arXiv:2302.03674v1 [math.LO] 7 Feb 2023

面向蕴涵格和海廷代数的无选择拓扑对偶性

Chrysafis (Takis)
Hartonas 希腊塞萨利大学
hartonas@uth.gr

2023年2月8日

摘要

我们为 IPC（即直觉主义命题演算）以及弱于 IPC 的逻辑（次结构逻辑和次直觉主义逻辑）的解释，构建了一个共同的语义框架。具体而言，我们证明了蕴涵格的一个无选择表示和对偶性定理，其中的蕴涵格可以是分配的，也可以不是分配的。该对偶性可特化为海廷代数范畴与具有三元有序关系的拓扑有序框架范畴之间的无选择对偶。

1 引言

Stone [40], Priestley [13, 37] 和 Esakia [16] 对偶性，特别是分配格与海廷代数的对偶性，一直是将关系语义扩展到分配逻辑系统的基础背景。更具体地说，Esakia 对偶性建立了海廷代数与 S4代数（闭包代数）之间的等价关系 [16, 第 3 节4]。Esakia [15] 与 Blok [7]分别独立发现，超直觉主义逻辑格与 S4的正规扩张格同构；这些结果推动了 Blok-Esakia理论的发展，相关简要综述见 [9, 44]。

本文关注的不是超直觉主义（中间）逻辑，而是弱于 IPC（即直觉主义命题演算）的逻辑，包括次结构逻辑 [17], 以及次直觉主义逻辑 [8, 11, 14, 34, 38, 42, 43]。本文建立在作者此前关于正规格扩张的对偶研究 [29] 以及近期兴起的无选择公理拓扑对偶研究计划之上；该计划由 Bezhanishvili 和 Holliday 发起 [5] ，随后很快又出现了类似结果 [3, 4, 28, 35, 36], 。本文提出一个带类型关系框架，用于解释 IPC 的语言；在这一框架中，既可以解释次直觉主义逻辑，也可以解释次结构逻辑的蕴涵片段。

我们证明了蕴涵格，尤其是海廷代数的无选择拓扑对偶。该对偶还特化到分配蕴涵格这一中间情形

。任何次中间逻辑（次结构逻辑或次直觉主义逻辑）的显著特征在于，蕴涵不再与合取构成剩余关系，因此分配性可能被强制纳入公理化（如次直觉主义逻辑的情形），也可能被省略（如次结构逻辑中的通常情形）。我们还通过一个表示论证表明，每个蕴涵格都是某个剩余格的约化；每个分配蕴涵格都是某个剩余海廷代数的约化。其中，这些结构类似于 J´onsson 和 Tsinakis 的剩余布尔代数 [33], ，但其底层代数是海廷代数而非布尔代数。

在为 IPC 及较弱逻辑的解释构建共同的语义（关系）框架时，直觉主义蕴涵仍采用标准语义

$$w \Vdash \varphi \to \psi \ \text{ iff } \ \forall u(wRu \longrightarrow (u \Vdash \varphi \longrightarrow u \Vdash \psi)) \tag{1}$$

但对于较弱的逻辑，则使用三元关系（在 IPC 的情形下，这两个子句等价）。这一设定在 Relevance Logic 的 Routley-Meyer 语义 [39] 中广为人知，其中相关蕴涵通过以下形式的子句来解释

$$w \Vdash \varphi \to \psi \ \text{ iff } \ \forall u, z(u \Vdash \varphi \wedge wRuz \longrightarrow z \Vdash \psi). \tag{2}$$

在 Barwise 的通道理论 [1,2], 背景下，有人提出了一种信息论解释：蕴涵句表示信息通道 w的性质，这些通道连接站点 u, z（记作 $u \overset{w}{\rightsquigarrow} z$），其子句形式为 $w \Vdash \varphi \to \psi$ 当且仅当 $\forall u, z$（$u \Vdash \varphi$ 且 $u \overset{w}{\rightsquigarrow} z$ 蕴涵 $z \Vdash \psi$）。

此外，在形式概念分析（FCA）传统中，通过带有附加关系 [10, 12, 19, 25, 26, 31, 41], 的分类型框架（极性） $\mathfrak{P} = (X, \perp, Y)$，为由此产生的逻辑系统提供了关系语义；这些框架被称为信息系统、对象—属性系统或形式背景 [18], ，也称为极性（取名自 Birkhoff [6]）。关系 $\perp \subseteq X \times Y$ 以标准方式导出一个伽罗瓦连接 $(\ )^{\perp} : \wp(X) \leftrightarrows \wp(Y) : {}^{\perp}(\ )$，而句子则解释为伽罗瓦稳定集 $A = {}^{\perp}(A^{\perp})$。每个句子还关联一个共解释（反驳）集，因此该语义同时使用满足关系 $\Vdash$和共满足（反驳）关系 $\Vdash^{\partial}$，蕴涵的子句可写成以下形式

$$x \Vdash \varphi \to \psi \ \text{ iff } \ \forall u, z(u \Vdash \varphi \text{ and } xRuz \ \text{ implies } \ z \Vdash^{\partial} \psi) \tag{3}$$

我们证明，在 IPC 的情形下，蕴涵可以等价地用形式为 (1) 的子句来解释。

当不假设分配性，且逻辑（格）未配备德摩根否定（补集）算子时，如何解释析取便成了一个需要额外关注的问题。在 [3], 中，析取的语义基于一种格完备化，作者称之为 F^2-完备化；这是一种迭代滤子构造，与.....所采用的方法类似

Gouveia 和 Priestley [22] 用来研究半格的典范扩张问题的方法。由此得到的子句大致如（4）所示

$$x \Vdash \varphi \vee \psi \text{ iff } (x \Vdash \varphi \text{ or } x \Vdash \psi), \text{ or } \exists u, z(u \Vdash \varphi \text{ and } z \Vdash \psi \text{ and } u \wedge z \leq x) \quad (4)$$

其中假定框架的载体集具有半格结构。我们采用不同的方法，借助在 [23, 24] 中被称为“序对偶关系语义”的概念（不过该文仅使用了一般框架），在分类型框架（X、$\perp$、Y）中将析取对偶地解释为其序对偶，即根据子句 (5) 将其解释为合取，其中 $x \in X$ 和 $y \in Y$，

$$x \Vdash \varphi \wedge \psi \text{ iff } x \Vdash \varphi \text{ and } x \Vdash \psi \qquad y \Vdash^{\partial} \varphi \vee \psi \text{ iff } y \Vdash^{\partial} \varphi \text{ and } y \Vdash^{\partial} \psi \quad (5)$$

直观地说，这表示 y 反驳析取 $\varphi \vee \psi$，当且仅当它同时反驳析取项 φ 和 ψ。句子 ϑ 的解释 $[\![\vartheta]\!]$ 与共解释 $(\!|\vartheta|\!)$ 通过 $[\![\vartheta]\!] = {}^{\perp}(\!|\vartheta|\!)$ 和 $(\!|\vartheta|\!) = [\![\vartheta]\!]^{\perp}$ 相关联，因此，如有需要，可以给出析取的满足子句：$x \Vdash \varphi \vee \psi$ 当且仅当 $\forall y\,(xIy \mathrel{Đ\!\!\rightarrow} (y \Vdash^{\partial} \varphi \mathrel{Đ\!\!\rightarrow} y \not\Vdash^{\partial} \psi))$，其中 I 是分类型框架（极性）中关系 $\perp$ 的补集。

本文虽然以逻辑中的应用为研究动机，但并不直接讨论逻辑问题，而是为 IPC 及其语言下较弱的逻辑建立一个共同语义框架的基础。

第 2 节是预备部分，我们仅将蕴涵格和剩余化海廷代数定义为正规格扩张中值得关注的特例，以便与 [28, 29] 中得到的结果建立联系。

第 3 节专门研究带有三元关系 $T \subseteq Y \times (X \times Y)$ 的分类型框架 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, T)$。第 3.1 节回顾框架基础知识。第 3.2 节定义（公理化）蕴涵框架，并研究其伽罗瓦稳定集的全复代数。第 3.3 节为框架的全复代数满足（完全）分配性建立一个一阶条件。最后，第 3.4 节通过适当的一阶条件定义海廷框架；其全复代数是完备海廷代数，而且由三元关系 T 诱导的稳定集上的蕴涵算子与交的余伴随相同。

第 4 节致力于为蕴涵格建立一种无选择表示与对偶理论，并将其具体应用于分配蕴涵格和海廷代数。第 4.1 节详细介绍整蕴涵格的表示，包括其底层为分配格的情形。第 4.2 节转而讨论海廷代数的表示。第 4.3 节讨论对偶理论，这一讨论在很大程度上依赖于 [28, 29]。

第 5 节给出应用线索和总结性评论。

2 蕴涵格

令 $\{1, \partial\}$ 为一个二元集合，$\mathbf{L}^1 = \mathbf{L}$ 和 $\mathbf{L}^{\partial} = \mathbf{L}^{\mathrm{op}}$（对偶格）。沿用既有术语 [32],，若函数 $f : \mathbf{L}_1 \times \cdots \times \mathbf{L}_n \mathrel{Đ\!\!\rightarrow} \mathbf{L}_{n+1}$ 将

称为可加的且正规的，或称为正规算子，若它对格 $\mathbf{L}_i$ 的有限并满足分配律；对每个 $i = 1, \ldots n$，其结果在 $\mathbf{L}_{n+1}$ 中给出一个并。

定义 2.1. 有界格 $\mathbf{L}$ 上的 n 元运算 f 是分配类型为 $\delta(f) = (i_1, \ldots, i_n; i_{n+1}) \in \{1, \partial\}^{n+1}$ 的正规格算子，当且仅当它是一个正规可加函数 $f : \mathbf{L}^{i_1} \times \cdots \times \mathbf{L}^{i_n} \to \mathbf{L}^{i_{n+1}}$（在每个自变量位置上都对有限并可分配），其中每个 i_j（$j = 1, \ldots, n+1$）都属于集合 $\{1, \partial\}$，因此 $\mathbf{L}^{i_j}$ 要么是 $\mathbf{L}$，要么是 $\mathbf{L}^{\partial}$。

若 τ 是一个分配类型的元组（序列），则类型为 τ 的正规格扩张是一个格，并且对 τ中的每个 δ，都配有一个分配类型为 δ 的正规格算子。

对于固定的相似类型 τ，范畴 $\mathbf{NLE}_\tau$以类型为 τ 的正规格扩张作为对象。其态射是通常的代数同态。

本文聚焦于有界格 $\mathbf{L} = (L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \to)$，其带有一个二元蕴涵运算 $\to$，分配类型为 $\delta(\to) = (1, \partial; \partial)$，定义如下。由于 τ 仅由一种分配类型构成，我们用 $\mathbf{NLE}_{1\partial\partial}$ 表示整蕴涵格范畴。$\mathbf{NLE}_{1\partial\partial}$ 的对象定义如下，其态射为通常的保界同态。

定义 2.2. 积分蕴涵格 $\mathbf{L} = (L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \to)$是一个有界格，带有一个二元（蕴涵）运算，并满足以下公理，以及有界格的公理。

(A1) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$ (A2)
$a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$ (A3)
$a \leq b \iff 1 \leq a \to b$

例如，$\mathbf{FL}_{ew}$-代数的仅蕴涵片段（假设满足交换律 $a \bigcirc b = b \bigcirc a$ 和弱化律 $a \bigcirc b \leq b$的剩余格）是一个整蕴涵格。

如果假设公理 (A4)，则该格是分配的。

(A4) $\quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

如果在有界格的公理基础上加入公理 (H1)-(H2)，则它是一个海廷代数

(H1) $\quad a \wedge (a \to b) \leq b$
(H2) $\quad b \leq a \to (a \wedge b)$

我们用 $\mathbb{IIL}$ 表示整蕴涵格的拟簇。类似地，$\mathbf{dIIL} \subset \mathbb{IIL}$ 表示分配有界蕴涵格的拟簇。海廷代数是分配有界蕴涵格，因此，海廷代数的簇 $\mathbb{HA}$ 包含于拟簇 $\mathbf{dIIL}$。

引理 2.3. 在 $\mathbb{HA}$ 与 $\mathbb{IIL}$ 之间的拟簇完备格中，包含可数多个互不相同的拟簇 $\mathbb{V}$。

证明. 递归地定义 $a^n \to b$，使其满足 $a^0 \to b = b$ 和 $a^{n+1} \to b = a \to (a^n \to b)$。对于 $n \geq 1$，令 A_n 为公理 $a^{n+1} \to b \leq a^n \to b$，并令 $\mathbb{V}_n$ 为由在 $\mathbb{IIL}$ 中加入公理 A_n 所生成的 $\mathbb{IIL}$ 的子簇，因此对所有 $n \geq 1$，都有 $\mathbb{V}_n \subset \mathbb{IIL}$。注意，$\mathbb{V}_1$ 将收缩公理 $a^2 \to b = a \to (a \to b) \leq a \to b$ 加入$\mathbb{IIL}$，而该公理在直觉主义逻辑下有效，因此 $\mathbb{HA} \subset \mathbb{V}_1$。在 $\mathbb{V}_n = \mathbb{IIL} + A_n$ 中，我们有$a^{n+2} \to b = a \to (a^{n+1} \to b) \leq a \to (a^n \to b) = a^{n+1} \to b$，所以 A_{n+1} 可由 $\mathbb{V}_n$ 的准等式理论推出。因此 $\mathbb{V}_n \subseteq \mathbb{V}_{n+1}$。相比之下，$A_n$ 不能在 $\mathbb{V}_{n+1}$ 中推出，因此 $\mathbb{V}_n \subset \mathbb{V}_{n+1}$。因此，在 $\mathbb{HA}$ 与 $\mathbb{IIL}$ 之间存在一个可数的簇链，使得 $\mathbb{HA} \subset \mathbb{V}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{V}_n \subset \cdots \subset \mathbb{IIL}$。 □

定义 2.4. 剩余化海廷代数是一个结构

$$\mathbf{H} = (H, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \to, /, \circ, \backslash)$$

其中 $(H, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \to)$ 是海廷代数，$(H, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, /, \bigcirc, /)$ 是分配的整残余格，而 $(H, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, /)$ 是积分蕴涵格。

J´onsson 和 Tsinakis [33] 在研究关系代数的背景下研究了剩余布尔代数。剩余化海廷代数则出现在分配有界蕴涵格的表示与典范扩张的研究中（参见命题 4.2）。

关于蕴涵格的主要事实陈述如下定理。

定理 2.5. 每个积分蕴涵格 L 都是某个整残余格 R 的约化。若 D 是一个分配有界蕴涵格，则它是某个剩余化海廷代数 H 的约化。在这两种情况下，R 和 H 分别构造为 L 和 D 的典范扩张，因此它们在保持 L（分别为 D）不变的同构意义下是唯一的。

证明将在第 4 节中通过表示论证给出（海廷代数这一特殊情形参见推论 4.4 和推论 4.6）。

3 分类型剩余蕴涵框架

3.1 框架预备知识

考虑将 $\{1, \partial\}$ 作为类型集合，并令 $Z = (Z_1, Z_\partial)$ 为一个分类型集合。分类型剩余框架 $\mathfrak{F} = (Z_1, \perp, Z_\partial)$ 是由非空集合 $Z_1 = X, Z_\partial = Y$ 和一个二元关系 $\perp \subseteq X \times Y$ 组成的三元组。我们将关系 $\perp$ 称为该框架的伽罗瓦关系。它以标准方式生成一个伽罗瓦连接 $(\ )^{\perp} : \wp(X) \leftrightarrows \wp(Y)^\partial : {}^{\perp}(\ )$（$V \subseteq U^{\perp}$ 当且仅当 $U \subseteq {}^{\perp}V$）

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{y \in Y \mid \forall x \in U\ x \perp y\} = \{y \in Y \mid U \perp y\} \\ {}^{\perp}V &= \{x \in X \mid \forall y \in V\ x \perp y\} = \{x \in X \mid x \perp V\}. \end{aligned}$$

若子集 $A \subseteq X$ 满足 $A = {}^{\perp}(A^{\perp})$，则称其为稳定集。同样，若子集 $B \subseteq Y$ 满足 $B = ({}^{\perp}B)^{\perp}$，则称其为余稳定集。稳定集和余稳定集将被称为

伽罗瓦集；必要时根据具体情况，分别称为伽罗瓦稳定集或伽罗瓦余稳定集。

我们分别用 $\mathsf{G}(X)$、$\mathsf{G}(Y)$ 表示稳定集和余稳定集构成的完备格。注意，伽罗瓦连接限制为一个对偶同构 $(\ )^{\perp} : \mathsf{G}(X) \backsimeq \mathsf{G}(Y)^{\partial} : {}^{\perp}(\ )$。

在每种类型上都可诱导出预序关系：对于 $x, z \in X$,$x \preceq z$，当且仅当 $\{x\}^{\perp} \subseteq \{z\}^{\perp}$；类似地，对于 $y, v \in Y$, $y \preceq v$，当且仅当 ${}^{\perp}\{y\} \subseteq {}^{\perp}\{v\}$。如果（分类）框架上的预序 $\preceq$（在 X 上以及在 Y 上）实际上是偏序 $\leq$，则称该框架为分离的。下文中所有框架均假定为分离的。

我们的记号约定采用 [29, 注 3.2] 中的约定。对于某个 n，元组 $(u_1, \ldots, u_n)$ 使用$\vec{u}$向量记号表示。我们用 Γ 表示 $\{z \in X \mid \exists x \in U\ x \leq z\}$ 的上闭包 $\Gamma U =$，其中 $U \subseteq X$；$U \subseteq Y$ 的记法也类似。集合 U 是上升集（上集），当且仅当 $U = \Gamma U$。对于单元素集 $\{x\} \subseteq X$，我们记作 Γx，而非 $\Gamma(\{x\})$；对于 $\{y\} \subseteq Y$ 也采用类似记法。

对于两个伽罗瓦映射 ${}^{\perp}(\ )$ 和 $(\ )^{\perp}$，我们通常采用形式概念分析中的标准撇号记法。这样便可分别陈述并证明关于 $\mathsf{G}(X)$ 和 $\mathsf{G}(Y)$ 的结果，而无需重复定义和证明，也无需不断诉诸对偶。因此，对于一个伽罗瓦集 G, $G' = G^{\perp}$，若$G \in \mathsf{G}(X)$（G 是伽罗瓦稳定集），否则 $G' = {}^{\perp}G$，若 $G \in \mathsf{G}(Y)$（G 是伽罗瓦余稳定集）。

对于属于 X 或 Y 的元素 u，以及分别属于 Y 或 X 的子集 W，在类型匹配假设下，我们用 $u|W$ 表示 $u \perp W$（即对所有 $w \in W$，表示 $u \perp w$），或 $W \perp u$（即对所有 $w \in W$，表示 $w \perp u$）；这里类型匹配是指分别满足 $u \in X$, $W \subseteq Y$ 或 $W \subseteq X$ 和 $u \in Y$。类似地，对于记法 $u|v$，其中 u, v 是不同类型的元素，也有相同约定。

设 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y)$ 是一种极性，且 u是 $Z = X \cup Y$中的一个点。根据 [29,引理 3.3], ，以下是一些基本事实。

1. $\perp$ 对每个参数位置都是上升的（因此其补集 I 对每个参数位置都是下降的）。2. $(\Gamma u)' = \{u\}'$ 且 $\Gamma u = \{u\}''$ 是一个伽罗瓦集。3. 伽罗瓦集是上升集，即 $u \in G$ 蕴含 $\Gamma u \subseteq G$。4. 对于伽罗瓦集 G, $G = \bigcup_{u \in G} \Gamma u$。5. 对于伽罗瓦集 G, $G = \bigvee_{u \in G} \Gamma u = \bigcap_{v|G} \{v\}'$。6. 对于伽罗瓦集 G 以及任意集合 W, $W'' \subseteq G$ 当且仅当 $W \subseteq G$。

我们将主上集 $\Gamma x \in \mathsf{G}(X)(x \in X = \mathsf{Filt(L)})$ 称为 $\mathsf{G}(X)$ 的闭元素或滤子元素；将集合 ${}^{\perp}\{y\} \in \mathsf{G}(X)$ $(y \in Y = \mathsf{Idl(L)})$ 称为 $\mathsf{G}(X)$ 的开元素或理想元素；集合 Γy、$\{x\}^{\perp}$with $x \in X, y \in Y$ 也作类似称呼。这与拓扑术语不幸地发生了冲突，因此我们必须依靠上下文来消除歧义。此外，如果闭元素 Γu 满足 $\Gamma u = \{w\}'$，其中 w 由框架分离性保证唯一，则称其为既开又闭。若 Γu 既开又闭，则也称点 u 为既开又闭点。

根据引理 3.3], ， G(X) 的闭元素并生成 G(X)，而开元素交生成 G(X)（G(Y) 也同样如此）。

对于带类型关系 $R \subseteq \prod_{j=1}^{j=n+1} Z_{i_j}$，其中每个 j 都满足 $i_j \in \{1, \partial\}$（因此，如果 $i_j = 1$，则 $Z_{i_j} = X$；当 $i_j = \partial$ 时，则 $Z_{i_j} = Y$），我们约定将其视为关系 $R \subseteq Z_{i_{n+1}} \times \prod_{j=1}^{j=n} Z_{i_j}$。我们将其排序类型记作 $\sigma(R) = (i_{n+1}; i_1 \cdots i_n)$，并将适当排序的点组成的元组记作 $uRu_1 \cdots u_n$，表示为（$u, u_1, \ldots, u_n$） $\in R$。如果 σ 是 R 的排序，我们通常将其写作 R^σ 来表示。约定若 $\sigma_1 \neq \sigma_2$，则 R^{σ_1} 和 R^{σ_2} 表示不同的关系（排序上标是名称的一部分）。

定义 3.1（伽罗瓦对偶关系）。对于排序类型为 σ 的关系 R，其伽罗瓦对偶关系 R' 是由以下条件定义的关系： $uR'\vec{v}$ 当且仅当 $\forall w\ (wR\vec{v} \to w|u)$。换言之， $R'\vec{v} = (R\vec{v})'$。

定义 3.2（关系的截面）。对于一个（$n+1$）元关系 R^σ （排序类型为 σ）和一个 n 元组 $\vec{u}$， $R^\sigma\vec{u} = \{w \mid wR^\sigma\vec{u}\}$ 是由 $\vec{u}$ 确定的 R^σ 的截面。为了指定位于关系第 k 个参数位置的截面，我们令 $\vec{u}[_]_k$ 为在第 k 个参数位置留有空缺的元组。于是， $wR^\sigma\vec{u}[_]_k = \{v \mid wR^\sigma\vec{u}[v]_k\} \subseteq Z_{i_k}$ 是 R^σ 的第 k 个截面。

本文所关注的框架是下一节研究的蕴涵框架。

3.2 蕴涵框架及其全复代数

定义 3.3。如果 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, T^{\partial 1\partial})$ 是一个带有三元关系 T 的框架，且该关系具有所指示的排序类型，即 $T \subseteq Y \times (X \times Y)$，那么当且仅当表 1 中的公理成立时， $\mathfrak{F}$ 是一个蕴涵框架。

表 1：蕴涵框架公理

(F0) $\forall x, y(x \perp y \longleftrightarrow \forall u\ uTxy)$ (F1) 框架是分离的 (F2) 对所有 $x \in X$ 和 $v \in Y$，关系 T 的截面 $[_]Txv$ 是 G(Y) 的闭元素 (F3) 对任意 $y \in Y$，二元关系 yT 在两个自变量位置上均递减 (F4) 对任意 $z \in X$， T 的伽罗瓦对偶关系T' 的两个截面 $zT'[_]v$ 和 $zT'x[_]$ 均为伽罗瓦集

在 $U \subseteq X$ 上定义分层像算子 $\alpha_T = \rhd\ V \subseteq Y$，其定义为

$$U \rhd V = \alpha_T(U, V) = \{y \in Y \mid \exists x, v(x \in U\ \wedge\ v \in V\ \wedge\ yTxv)\} = \bigcup_{x \in U}^{v \in V} Txv$$

并令 $\Vdash\!\rhd : \mathsf{G}(X)\times\mathsf{G}(Y) \not\to \mathsf{G}(Y)$ 表示将 $\alpha_T = \rhd$ 限制到伽罗瓦集后所得的闭包 $\overline{\alpha}_T$，其定义域为 $A \in \mathsf{G}(X)$ $B \in \mathsf{G}(Y)$，定义为

$$A \Vdash\!\rhd B = \overline{\alpha}_T(A,B) = (\{y \in Y \mid \exists x, v(x \in A \ \wedge\ v \in B \ \wedge\ yTxv)\})'' = \bigvee_{x\in A, v\in B} Txv$$

引理 3.4。伽罗瓦集运算 $\Vdash\!\rhd : \mathsf{G}(X) \times \mathsf{G}(Y) \not\to \mathsf{G}(Y)$ 在每个参数位置上都对伽罗瓦集的任意并具有分配性，即对于 $A_i \in \mathsf{G}(X)$ with$i \in I$ and $B_j \in \mathsf{G}(Y)$ with $j \in J$，$(\bigvee_{i\in I} A_i) \Vdash\!\rhd (\bigvee_{j\in J} B_j) = \bigvee_{i\in I,\ j\in J}(A_i \Vdash\!\rhd B_j)$。

证明。该结论是将蕴涵框架的公理应用于表 1 中的三元关系 T 时，得到的定理 3.12], 的一个特例。 □

定义 3.5。对于 A, $C \in \mathsf{G}(X)$，定义 $A \Rightarrow C = (A \Vdash\!\rhd C')' = {}^{\perp}(A \Vdash\!\rhd C^{\perp})$。

Notice that $A \Rightarrow C = (A \Vdash\!\rhd C')' = (A \rhd C')''' = (A \rhd C')'$.

命题 3.6。以下结论成立

1. $(\bigvee_{i\in I} A_i) \Rightarrow \left(\bigcap_{j\in J} C_j\right) = \bigcap_{i\in I, j\in J}(A_i \Rightarrow C_j)$
2. $A \Rightarrow C = \bigcap_{x\in A, C\perp y}(\Gamma x \Rightarrow {}^{\perp}\{y\})$
3. $uT'xy$ iff $u \in (\Gamma x \Rightarrow {}^{\perp}\{y\})$, for all $u, x \in X$ and $y \in Y$
4. $u \in (A \Rightarrow C)$ iff $\forall x \in X \forall y \in Y(x \in A \ \wedge\ C \perp y \longrightarrow uT'xy)\}$
5. $A \subseteq C$ iff $X \subseteq A \Rightarrow C$, for any $A, C \in \mathcal{G}(X)$.

证明。对于 (1)，由于伽罗瓦连接是稳定集与余稳定集之间的对偶，$(\ )^{\perp} : \mathsf{G}(X) \backsimeq \mathsf{G}(Y)^{\partial} : {}^{\perp}(\ )$，由引理 3.4 可知，$\Vdash\!\rhd$ 在两个参数位置上都对任意并满足分配律，因此 $\Rightarrow$ 的分配类型为 $(1, \partial; \partial)$，换言之

$$\left(\bigvee_{i\in I} A_i\right) \Rightarrow \left(\bigcap_{j\in J} C_j\right) = \bigcap_{i\in I, j\in J}(A_i \Rightarrow C_j).$$

对于 (2)，闭元素生成并，开元素生成 $\mathsf{G}(X)$ 的交，因此特别地可得

$$A \Rightarrow C = \left(\bigvee_{x\in A} \Gamma x\right) \Rightarrow \left(\bigcap_{C\perp y} {}^{\perp}\{y\}\right) = \bigcap_{x\in A, C\perp y}(\Gamma x \Rightarrow {}^{\perp}\{y\})$$

对于断言 (3)，根据定义 $\Gamma x \Rightarrow {}^{\perp}\{y\} = {}^{\perp}(\Gamma x \Vdash\!\rhd \Gamma y) = (\bigvee_{x\le z, y\le v} Tzv)' = \bigcap_{x\le z, y\le v} T_{\prime}zv$。由于 T' 的截面具有稳定性，且稳定集是递增的，集合 $T_{\prime}xy$ 包含于每个满足 $x \le z$ 和 $y \le v$ 的集合 $T'zv$ 中。因此，$\Gamma x \Rightarrow {}^{\perp}\{y\} = T_{\prime}xy$，这就证明了断言 (3)。由此，$A \Rightarrow C = \bigcap_{x\in A, C\perp y} T'xy$，断言 (4) 随之成立。

对于断言 (5)，首先假设 $A \subseteq C$。由断言 (4)，$u \in A \Rightarrow C$ 当且仅当对于每个 $x \in A$ 以及每个满足 $C \perp y$的 $y \in Y$，都有 $uT^{11\partial}xy$。现在由

$x \in A \subseteq C \perp y$，可得 $x \perp y$，进而由 (F0) 可知，对于每个 $u \in X$，都有 $uT^{11\partial}xy$，因此对于每个 $u \in X$，都有 $u \in A \Rightarrow C$，也就是说 $X \subseteq A \Rightarrow C$。

反过来，如果 $X \subseteq A \Rightarrow C = \{u \in X \mid \forall x, y(x \in A \wedge C \perp y \text{Đ}\!\!\rightarrow uT^{11\partial}xy)\}$，那么 $\forall u \in X \forall x, y(x \in A \wedge C \perp y \text{Đ}\!\!\rightarrow uT^{11\partial}xy)$。将量词移到 u 上，可得等价形式 $\forall x, y(x \in A \wedge C \perp y \text{Đ}\!\!\rightarrow \forall u \in X\ uT^{11\partial}xy)$。根据 (F0)，这又等价于 $\forall x, y(x \in A \wedge C \perp y \text{Đ}\!\!\rightarrow x \perp y)$。等价地，我们有 $\forall y \in Y(C \perp y \text{Đ}\!\!\rightarrow A \perp y)$，这意味着对于任意 y，如果 $C \subseteq {}^{\perp}\{y\}$，那么 $A \subseteq {}^{\perp}\{y\}$。

因此 $\{y \in Y \mid C \subseteq {}^{\perp}\{y\}\} \subseteq \{y \in Y \mid A \subseteq {}^{\perp}\{y\}\}$，故利用开元素的交稠密性，我们得到 $A = \bigcap\{{}^{\perp}\{y\} \mid A \subseteq {}^{\perp}\{y\}\} \subseteq \bigcap\{{}^{\perp}\{y\} \mid C \subseteq {}^{\perp}\{y\}\} = C$。 □

由此得到以下结果。

推论 3.7. 对于定义 3.3 中的任意蕴涵框架 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, T^{\partial 1\partial})$，其全复代数 $\mathfrak{F}^{+} = (\mathsf{G}(X)\ \subseteq, \bigcap, \bigvee, \varnothing, X, \Rightarrow)$ 是一个有单位的蕴涵格。 □

此外，我们证明，蕴涵框架的全复代数 $\mathfrak{F}^{+}$ 是一个（完备）剩余格。这将用于第 4 节中定理 2.5 的证明。

定义 3.8。令 $T = T^{\partial 1\partial}$ 为所指类型的框架关系，即 $T \subseteq Y \times (X \times Y)$。由 T 导出的其他三元关系定义如下：

$T^{11\partial}$ $T^{\partial 1\partial}$ $xT^{11\partial}zv$ 的伽罗瓦对偶关系，当且仅当 $\forall y \in Y(yT^{\partial 1\partial}zv \text{Đ}\!\!\rightarrow x \perp y)$ $R^{\partial 11}$ 论元置换 $vR^{\partial 11}zx$ 当且仅当 $xT^{11\partial}zvR^{111}$ $R^{\partial 11}$ $uR^{111}zx$ 的伽罗瓦对偶关系，当且仅当 $\forall v(vR^{\partial 11}zx \text{Đ}\!\!\rightarrow u \perp v)S^{\partial\partial 1}$ 论元置换 $yS^{\partial\partial 1}vx$ 当且仅当 $yT^{\partial 1\partial}xvS^{1\partial 1}$ $S^{\partial\partial 1}$ $uS^{1\partial 1}vx$ 的伽罗瓦对偶关系，当且仅当 $\forall y(yS^{\partial\partial 1}vx \text{Đ}\!\!\rightarrow u \perp y)$。

令 $\alpha_R = \odot$ 为由关系 $R = R^{111}$ 生成的分层像算子，并令 $\overline{\alpha}_R = \textcircled{1}$ 表示其在伽罗瓦稳定集上的限制的闭包。

另令 $\alpha_S = \lhd$ 为由 S 生成的分层像算子，并进一步令 $\lhd\!\!| = \overline{\alpha}_S$ 表示 α_S 在伽罗瓦集上的限制的闭包。

定义 3.9。对于 $A, C \in \mathsf{G}(X)$，定义 $C \Leftarrow A = (C' \lhd\!\!| A)' = {}^{\perp}(C^{\perp} \Leftarrow A)$。

命题 3.10。对于任意伽罗瓦稳定集 $A, F, C \in \mathsf{G}(X)$，我们有

1. $C \Leftarrow F = \{z \in X \mid \forall x \in X \forall v \in Y(x \in F \wedge C \perp v \text{Đ}\!\!\rightarrow xS^{1\partial 1}vz)\}$
2. $A \subseteq C \Leftarrow F$ 当且仅当 $A \textcircled{1} F \subseteq C$ 当且仅当 $F \subseteq A \Rightarrow C$3. $(\bigcap_{j\in J} C_j) \Leftarrow (\bigvee_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I, j\in J}(C_j \Leftarrow A_i)$ 4. $C \Leftarrow A = \bigcap_{x\in A, C\perp y}({}^{\perp}\{y\} \Leftarrow \Gamma x)$ 5. $xS^{1\partial 1}yz$ 当且仅当 $z \in ({}^{\perp}\{y\} \Leftarrow \Gamma x)$

证明。第一个断言的证明方式与命题 3.6 第 4 部分完全类似。第二个断言可通过以下计算验证。

$F \subseteq A \Rightarrow C$当且仅当 $F \subseteq \{x \in X \mid \forall z \in X\ \forall v \in Y(z \in A\ \wedge\ C \perp v \mathbin{Đ} \to\ xT^{11\partial}zv)\}$ 当且仅当 $\forall x \in X\,(x \in F \mathbin{Đ}\to\ \forall z \in X\ \forall v \in Y($ $z \in A\ \wedge\ C \perp v \mathbin{Đ}\to\ xT^{11\partial}zv))$ 当且仅当 $\forall x, z \in X\ \forall v \in Y(x \in F \mathbin{Đ}\to ($ $z \in A\ \wedge\ C \perp v \mathbin{Đ}\to\ xT^{11\partial}zv))$ 当且仅当 $\forall x, z \in X\ \forall v \in Y(x \in F \mathbin{Đ}\to ($ $z \in A \mathbin{Đ}\to (C \perp v \mathbin{Đ}\to\ xT^{11\partial}zv)))$ 当且仅当 $\forall x, z \in X\ \forall v \in Y($ $x \in F\ \wedge\ z \in A \mathbin{Đ}\to (C \perp v \mathbin{Đ}\to\ xT^{11\partial}zv))$ 当且仅当 $\forall x, z \in X\,($ $x \in F\ \wedge\ z \in A \mathbin{Đ}\to (C^{\perp}\ \subseteq\ xT^{11\partial}z))$ 当且仅当 $\forall x, z \in X\,(x \in F\ \wedge\ z \in A$ $\mathbin{Đ}\to (C^{\perp}\ \subseteq\ R^{\partial 11}zx))$ 当且仅当 $\forall x, z \in X\,(x \in F\ \wedge\ z \in A \mathbin{Đ}\to (^{\perp}(R^{\partial 11}zx)$ $\subseteq\ C))$ 当且仅当 $\forall x, z \in X\,(x \in F\ \wedge\ z \in A \mathbin{Đ}\to (R^{111}zx\ \subseteq\ C))$ 当且仅当 $\forall u, x, z \in X\,(x \in F\ \wedge\ z \in A \mathbin{Đ}\to (uR^{111}zx \mathbin{Đ}\to\ u \in C))$ 当且仅当 $\forall u, x,$ $z \in X\,(uR^{111}zx\ \wedge\ z \in A\ \wedge\ x \in F \mathbin{Đ}\to\ u \in C)$ 当且仅当 $\forall u\,(\exists x, z \in X\,($ $uR^{111}zx\ \wedge\ z \in A\ \wedge\ x \in F)\mathbin{Đ}\to\ u \in C)$ 当且仅当 $\forall u\,(u \in A \odot F \mathbin{Đ}\to u \in C)$ 当且仅当 $A \odot F \subseteq C$ 当且仅当 $A \oplus F \subseteq C$。

注意，根据定义，$S'vx = S^{1\partial 1}vx = (S^{\partial\partial 1}vx)' = (T^{\partial 1\partial}xv)' = T^{11\partial}xv = T'xv$。沿用上述计算可得

$A \oplus F \subseteq C$当且仅当 $\forall x, z \in X\ \forall v \in Y(x \in F\ \wedge\ z \in A \mathbin{Đ}\to (C \perp v \mathbin{Đ}$ $\to\ xT^{11\partial}zv))$ 当且仅当 $\forall x, z \in X\ \forall v \in Y(z \in A \mathbin{Đ}\to (x \in F\ \wedge\ C \perp v \mathbin{Đ}$ $\to xS^{1\partial 1}vz))$ 当且仅当 $\forall z \in X\,(z \in A \mathbin{Đ}\to \forall x \in X \forall v \in Y(x \in F\ \wedge\ C \perp v$ $\mathbin{Đ}\to xS^{1\partial 1}vz)$ 当且仅当 $A \subseteq \{z \in X \mid \forall x \in X \forall v \in Y(x \in F\ \wedge\ C \perp v \mathbin{Đ}$ $\to xS^{1\partial 1}vz)\}$ 当且仅当 $A \subseteq C \Leftarrow F$。

第三个断言由 $\Leftarrow$ 的分配性质及余剩性得出。第四个断言是一个特殊情形：将 A 写作 Γx 与 $x \in A$ 的并，并将 C 写作 $^{\perp}\{y\}$ 与 $C \perp y$ 的交。

最后，根据定义，我们有 $xS^{1\partial 1}yz$ 当且仅当 $xT^{11\partial}zy$，因此 $S' = S^{1\partial 1}$ 在每个变量位置上都是上升集，由此结合断言 (4) 即可得到最后一个断言。□

命题 3.10 确立了以下结果。

推论 3.11. 若 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, T^{\partial 1\partial})$ 是一个蕴涵框架，则其全复代数 $\mathfrak{F}^{+} = (\mathsf{G}(X)$ $\subseteq, \bigcap, \bigvee, \varnothing, X, \Leftarrow \oplus, \Rightarrow)$ 是一个整残余格。□

3.3 分配蕴涵框架

本节的贡献在于确立了一个一阶条件，该条件最初在 [28], 中提出，用于判定稳定集格 $\mathsf{G}(X)$ 是否为分配格。在此情形下，交集对 $\mathsf{G}(X)$ 中的任意并满足分配律，因此它具有一个余伴随

$\nRightarrow$。由此，$\mathsf{G}(X)$ 是一个（完备）剩余海廷代数（定义 2.4）。此外，对于将 $\oplus$ 视为交集的情形（此时 $\Leftarrow \Rightarrow$ 也被视为 $\nRightarrow$），我们也确立了一阶条件。

令 $R_{\leq}$ 为定义在 X 上的三元上界关系，当且仅当 $u \leq x$ 和 $z \leq x$均成立时，有 $xR_{\leq}uz$ 。

命题 3.12. 设 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y)$ 是一个分类型框架（一个极性），且 $\mathsf{G}(X)$ 是稳定集构成的完备格。若伽罗瓦对偶关系 $R'_{\leq}$关于 $R_{\leq}$ 的所有截面都是伽罗瓦集，则 $\mathsf{G}(X)$ 是完全分配的。

证明. 证明已在 [28, 命题 3.7] 中给出，但该文尚未正式发表，因此我们在此重述。

令 α_R为由 $R_{\leq}$, $\alpha_R(U, W) = \bigcup_{u \in U}^{w \in W} Ruw$生成的像算子。注意，对于稳定集 A, C（更一般地，对于上升集），有 $\alpha_R(A, C) = A \cap C$。因此，由于伽罗瓦集对交集封闭，$\overline{\alpha}_R(A, C) = \alpha_R(A, C) = A \cap C$。给定伽罗瓦对偶关系$R'_{\leq}$ 关于 $R_{\leq}$的截面稳定性假设，[29] 的定理 3.12 适用，由此可得 $\overline{\alpha}_R$ （即交集）对稳定集的任意并满足分配律。 □

因此，我们得出了以下结果。

推论 3.13。设 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, T^{\partial 1 \partial})$ 是一个蕴涵框架。如果上界关系 $R_{\leq}$ on X 的伽罗瓦对偶关系的所有截面都是伽罗瓦集，那么该框架的全复代数 $\mathfrak{F}^+$ 是一个（完备的）剩余海廷代数。

证明。结合命题 3.12 和推论 3.11。 □

3.4 海廷框架

命题 3.14。设 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, T^{\partial 1 \partial})$ 是一个蕴涵框架，$\mathfrak{F}^+$ 是其全复代数，$R_{\leq}$ 是 X 上的上界关系。再设 R^{111} 是定义 3.8 中定义的导出关系，并假设 x、$z \in X$ 是任意的。那么以下结论成立：

1. $\Gamma x \cap \Gamma z \subseteq \Gamma x \oplus \Gamma z$ 当且仅当 $R_{\leq}xz \subseteq R^{111}xz$
2. $\Gamma x \oplus \Gamma z \subseteq \Gamma x \cap \Gamma z$ 当且仅当 $R^{111}xz \subseteq R_{\leq}xz$

3. $\mathfrak{F}^+$ 是完备海廷代数（其中 $\Rightarrow$ 关于交集具有剩余）当且仅当 $R^{111}xz = R_{\leq}xz$。

证明。对于（1），注意对任意 $y \in Y$

$y \in (\Gamma x \odot \Gamma z)'$ 当且仅当 $y \in \bigcap_{x \leq x_1}^{z \leq z_1} R'x_1z_1$ (R是 R^{111}) 当且仅当 $\forall x_1, z_1 \in X(x \leq x_1 \ \wedge \ z \leq z_1 \eth\!\!\rightarrow yR'x_1z_1)$ ($R' = R^{\partial 11}$) 当且仅当 $\forall x_1, z_1 \in X(x \leq x_1 \ \wedge \ z \leq z_1 \eth\!\!\rightarrow z_1 T x_1 y)$ （ R的定义）当且仅当 $zT'xy$ (T截面是伽罗瓦集，也就是上集）当且仅当 $yR^{\partial 11}xz$ （ R的定义）当且仅当 $yR'xz$ (R是 R^{111})

于是有

当且仅当 $\forall u(uR_{\leq}xz \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow u \in \Gamma x \oplus \Gamma z)$

当且仅当 $\forall u(uR_{\leq}xz \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow \Gamma u \subseteq \Gamma x \oplus \Gamma z)$（伽罗瓦集是上集）当且仅当 $\forall u(uR_{\leq}xz \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow \Gamma u \subseteq \bigcap\{{}^{\perp}\{y\} \mid \Gamma x \oplus \Gamma z \subseteq {}^{\perp}\{y\}\}$ 当且仅当 $\forall u(uR_{\leq}xz \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow \forall y(\Gamma x \oplus \Gamma z \subseteq {}^{\perp}\{y\} \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow u \perp y))$ 当且仅当 $\forall u(uR_{\leq}xz \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow \forall y(\Gamma y \subseteq (\Gamma x \oplus \Gamma z)' \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow u \perp y))$ 当且仅当 $\forall u(uR_{\leq}xz \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow \forall y(y \in (\Gamma x \odot \Gamma z)' \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow u \perp y))$ 当且仅当 $\forall u(uR_{\leq}xz \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow \forall y(yR^{\partial 11}xz \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow u \perp y))$ 当且仅当 $\forall u(uR_{\leq}xz \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow uR^{111}xz)$ 当且仅当 $R_{\leq}xz \subseteq R^{111}xz$

对于（2），首先注意，对任意 x、$z \in X$、$R_{\leq}xz = \Gamma x \cap \Gamma z$，因此 $R_{\leq}xz$ 是一个稳定集。还要注意，结合 $R = R^{111}$ 和定义 3.8，$R^{111}xz = (R^{\partial 11}xz)' = (zT^{11\partial}x[\ ])'$。我们假设（根据表 1 中的公理 F3、F4），框架三元关系 $T^{\partial 1\partial}$ 的伽罗瓦对偶关系 $T^{11\partial}$ 的所有截面都是稳定的，因此 $R'xz = (zT^{11\partial}x[\ ])'' = zT^{11\partial}x[\ ] = R^{\partial 11}xz$，进而 $R''xz = (R^{\partial 11}xz)' = R^{111}xz = Rxz$；这里用到了 R^{111} 是 $R^{\partial 11}$ 的伽罗瓦对偶这一事实。断言（2）的证明由以下计算给出。

$$
\begin{aligned}
&\Gamma x \oplus \Gamma z \subseteq \Gamma x \cap \Gamma z \text{ iff } \Gamma x \odot \Gamma z \subseteq R_{\leq}xz \\
&\quad \text{iff } R'_{\leq}xz \subseteq (\Gamma x \odot \Gamma z)' \\
&\quad \text{iff } \forall y(yR'_{\leq}xz \longrightarrow y \in (\Gamma x \odot \Gamma z)' \\
&\quad \text{iff } \forall y(yR'_{\leq}xz \longrightarrow yR'xz) \qquad (R = R^{111},\ R' = R^{\partial 11}, R'' = R) \\
&\quad \text{iff } \forall y(yR''xz \longrightarrow yR''_{\leq}xz) \\
&\quad \text{iff } \forall y(yR^{111}xz \longrightarrow yR_{\leq}xz) \qquad (R_{\leq}xz \text{ is a stable set}) \\
&\quad \text{iff } R^{111}xz \subseteq R_{\leq}xz
\end{aligned}
$$

对于 (3)，如果 $\mathfrak{F}^{+}$ 是完备海廷代数，那么根据伴随的唯一性和命题 3.10，有 $\oplus = \cap$。利用 (1) 和 (2)，可得 $R^{111}xz = R_{\leq}xz$。

反过来，假设对于任意 x、$z \in X$，都有 $R^{111}xz = R_{\leq}xz$，只需证明 $\oplus = \cap$，这意味着根据命题 3.10，$\Rightarrow$ 是 $\cap$的余伴随。

通过对 $\oplus$关于 $\Rightarrow$进行剩余化，我们得到 $A \oplus F = \bigvee_{x \in A,\ z \in F} \Gamma x \oplus \Gamma z$。因此，对于任意稳定集 C，$A \oplus F \subseteq C$ 当且仅当对于所有 $x \in A$和 $z \in F$，都有 $\Gamma x \oplus \Gamma z \subseteq C$。由于开元素的交稠密性，$C = \bigcap_{C \perp y} {}^{\perp}\{y\}$，我们得到 $A \oplus F \subseteq C$ 当且仅当对于所有满足 $C \perp y$的 $x \in A$、$z \in F$和 $y \in Y$，都有 $\Gamma x \oplus \Gamma z \subseteq {}^{\perp}\{y\}$。取 $C = \Gamma x \cap \Gamma z$，首先注意到 $\Gamma x \cap \Gamma z \subseteq {}^{\perp}\{y\}$ 当且仅当 $yR'_{\leq}xz$，其中 $R'_{\leq}$是上界关系 $R_{\leq}$的伽罗瓦对偶关系。此外，$\Gamma x \oplus \Gamma z \subseteq {}^{\perp}\{y\}$ 当且仅当 $y \in (\Gamma x \odot \Gamma z)'$ 当且仅当 $yR'xz$，其中 $R' = R^{\partial 11}$是关系 R^{111} 的伽罗瓦对偶（并且根据定义，当且仅当 $zT^{11\partial}xy$ 成立时，$yR^{\partial 11}xz$ 成立）。因此我们有

$A \oplus F \subseteq A \cap F$当且仅当 $\forall x \in A \forall z \in F \forall y \in Y(yR'_{\leq}xz \mathbin{Đ}\!\!\rightarrow yR'xz)$，当且仅当 $\forall x \in A \forall z \in F(R'_{\leq}xz \subseteq R'xz)$，当且仅当 $\forall x \in A \forall z \in F(R^{111}xz \subseteq R''_{\leq}xz)$，当且仅当 $\forall x \in A \forall z \in F(R^{111}xz \subseteq R_{\leq}xz)$

因此，对于所有 $x, z \in X$，假设 $R^{111}xz \subseteq R_{\leq}xz$ 蕴含 $A \oplus F \subseteq A \cap F$。

对于反向包含，我们利用如下假设：对任意 x、$z \in X$，有 $R_{\leq}xz \subseteq R^{111}xz$。令 $u \in A \cap F$，并证明 $u \in A \oplus F$。

由于 $A = \bigcup_{x \in A} \Gamma x$ 和 $F = \bigcup_{z \in F} \Gamma z$，我们得到 $u \in A \cap F$ 当且仅当存在元素 $x \in A$、$z \in F$，使得 $u \in \Gamma x$ 且 $u \in \Gamma z$。但是，根据我们的情形假设和本命题的第 (1) 部分，$u \in \Gamma x \cap \Gamma z$ 蕴含 $u \in \Gamma x \oplus \Gamma z$；又由于 $A \oplus F = \bigvee_{x \in A}^{z \in F} \Gamma x \oplus \Gamma z$，因此可得 $u \in A \oplus F$。所以我们还得到 $A \cap F \subseteq A \oplus F$，从而可得 $A \cap F = A \oplus F$。□

定义 3.15. 海廷框架是指蕴涵框架 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, T^{\partial 1 \partial})$，其中 $R^{111}xz = R_{\leq}xz$，对所有 $x, z \in X$ 均成立。

因此，根据命题 3.14，海廷框架恰好是这样的蕴涵框架 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, T^{\partial 1 \partial})$：其全复代数 $\mathfrak{F}^+$ 是一个（完备）海廷代数，其中由框架关系 $T^{\partial 1 \partial}$ 诱导的稳定集运算 $\Rightarrow$ 与 $\mathsf{G}(X)$ 中交集的余伴随相一致。

我们将通过证明以下结论来结束本节：若该框架是海廷框架，则其对偶全复代数中的蕴涵运算以通常的方式解释直觉主义蕴涵。

命题 3.16. 设 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, T^{\partial 1 \partial})$ 是一个海廷框架。那么，对于任意伽罗瓦稳定集 A, C 以及元素 $x \in X$

$$x \in (A \Rightarrow C) \text{ iff } \forall z \in X(x \leq z \longrightarrow (z \in A \longrightarrow z \in C)).$$

证明。设 α_R 是由三元关系 R, $\alpha_R(U, W) = \bigcup_{x \in U, z \in W} Rxz$ 在 X 的子集上生成的像算子。由于 α_R 对任意并运算满足分配律，它在幂集代数中有一个余伴随映射 β_R，定义为 $\beta_R(U, V) = \bigcup\{W \subseteq X \mid \alpha_R(U, W) \subseteq V\}$。

在 [29, 定理 3.14], 中已证明，若将 α_R 限制在伽罗瓦集上所得的闭包 $\overline{\alpha}_R$ 存在余伴随，则其余伴随是 β_R在伽罗瓦集上的限制 $\beta_{R/}$，明确地定义为 $\beta_{R/}(A, C) = \bigcup\{F \in \mathsf{G}(X) \mid \alpha_R(A, F) \subseteq C\}$。我们还在 [29, 引理 3.15] 中证明，$\beta_{R/}$ 等价地定义为$\beta_{R/}(A, C) = \{u \in X \mid \alpha_R(A, \Gamma u) \subseteq C\}$。

在我们所关注的情形中，$R = R^{111} = R_{\leq}$, $\overline{\alpha}_R(A, C) = \alpha_R(A, C) = A \cap C$ 并且，由于我们假设该框架是海廷框架，$\oplus = \cap$ 确实是剩余的，其蕴涵运算 $\Rightarrow$ 由框架关系 $T^{\partial 1 \partial}$ 定义（定义 3.5）。根据 [29, 引理 3.15]应用于我们所关注的情形，可得 $A \Rightarrow C = \{x \in X \mid A \cap \Gamma x \subseteq C\}$。但这恰好意味着，$x \in (A \Rightarrow C)$ 当且仅当对于任意 $z \in X$，若 $x \leq z$ 且 $z \in A$，则 $z \in C$；这等价于命题陈述中的成员条件。

□

4 无选择拓扑对偶

4.1 整蕴涵格

我们提出的格表示，是将 [30]，在 [28, 定理 4.6] 中改写为无选择形式，并通过将斯通拓扑改为谱拓扑来实现的。

定理 4.1（无选择格表示）。设 $\mathbf{L} = (L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ 是一个有界格，$(X, \perp\!\!\!\perp, Y)$ 是其对偶滤子-理想框架（$X = \mathbf{Filt(L)}$ $Y = \mathbf{Idl(L)}$），其中 $\perp\!\!\!\perp \subseteq X \times Y$ 定义为：$x \perp\!\!\!\perp y$ 当且仅当 $x \cap y \neq \varnothing$。设 $\mathfrak{X} = (X, \mathsf{B})$ 和 $\mathfrak{Y} = (Y, \mathsf{C})$ 分别是由基 $\mathsf{B} = \{X_a \mid a \in L\}$ 和 $\mathsf{C} = \{Y^a \mid a \in L\}$ 生成的谱空间。

于是，映射 $a \mapsto X_a$ 是格同构 $\mathbf{L} \backsimeq \mathbf{KOG(Filt(L))}$，而映射 $a \mapsto Y^a$ 是对偶同构 $\mathbf{L}^\partial \backsimeq \mathbf{KOG(Idl(L))}$。□

下面概述证明，详细内容请参见 [28, 29] 。

如 [28], 中详述，拓扑空间 $\mathfrak{X} = (X, \mathsf{B})$ 和 $\mathfrak{Y} = (Y, \mathsf{C})$ 是谱空间。[28, 命题 4.3], 中，B 和 C 各自都是交半格（$X_a \cap X_b = X_{a \wedge b}$ 和 $Y^a \cap Y^b = Y^{a \vee b}$），它们分别由紧开伽罗瓦稳定集和余稳定集组成；由 $\perp\!\!\!\perp$ 诱导的伽罗瓦连接限制为对偶同构 $\mathsf{B} \backsimeq \mathsf{C}^{\mathrm{op}}$，因此二者都是（对偶同构的）格。[28,命题 4.5]。

此外，映射 $a \mapsto X_a$ 是格同构 $\mathbf{L} \backsimeq \mathbf{KOG(Filt(L))}$，而映射 $a \mapsto Y^a$ 是对偶同构 $\mathbf{L}^\partial \backsimeq \mathbf{KOG(Idl(L))}$ [28, 命题 4.6]。[28] 的表示与我们在 [30] 中给出的表示，唯一的区别在于采用了谱拓扑而非斯通拓扑，并且只限于真滤子/理想。后一选择不影响论证；根据 [10,命题 2.6] 中的证明，[30] 的表示（因而也是我们在此使用的 [28] 的表示）是该格的典范扩张。

为表示蕴涵，给定一个蕴涵格 $\mathbf{L} = (L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \to)$，我们采用 [29] 的框架：对于每个正规格算子，在框架中加入一个关系，使得若 $\delta = (i_1, \ldots, i_n; i_{n+1})$ 是该算子的分配类型，则 $\sigma = (i_{n+1}; i_1 \cdots i_n)$ 是该关系的排序类型。在本文关注的情形中，鉴于 $\delta(\to) = (\mathbf{1}, \partial; \partial)$，我们加入一个具有所示排序类型的三元关系 $T^{\partial 1 \partial}$ 。

典范三元关系 $T = T^{\partial 1 \partial} \subseteq Y \times (X \times Y)$ 按照 [29,第 4 节1] 中所述，借助点算子 $\rightsquigarrow : X \times Y \text{Đ} \to Y$ 定义；对于 $x \in X$ 和 $y \in Y$，我们定义 $x \rightsquigarrow y = \bigvee\{y_{a \to b} \mid a \in x, b \in y\}$。我们约定用 $x_a = a{\uparrow}$ 表示主滤子，用 $y_a = a{\downarrow}$ 表示主理想，因此 $y_{a \to b}$ 是由蕴涵元素 $a \to b$ 生成的主理想。注意，若$a \in x \cap y$，则（由于我们假设格是整的）$(a \to a) = 1 \in (x \rightsquigarrow y)$ 是一个理想，因此我们得到 $(x \rightsquigarrow y) = \omega$ 是非正常理想。我们还将 $T^{11\partial} = T'$ 记为 T 的伽罗瓦对偶关系。为便于查阅，我们在下方列出定义，以及 T、T' 各自的等价定义，并使用 [29, 引理 4.4、引理 4.5]。

$$
\begin{array}{lllll}
x \rightsquigarrow v & = & \bigvee\{y_{a \to b} \mid a \in x \in X \text{ and } b \in v \in Y\} \in Y = \mathrm{Idl}(\mathbf{L}) & & \\
y T^{\partial 1 \partial} x v & \text{iff} & (x \rightsquigarrow v) \subseteq y & \text{iff} & \forall a, b (a \in x \ \wedge \ b \in v \longrightarrow (a \to b) \in y) \\
u T' x v & \text{iff} & u \perp\!\!\!\perp (x \rightsquigarrow v) & \text{iff} & \exists a, b (a \in x \ \wedge \ b \in v \ \wedge \ (a \to b) \in u)
\end{array}
$$

命题 4.2. 蕴涵格 $\mathbf{L} = (L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \to)$ 的典范框架 $\mathbf{L}_+ = \mathfrak{F} = (\mathbf{Filt(L)}\ \perp\!\!\!\perp, \mathbf{Idl(L)}\ T^{\partial 1 \partial})$ 是一个蕴涵框架（定义 3.3 中的意义下）。此外，如果该格是分配的，那么交集

在 G(X) 中对任意并具有分配性，因此该框架的全复代数是一个（完备的）剩余海廷代数。

证明。引理 4.3、引理 4.6] 中已对任意正规格扩张更一般地验证了公理 (F1)–(F4)。对于公理 (F0)，若 x 是一个滤子，y 是一个理想，且 $x \perp\!\!\!\perp y$，令 $a \in x \cap y$。那么 $a \to a = 1 \in (x \rightsquigarrow y)$，因此 $(x \rightsquigarrow y) = \omega$ 是非正常理想（整个格），于是对任意滤子 u，我们有 $u \perp\!\!\!\perp (x \rightsquigarrow y)$，即 $uT^{11\partial}xy$。

反过来，假设对所有滤子 u，都有 $u \perp\!\!\!\perp (x \rightsquigarrow y)$。考虑平凡滤子 $u = \{1\}$，可得 $1 \in (x \rightsquigarrow y)$。根据 $x \rightsquigarrow y$ 的定义，存在 $a \in x$、$b \in y$，使得 $1 \leq a \to b$。由格上的整性公理，这等价于 $a \leq b$。于是 $a \in x \cap y$，即 $x \perp\!\!\!\perp y$。

分配格的情形已在 [28, 定理 5.2], 中给出，但由于这篇文章此时尚未正式发表，我们在此重述。

为证明 G(X) 是完全分配格，首先注意到，格并 $\vee$ 和交 $\wedge$ 显然都是定义 2.1 意义下的正规格算子；但只有当交对任意并满足分配律时，交才是一个算子（按 J´onsson-Tarski 的意义）。在这种情况下，交也具有分配类型 (1, 1; 1)。其 σ-扩张 $\wedge_\sigma$按照 [29, 第 4 节1]中概述的方法构造。具体而言，令 $\wedge = f$，滤子上的点算子 $\widehat{f}$ 定义为 $\widehat{f}(x, z) = \bigvee\{x_{a \wedge b} \mid a \in x \text{ 和 } b \in z\}$，而典范关系 $R_\wedge$ 随后定义为：$xR_\wedge uz$ 当且仅当 $\forall a, b(a \in u \text{ 和 } b \in z \Rightarrow a \wedge b \in x)$，此处使用了 [29]的引理 4.4。注意，$R_\wedge$ 是命题 3.12 中的上界关系。考虑由 $\alpha_R(U, W) = \{x \in X \mid \exists u \in U \exists z \in W\ xR_\wedge uz\}$ 定义的像算子 $\alpha_R : \wp(X) \times \wp(X) \to \wp(X)$，可得 $\alpha_R(A, C) = A \cap C$，其中 $A, C \in \mathsf{G}(X)$。根据[29, 引理 4.6], , $R_\wedge$ 的伽罗瓦对偶关系的所有截面都是稳定的。由此根据命题 3.12 可知，交对任意并满足分配律，换言之，G(X) 是完全分配格。结合命题 3.10 可得，该框架的全复代数是一个剩余海廷代数。

□

命题 4.3. 格表示映射 $a \mapsto X_a$ 是积分蕴涵格 $\backsimeq$KOG(X) 的同构。

证明。格元素 a 的像 X_a 是所有包含主滤子 x_a 的滤子集，因此 $X_a = \Gamma x_a$；这是一个开闭元素，因为 $\Gamma x_a = {\perp\!\!\!\perp}\{y_a\}$，其中 y_a 是由 a 生成的主理想。这是因为 $x \perp\!\!\!\perp y_a$ 当且仅当 $x \cap y_a \neq \varnothing$，当且仅当 $a \in x$。因此，根据命题 3.6，$X_a \Rightarrow X_b = \Gamma x_a \Rightarrow {\perp\!\!\!\perp}\{y_b\} = \{u \in X \mid uT' x_a y_b\}$。在典范框架中，$uT' x_a y_b$ 成立当且仅当 $u \perp\!\!\!\perp (x_a \rightsquigarrow y_b)$，当且仅当 $\exists e, d(e \in x_a, d \in y_b \text{ 和 } (e \to d) \in u)$，这里用到了 [29, 引理 4.5]。根据蕴涵的单调性，这意味着 $uT' x_a y_b$ 当且仅当 $(a \to b) \in u$。由此可得 $X_a \Rightarrow X_b = X_{a \to b}$，这就证明了表示映射是蕴涵格同态。双射性已在格表示结果 [29, 定理 5.5] （或其无选择版本 [28, 定理 4.6]）中证明。 □

我们通过证明定理 2.5 来结束本节，该定理将在下文作为已得结果的推论给出。

推论 4.4. 每个积分蕴涵格 L 都是某个整残余格 R 的约化。若 D 是分配有界蕴涵格，则它是某个剩余海廷代数 H 的约化。在这两种情况下，R 和 H 分别可以构造为 L 和 D 的典范扩张。

证明。该结论已在命题 4.2 中证明。该表示是所表示的蕴涵格的典范扩张，这是因为格表示给出了一个典范扩张；参见 [20, 命题 2.6]。在 [27, 命题 28] 中，我们详细证明了：若正规格算子的输出类型为 1，则其典范表示给出其 σ-扩张（按照 [20, 第 4] 节的术语）；若输出类型为 ∂，则给出其 π-扩张。

□

4.2 海廷代数

设 $\mathbf{H} = (H, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \to)$ 是一个海廷代数。由命题 4.2 可知，其对偶框架 $\mathfrak{F} = (\text{滤子集(H)}\ \perp, \text{理想集(H)}\ T)$ 的全复代数 $\mathfrak{F}^+$ 是一个剩余海廷代数，其中 $\Rightarrow$ 是 $\cap$ 的余伴随，定义如下：

$$A \Rightarrow C = \{u \in X \mid \forall z \in X(z \in A \ \wedge\ u \leq z \longrightarrow z \in C)\}, \tag{6}$$

以及由框架关系 T 诱导的剩余算子 $\oplus_T, \Rightarrow_T$，如命题 3.6 所示，定义为

$$A \Rightarrow_T C = \{u \in X \mid \forall x \in X \forall y \in Y(x \in A \ \wedge\ C \perp y \longrightarrow uT'xy)\}. \tag{7}$$

命题 4.5. 若 $\mathbf{H} = (H, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \to)$ 是一个海廷代数，则其典范框架 $\mathfrak{F} = (\text{滤子集(H)}\ \perp, \text{理想集 (H)}\ T)$，其中 $T = T^{\partial 1 \partial} \subseteq Y \times (X \times Y)$ 且 $X =$ 滤子集 (H) $Y =$ 理想集 (H)，是一个海廷框架（定义 3.15）。

证明. 要证明 H 的典范框架是海廷框架，只需证明 $\Rightarrow = \Rightarrow_T$，或者证明 $\cap = \oplus_T$，或者对所有 $x, z \in X$ 证明 $R_\wedge xz = R^{111}xz$；这是由命题 3.14 和伴随的唯一性得出的。此外，鉴于 $\Rightarrow$ 和 $\Rightarrow_T$ 的分配性质，只需证明对于任意 $x \in X$ 和 $y \in Y$，有 $\Gamma x \Rightarrow {}^{\perp}\{y\} = \Gamma x \Rightarrow_T {}^{\perp}\{y\}$。等价地，根据命题 3.6 的第 3 部分，只需证明 $uT^{11\partial}xy$ 当且仅当 $u \in \Gamma x \Rightarrow {}^{\perp}\{y\}$。利用等式 (6)，以及 $T^{11\partial}$ 是 $T^{\partial 1 \partial}$ 的伽罗瓦对偶关系这一事实，并注意在典范框架中 $uT'xy$ 等价于 $u \perp (x \rightsquigarrow y)$，该断言进一步归结为证明 $\Gamma x \cap \Gamma u \subseteq {}^{\perp}\{y\}$ 当且仅当 $u \perp (x \rightsquigarrow y)$。此外，在滤子的格中 $\Gamma u \cap \Gamma x = \Gamma(x \vee u)$，因此 $\Gamma u \cap \Gamma x \subseteq {}^{\perp}\{y\}$ 当且仅当 $(x \vee u) \perp y$。

由上可知，只需证明：若 $x, u \in$ 属于滤子集(H)，且 $y \in$ 属于理想集(H)，则 $u \perp (x \rightsquigarrow y)$ 当且仅当 $(x \vee u) \perp y$。

假设 $u \perp (x \rightsquigarrow y)$，并令 $a \in x, b \in y$ 使得 $(a \to b) \in u$。$a, a \to b$ 都属于滤子 x, u 的并 $x \vee u$，因此由 $a \wedge (a \to b) \leq b$，我们也得到 $b \in (x \vee u)$。于是 $b \in (x \vee u) \cap y \neq \varnothing$，故根据定义 $(x \vee u) \perp y$。

反过来，假设 $(x \vee u) \perp y$ 并令 $e \in (x \vee u) \cap y$。令 $a \in x, b \in u$ 使得 $a \wedge b \leq e$。由 H 中的剩余化，$b \leq a \to e$。由于 $a \in x$ 且 $e \in y$，我们有

$(a \to e) \in (x \rightsquigarrow y)$。由于 $b \in u$ 且 $b \le a \to e$，我们也有 $(a \to e) \in u$。因此$u \cap (x \rightsquigarrow y) \neq \varnothing$，这意味着，根据定义，$u \perp\!\!\!\perp (x \rightsquigarrow y)$。 □

由此可得以下结论。

推论 4.6（海廷代数的无选择表示）。若 H 是一个海廷代数，则其对偶框架 $\mathfrak{F} =$ (滤子集 $\perp\!\!\!\perp$, 理想集 T) 的全复代数 $\mathfrak{F}^+$ （滤子的稳定集代数 G(X)）是一个完备海廷代数，也是 H 的一个典范扩张；H 可识别为紧开伽罗瓦稳定集的子代数 KOG(X)。蕴涵，即交的余伴随，由方程 (6) 定义，这与方程 (7) 给出的定义等价。□

4.3 对偶

整蕴涵格（尤其是海廷代数）的（无选择）表示可推广为完整的函子对偶。我们在此概述论证，而不作详细讨论，因为确实没有什么新内容要补充；我们只是将一项已详尽阐述的结果特化到本文关注的情形。该结果见 [29], ，亦见 [28], 。有兴趣的读者可参阅这些文献了解详情。

在第 2 节中，我们定义了整蕴涵格的范畴 $\mathbf{NLE}_{1\partial\partial}$。在第 3.2 节，尤其是在定义 3.3 中，我们定义了蕴涵框架，即分类型剩余框架范畴 $\mathbf{SRF}_{1\partial\partial}$的对象 $\mathfrak{F} = (X, \perp\!\!\!\perp, Y, T)$，并带有三元关系 $T = T^{\partial 1 \partial} \subseteq Y \times (X \times Y)$。框架范畴中的态射是定义 3.20]的弱有界态射 [29, 。在 [29, 第 4] 节中，我们通过典范框架构造定义了一个反变函子 $\mathsf{F} : \mathbf{NLE}_\tau \to \mathbf{SRF}_\tau^{\mathrm{op}}$，它专用于当前的蕴涵格与框架情形，并在命题 4.9] 中验证格扩张同态的对偶是弱有界态射 [29, 。为了构造对偶，我们定义了一个较小的范畴 $\mathbf{SRF}_\tau^*$，并在表 3]中对其公理化 [29, 。随后，我们在表 2], 中对其作了修改，将 Stone 拓扑改为谱拓扑，以获得无需选择的结果 [28, 。我们定义了一个反变函子 $\mathsf{L}^* : \mathbf{SRF}_\tau^* \to \mathbf{NLE}_\tau^{\mathrm{op}}$，在当前情形下专化为函子 $\mathsf{L}^* : \mathbf{SRF}_{1\partial\partial}^* \to \mathbf{NLE}_{1\partial\partial}^{\mathrm{op}}$：它将框架映射到其全复代数的紧开伽罗瓦稳定集所构成的子代数 [29, （命题 5.2] ），并将弱有界态射映射为对偶格代数的同态 [29, （命题 5.3]）。定理 5.8 [29] 以对偶性的证明作结；该结论专化后得到蕴涵格与框架之间，以及海廷代数与其对偶海廷框架之间无需选择的对偶。

5 应用与后续议题

IPC 的经典关系语义使用框架 (W, R)，其中 $R \subseteq W \times W$是自反且传递的关系，句子被解释为 R-闭集，

其中蕴涵按以下子句解释

$$w \Vdash \varphi \to \psi \text{ iff } \forall u(wRu \longrightarrow (u \Vdash \varphi \longrightarrow u \Vdash \psi)) \tag{8}$$

由 R, $[R]U = \{w \in W \mid \forall u(wRu \Rightarrow u \in U)\}$生成的盒算子，对于$U \subseteq W$，在给定的可及关系 R的假设下是一个 S4 模态（KT4 模态）。次直觉主义逻辑 [8, 11, 14, 34, 38, 42, 43] 通过改变可及关系 R的性质而产生，这一做法最初由 Corsi、Restall 和 Wansing 提出，从而将 $[R]$ 的逻辑改为 KT、KD、KTB 等（见 [11, 第 6 节，引理 6.1]）；或者等价地，考虑 IPC 语言中的逻辑，其在 GMT 翻译 [21] 下的模态伴随弱于 S4。Doˇsen 明确采取了这一研究方向。

放弃蕴涵与合取之间的剩余化，是弱于 IPC 的逻辑的显著特征。这不仅涉及次直觉主义系统，也包括所有次结构逻辑。次直觉主义逻辑是通过弱化直觉主义框架中的框架条件来定义的，而次结构逻辑则是从证明论角度定义的：通过弱化 IPC 的证明系统，移除所谓的关联、交换、弱化和收缩等结构规则中的一条或多条。据我所知，尚无人尝试以与次直觉主义逻辑相同的方式，通过弱化框架条件来定义次结构逻辑。显然，这种方法需要重新审视 IPC 的集合论（关系）语义；为此，我们提出了分类型框架语义。我们在本文以及 [26], 中开展了这一研究，但没有改动直觉主义蕴涵的语义。尤其是，尽管我们尚未对此进行详细考察，但可以将分配的“次中间”逻辑（次直觉主义逻辑或次结构逻辑）视为剩余化海廷代数逻辑的片段。这些代数类似于 J´onsson 和 Tsinakis [33], 的剩余布尔代数，不同之处在于，其底层结构由布尔代数弱化为海廷代数。

IPC 的分类型框架语义可以扩展，以纳入对直觉主义模态逻辑 IML 的处理, 并与 [29, 31] 本文结合起来，但我们将此留待未来研究。

参考文献

[1] Jon Barwise。《约束、通道与信息流》。载于 Peter Aczel、David Israel、Yosuhiro Katagiri 和 Stanley Peters 编，《情境理论及其应用》第3卷，第3–27页。CSLI Publications，1993年。[2] Jon Barwise、Dov Gabbay 和 Chrysafis Hartonas。《论信息流的逻辑》。《IGPL逻辑杂志》3(1):7–49，1995年。[3] Nick Bezhanishvili、Anna Dmitrieva、Jim de Groot 和 Tommaso Moraschini。《超越分配性的正（模态）逻辑》，2022。

[4] Nick Bezhanishvili、Gianluca Grilletti 和 Wesley H. Holliday。《通过无选择对偶实现询问逻辑的代数与拓扑语义》。载于 Rosalie Iemhoff、Michael Moortgat 和 Ruy J. G. B. de Queiroz 编，《逻辑、语言、信息与计算：第26届国际研讨会 WoLLIC 2019》，荷兰乌得勒支，2019年7月2日至5日，论文集，计算机科学讲义第11541卷，第35–52页。施普林格，2019年。[5] Nick Bezhanishvili 和 Wesley Holliday。《无选择斯通对偶》。《符号逻辑杂志》85(1):109–148，2020年。[6] Garrett Birkhoff。《格论》。美国数学会专题丛书第25卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，第三版，1979年。（1967年第三版的勘误重印本。）[7] Willem J. Blok。《内代数簇》。阿姆斯特丹大学数学系，1976年。[8] Sergio Celani 和 Ramon Jansana。《再探若干次直觉主义逻辑》。《圣母大学形式逻辑杂志》42(4):225–255，2001年10月。[9] Alexander Chagrov 和 Michael Zakharyashchev。《中间命题逻辑的模态伴随》。《逻辑学研究》51(1):49–82，1992年3月。[10] Anna Chernilovskaya、Mai Gehrke 和 Lorijn van Rooijen。《兰贝克–格里申演算的广义克里普克语义》。《IGPL逻辑杂志》20(6):1110–1132，2012年。[11]Giovanna Corsi。《带有严格蕴涵的弱逻辑》。《数学逻辑季刊》33(5):389–406，1987年。[12] Dion Coumans、Mai Gehrke 和 Lorijn van Rooijen。《完全线性逻辑的关系语义》。《应用逻辑杂志》12(1):50–66，2014年。逻辑、范畴与语义。[13] B. A. Davey 和 H. A. Priestley。《格与序导论》。剑桥大学出版社，第2版，2002年。[14] Kosta Došen。《K和D中的模态翻译》。载于 M. de Rijke 编，《钻石与默认》，第103–127页。克鲁维尔学术出版社，多德雷赫特，1993年。[15] Leo Esakia。《超直觉主义逻辑的模态伴随》。第135–136页，《基辅第七届苏联逻辑研讨会》（基辅，1976年），1976年。[16]Leo Esakia。《海廷代数：对偶理论》。瑞士查姆：施普林格出版社，2019年。

[17] N Galatos、P. Jipsen、T. Kowalski 和 H. Ono。《剩余格：次结构逻辑的代数一瞥》，Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 第151卷。爱思唯尔，2007年。[18] Bernhard Ganter 和 Rudolph Wille。《形式概念分析：数学基础》。施普林格，1999年。[19] Mai Gehrke。《广义克里普克框架》。逻辑学研究，84(2):241–275，2006年。[20] Mai Gehrke 和 John Harding。《有界格扩张》。代数学杂志，238:345–371，2001年。[21] Kurt G¨odel。《直觉主义命题演算的一种解释》。载于 S. Feferman 等编《文集》第1卷《文集》，第300–303页。牛津大学出版社，1986年（首次以德文发表于1933年）。[22] M. J. Gouveia 和 H. A. Priestley。《半格与格的典范扩张和有限拓扑完备化》。《序》，31(2):189–216，2014年7月。[23] Chrysafis Hartonas。《非分配命题逻辑的序对偶关系语义》。IGPL牛津逻辑学杂志，25(2):145–182，2017年。[24] Chrysafis Hartonas。《非分配命题逻辑的序对偶关系语义：一般框架》。哲学逻辑杂志，47(1):67–94，2018年2月。[25] Chrysafis Hartonas。《（余）剩余格的对偶性结果》。Logica Universalis，13(1):77–99，2019年。[26] Chrysafis Hartonas。《次结构逻辑的模态翻译》。应用非经典逻辑杂志，30(1):16–49，2020年。[27] Chrysafis Hartonas。《对无分配逻辑语义研究方法的调和》。载于 Katalin Bimb´o 编《相干逻辑及其他推理工具：纪念 J. Michael Dunn 的文集》，纪念文集第46号，第215–236页。College Publications，2022。[28] Chrysafis Hartonas。《格扩张的无选择公理对偶：在带否定算子的逻辑中的应用》，2023年。https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.05661。[29] Chrysafis Hartonas。《正规格扩张与带关系的分类型剩余框架的对偶》。Algebra Universalis，84(1)，2023年。https://rdcu.be/c4qec。[30] Chrysafis Hartonas 和 J. Michael Dunn。《格的 Stone 对偶性》。Algebra Universalis，37:391–401，1997年。

[31] Chrysafis Hartonas 和 Ewa Or lowska。《双类型框架中带模态算子的格的表示》。Fundamenta Informatica，166(1):29–56，2019年。[32] Bjarni J´onsson 和 Alfred Tarski。《带算子的布尔代数 I》。American Journal of Mathematics，73:891–939，1951年。[33] Bjarni J´onsson 和 Constantine Tsinakis。《作为剩余布尔代数的关系代数》。Algebra Universalis，30:469–478，1993年。[34] Fatemeh Shir mohammadzadeh Maleki 和 Dick De Jongh。《弱次直觉主义逻辑》。IGPL逻辑杂志，25(2):214–231，2016年12月。[35] Guillaume Massas。《无选择 de Vries 对偶》，2022。[36] Joseph McDonald 和 Kentarˆo Yamamoto。《借助谱空间对正交补格的无选择对偶》。Algebra Universalis，83，2022。[37] Hilary Priestley。《利用有序 Stone 空间表示分配格》。Bull. Lond. Math. Soc.，2:186–190，1970年。[38] Greg Restall。《次直觉主义逻辑》。圣母大学形式逻辑杂志，35(1):116–129，1994年。[39] Richard Routley 和 Robert Meyer。《蕴涵语义》。载于 Studies in Logic and the Foundations of Mathematics，第68卷，第199–243页。爱思唯尔，1973年。[40] Marshall Harvey Stone。《分配格和布劳威尔逻辑的拓扑表示》。Casopis pro Pestovani Matematiky a Fysiky，67:1–25，1937年。[41] Tomoyuki Suzuki。《用于实践的次结构逻辑双近似语义》。载于《模态逻辑进展》第8卷，第411–433页，2010年。[42] Albert Visser。《具有显式不动点的命题逻辑》。逻辑学研究，40(2):155–175，1981年6月。[43] Heinrich Wansing。《将显示逻辑时间化》。载于 Seiki Akama 编《Logic, Language and Computation》，第159–178页。施普林格荷兰，多德雷赫特，1997年。[44] Frank Wolter 和 Michael Zakharyaschev。《关于 Blok-Esakia 定理》。载于 Guram Bezhanishvili 编《Leo Esakia 论模态逻辑与直觉主义逻辑中的对偶》，第99–118页。施普林格荷兰，多德雷赫特，2014年。