arXiv:2302.03647v2 [math.CO] 6 Mar 2023

特征 imset 多胞体的直径

PETTER RESTADH

Abstract. 已有研究表明，特征 imset 多胞体的边结构与因果发现问题密切相关。多胞体的直径反映了其连通程度，还为沿多胞体边行走提供了一个假想的最坏情形。我们给出了 CIM_n 直径的低次多项式界；对于任意给定的无向图 G，也给出了其面 CIM_G 的低次多项式界。

1. Introduction

最近，人们发现因果发现中的若干算法可表示为沿凸多胞体边行走。由此自然产生一个问题：这种沿边路径的效率能有多高？为此，我们研究了这些多胞体的直径。

设 $[n] \coloneqq \{1, \dots, n\}$ 和 $\mathcal{G} = ([n], E)$ 是一个有向无环图（DAG）。 $\mathcal{G}$ 的特征 imset $c_{\mathcal{G}}$ 是一个 0/1 向量，其坐标由 $[n]$ 的子集索引，并且在坐标 $S \in \{S \subseteq [n], |S| \geq 2\}$ 处取值

$$c_{\mathcal{G}}(S) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{if there exists } i \in S \text{ such that, } S \subseteq \mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(i) \cup \{i\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

接下来，我们将特征 imset 多胞体定义为

$$\mathrm{CIM}_n \coloneqq \mathrm{conv}\left(c_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G} = ([n], E) \text{ a DAG}\right).$$

多胞体 CIM_n 是一个满维多胞体（维数为 $\mathrm{CIM}_n = |\{S \subseteq [n], |S| \geq 2\}| = 2^n - n - 1$），其顶点恰好是有向无环图的特征 imset。映射 $\mathcal{G} \mapsto c_{\mathcal{G}}$ 并非单射；不过，我们清楚地了解在何种情况下 $c_{\mathcal{G}} = c_{\mathcal{H}}$ （见定理 1.4）。已有研究表明，CIM_n有许多面，至少每个 $[n]$ [17]上的连通拟阵对应一个面，但目前只有 $n \leq 4$的面有完整的描述。我们尤其关注如何用有向无环图来解释 CIM_n 的几何结构，例如边或面。

这些问题的研究动机源于因果发现领域。在该领域，一个备受研究的问题是如何寻找从数据推断有向无环图的算法[4, 15, 21]。为此，我们将 $i \to j$ in $\mathcal{G}$ 解释为 i 是 j的直接原因。Studen´y、Hemmecke 和 Lindner 将这一问题转化为关于 CIM_n [16, 18]的线性规划。 [9] 的作者指出，CIM_n的边结构尤为重要。在他们的论文中，我们得到了若干贪心算法的几何解释：它们是在 CIM_n 及其各个面上进行的边游走。具体而言，对于任意无向图 G，其面 [9]

$$\mathrm{CIM}_G \coloneqq \mathrm{conv}\left(c_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G} = ([n], E) \text{ a DAG with skeleton } G\right),$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 52B05, 52B12,62H22.*Key words and phrases.* 特征 Imset 多胞体，沿边路径，《图模型》，多胞体直径。

(CIM$_n$的)得到了研究。最近，研究者完整刻画了当 G 为 G树或环时 CIM 的边 [8]。对于一般的 G，目前所知较少，唯一具有明确解释的边是 [9, 命题 32],中给出的边：改变有向无环图中一条边的方向，且不产生有向环，就会得到 CIM$_G$ (见定理 2.1)。

给定任意多胞体 P， P, $G(P)$ 的顶点-边图是一个图，其节点对应于 P 的顶点；当且仅当 conv(v,u) 是 P 的一条边时， $v-u \in G(P)$ 才是一条边。我们将 $G(P)$ 中 v 与 u 之间的距离定义为 v 与 u 在 $G(P)$ 中最短路径的长度，并将 P 的直径 diam(P) 定义为 $G(P)$ 中任意两个顶点之间的最大距离。多胞体直径已得到广泛研究，并出现在若干不同的背景中 [10, 13, 22]。最初的研究动机是，多胞体的直径是单纯形型算法必须执行的步数的下界。它也能表明图 $G(P)$ 是稀疏的还是连接得更为紧密。因此，为了更好地理解因果发现的多面体性质，我们需要了解 CIM$_n$ 及其各个面的直径。

本文将为上述多胞体的直径建立低阶多项式界。具体而言，在第 2 节中，我们将看到，对于一般的无向图 $G = ([n], E)$ 有 diam CIM$_G \leq |E|$。如果 G 是一棵树，则通过 [8], 的工作，我们可以将该界改进为 diam CIM$_G \leq n-2$，并根据 G 的最大路径长度给出一个下界。这将在第 2.1节中完成。最后，在第 2.2 节中，我们利用一种新型的边证明了 diam CIM$_n \leq 2n-2$。鉴于这一线性上界，我们猜想，对于任意 n，diam CIM$_G$ 实际上都存在关于 G的线性上界。

1.1. 背景。设 $\mathcal{G}$ 是一个有向无环图。如果在 $\mathcal{G}$ 中有 $i \to j$，我们称 i 是 j的父节点，或者称 j 是 i的子节点。节点 i的所有父节点和子节点的集合分别记为 pa$_\mathcal{G}(i)$ 和 ch$_\mathcal{G}(i)$。对于定义在X_1、.....、X_n上的任意联合分布 P，如果 P蕴含条件独立性陈述，我们称 P相对于 $\mathcal{G}$满足马尔可夫性

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_{\mathrm{nd}_\mathcal{G}(i)\setminus \mathrm{pa}_\mathcal{G}(i)} | X_{\mathrm{pa}_\mathcal{G}(i)}$$

对所有 $i \in [n]$，其中 X_S 表示集合 $\{X_i\}_{i\in S}$，对于任意 $S \subseteq [n]$。这里，nd$_\mathcal{G}(i)$ 表示 i 在 $\mathcal{G}$中的非后代节点，即所有满足不存在从 j 出发的有向路径 $j \to \cdots \to i$ 的顶点 i。直观地说，这应理解为：“ i的唯一直接原因是 i 的父节点”。两个有向无环图可能编码相同的条件独立性陈述（见示例 1.1）。在这种情况下，我们称它们 马尔可夫等价，或者称它们属于同一个 马尔可夫等价类（MEC）。

示例 1.1。 在图 1 中，我们给出了有向无环图及其编码的条件独立性陈述的 3 个示例。请注意，其中两个有向无环图编码了完全相同的条件独立性陈述。

$\mathcal{G}$ 的一个诱导子图，使得 $\mathcal{G}|_{\{i,j,k\}} = i \to j \leftarrow k$ 被称为 V 结构。与 $\mathcal{G}$ 具有相同顶点和邻接关系的无向图 G 称为 $\mathcal{G}$的骨架。如果$\mathcal{G}$和i在骨架中相邻，我们也称 i 是有向图中 j 的邻居，即 $=$ pa$_\mathcal{G}(i) \cup$ ch$_\mathcal{G}(i)$。 i的闭包记作 cl$_\mathcal{G}(i)$: $=$ ne$_\mathcal{G}(i) \cup \{i\}$，它由 i 的所有邻居以及 i组成。Verma 和 Pearl 的以下经典结果为我们提供了马尔可夫等价的图形化解释。

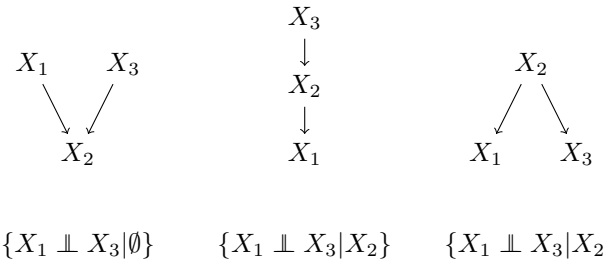

FIGURE 1. 一个包含 3 个有向无环图及其编码的条件独立性陈述的示例。

定理1.2。[20] 两个有向无环图马尔可夫等价，当且仅当它们具有相同的骨架和相同的 v 结构。

前文提到的 Studen´y [16] 的工作概述了如何通过整数向量对由条件独立性陈述刻画的模型（例如有向无环图模型）进行编码。其核心思想之一是，对所有模型进行最大似然估计，等价于在向量集合上最大化一个线性函数。在此基础上，Studen´y、Hemmecke 和 Lindner 引入了特征 imset；这种向量编码使得可以轻松地从 $c_{\mathcal{G}}$中恢复 $\mathcal{G}$ 的马尔可夫等价类。事实上，根据特征 imset 的定义，以下结论显然成立：

引理1.3。[18] 设 $\mathcal{G}$ 是一个节点为 $[n]$的有向无环图。那么，对于任意互不相同的节点 i、j和 k，有
(1) $i \leftarrow j$ 或 $i \rightarrow j$ 属于 $\mathcal{G}$，当且仅当 $c_{\mathcal{G}}(\{i,j\}) = 1$。(2) $i \rightarrow j \leftarrow k$ 是 $\mathcal{G}$ 中的一个 V 结构，当且仅当 $c_{\mathcal{G}}(\{i,j,k\}) = 1$ 且$c_{\mathcal{G}}(\{i,k\}) = 0$。

也就是说，特征 imset 编码了有向无环图的骨架和 v 结构。因此，可以很容易地从 $c_{\mathcal{G}}$ 中恢复 $\mathcal{G}$ 的马尔可夫等价类。此外，Studen´y、Hemmecke 和 Lindner 证明，特征 imset 实际上是马尔可夫等价类的唯一表示。

定理 1.4。[18] 两个有向无环图 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 马尔可夫等价，当且仅当$c_{\mathcal{G}} = c_{\mathcal{H}}$。

根据引理 1.3 可直接得到，特征 imset 编码于大小为 2 和 3 的集合中。

推论 1.5。[7, 推论 2.2。6] 两个特征 imset $c_{\mathcal{G}}$ 和 $c_{\mathcal{H}}$ 相等，当且仅当 $c_{\mathcal{G}}(S) = c_{\mathcal{H}}(S)$ 对于所有满足 S 的集合 $|S| \in \{2,3\}$。

如果对于马尔可夫等价类中的所有 $\mathcal{D}$，都有 $i \rightarrow j \in \mathcal{D}$，则边 $i \rightarrow j \in \mathcal{G}$ 是必然边。在这种情况下，i 是 j的本质父节点，而 j 是 i的必然子节点。得益于 Andersson、Madigan 和 Pearl 的工作，[2]，马尔可夫等价类的图性质已经得到了充分理解。关于图模型统计方面更全面的背景知识，请参阅 [6, 11, 14]。

因果发现中的一个核心问题是从数据中推断马尔可夫等价类。也就是说，给定来自联合分布 Pover X_1、.....、X_n 的独立同分布样本 D，求出

最能编码 $\mathbf{D}$ 中观测到的条件独立性陈述的马尔可夫等价类。这通常被理解为寻找使贝叶斯信息准则 BIC($\mathcal{G}$,$\mathbf{D}$) 最大化的有向无环图（或有向无环图的马尔可夫等价类），其中 BIC 指 贝叶斯信息准则 [4, 8, 9, 19]。重要的是，BIC 是 评分等价 且可分解 [4]，的；也就是说，它是 CIM$_n$ 上的线性函数。因此，从数据中恢复 BIC 最优马尔可夫等价类可以表述为一个线性规划 [16, 18]。

最近研究表明，一些表现最佳的算法（GES [4], MMHC [19], 和贪心 CIM[9]）仅限于在 CIM$_n$ 及其各个面 [9]（包括 CIM$_G$）上沿边路径。关于 CIM$_4$ 的计算数据却表明，这些沿边路径仅利用了所有可能边中的极少一部分。这进一步引出了一个问题： G(CIM$_n$)是否连通，以及这些方法是否可行。

2. Diameter of CIM polytopes多胞体的直径

多胞体的直径为我们提供了任意沿边路径从一个顶点到另一个顶点所需步数的上界，前提是我们采取最优路径。文献 [9], 指出，反转有向无环图 $\mathcal{G}$中的一条边，要么得到一个马尔可夫等价图，要么得到 CIM$_G$的一条边。对于任意满足 $i \to j \in \mathcal{G}$ 的有向无环图 $\mathcal{G}$ ，我们定义 $\mathcal{G}_{i \leftarrow j}$ 为与 $\mathcal{G}$ 相同、但将边$i \to j$ 反转后的有向图。

定理 2.1. [9] 设 $\mathcal{G}$ 为一个有向无环图，其骨架为 G ，且 $i \to j \in \mathcal{G}$。若 $\mathcal{G}_{i \leftarrow j}$ 是一个与 $\mathcal{G}$不马尔可夫等价的有向无环图，则 conv($c_{\mathcal{G}}, c^{\mathcal{G}_{i \leftarrow j}}$) 是 CIM$_G$的一条边。

利用这一点，我们可以给出 CIM$_G$直径的上界。

命题 2.2. 设 $G = ([n], E)$ 为一个无向图。则 diam(CIM$_G$) $\preceq |E|$。

这里我们将采用 [9, 命题 3.5] 中使用的相同论证。

证明。 设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是两个骨架为 G的有向无环图。我们声称，总能反转 $i \to j$ 中的至少一条边 $\mathcal{G}$，使得 $i \leftarrow j$ 属于 $\mathcal{H}$，并得到另一个有向无环图。由于 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 具有相同的骨架，因此它们至多在 $|E|$ 条边上不同。存在一个至多包含 $|E|$ 条边的序列，使得每次反转一条边后都会得到一个新的有向无环图，最终到达 $\mathcal{H}$。根据定理2.1 ，这些操作各自对应 CIM$_G$的一条边或一个顶点，因此结论得证。

为此，我们令 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{H}$之间不同的边集。我们在 $\mathcal{C}$ 上定义偏序：当且仅当 $j' \in \mathrm{de}_{\mathcal{G}}(j)$ 时， $i' \to j' \preceq i \to j$ ；或者，当 $j' = j$时，$i \in \mathrm{de}(i')$。也就是说，我们按照 $\mathcal{G}$ 对子节点排序，并对父节点按相反顺序排序。令 $i \to j$ 为 $\mathcal{C}$中的一条极大边。我们断言，反转 $i \to j$ 不会产生环。

为反证，假设它会产生环。也就是说，在 $\mathcal{G}$中存在另一条路径$i \to \cdots \to j$ 。由于这条路径上的每条边都大于 $i \to j$，根据我们的偏序，这些边都必须存在于 $\mathcal{H}$中。然而， $i \leftarrow j$ 位于 $\mathcal{H}$中，这与 $\mathcal{H}$ 是有向无环图相矛盾。于是结论成立。□

关于随机图的计算数据（$n \leq 9$）确实表明，上述证明实际只用到了 CIM 中很少的边$_G$。在 [8] 当$_G$ 是树时，CIM 的所有边G 都已确定。因此，上界 diamCIM$_G$ $\leq |E|$ 可以改进，至少在 G 这种情况下。

2.1. 树。由于当$_G$ 是树时，CIM 的所有边 G 均已知，我们将从这种情况开始。不过，首先回顾 [8]的结果。设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是两个骨架为 G 的本质图，并假设 G 是一棵树。记 $N_i = \{S \cup \{i\}\colon \ S \subseteq \mathrm{ne}_G(i)$ 和 $|S| \geq 2\}$，并定义

$$\Delta(\mathcal{G},\mathcal{H}) := \{i \in [n]\colon c_{\mathcal{G}}|_{N_i} \neq c_{\mathcal{H}}|_{N_i}\}.$$

等价地，$\Delta(\mathcal{G},\mathcal{H})$是所有满足以下条件的顶点的集合：$i$ $\mathcal{G}$ 在i 处具有 V 结构，而 $\mathcal{H}$ 没有，反之亦然 [8]。对于任意树 $G = ([n], E)$及其子集$S \subseteq [n]$，我们用 span(S)表示 S 在G中的唯一生成树的顶点。此外，如果 i 不是叶节点，我们就称 $i \in G$ 为 G 的内部节点；由 G 在这些内部节点上诱导的图记作 G°。

定义 2.3（本质翻转）。设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是两个骨架为 G（一棵树）的非马尔可夫等价本质图，并记作 $\Delta = \Delta(\mathcal{G},\mathcal{H})$。假设$\mathcal{G}|_{\mathrm{span}(\Delta)}$ 和 $\mathcal{H}|_{\mathrm{span}(\Delta)}$ 都不含任何无向边。此外，假设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 的每条边在 $G|_{\mathrm{span}(\Delta)}$上都不同。那么我们称这对 $\{\mathcal{G},\mathcal{H}\}$ 为本质翻转。

以下定理说明了本质翻转的重要性。

定理 2.4。 [8] 如果 G 是树，那么凸包$(c_{\mathcal{G}}, c_{\mathcal{H}})$ 是 CIM$_G$ 的边，当且仅当该对 $\{\mathcal{G},\mathcal{H}\}$ 是一个本质翻转。

由于我们更倾向于使用有向无环图，而不是本质图，因此还可以得到另一种刻画。

定理 2.5。设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是定义在同一骨架 G上的有向无环图，且该骨架是一棵树。假设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 之间不同的边构成 T 的一棵子树 G。进一步设 $\Delta(\mathcal{G},\mathcal{H}) \neq \emptyset$。那么，$\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{G}$ 的本质图构成本质翻转，当且仅当 T 的每个内部节点 i都满足下述条件。当相关对象唯一时，我们使用记号 $\{\mathfrak{c}_i\} = T \cap \mathrm{ch}_{\mathcal{G}}(i)$ 和 $\{\mathfrak{p}_i\} = T \cap \mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(i)$。

	$\lvert T \cap \mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(i)\rvert$	$\lvert T \cap \mathrm{ch}_{\mathcal{G}}(i)\rvert$	使 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 构成本质翻转的局部判据
I	≥ 2	≥ 2	
II	≥ 2	0	
III 0		≥ 2	
IV	≥ 2	1	$\lvert \mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(i) \setminus T\rvert \geq 1$ 或 若 $\exists$ 在 $\mathcal{G}$中于 $\mathfrak{c}_i$ 处构成 V 结构，则 $\mathfrak{c}_i$ 在 $\mathcal{H}$中有本质父节点
V	1	≥ 2	$\lvert \mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(i) \setminus T\rvert \geq 1$ 或 如果 $\exists$ 在 $\mathcal{H}$中的 $\mathfrak{p}_i$ 处有 V 结构，那么 $\mathfrak{p}_i$ 在 $\mathcal{G}$中有本质父节点
VI	1	1	如果 Δ 两侧都存在节点 $T \setminus \{i\}$的连通分支 那么 $\lvert \mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(i) \setminus T\rvert \geq 1$ 或 $\mathfrak{c}_i$ 在 $\mathcal{H}$ 和 $\mathfrak{p}_i$中有本质父节点 在 $\mathcal{G}$ 中具有本质父节点。

由于我们知道 CIM$_G$ 多胞体的所有边，因此预计可以得到直径的良好界。

命题 2.6. 如果 G 是一棵树，那么 CIM$_G$ 的直径小于或等于 G 的内部顶点数。

为证明这一点，我们需要一个由定理 2.5 推出的简短引理。

引理 2.7. 对于任意给定的有向无环图 $\mathcal{G}$，其骨架为 G，且 $i \in G^\circ$ 是一个内部节点，假设 T 是 G 的一棵子树。令 $\mathcal{G}'$ 为仅多一个节点 $n+1$ 和边 $n+1 \leftarrow i$ 的有向无环图。定义 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$，使其分别与 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 相同，只是将 T 中每条边的方向反转。那么，如果 $\{\mathcal{G}, \mathcal{H}\}$ 是一次本质翻转，$\{\mathcal{G}', \mathcal{H}'\}$ 也是。

证明。根据定义，T 不包含边 $(n+1) - i$。如果 $n+1 \leftarrow i$，那么边 $(n+1) - i$ 不属于任何 V 结构，因此，$\mathcal{G}$ 中的任何其他边是本质边，当且仅当它是 $\mathcal{G}'$中的本质边。因此，该结果直接由定理2.5得出。□

命题 2.6 的证明。归纳地假设，对于任意具有较少内部节点的有向树，我们都能仅使用定理 2.5 中的变换，在至多等于内部节点数的步数内，将其变换为具有相同骨架的任意另一棵有向树。

设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是骨架为 G 的两个图，并令 m 表示内部顶点的数量。只需找到有向无环图 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_m = \mathcal{H}$，使得对所有$0 \leq k \leq m-1$，每一对 $\{\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{k+1}\}$ 都是本质对或马尔可夫等价。如果 $\mathcal{G}$和 $\mathcal{H}$ 马尔可夫等价，则问题得证。令 $r_1 \in \Delta(\mathcal{G}, \mathcal{H})$。注意，$\Delta(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \subseteq G^\circ$。我们可以设想 G° 以 r_1为根，因此将从根开始，沿途变换各顶点。

定义 $\mathcal{G}_1'$ 为与 $\mathcal{G}$ 在 $\mathrm{cl}_G(r_1)$ 之外完全相同的有向无环图，并按照 $\mathcal{H}$ 中的方式为 $\mathrm{cl}_G(r_1)$ 定向。那么有三种情况：要么 $\mathcal{G}_1'$ 与 $\mathcal{G}$ 马尔可夫等价，$\{\mathcal{G}_1', \mathcal{G}\}$ 是本质翻转；要么 $\mathcal{G}_1'$ 与 $\mathcal{G}$ 在一个子树上不同，且该子树属于定理 2.5的情形 IV、V 或 VI。在第一种和第二种情况下，我们可以选择 $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1'$。在第三种情况下，又有三种子情况：我们处于情形 IV、V 或 VI。

如果我们处于情形 IV，且 $\{\mathcal{G}_1', \mathcal{G}\}$ 不是本质翻转，那么 r_1必有唯一一个子节点，记为 c，并且 c处存在一个 V 结构。于是定义 $\mathcal{G}_1$ 为与 $\mathcal{G}_1'$ 完全相同、但翻转边 $r_1 \leftarrow c$ 的有向无环图，也就是说，保留 $\mathcal{G}$中的边方向。根据定理 2.5 $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}\}$ 将是本质翻转。注意，在这种情况下 $\mathrm{pa}_{\mathcal{G}_1}(r_1) = \emptyset$。

如果处于情形 V，且 $\{\mathcal{G}_1', \mathcal{G}\}$ 不是本质翻转，那么必定存在唯一一个 r_1的父节点，设为 a，它有唯一一个非本质父节点 a'。由于这条边不是本质边，我们可以对包含 a 的 $G \setminus \{r_1\}$ 中的子树进行定向，称其为 G_a，使得满足 $a \to a'$，且不改变任何 v 结构。然后，我们可以将 $\mathcal{G}_1$定义为这样一幅有向无环图：按上述方式对子树 G_a 进行定向，其余部分则按 $\mathcal{G}_1'$定向。此时 $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}\}$ 将是一个本质翻转。如果处于情形 VI，那么我们要么有 $|\mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(r_1) \setminus T| \geq 1$，此时 $\{\mathcal{G}_1', \mathcal{G}\}$是一个本质翻转；要么有 $r_1 \notin \Delta(\mathcal{G}, \mathcal{H})$，这与我们选择 r_1的方式矛盾。注意，无论是哪种情形，我们都会得到 $c_{\mathcal{G}_1}|_{N_{r_1}} = c_{\mathcal{H}}|_{N_{r_1}}$，并且绝不会改变 $\mathrm{cl}_G(r_1)$中任何一条已按 $\mathcal{H}$定向的边的方向。

任取 r_2 为与 r_1 在 G°中的一个相邻节点。若有 $r_2 \to r_1$，则我们要么有 $r_2 \to r_1$ 在 $\mathcal{H}$中，此时通过考察2.7 引理中在 r_2 在 $G \setminus \{r_1\}$中的子树，结果可由归纳假设和2.7 引理推出；要么我们从情形三的子情形 IV 转变为 $\mathcal{G}_1$。然而，r_1 此时只有一个父节点，即 r_2，因此可在与之前相同的子树上使用归纳假设，并加入节点 r_1，从而得到结果。

如果我们有 $r_2 \leftarrow r_1$，就可以像之前一样重复这一构造，只不过改用 $r_1 \in \mathrm{pa}_{\mathcal{G}_1} \setminus T$，而不是 $r_2 \in \Delta(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$。事实上，根据上述构造，我们

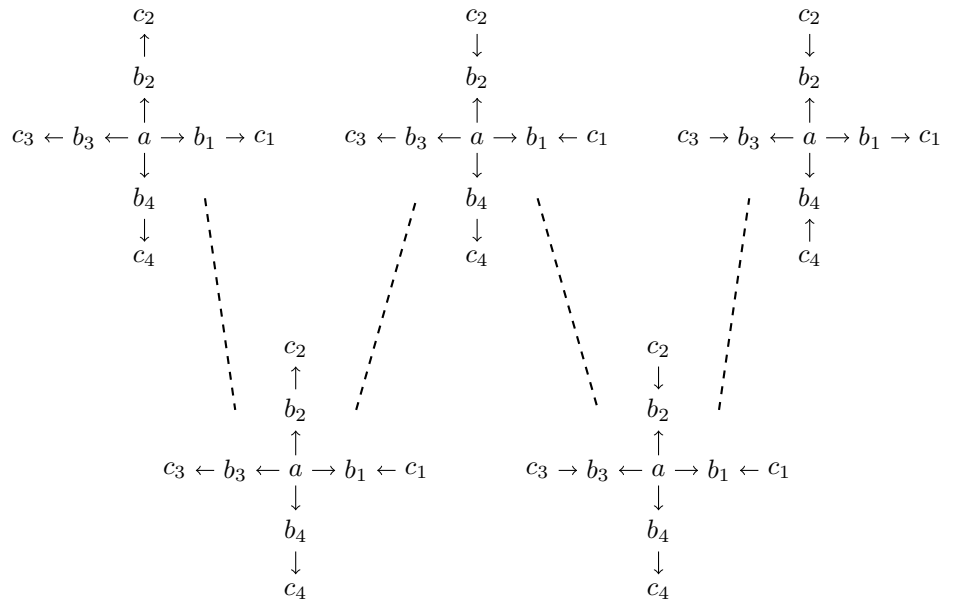

FIGURE 2. 命题证明中的构造示例2.6。CIM 的边$_G$ 以虚线标出。

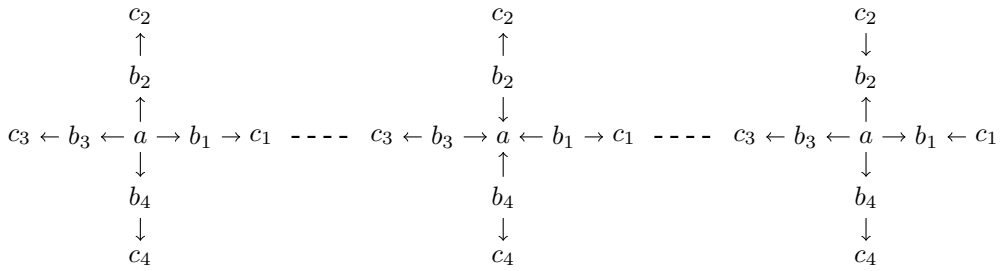

FIGURE 3. 比命题证明中构造的路径更短的一条路径2.6。CIM 的边$_G$ 以虚线标出。

只有当 $r_2 \leftarrow r_1$ 属于 $\mathcal{H}$ 时，才有 $r_2 \leftarrow r_1$ 属于 $\mathcal{G}_1$。然后，情形一和情形二与之前相同，情形三的子情形 IV 和 V 也完全相同。然而，情形三的子情形 VI 现在成立，因为 $\mathrm{pa}_{\mathcal{G}_1} \setminus T$。

因此，我们总能继续构造，使每个内部节点对应一条边。由此可知，将 $\mathcal{G}$ 转换为 $\mathcal{H}$ 至多需要 m 步。□

例 2.8. 在图 2 中，我们重复了命题证明中所做的构造2.6。不过请注意，正如图 3 所示，同一对马尔可夫等价类之间可以只需两步就完成转换。

例2.9. 设 $G = I_n$ 为含有 n 个顶点的路径，且 $\{\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_{i+1}\}$ 为一次本质翻转。那么，根据本质翻转的定义， $\mathcal{G}_i$ 和 $\mathcal{G}_{i+1}$ 中的 v 结构数量最多相差一个。设 $\mathcal{G}$ 为不含任何 v 结构的图，设 $\mathcal{H}$ 为含有 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 个 v 结构的任意图。由此可知， $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{H}$ 之间的距离至少为，且事实上等于 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ，因此 CIM_G 的直径大于或等于 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$。要证明等号成立，只需验证：给定任意两个相邻的内部节点，我们可以通过一次操作，从任何先前的位置出发，确保其中一个节点或两个节点都成为 v 结构。

命题 2.10. 设 G 是一棵树， p 是 G 的最大路径长度。那么， CIM_G 的直径至少为 $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$。

请注意，最大路径长度比图中的顶点数少一。也就是说，对于 I_n ，最大路径长度为 $p = n - 1$。

证明。 设 P 是 G的一条最长路径。与例 2.9 类似，只需得出结论：每次本质翻转都会使 P 上的 v 结构数量改变一个。由此可知，两个图之间的距离至少为 P，其中一个图在 $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 中没有 v 结构，另一个图有 $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 个 v 结构。

因此，给定任意一个骨架为 G 、且具有满足定理 2.5 条件的子树 T' 的有向无环图 $\mathcal{G}$。定义 $T = P \cap T' = v_0 - v_1 - \cdots - v_k$；若 v_0 和/或 v_k 不是 P 的端点，我们还考虑额外的顶点 α 和 β ，其定义为 $\alpha - v_0 - v_1 - \cdots - v_k - \beta \subseteq P$。请注意， α 和 β 可能不存在，但可将其视为 G 中有 $\alpha \leftarrow v_0$ 或 $v_k \rightarrow \beta$ 。此外，我们可以假设 $T \cup \{\alpha, \beta\}$ 中的所有箭头都已反向。先验地，将 $T \cup \{\alpha, \beta\}$ 中的所有边反向可能会导致出现涉及 α 和 β 的额外 v 结构；不过，根据定理 2.5，我们可以放心地忽略它们。在这个连通部分中，当出现 $i \rightarrow j \leftarrow k$ （其中 i、 j、 $k \in T \cup \{\alpha, \beta\}$）时，我们就移除一个 v 结构；出现 $i \leftarrow j \rightarrow k$ 时，我们就添加一个 v 结构。注意，这些模式必须沿着 $\alpha - v_0 - v_1 - \cdots - v_k - \beta$ 交错排列。因此，v 结构的数量最多相差一个，结论得证。□

因此，命题 2.6 和命题 2.10 共同推出以下定理。

定理 2.11。设 G 是一棵具有 m 个内部节点且最大路径长度为 p 的树。则 $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor \leq \mathrm{diam}(\mathrm{CIM}_G) \leq m$。

注意，对于所有树，我们都有 $m \leq n - 2$ ；对于路径，我们有 $p + 1 = n = m - 2$，因此 CIM_{I_n} 的直径关于 n呈线性增长。因此， CIM_G的最坏情况是其直径关于 n呈线性增长，此时 G 是一棵树。不过，也存在一些树类，使得我们的下界在 n中为常数；如果 G 是一个星形图，则上述结果给出 $1 \leq \mathrm{diam}\mathrm{CIM}_G \leq 1$，这与 [8] 的结果一致；该结果表明，在这种情况下 CIM_G 是一个单纯形，因此 $\mathrm{diam}\ \mathrm{CIM}_G = 1$。关于随机树的计算结果（$n \leq 9$）表明我们的下界是紧的，而上界并非如此。

从随机树的角度来看，我们预期会有 $m \approx (1 - e^{-1})n$ 个内部节点（服从均匀分布），而期望最大路径长度为 $p \leq C\sqrt{n}$ ，其中 C [1, 12] 是某个常数。进一步研究随机树 G 的 CIM_G 的期望直径，将会非常有趣。

2.2. 整个多胞体。到目前为止，我们讨论的是 CIM_n的面的直径，但 [9] 还为我们提供了不属于任何 G对应的 CIM_G 的边。若 $\mathcal{G}$ 是一个有向无环图

其中 i 和 j 在 $\mathcal{G}$的骨架中不相邻。此时，我们用 $\mathcal{G}_{+i\leftarrow j}$ 表示与 $\mathcal{G}$ 相同、但添加了边 $i \leftarrow j$ 的有向图。注意， $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}_{+i\leftarrow j}$的骨架不同，因此永远不会马尔可夫等价。

定理 2.12。 [9] 设 $\mathcal{G}$ 为一个有向无环图，且 i 和 j 为不相邻顶点。若$\mathcal{G}_{+i\leftarrow j}$是一个有向无环图，则 凸包$(c_{\mathcal{G}}, c_{\mathcal{G}_{+i\leftarrow j}})$ 是 CIM_n 的一条边。

直接应用上述定理，可得 $2\binom{n}{2}$ 的直径上界。事实上，从空图出发，我们可以通过逐一添加正确的边，走到任意有向无环图，这至多需要 $\binom{n}{2}$ 步。不过，利用一种新类型的边，我们可以得到更好的上界。

命题 2.13。设 $i \in [n]$, $S^* \subseteq [n] \setminus \{i\}$，并设 $\mathcal{G}$ 为一个有向无环图，使得 $\mathcal{G}|_{S^*}$ 为空图。设 $\mathcal{H}$ 为一个与 $\mathcal{G}$ 相同的图，但将所有边 $j \to i$ 用于 $j \in S^*$。那么，若 $\mathcal{H}$ 是一个有向无环图，则凸包$(c_{\mathcal{G}}, c_{\mathcal{H}})$ 是 CIM_n 的一条边。

证明。 注意，由于 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ 我们必须有 $c_{\mathcal{H}}(S) - c_{\mathcal{G}}(S) \geq 0$ 对每个 S都成立。此外，如果 $|S^*| = 1$ 那么由定理 2.12可得结论，因此我们可以假设 $|S^*| \geq 2$。令

$$w(S) = \begin{cases} n^2 & \text{if } c_{\mathcal{G}}(S) = 1, \\ -n^2 & \text{if } c_{\mathcal{H}}(S) = 0, \\ -1 & \text{if } |S| = 2, c_{\mathcal{G}}(S) = 0, c_{\mathcal{H}}(S) = 1, \\ |S^*| & \text{if } S = S^* \cup \{i\}, \text{ and} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

设 $\mathcal{D}$ 是使 $w^T c_{\mathcal{D}}$最大的有向无环图。令 D、 G 和 H 分别表示 $\mathcal{D}$、$\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 的骨架。首先注意到 $|S^*| \leq n-1$，因此对于所有满足 $c_{\mathcal{G}}(S) = 1$ 且 $c_{\mathcal{D}}(S) = 1$ 的 S，必有 $c_{\mathcal{D}}(S) = 1$。由于 $G \subseteq H$，结合推论 1.5 可得 $G \subseteq D \subseteq H$。

根据特征 imset 的定义，显然 $c_{\mathcal{G}}(S) = 1$意味着 $c_{\mathcal{H}}(S) = 1$，反过来， $c_{\mathcal{H}}(S) = 0$ 意味着 $c_{\mathcal{G}}(S) = 0$。于是分两种情况讨论。

如果 $c_{\mathcal{D}}(S^* \cup \{i\}) = 0$，那么对于所有 $j \in S^*$，我们必须有 $c_{\mathcal{D}}(\{i,j\}) = 0$，否则$w^T c_{\mathcal{D}} \leq w^T c_{\mathcal{G}} - 1 < w^T c_{\mathcal{G}}$。接着注意到， $c_{\mathcal{G}}$和 $c_{\mathcal{H}}$仅在如下形式的三元集合上有所不同： $\{i,j,k\}$，其中 $j \in S^*$ 且 $k \in \mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(i) \cup S^*$。对于每个这样的三元集合 S， $\mathcal{D}|_S$ 并不连通，因此 $c_{\mathcal{D}}(S) = 0$。因此， $c_{\mathcal{D}}$ 在所有大小为 2 和 3 的集合上都与$c_{\mathcal{G}}$ 一致，由推论 1.5 可知 $c_{\mathcal{D}} = c_{\mathcal{G}}$。如果$c_{\mathcal{D}}(S^* \cup \{i\}) = 1$，那么必定存在一个节点 $t \in S^* \cup \{i\}$，它是其他所有节点的子节点。然而 $\mathcal{D}|_{S^*}$ 没有边，因为 $\mathcal{G}|_{S^*}$ 和 $\mathcal{H}|_{S^*}$ 都没有边；因此，鉴于 $|S^*| \geq 2$，我们必须有 $t = i$。所以在 $\mathcal{D}$中，对于 $j \in S^*$，我们必须有所有边 $j \to i$。还需检查的是，对于上述形式的所有三元集合， $c_{\mathcal{D}}$ 是否与 $c_{\mathcal{H}}$ 一致，也就是说，对于所有 $j \in S^*$ 且 $k \in \mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(i) \cup S^*$，是否有 $c_{\mathcal{D}}(\{i,j,k\}) = c_{\mathcal{H}}(\{i,j,k\}) = 1$。□

由此我们得到 CIM_n 的线性上界。

命题 2.14. CIM_n 的直径小于或等于 $2n-2$。

证明。令 $\mathcal{G}$ 为给定的、具有 n 个节点的任意有向无环图，并令 $v_1, \ldots, v_n$ 为 $\mathcal{G}$ 的顶点的一个拓扑序。等价地，若 v_i 是 v_j 的父节点，则 $i < j$。令 $\mathcal{G}_n$为没有边的有向无环图。递归地定义 $\mathcal{G}_{k-1}$ 为 $\mathcal{G}_k$，并添加所有满足 $v \to k$ 的边，其中 $v \in \mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(k)$。因此，由于 $\mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(v_1) = \emptyset$, 我们必有 $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$。剩下要

证明的是，$\mathrm{conv}(\mathcal{G}_{k-1}, \mathcal{G}_k)$ 是 CIM_n 中对所有 k均成立的一条边。这由命题2.13 以及我们关于 v_i的父节点的观察可知。因此，CIM_n 中的任意顶点 $c_{\mathcal{G}}$ 到特定顶点 $c_{\mathcal{G}_n}$ 的距离至多为 $n-1$，故总直径至多为其两倍。□

可以通过 `polymake`[3, 5] 来检验，$\operatorname{diam} \mathrm{CIM}_n = n-1$ 对于 $n \in \{1,2,3,4\}$成立，并且所有这些距离都由无边有向无环图与完全图之间的图距离实现。鉴于以下命题，这似乎是合理的。

命题 2.15. 设 $\mathcal{G}$是一个有向无环图，i_1、…、i_k是顶点，S_1、…S_k是集合，满足对所有 $1 \le t \le k$，$\mathrm{cl}_{\mathcal{G}}(i_t) \cap S_t = \emptyset$。令 $\mathcal{H}$ 由 $\mathcal{G}$ 通过添加所有满足 $s \in S_t$的边 $s \to i_t$ 得到。若 $\mathcal{H}$ 是一个有向无环图且 $k \ge 2$，则 $\mathrm{conv}(c_{\mathcal{G}}, c_{\mathcal{H}})$ 不是 CIM_n的一条边。

为了证明这一点，我们将用到以下引理，它是多胞体理论中的一个基本事实。

引理 2.16. 设 P 是一个多胞体，且 v 是 P的一个顶点。若存在非零向量 u_1 和 u_2，使得 $v+u_1$、$v+u_2$和 $v+u_1+u_2$ 都是P的顶点，则 $\mathrm{conv}(v, v+u_1+u_2)$ 不是 P的一条边。

命题 2.15 的证明。设 $\mathcal{G}_1$ 是通过向 $\mathcal{G}$ 添加所有满足 $s \in S_1$ 的边 $s \to i_1$ 得到的有向无环图。设 $\mathcal{G}_2$ 是通过向 $\mathcal{G}$ 添加所有满足 $s \in S_t$ 的边 $s \to i_t$ 得到的有向无环图，其中 $1 < t \le k$。由于 $\mathcal{G}$、$\mathcal{H}$、$\mathcal{G}_1$和 $\mathcal{G}_2$ 的骨架各不相同，因此它们之间不存在马尔可夫等价。因此，根据引理 2.16，只需证明 $c_{\mathcal{G}} + c_{\mathcal{H}} = c_{\mathcal{G}_1} + c_{\mathcal{G}_2}$，即可得出结论。由推论 1.5，只需证明对所有满足 $|S| \in \{2,3\}$ 的集合 S，$c_{\mathcal{G}}(S) + c_{\mathcal{H}}(S) = c_{\mathcal{G}_1}(S) + c_{\mathcal{G}_2}(S)$。对于所有二元集合，这一等式直接由推论 1.5 得出，因为它们编码了图的骨架。如果 S 不是满足 $i_t \in S$ 且对某个 t有 $S \cap S_t \neq \emptyset$ 的三元集合，那么 $\mathcal{G}|_S = \mathcal{H}|_S = \mathcal{G}_1|_S = \mathcal{G}_2|_S$，因此等式成立。因此，我们可以假设 $S = \{i_t, s_t, p_t\}$，其中 $s_t \in S_t$ 且 $p_t \in S_t \cup \mathrm{pa}_{\mathcal{G}}(i_t)$。其余部分由特征 imset 的定义以及 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$ 的构造直接得出。□

因此，同时为多个顶点添加父节点在某种意义上是困难的。所以，空图与完全图之间的距离对于每个 $n-1$ 都等于 n，这是合理的。然而，命题2.14 的证明中的构造并不总是最优的，即使其中一个图是空图也是如此。

例 2.17。考虑图 $\mathcal{G} = ([5], \emptyset)$ 和 $\mathcal{H} = ([5], E)$，其中 $\mathcal{G}$是空图，而 $\mathcal{H}$ 是一个中心顶点恰有 2 个父节点的星形图。那么，命题 2.14 的证明中的构造给出了 $G(\mathrm{CIM}_n)$ 中一条长度为 4 的路径。然而，利用命题 2.13，我们可以转到一个具有正确骨架的图；再利用定理 2.4，我们可以直接转到 $\mathcal{H}$，见图 4。然而，命题 2.15 表明，$\mathrm{conv}(c_{\mathcal{G}}, c_{\mathcal{H}})$ 不是 CIM_6 的一条边，因此 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{H}$ 之间的距离为 2。

到目前为止，我们已经证明，面 CIM_G 的直径具有二次界；如果 G 是一棵树，那么该界就会变成相对于 G 的顶点数的线性界。我们还证明了整个多面体 CIM_n 的直径具有线性界。这使我们相信，对于任意 G，CIM_G 实际上都具有线性界。

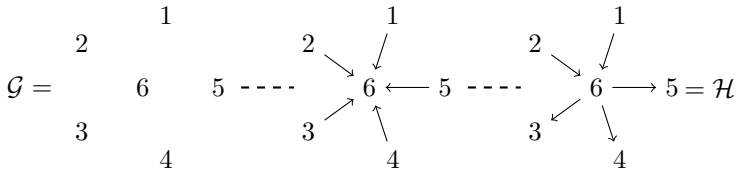

FIGURE 4. CIM 上一条未用于命题$_n$ 证明中的短路径的示例2.14。CIM 的边$_n$ 用虚线表示。

对于任意具有骨架 G 和顶点 i 的有向无环图 $\mathcal{G}$，我们令 $\mathcal{G}_{\downarrow i}$ 为这样一个图：对于所有 $k \in \text{ne}_{\mathcal{G}}(i)$，其中都有 $k \to i$；除此之外，它与 $\mathcal{G}$ 完全相同。

引理 2.18. 如果 $\mathcal{G}$ 是有向无环图，那么对于任意顶点 i，$\mathcal{G}_{\downarrow i}$ 也是有向无环图。

证明。任何新产生的环都必须经过一条被反向的边，因此必然经过 i；但 i 在 $\mathcal{G}_{\downarrow i}$ 中没有出边。因此，$\mathcal{G}_{\downarrow i}$ 没有有向环。□

接下来，要证明 diam CIM$_G$ 有线性上界，只需证明以下猜想。

猜想 1. 如果 $\mathcal{G}$和 $\mathcal{G}_{\downarrow i}$不马尔可夫等价，那么 conv $\left(c_{\mathcal{G}}, c_{\mathcal{G}_{\downarrow i}}\right)$ 是 CIM$_G$的一条边。

设 $\mathcal{G}$是一个骨架为 G的有向无环图。定义 $[n]$上的一个序为 $v_1, \ldots, v_n$，其中 $v_i \to v_j \in \mathcal{G}$ 蕴含 $i < j$。也就是说，取 $\mathcal{G}$的一个拓扑序。那么对于任意骨架为 G的有向无环图 $\mathcal{H}$，有 $\mathcal{G} = (\ldots((\mathcal{H}_{\downarrow v_2})_{\downarrow v_3})\ldots)_{\downarrow v_n}$。因此，如果猜想 1成立，那么对所有图 G，diam CIM$_G \leq n-1$。

3. 讨论

本文证明了 diam CIM$_G$ 至多具有二次界，且 diam CIM$_n$具有线性界。由于 CIM$_n$ 的维数为$2^n - n - 1$，我们得到 CIM$_n$的直径至多随维数的对数呈二次增长，显著慢于任何一般界（例如[10]）。从这个意义上说，我们发现 $G(\text{CIM}_n)$ 高度连通。

对于 CIM 上的沿边路径$_G$ 最大化目标函数 W时，最优路径并不总是关于 W 单调的。正如 [4, 8, 9, 19], 所示，即使无法访问所有边，只要对W作出额外假设，仍然可以获得一致性保证。然而，在处理基于数据的评分函数时——CIM$_n$中经常如此——这些额外假设无法保证在任何有限样本量下都成立，尤其是在样本量较小时，增加更多边仍能提升性能[8]。我们可以预期 CIM$_n$ 和 CIM$_G$中存在许多边，因此一个根本性问题是，哪些边对性能最为关键，哪些边易于检验。例如，命题2.13中的边为我们提供了一种只需几步即可遍历多胞体的方法；但在实践中，使用定理 2.12 中的边可能更容易，因为反复使用这些边确实能够到达同一个图。然而，如果不更深入地了解 CIM$_n$的一般边结构，就无法恰当地讨论应使用哪一特定边类。

致谢。作者的部分研究经费由瓦伦堡人工智能、自主系统与软件计划（WASP）提供，该计划由克努特与爱丽丝·瓦伦堡基金会资助。

References

[1] Noga Alon、Asaf Nachmias 和 Matan Shalev。稠密图的均匀生成树的直径。 *Combinatorics Probability and Computing* 31 6 1010 1030, 2022 8 , , （）：–。

[2] Steen A. Andersson、David Madigan 和 Michael D. Perlman。无环有向图的马尔可夫等价类刻画。 *Ann. Statist.*，25(2):505–541，04 1997。3[3] Benjamin Assarf、Ewgenij Gawrilow、Katrin Herr、Michael Joswig、Benjamin Lorenz、Andreas Paffenholz 和 Thomas Rehn。使用 `polymake` 9 1 1 38, 2017 10 计算凸包并统计整数点。

[4] *Math. Program. Comput.*， （）：–。David Maxwell Chickering。通过贪心搜索实现最优结构识别。 *J. Mach.* , ：–。[5] *Learn. Res.* 3 507 554, 2002 1, 4, 11 Ewgenij Gawrilow 和 Michael Joswig。 `polymake`：用于分析凸多胞体的框架。载于 *Polytopes—combinatorics and computation (Oberwolfach, 1997)*, *DMV Sem.*第29卷，第43–73页。Birkh¨auser，巴塞尔，2000。10

[6] *Graphical Models* 1996 3 Steffen L. Lauritzen。牛津大学

[7] 出版社，。Silvia Lindner。 *Discrete Optimisation in Machine Learning: Learning of Bayesian Network Structures and Conditional Independence Implication* 。博士论文，慕尼黑工业大学，2012。3[8] Svante Linusson、Petter Restadh 和 Liam Solus。关于特征 imset 多面体的边，2022。2, 4, 5, 8, 11[9] Svante Linusson、Petter Restadh 和 Liam Solus。贪心因果发现具有几何性质。 *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 37 1 233 252, 2023 1, 2, 4, 8, 9, 11 , （）：–。Denis

[10] 0, 1 Naddef。Hirsch 猜想对（）-多胞体成立。 *Mathematical Programming*, 45 1 3 109 1989（-）：– 110, 2, 11 August。Judea Pearl。剑桥大学出版社，

[11] *Causality* 2009 3 。A. Renyi 和 G. Szekeres。关于树高。

[12] ´ *Journal of the Australian Mathematical Society* 7 4 497 507, 1967 , （）：–。 8

[13] Francisco Santos。Hirsch 猜想的一个反例。 *Annals of mathematics*，第383–412页，2012。2

[14] *Causation Prediction and Search* 2001 3 Peter Spirtes。

[15] 麻省理工学院出版社，剑桥，马萨诸塞州。Peter Spirtes 和 Clark Glymour。快速恢复稀疏因果图的算法。 *Social Science Computer Review* 9 1 62 72, 1991 1 , （）：–。Milan Studeny。

[16] ´ *Probabilistic Conditional Independence Structures*。信息科学与统计学。伦敦施普林格出版社，2005。1, 3, 4

[17] Milan Studen´y。拟阵如何出现于贝叶斯网络结构学习的背景中。载于 Marina Meila 和 Tom Heskes（编），*Proceedings of the Thirty-First Conference on Uncer-tainty in Artificial Intelligence, UAI 2015, July 12-16*, 2015, *Amsterdam The Netherlands*，第 832 841 2015 1 –页。AUAI Press，。

[18] ´ Milan Studeny、Raymond Hemmecke 和 Silvia Lindner。特征 imset：贝叶斯网络结构的一种简单代数表示。 *Proceedings of the 5th EuropeanWorkshop on Probabilistic Graphical Models, PGM 2010*，第257–265页，10 2010。1, 3, 4[19] Ioannis Tsamardinos、Laura E. Brown 和 Constantin F. Aliferis。最大-最小爬山贝叶斯网络结构学习算法。 *Machine Learning*，65(1):31–78，2006年3月。4, 11[20] Thomas Verma 和 Judea Pearl。判断一组观测到的独立性是否具有因果解释的算法。载于 *Proceedings of the Eighth International Conference onUncertainty in Artificial Intelligence*，UAI'92，第323–330页，美国加利福尼亚州旧金山，1992。摩根·考夫曼出版社公司。3[21] Yuhao Wang、Liam Solus、Karren Dai Yang 和 Caroline Uhler。带干预的基于排列的因果推断算法。载于 *Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems* 17, 5824 5833, , NIPS'，第–页，美国纽约州雷德胡克，2017。Curran Associates 公司。1[22] G¨unter M. Ziegler。 *Lectures on Polytopes*。纽约施普林格出版社，1995。2*Email address*： `petterre@kth.se`

Department of Mathematics, KTH Royal Institute of Technology, SE-100 44 Stockholm, Sweden