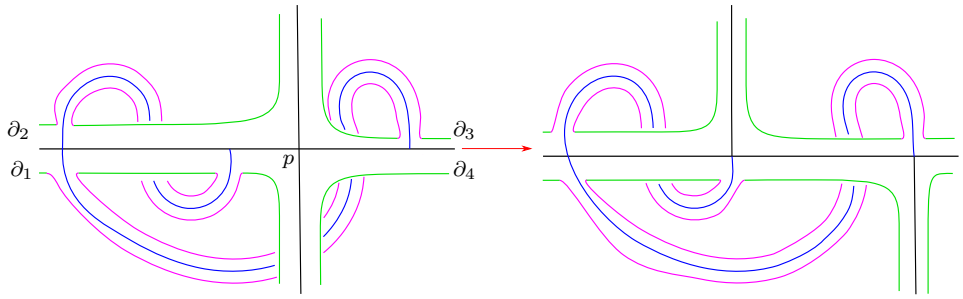

图3. 用一条弧连接三个边界分支

双1-柄手术——关于这一手术，请读者参见图3，了解我们将如何改变初始的 $\nu(p)$ 邻域。具体而言，我们粘入两个1-柄：一个1-柄 $B_{NW/SW}$，连接 ∂_2 (NW) 和 ∂_1 (SW)；另一个1-柄 $B_{NW/SE}$，同样连接 ∂_1 (SW) 和 ∂_3 (NE)。接着，我们取每个1-柄的一条核心弧，并将它们延伸到 $\nu(p)$ 中，从而形成一条单独的弧 γ；该弧连接 α，位于 $\nu(p)$ 中西部（东部）区域的北侧（南侧）。图2左侧示意图中的蓝色弧对应于 γ。注意，在此阶段，$\alpha \cup \beta \cup \gamma$ 是 $\mathbf{N} \cup B_{NW/SW} \cup B_{SW/NE}$ 中的一个图，具有 $|\alpha \cap \beta| + 1$ 4 个价为3的顶点以及两个3价顶点。

最后，我们在 β 点 $p \in \alpha \cap \beta$ 处进行剪切，形成两个3价顶点。与第一次手术一样，随后在 α上会有四个依次排列的3价顶点。图2右侧的示意图展示了这四个顶点如何重新对齐，从而形成两个新的4价顶点，并通过拼接到 β 延伸核心弧中，得到一条新的 β' 曲线。与第一次手术一样，β' 的两个新顶点是与 α 的交点，其交叉方式与原始点 p 一致—— α 由南向北穿过。因此，我们再次得到一个剪切与拼接构造，从 β 变为 β'。

假设 ∂_1、∂_2、∂_3 都是$\mathbf{N}$ 的不同边界曲线，那么 $|\partial(\mathbf{N} \cap B_{NW/SW} \cap B_{SW/NE})| = |\partial \mathbf{N}| - 2$。因此，曲线对（$\alpha$，$\beta'$）是在通过圆盘封闭 $\partial(\mathbf{N} \cap B_{NW/SW} \cap B_{SW/NE})$)的每个分支后所得曲面上的填充对，即 S_{g+2}。此外，$|\alpha \cap \beta| + 2 = |\alpha \cap \beta'|$

最后，通过旋转和反射对这两个手术序列进行了推广。

2.2. 构造极小相干填充对。有了这两种手术方法，我们现在可以构造亏格为 $g \geq 3$ 的极小相干相交填充对。

如 § 2 开头所述，我们从一对交点数为 g 的填充对开始，其中 S_1。同样，α 是一条 $\langle 0, 1 \rangle$ 曲线，β 是一条 $\langle g, 1 \rangle$ 曲线。我们为 α 指定一个定向，并将 g 个交点标记为 $\{p_1, p_2, \cdots, p_g\} = \alpha \cap \beta$，使得这些点在 α 上的循环次序与由 ν（p_i）标签的指标所给出的循环次序相对应。接下来，我们以类似的方式为 β 指定定向——沿着 β 经过时，第 mod（g）个交点是 p_i。

我们的构造要求分别考虑 g 为奇数和偶数的情况。图 4 上方的示意图中 $g=3$，代表 g 为奇数的情形。图 4 下方的示意图中 $g=4$，代表 g 为偶数的情形。

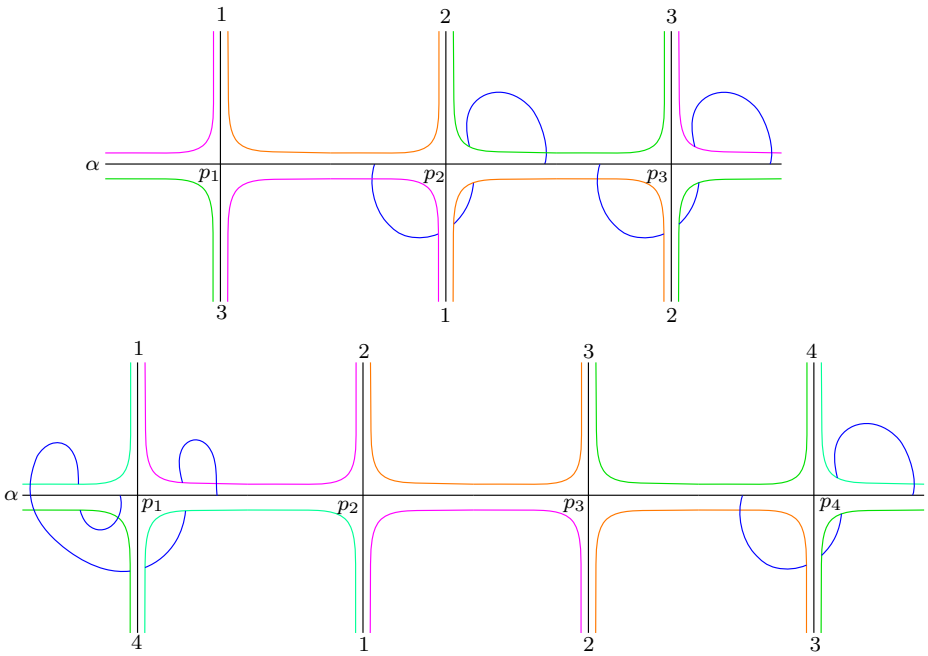

图 4。上方图示有 $g=3$，代表奇数情形。下方图示有 $g=4$，代表偶数情形。每幅图中的水平线段均将左右端点识别，并对应于 α 曲线。垂直线段端点上的标记表示对其端点的识别方式，从而形成 β 曲线。

参见图4，用一条左右端点识别的水平线段来表示 α 曲线十分方便。接着，我们可以用 β条 g 垂直线段来表示 α 曲线，每条垂直线段都在中点处与1 到 g的表示相交一次。从左到右，给这些 g 垂直线段的上端点标上 g，再给垂直线段的下端点标上1 到 $g-1$的标记。通过将上端点标记与下端点标记对应粘合，即可得到 β。

给这些标注赋予标签也很有帮助，p_1 通过 p_g，为水平 α 线段与竖直线段的交点——p_i 将位于竖直线段中，并具有 i 作为顶部端点标签。接下来，当我们考虑 $\mathbf{N}$ 的$\alpha\cup\beta\subset S_1$正则邻域时，在 p_i附近有四条“罗盘”边界曲线，NE_i，NW_i，SW_i，SE_i，其中，由于用于连接竖直线段标签的编号方案，$NE_i=NW_{i+1}$，$SE_i=SW_{i+1}$，$NW_i=SE_i$为了帮助读者识别图4 中的这一对应关系，我们通过颜色标示区分了 $\partial\mathbf{N}$ 的各个分支。读者应注意，$|\partial\mathbf{N}|=g$。

关键问题在于，一个“1-柄附着方案”作用于 $\partial\mathbf{N}$ 后，何时会得到一个只有一条边界的曲面。（在 §5 中，我们将扩展并精确定义“方案”的概念。）为此，我们定义附着图或 A-图，G。G 的顶点对应于 $\partial\mathbf{N}$的分支。若两个顶点共享某个指定 1-柄的附着端，则它们之间有一条边

此时 G 将有 g 个顶点和 $g-1$ 条边。于是得到以下引理。

引理 2. 给定将 $g-1$) 1-把手附着到 ∂N上的附着方案，所得曲面恰有一个边界分支，当且仅当 A-图 G 是一棵连通树。

以下引理的证明将推迟至 § 3。

现在我们给出两种方案——一种用于 g 奇数情形，另一种用于 g 偶数情形——将1-把手附着到N上；两种方案都采用 § 2.1中的1-把手手术。

当 g 为奇数时。在每个交点的邻域内，p_i, $2 \le i \le g$，我们对 SW_i到 NE_i进行一次1-把手手术，手术附着于 $2 \le i \le g$。容易看出，图 G是一棵线性树。（读者可参阅图4的上部。）因此，根据引理2，所得曲面只有一个边界分支，亏格为($2g-1$)。

如前所述，所得的填充对仍将具有相干交。□

为 g 为偶数的情形。在 p_i 的邻域内，我们进行一次二 1-把手手术：在 NW_1与 SW_1之间附加一个 1-把手；并且，NW_1与 SE_1之间也是如此。然后，在每个交点的邻域内，p_i、$4 \le i \le g$，我们进行一次附加于 1-把手的手术，将其从 SW_i连接到 NE_i，其中 $4 \le i \le g$。同样，很容易观察到，关联图 G是线性树。（读者可参阅图 4的下部。）此外，定理2 再次表明，所得曲面只有一个边界分支，其亏格为 $(2g-1)$。

同样，所得的填充对仍将具有相干交。 □

基于上述两种手术方案，我们可以陈述以下结果。

定理 3。对于亏格 $g \ge 3$，我们可以利用 *§* 2.1 中的两种 *1*-把手手术构造极小相干填充对。

到目前为止，读者或许已经意识到，还可以采用其他方式连接 1-柄、剪切顶点并切割扩展手柄核，从而得到一条边界曲线和一个新的 β'。在接下来的几节中，我们将探讨其他此类方式。

注 4. 对于 $g=2$，如果我们尝试用单次 1-手柄手术将一个 1-柄连接到 ∂N ，就会“无处可施”。也就是说，关联图 G 不会是连通树，因为两点 $p_1, p_2 \subset \alpha \cup \beta \subset$ N 都只与 ∂N 的两条边界曲线相邻。因此，我们无法构造满足 $\alpha \cap \beta = 2 \cdot g - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ 的填充对。这种“构造失败”与这样一个事实相符：对于亏格 2，我们需要 $|\alpha \cap \beta| = 4$。

3. 1-柄附着方案与填充对

现在我们给出此前使用过的引理的证明。

引理的证明*3.* 首先，我们假设所得曲面恰有一个边界分支。我们将证明 G 必定是一棵树。

我们注意到，我们对图 G 的定义实际上与填充对无关，只取决于 N 的曲面类型。也就是说，N 与$S_{1,0,g}$ 同胚，是一个亏格为一且没有穿孔（或标记点）的紧曲面，并且

g 个边界分支。给任意带边界曲面附加一个 1-柄，会使所得曲面的边界分支数量增加或减少一个。要实现前者（后者），1-柄的两端必须附加到同一个（不同的）边界分支上。

基于上述考虑，我们取一个最小值的 $\hat{g}$，使得定理不成立。于是，对于 $\mathbf{N} \cong S_{1、o、\hat{g}}$，存在一个将（$\hat{g}-1$）个柄附着到 $\hat{g}$ 个边界分支上的附着方案，该方案产生一条单一边界曲线，但其关联的 A-图不是树。

接下来，我们取一个最大的柄子集，使其得到的 A-图 G' 的每个分支都是树。（根据假设，该柄子集少于（$\hat{g}-1$）个柄。）我们的柄子集的基数为（$\hat{g}-|G'|$）。此外，还有 $|G'|-1$ 个柄需要附着。并且，每个分支对应于所得子曲面的一个边界分支，即共有 $|G'|$ 个边界分支。

如果现在我们附加一个不属于极大子集的柄，那么必然会导致 A-图的某个分支不是树。这意味着该柄的两端附着在同一个边界分支上。然而，这是不可能的。我们处于这样的情形：有一个具有 $|G'|(<\hat{g})$条边界曲线的曲面，以及 $|G'|-1$ 个待附加的柄，目标是得到单个边界分支。根据假设，$\hat{g}$ 在构造反例时是极小的，因此我们得到矛盾。

对于定理的另一方向，我们采用归纳法。若$\mathbf{N}$最初有两个分支，在它们之间附加一个 1-柄，就会得到单个边界分支，且关联图 G 是一棵树。现在假设我们可以附加

现在考虑关联图 G，它来自将$(g-1)$ 个 1-柄附加到$\mathbf{N}$的 g 个边界分支上的附加方案。并假设 G 是一棵连通树。我们用$\mathbf{N}'$ 表示所得曲面，并注意到$\mathbf{N}$ 自然地可视为$\mathbf{N}'$中的一个子曲面。此外，从$\mathbf{N}'$ 中删去$\mathbf{N}'$ 内对应于 1-柄“内部”的开集（同胚等价于 $\mathbf{(0,1)} \times [0,1]$），即可得到$\mathbf{N}$ 。

因此，我们的论证前半部分所描述的类似情形也会出现。删去任意带边界曲面中一个 1-柄的内部，所得曲面的边界分支数会增加或减少一个。若要使边界分支数增加（减少），则 $\{1\text{–柄}\} \cap \partial\mathbf{N}'$ 的两个分支必须位于$\mathbf{N}'$的同一个（不同的）边界分支上。由于删去$\mathbf{N}'$ 中（$g-1$）个 1-柄的内部后，所得曲面有 g 个边界分支，而 G 是连通的——$\mathbf{N}$ 的每个边界上都至少附着了一个 1-柄——我们得出结论：$|\partial\mathbf{N}'|=1$。□

如前所述，定理 3 的 1 柄附着方案并不唯一，因为很容易构造出其他1柄附着方案，其关联图 G 是一棵树。图 5 给出了这样一个例子。

示例 **5** （S_{11}的附着方案。）。起初，β 曲线是$(6,\ 1)$ 曲线，位于S_1 上，其中 α 仍是$(0,\ 1)$ 曲线。和之前一样，我们有 $\{p_1,\cdots,p_6\}=\alpha\cap\beta$，如图5上方的插图所示。为避免图示过于杂乱，我们不绘出与 β相关的垂直弧。最后，我们用数字彩色标签对 $\partial\mathbf{N}$ 的边界分支进行双重标记。

我们将一条定向蓝色弧记作 γ，其端点位于点 $p_2(\subset\alpha\cap\beta)$ 的左右两侧的 α 中。我们用 γ 表示将五个 1-柄附着到

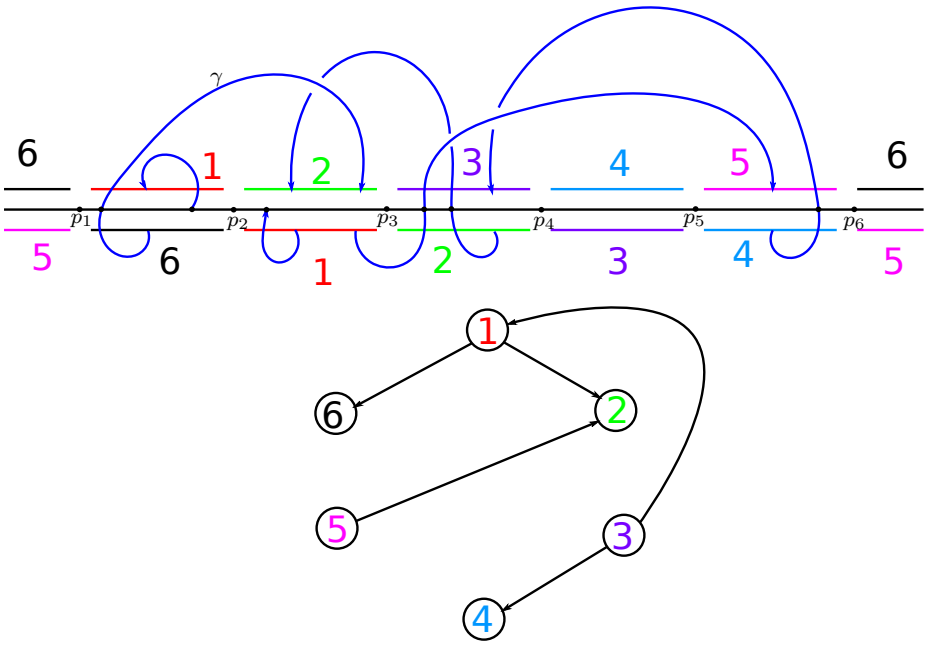

图5。弧 γ 包含五个1-柄的延伸核心。这里只有一个剪切和拼接操作，位于 p_2 处。它将 γ 拼接进 β，从而生成 β'。下方的图示描绘了关联图 G，它是一棵树。

$\partial\mathbf{N}$ 的分支上。具体来说， γ 是五个延伸的 1-柄核心的并集。这五个延伸核心的端点位于 α 中：一个在 p_1 的右侧；一个在 p_3 的右侧；一个在 p_6 的左侧；另外两个端点分别位于 p_2 的左侧和右侧。

最后列出的两个点，即 γ 的端点，尤其值得关注。它们位于 α 上，因此我们可以通过在 β 处对 γ 进行剪切，将其拼接进 β，随后按照图 2&3 中此前所示的方式重新连接端点。所得曲线将成为我们的新 β'。回到 γ 的定向赋值，可以看到它与我们一直赋予 β 的定向一致—— β 的边被描绘为从下方进入 α，并从上方离开 α。因此，新的 β' 将与 α 产生相干交。

图 5 底部的插图描绘了相应的 A-图， G。（G 的有效性留给读者验证。）由于 G 根据引理2 是一棵树，我们得出结论：这种1-手柄的附着方案为 S_{11}生成了一个极小相干填充对。此外，1-手柄的延伸核心从 γ 继承了定向，从而赋予 G 的每条边一个定向。例如，1-手柄的核心从1/红色边界曲线延伸至6/黑色边界曲线，从而在 G中得到一条从1/红色顶点指向6/黑色顶点的边。 $\diamond$

从这个例子可以看出，一组 1-柄的附着方案可以通过指定一个不相交的有向弧族 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ 来描述；这些弧的端点位于我们的初始 α 曲线上——一条位于 S_1 上的 $\langle 0, 1\rangle$ 曲线——并且以与 β 相一致的相干方式与 α 相交——一条位于 S_1 上的 $\langle g, 1\rangle$ 曲线。然后，将 1-柄附着到 $\mathbf{N}$ 上，使其延伸核心等于 $\cup_{1\leq i\leq n}\gamma_i$。每个$\gamma_i$ 都满足以下条件。（我们继续沿用这一设定： α 与 β曲线在 S_1 中相干相交，并且 $\mathbf{N}$ 是 $\alpha\cup\beta$ 的一个正则邻域。我们还

以同样的方式直观地描绘这一设定： α 一条单独的水平弧，其左右端点重合；以及，β 作为 g 竖直线段，方向由下指向上。）

1. 对于 $\partial\gamma_i$，存在一个交点 $p \in \alpha \cap \beta$，使得在 α 上，这两个端点紧邻 p 的左侧/右侧。2. γ_i 以相干的方式与 α 相交。3. γ_i 附着于 α，并以这样的方式定向：在点 p （前一条件）处进行剪切与拼接操作后，得到一条定向一致且与 α 相干相交的曲线。

满足上述三个条件的一组 γ 弧称为 1-柄附着方案。

对 1-柄附着方案中的每条 γ 弧执行剪切与拼接操作，将得到某个定向闭曲面上的曲线对（α， β'）。此外，还可以构造相应的 A-图 G。

我们有如下定理，其证明现已显而易见。

定理 6。 设 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ 是一个 1-柄附着方案。假设

$$|\cup_1^n \gamma_i \cap \alpha| - n = g - 1.$$

那么，所得曲线对是某个 S_g 的极小相干填充对，当且仅当 A-图 G 是一棵连通树。

4. 带穿孔的情形

现在，我们将极小相干填充对的构造推广到可定向有限型曲面S_{gp}上，其中亏格为 $g \geq 3$，并且有 p个（> 0）穿孔（或¯ ¯个标记点）。若两条曲线 $\bar{\alpha}\beta \subset S_{gp}$在其同伦类中经过最小化交点数的摆放后， $\bar{\alpha}$ 与 β ¯相交，则$S_{gp} \setminus$（$\bar{\alpha} \cup \beta$）由圆盘和单穿孔圆盘组成，我们称这对曲线为填充对。根据欧拉示性数论证，填充曲线对所需的最少交点数为¯ $2g + p - 2$ [7]。若（$\bar{\alpha}\,\beta$）是一个极小填充对，则$|S_g$ $_p \setminus$ （$\bar{\alpha} \cup \beta$）$| = p$。或者，考虑一个正则¯邻域 $\mathbf{N}$（$\bar{\alpha} \cup \beta$）$\subset S_{gop}$，则有 $|\partial\mathbf{N}| = p$。

我们对初始设置 α稍作 $\beta \subset S_1$ 修改，要求 $|\alpha \cap \beta| = g + p - 1$。因此， β现在是 $\langle$（$g + p - 1$） $1\rangle$ 上的一条曲线，而 α 仍然是一条 $\langle 0, 1\rangle$ 曲线。这意味着 $S_1 \setminus$（$\alpha \cup \beta$）具有（$g+p-1$）个圆盘分支。我们再次将 $\alpha \cup \beta$ 的一个正则邻域记为$\mathbf{N}$（$\subset S_1$）。

我们以与第 γ 节中完全相同的方式，将一族弧, 定义为1-把手附着方案。因此，我们可以考虑一个附着方案的 A-图， G。如果 $|G| = p$，且每个连通子图分支都是一棵树，其中恰有一个顶点对应于 ∂_i 的边界分支$\mathbf{N}$，那么所得的曲线对（α， β'）将是填充的。此外，如果

$$|\cup_1^n \gamma_i \cap \alpha| - n = g - 1,$$

所得曲线对 (α, β') 将是极小的，即 $(g+p-1)+(g-1) = 2g+p-2$。由于附着方案的第三个条件要求剪切与拼接操作产生一条与 α 相干相交的 β'，因此我们得到了为 $S_{g,p}, g \geq 3, p > 0$ 构造极小相干填充对的条件。

定理7 (另见 [7], 定理 1.3。)。 对于 $S_{g,\ p}, g \geq 3, p > 0$，存在极小相干填充对，适用于所有此类 g 和 p。

证明。 仅利用 § 2中的两次 1-柄手术，我们取任意一种 1-柄附着方案，其中包含 γ 条弧，并可得到 S_{g+p}的极小相干填充对。我们删去相关树图中的任意 $p-1$ 条边， G，从而得到一个非连通图，G'，它有 p 个子图。我们只选择那些对应于单次 1-柄手术以及两次 $B_{NW/SW}$ 柄手术中 1-柄手术的被删除边。读者应注意，删去 $B_{NW/SW}$ 会将两次1-柄手术改为单次 1-柄手术。

因此，根据构造，我们原始的 γ 弧集合中存在一个子集，它构成一个附着方案，从而生成一个亏格为 g、具有 p 个边界分支的曲面。此外， G' 是相应的 A-图，而该曲面将是由所得的四价图相干填充对 $\alpha \cup \beta'$的正则邻域。现在，用一个带单个穿孔的圆盘封闭每个 p 边界分支后，我们得到$S_{g,\ p}$。必然有 $|\alpha \cap \beta'| = 2g + p - 2$。

最后一个微妙的观察。我们可以从 G' 的每个分支中任意指定一个顶点，使其对应于一个指定的边界分支 p，∂_i。在 $S_1 \setminus (\alpha \cup \beta)$ 的每个相应圆盘中放置一个穿孔后，我们便可将这个$S_{1,\ p}$ 及其相干填充对（α， β）作为初始起始配置。于是，先前的 γ 弧子集将构成一个附着方案，生成一个$S_{g,\ p}$ 曲面上的极小相干填充对（α， β'）。□

参考文献

[1] TarikAougab, Shinnyih Huang. 曲面上的最小相交填充对。 代数与几何拓扑，15 (2015) 903-932。[2] TarikAougab, William W.Menascoand Mark Nieland. 与最小相交填充对相关的折纸曲面，《太平洋数学杂志》，第317卷（2022），第1期，1–20。[3] TarikAougab, Samuel J. Taylor. 曲线图中的小交点数。 代数与几何拓扑，15 (2015) 903-932。*Thurston* 关于曲面的工作，普林斯顿大学出版社（2021），第48卷。[4] Hong Chang，最小相交填充相干对数量的上界，电子预印本，arXiv:2208.01126，2022。[5] Hong Chang, Xifeng Jin, and William W. Menasco, 曲线图中的折纸边路径，《拓扑及其应用》，2021，第298卷。[6] J. Hubbard 和 H. Masur。 二次微分与测度叶状结构。《数学学报》，142:221-274，1979。[7] Luke Jeffreys。亏格二穿孔曲面上的最小相交填充对，《拓扑及其应用》254 (2019)，101-106。[8] Mark Nieland。 具有最小相交填充对的曲面连通和分解，电子预印本，arXiv: 1603.03269，2016。

Hong Chang，数学系，纽约州立大学布法罗分校，布法罗，纽约州 14260-2900，美国，hchang24@buffalo.edu William W. Menasco，数学系，纽约州立大学布法罗分校，布法罗，纽约州 14260-2900，美国，menasco@buffalo.edu