arXiv:2302.03691v1 [math.CT] 6 Feb 2023

– $\mathcal{Q}$-集与相关内容 – 关于单元素集与粘合完备性

Jos´e G. Alvim* Hugo L. Mariano† Caio de A. Mendes‡

2023年2月9日

摘要

本文主要致力于将 D. Higgs 的 Ω-集推广到量子格的背景下，遵循 [7], 的总体计划，我们探讨强、整且交换的量子格（或满足其他类似公理）的 $\mathcal{Q}$-集这一丰富范畴。本文重点研究 $\mathcal{Q}$-集可能具有的不同“完备性”概念及其相互关系、完备化函子、由此产生的反射子范畴，以及它们与关系态射之间的关系。

我们确立了单点完备 $\mathcal{Q}$-集与具有函数态射的 $\mathcal{Q}$-集范畴（其态射为关系）的通常等价关系；我们用范畴论术语给出了单点完备性的两种刻画；我们证明，单点完备的范畴包含函子产生极限。

*mailto:alvim@ime.usp.br
†mailto:hugomar@ime.usp.br
‡mailto:caio.mendes@usp.br

目录

1 引言 2 2 预备知识：量化格 3 3 关于 $\mathcal{Q}$-集的预备知识 6 3.1 一些例子.10
3.2 底层图函子.13

4 粘合完备性 14
4.1 关于粘合与相容族的一些结果 18 4.2 粘合完备化.19

5 单点集/Scott 完备性 27
5.1 单点集基础.27 5.2 Scott 完备化.33

6 完备性条件之间的联系 40 6.1 Scott 完备性与关系态射.41

1 引言

历史与动机

拓扑空间上的层这一概念仅取决于该空间开集的（完备）格，因此，为“无点空间”定义层十分直接；也就是说，对于给定局部 H 的一个范畴 $H, \leq)$（见 [3]）。

20世纪70年代，人们将局部上的层托普斯（= 完备海廷代数）$\mathbb{H}$ 另一种描述为 $\mathbb{H}$-集范畴 [5]。更准确地说，在[3], 中有三个范畴，其对象是局部值集，并且它们都等价于局部上的层范畴 $\mathbb{H}$。人们提出了两种不同的可分性和完备性概念。一方面，可以将 Sh($\mathbb{H}$) 中这些性质的传统概念转化为 $\mathbb{H}$-集中的相应定义。此外，Scott 的单点集概念——这一概念受到普通单元素集合的启发——引出了另一种完备性和可分性概念。尽管关于这些概念存在一些民间误解，一个简单的反例（取自有限布尔代数）表明，这两种完备性的定义在逻辑上并不等价，也不会产生等价的满子范畴。

然而，如此丰富的定义和概念产生了一个不幸的后果：任何关于这类对象的讨论都因此变得模糊不清。该领域已根深蒂固地形成了一套极其深奥的民间说法，妨碍人们审慎思考，也让任何留心此事的人心生恐惧——几乎到了惊慌失措的地步。

不过，C.J. Mulvey 引入了一种局部的非交换、非幂等推广，称为“量化格”[10]。量化格也出现在逻辑 [17], 以及对 C^*-代数 [14]的研究中。

许多研究探讨了量化格上的层以及量化格值集上的层的各种概念（[16], [2], [mulveyquantale], [9], [8], [4] [7], [6], [12], [13], [15]）。在许多情况下，基底量化格是右侧且幂等的。本文继续研究交换且半笛卡儿量化格上的量化格值集，这项研究始于 [1]。我们的方法与前一种方法相似，但由于每个幂等半笛卡儿量化格都是一个局部（命题 2.1），我们的公理与他们的公理在某种意义上是正交的。

本文旨在考察这两种完备性（与可分性）概念：（i）通过相容族的（唯一）粘合（ $\mathcal{Q}$-集的粘合完备性）；（ii）通过（严格）单元素集的（唯一）表示（Scott 完备性）。并探讨它们之间的关系，以及由其例子构成的满子范畴的性质。

主要结果与本文结构

我们已经证明：

1. Scott 完备性蕴含粘合完备性；

2. 粘合完备 $\mathscr{Q}$-集与 Scott 完备 $\mathscr{Q}$-集（其态射为函数态射）这两个满子范畴都是反射的；3. 对于“强” [7] 量化格，可以谈论给定 $\mathscr{Q}$-集的“Scott 完备化”；4. 每个 $\mathscr{Q}$-集都与其自身的 Scott 完备化关系同构，且完备化在函数同构下保持不变；5. 对于强量化格，Scott 完备 $\mathscr{Q}$-集构成的范畴（其态射为关系态射）与其态射为函数态射的范畴同构。6. 对于强量化格， X 是 Scott 完备的，当且仅当其函数可表函子与其关系可表函子“相同”。7. 对于强量化格， X 是 Scott 完备的，当且仅当其可表函子在完备化自函子下“不变”。8. 对于强量化格，Scott 完备 $\mathscr{Q}$-集的全包含函子不仅保持极限（因为它是右伴随），还创建极限。具体而言，完备 $\mathscr{Q}$-集的极限可以“逐点”计算。

2 预备知识：量化格

定义 2.1:
量化格是一种结构类型 $\mathscr{Q} = (|\mathscr{Q}|, \leq, \otimes)$，其中 $(|\mathscr{Q}|, \leq)$ 是完备格；$(|\mathscr{Q}|, \otimes)$ 是半群[1]；此外， $\mathscr{Q}$ 还必须满足以下分配律：对于所有 $a \in \mathscr{Q}$ 和 $B \subseteq \mathscr{Q}$,

$$a \otimes \left(\bigvee_{b \in B} b \right) = \bigvee_{b \in B} (a \otimes b)$$
$$\left(\bigvee_{b \in B} b \right) \otimes a = \bigvee_{b \in B} (b \otimes a)$$

我们用 $\mathrm{E}\mathscr{Q}$ 表示由其幂等元组成的 $\mathscr{Q}$ 子集。

备注 2.1:

1. 在任意量化格 $\mathscr{Q}$ 中，乘法对两个变量都单调递增；2. 由于 $\bot$ 也是 $\emptyset$的上确界，对于任意 a, $a \otimes \bot = \bot = \bot \otimes a$3. 由于 $\top$是 $\mathscr{Q}$的上确界，因此 $\top \otimes \top =$上确界$_{a,\ b}\, a \otimes b =$上确界 img $\otimes$

[1] *i.e.* 二元运算 $\otimes : \mathscr{Q} \times \mathscr{Q} \to \mathscr{Q}$（称为乘法）是结合的。

注 2.2:
如果 $(\mathcal{Q}, \trianglelefteq)$ 是一个完备格，且其二元下确界满足上述分配律，那么所得的量化格以 $\top$ 为单位，并且事实上是一个局部。反过来，每个局部都以这种方式构成一个幺半量子格。

定义 2.2:
量化格 $\mathcal{Q}$ 称为

- 双可除，当左（右）可除表示删去公理中的 ρ （λ）部分时。

$$a \leq b \implies \exists \lambda, \rho : a \otimes \rho = b = \lambda \otimes a$$

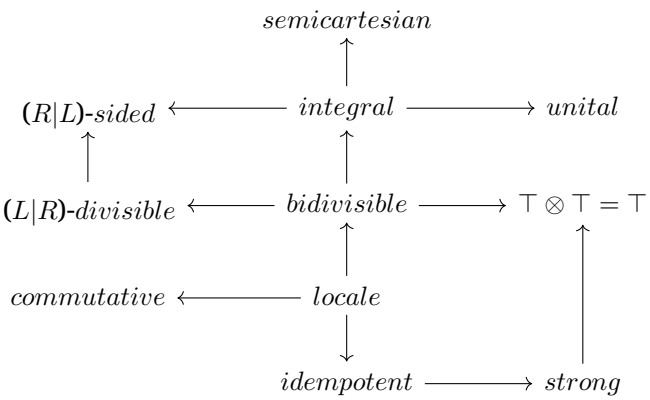
- 整，当 $\top \otimes a = a = a \otimes \top$。若右侧等式成立，我们称其为右侧；若左侧等式成立，则称其为左侧。
- 幺，当 $\otimes$ 具有单位；
- 在 $a \otimes b \leq a \wedge b$ 时为半笛卡儿
- 在 $\otimes$ 交换时为交换的；
- 在 $a \otimes a = a$ 时为幂等的；
- 在线性且严格，当 $\leq$ 是线性序且对于

$$a \neq \bot \; and \; a \otimes b = a \otimes c \; or \; b \otimes a = c \otimes a \implies b = c$$

- 为强，当对于任意 e 和 A [7, , 参见第 30], 页

$$e = e \otimes e \implies e \leq \bigvee_{a \in A} a \implies e \leq \bigvee_{a \in A} a \otimes a$$

我们给出以下图示，以说明这些定义之间的一些关系：



例 2.1:
局部——或许——是交换、幂等、整（因此也同时是半笛卡儿和右侧）、可除且强（两者都平凡成立）的量子格的最佳例子。其中，开子集构成的拓扑空间 X 的局部对层理论尤为重要；其序关系由包含关系给出，上确界为并集，而有限下确界为交集。

例 2.2:
下面列出一些不是局部的含幺量子格的例子：

1. 扩展半直线 $[0,\infty]$，其序为逆序 – $\geq$ –，乘法为实数的通常加法。由于序关系为 $\geq$，顶元素是 0，底元素是 ∞。鉴于它与 Lawvere 空间（与度量空间相关）的关系，我们称之为 Lawvere 量子格；2. 扩展自然数 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，作为 Lawvere 量子格的一个限制（与图上的距离相关）；3. 交换含幺环 R 的理想集合 $\mathcal{I}(R)$，其序为 $\subseteq$，乘法为理想的乘法。上确界是理想之和，顶元素是 R，零理想是底元素；4. 含幺环 R 的右（或左）理想集合 $\mathcal{RI}(R)$，其序和乘法与上一个例子相同。于是，上确界、顶元素和底元素也与 $\mathcal{I}(R)$ 中的相同；5. 含幺 C^*-代数的闭右（或左）理想集合，其序为闭右（或左）理想的包含关系，乘法为理想乘积的拓扑闭包。

如需了解更多细节和示例，请参见 [14]。

注 2.3:
我们在 2.2 中介绍的前三个例子都是交换的积分量子格。最后两个例子既不交换，也不是半笛卡儿的。第四个例子不是幂等的，而第五个是幂等的，并且两者都是右侧（分别为左侧）量子格 [14, 参见]。

强量子幺半群的主要例子包括 Heyting 代数、$([0,1],\leq,\cdot)$ 和严格线性量子格。某些 MV-代数并非强量子幺半群，例如 Chang 的 $([0,1],\wedge,\vee,\oplus,\otimes,0,1)$[Chang]'s。

从现在起，我们假设所有量子格都是交换的。

定义 2.3:
设 $\mathscr{Q}$ 是一个量化格，我们定义如下替代偏序 $\preceq$

$$a \preceq b \iff a = a \otimes b$$

注 2.4:

1. 设 $\mathscr{Q}$ 是一个幺半量子格，则它是整的当且仅当它是半笛卡儿的；

2. $a \preceq b \leq c$ 蕴含 $a \preceq c$；3. 如果 $e \in \mathrm{E}\,\mathscr{Q}$，则 $(e \preceq a) \iff (e \leq a)$。

命题 2.1:
如果 $\mathscr{Q}$ 是半笛卡儿且幂等的，那么它实际上是一个完备分配格，并且 $\otimes = \wedge$。换句话说，它是一个局部。

证明。假设 $\mathscr{Q}$ 实际上是幂等的，我们有——由于 $\otimes$ 关于两个参数都是递增的——

$$a \leq b \implies a \leq c \implies a \leq b \otimes c$$

因此，如果 a 小于 b 和 c，那么它必然小于 $b \otimes c$；但由于 $\mathscr{Q}$ 是半笛卡儿的，根据上面的注 2.4，有 $\otimes \leq \wedge$。这意味着 $b \otimes c$是 b 和 c的一个下界，但我们从幂等性得到的结果意味着它是这样的上界中最大的一个。

因此，乘法满足下确界的泛性质。上述内容只是 [11, 命题 2.1] 的一个特例。 □

3 关于 $\mathscr{Q}$-集合的预备知识

注 3.1:
从现在起，我们只讨论交换半笛卡尔量子格，而不讨论不具备这些性质的量子格。

给定一个量子格 $\mathscr{Q}$，粗略地说，我们可以构造一个 $\mathscr{Q}$-空间，其中点之间的距离由 $\mathscr{Q}$ 的元素度量，而不是像我们通常那样由——比如说——$[0, \infty)$ 度量。这个定义通过 $\mathscr{Q}$-集合的概念得到了精确表述。

定义 3.1:
一个 $\mathscr{Q}$-集是一个赋有 $\mathscr{Q}$-距离运算的集合，通常记作 δ。也就是说，$\mathscr{Q}$-集是一个集合 X，配有一个映射 $\delta\colon X^2 \to X$，满足:

1. $\delta(x, y) = \delta(y, x)$；2. $\delta(x, y) \otimes \delta(y, z) \leq \delta(x, z)$；3. $\delta(x, x) \otimes \delta(x, y) = \delta(x, y)$。

通常将 $\delta(x, x)$ 简记为“ x 的范围”，写作 $\mathrm{E}\,x$。

上述定义中有几点可能会引起读者注意。(i) δ是对称的，尽管我们已经舍弃了几乎所有将我们与度量空间联系起来的概念，只保留了最模糊的那些

；(ii) 为什么三角不等式是反过来的？(iii) $\mathrm{E}\, x \otimes \delta(x,y) = \delta(x,y)$，为什么不直接要求 $\mathrm{E}\ x = \top$?

这些问题都很合理——过去人们曾以不同方式回答第一个和最后一个问题，而从定义的角度来看，这正是 $\mathscr{Q}$-集与$\mathscr{Q}$-富集范畴之间的主要区别。关于序是否应取逆的问题，更多是出于合理性考虑：既然我们将 $\mathscr{Q}$-集视为带有 $\mathscr{Q}$ 值等式的集合，那么认为 $\mathrm{E}\, x$ 是对 x而言最有效的等式是合理的，因此需要将三角不等式上下颠倒——并将其转化为等号的传递性。

注释3.2：
当我们谈论 $\mathscr{Q}$-集中形如 $P(\vec{x}) \leq Q(\vec{x})$ 的性质时，通常更有启发性的做法是考虑逻辑上等价（但在记号上不那么方便）的陈述

$$P(\vec{x}) \to Q(\vec{x}) \ (= \top)$$

可以在所有 $\mathscr{Q}$-集的集合上自然赋予两种主要的范畴结构。一种是将映射视为余收缩（即使 δ 变大）——另一种则是考虑底层集合之间行为良好的 $\mathscr{Q}$ 值关系。

定义3.2：
函数态射 $f\colon X \to Y$是一个函数 f，定义在 X 和 Y的底集之间，且满足 f 递增并保持 E；也就是说

$$\delta_X \leq \delta_Y \circ (f \times f)$$

$$\mathrm{E}_X = \mathrm{E}_Y \circ f$$

关系态射 $\varphi\colon X \to Y$是一个函数 $\varphi\colon |X| \times |Y| \to \mathscr{Q}$，满足

$$\begin{aligned}
\delta(x,x') \otimes \varphi(x,y) &\leq \varphi(x',y) \\
\varphi(x,y) \otimes \delta(y,y') &\leq \varphi(x,y') \\
\varphi(x,y) \otimes \varphi(x,y') &\leq \delta(y,y') \\
\varphi(x,y) \otimes \mathrm{E}\, y &= \varphi(x,y) \\
\mathrm{E}\, x \otimes \varphi(x,y) &= \varphi(x,y) \\
\bigvee_{y \in Y} \varphi(x,y) &= Ex
\end{aligned}$$

读者应注意，我们通常不会区分 δ_X 和 δ_Y，而是依靠名称具有提示性的变量来表明它们的类型，进而表明它们所指的 δ 。换言之，我们期待读者熟悉 Koeniglookup[2]。

我们将 $\mathscr{Q}$-Set$_r$ 记作集合及其间关系态射所构成的范畴，将 $\mathscr{Q}$-Set$_f$ 记作具有相同对象、但对象之间由函数态射连接的范畴。

[2] 借用某个伟大网站的话来说—— cppreference.com ——

命题 3.1：
应当注意，这两种态射实际上都构成一个范畴。对于函数态射，我们将复合定义为通常的函数复合——因为函数态射在函数复合下显然是封闭的——并将恒等函数作为恒等态射。对于关系态射，X 上的恒等态射变为 δ_X，而复合则是（或许显而易见的）关系复合：

$$[\psi \circ \varphi](x, z) = \bigvee_{y \in Y} \varphi(x, y) \otimes \psi(y, z)$$

证明函数态射确实构成一个范畴是显而易见的，因此我们将在后文证明一个更强的结果。

证明。首先，我们应当注意到，δ 确实是一个关系态射。这很容易验证，因为前面三个公理直接应用三角不等式即可得到，第四和第五个公理直接应用$\mathcal{Q}$-集的扩张公理即可得到，而只要我们意识到这一点，最后一个公理显然成立：

$$\delta(x, y) \leq \mathrm{E}\, x = \delta(x, x)$$

既然我们已经知道 δ 确实是一个态射，就可以考察与它进行（前）复合的作用。此时我们得到

$$\begin{aligned}[\delta \circ \varphi](x, y) &= \bigvee_{y' \in Y} \varphi(x, y') \otimes \delta(y', y) \\ &\geq \varphi(x, y) \otimes \delta(y, y) \\ &= \varphi(x, y)\end{aligned}$$

另一方面，我们也可以在 $\bigvee$ 中应用相应的关系态射公理，从而得到该复合态射小于 $\varphi(x, y)$。这就证明了它们实际上从一开始就是相等的。另一个复合态射也同样如此：

$$\begin{aligned}[\varphi \circ \delta](x, y) &= \bigvee_{x' \in X} \delta(x, x') \otimes \varphi(x', y) \\ &\geq \delta(x, x) \otimes \varphi(x, y) \\ &= \varphi(x, y)\end{aligned}$$

因此，剩下要证明的只有：按关系态射的定义所定义的 $\circ$ 确实是一种复合，也就是说，它满足结合律，而且两个态射的复合仍是态射。首先，假设 φ 和 ψ 可复合

实参依赖查找（也称为 ADL 或 Koenig 查找）是一组用于在函数调用表达式中查找未限定函数名的规则，其中包括对重载运算符的隐式函数调用。

态射——我们应当证明它们的复合也是态射：

$$\begin{aligned}[\psi \circ \varphi](x,z) \otimes \delta(z,z') &= \bigvee_y \varphi(x,y) \otimes \psi(y,z) \otimes \delta(z,z') \\ &\leq \bigvee_y \varphi(x,y) \otimes \psi(y,z') \\ &= [\psi \circ \varphi](x,z')\end{aligned}$$

同理，经过相应调整可以证明公理 1–2 和 4–5 成立。公理 6 也很容易验证：

$$\begin{aligned}\bigvee_z [\psi \circ \varphi](x,z) &= \bigvee_y \varphi(x,y) \otimes \bigvee_z \psi(y,z) \\ &= \bigvee_y \varphi(x,y) \otimes \mathrm{E}\, y \\ &= \bigvee_y \varphi(x,y) \\ &= \mathrm{E}\, x\end{aligned}$$

公理 3 实际上需要交换性；遗憾的是，这只是许多次必须使用交换性的情况中的第一次；

$$\begin{aligned}[\psi \circ \varphi](x,z) \overset{\psi\circ\varphi}{\otimes} (x,z') &= \bigvee_y \bigvee_{y'} \varphi(x,y) \otimes \psi(y,z) \otimes \varphi(x,y') \otimes \psi(y',z) \\ &= \bigvee_y \bigvee_{y'} \psi(y,z) \otimes \varphi(x,y) \otimes \varphi(x,y') \otimes \psi(y',z) \\ &\leq \bigvee_y \bigvee_{y'} \psi(y,z) \otimes \delta(y,y') \otimes \psi(y',z) \\ &\leq \bigvee_y \bigvee_{y'} \psi(y,z) \otimes \psi(y,z) \\ &\leq \bigvee_y \bigvee_{y'} \delta(z,z') = \delta(z,z')\end{aligned}$$

显然，只要注意到可以重新排列 $(\psi \circ \varphi) \circ \chi$ 和 $\psi \circ (\varphi \circ \chi)$ 中的各项，使其成为以下形式，就能看出结合律成立：

$$\bigvee_{x,y} \chi(w,x) \otimes \varphi(x,y) \otimes \psi(y,z)$$

□

定义 3.3：
我们承诺证明一个更强的结果，而不是证明函数态射的范畴公理——顺便说一句，这个结果对我们正在撰写的另一篇论文也很有用

——即证明 e-态射构成一个范畴（给定一个一般交换幺半量子格），并证明函数态射构成 I-态射的一个宽子范畴。

那么，我们来定义 e-态射：给定 $\mathscr{Q}$的一个幂等元 e， e-态射是一个“允许误差 e”的函数态射：

$$e \otimes \delta(x, x') \leq \delta(f(x), f(x'))$$

$$\mathrm{E}\, f(x) = e \otimes \mathrm{E}\, f(x)$$

命题 3.2:
我们断言，所有满足 φ 是一个 e-态射的 $\langle e, \varphi \rangle$ 所构成的集合，在显然的复合律下构成一个范畴。此外，恒等函数是一个 I-态射，其中 I 是量子格的单位元；更进一步，I-态射在复合下封闭，构成一个子范畴，并且按定义等于 $\mathscr{Q}$-Set$_f$。

证明。首先，显然的复合将一个 e-态射 f 和一个 e'-态射g 映射为一个 $(e \otimes e')$-态射 $g \circ f$。结合律源于函数的（即 Set 中的）$\circ$结合律，以及 $\otimes$使得 $\mathscr{Q}$构成一个半群这一事实。显然， $g \circ f$是一个 $(e \otimes e')$-态射，故略去证明。

恒等态射显然是一个 I-态射——当然，复合 I-态射会得到一个 $I \otimes I = I$-态射。 □

3.1 一些例子

例 3.1（始对象）:
空集——显然地——是一个 $\mathscr{Q}$-集合；由于态射是函数，它也恰好是始对象。

例 3.2（终对象）:
$\mathscr{Q}$ 的幂等元集合记为 $\mathrm{E}\,\mathscr{Q}$，它自然地具有 $\mathscr{Q}$-集合的结构——由 $\delta(a, b) = a \otimes b = a \wedge b$[3] 给出。显然， $\otimes$ 满足所有 $\mathscr{Q}$-集合公理。然而，更有意思的是，$\mathrm{E}\,\mathscr{Q}$ 必定是终对象，因为 $\mathrm{E}\, e = e$：函数态射保持外延，因此有 $\mathrm{E}\, f(x) = \mathrm{E}\, x$——然而，$\mathrm{E}\, f(x) = f(x)$，因而 $f(x) = \mathrm{E}\, x$。这证明至多存在一个从 $X \to$ 到 $\mathrm{E}\,\mathscr{Q}$ 的态射。

另一方面， $\delta(x, y) \leq \mathrm{E}\, x \wedge \mathrm{E}\, y$恰好使 $x \mapsto \mathrm{E}\, x$成为一个函数态射。因此，$\mathrm{E}\,\mathscr{Q}$ 是一个 $\mathscr{Q}$-集。

备注 3.3:
不能用整个 $\mathscr{Q}$代替 $\mathrm{E}\,\mathscr{Q}$，因为 $\delta(x, y) \otimes \mathrm{E}\, x$ 不成立。上述例子之所以成立，唯一的原因是幂等元 $\otimes = \wedge$。不过，可以构造一个 $\mathscr{Q}$-集，其底集就是 $\mathscr{Q}$ 本身

[3]这是子偏序集 $\mathrm{E}\,\mathscr{Q}\mathrm{m}$ 中的下确界，而该子偏序集最终成为一个局部。

例3.3：
正如 Lawvere量子幺半环 是一个 Lawvere空间，（整且交换的）量化格 $\mathscr{Q}$ 也是一个 $\mathscr{Q}$-集。其构造如下：

$$\delta(x,y) = (x \to y) \wedge (y \to x)$$

这大致等价于实数的 $|x-y|$。这未必是我们能赋予它们的最佳 $\mathscr{Q}$-集结构，因为对于任意 x，$\mathrm{E}\, x = \top$。

缓解这一现象的方法——对于 $\bot$ 而言，这种现象尤其奇怪——包括考虑 x 上方的幂等元。一个重要的量子性质是存在一个运算 $(\,)^-$，它将元素 x 映射为值 $\sup\{e \in \mathrm{E}\ \mathscr{Q} \mid e \preceq x\}$。将 $\delta(x,y)$ 乘以 $x^- \otimes y^-$ 可以保证——例如——当 $\mathscr{Q}$ 是一个局部时，上述构造与终对象重合。

另一种修正方法是更直接地纳入 $\mathrm{E}\,\mathscr{Q}$，考虑底集为 $\mathscr{Q} \times \mathrm{E}\,\mathscr{Q}$ 且 δ 由下式给出的空间

$$\delta((x,e),(y,a)) = a \otimes e \otimes [(x \to y) \wedge (y \to x)]$$

我们将这个 $\mathscr{Q}$-集记为 $\mathscr{Q}_{\mathrm{E}}$。

例3.4：
本研究的姊妹论文 [1] 探讨了一种构造，但这里也值得顺带一提 $X \boxtimes X$：其底集由 $|X| \times |X|$给出，而 δ 则由各坐标的 δ 的乘积给出。这个构造在此处相关的原因是 δ： $X \boxtimes X \to \mathscr{Q}_{\mathrm{E}}$ 以一种自然的方式：

$$(x,y) \mapsto (\delta(x,y), \mathrm{E}\, x \otimes \mathrm{E}\, y)$$

而这恰好是一个函数态射。

注3.4：
单态射总是单射函数，而满态射总是满射。

例3.5（正则子对象）：
若单态射是平行箭头对的等化子，则称其为正则单态射。设 f、g： $A \to B$，理解等化子的一种方式，是把它看作使图交换的 A 的最大子对象。很容易看出，一般而言，子对象必定是 δ逐点较小的子集。因此，使这对箭头相等的 A 的最大子对象，就是 A 上函数取值相同的点所构成的子集，并且具有尽可能大的 δ：也就是 A的。

因此，我们看到一个规律：一般而言，等化子只是一些子集，其中 δ 源自对原对象的限制。不过，重要的是，我们将“正则子对象”称为保持 δ 的单态射——因为它们已被等价地刻画。

持怀疑态度的读者可能会质疑，我们只是证明了正则单态射保留 δ，而没有证明这是一项充分条件。

既然单态射是单射函数，那么保留 δ的单态射就是其超集带有 δ的子集；考虑这样一个单态射： $m : A \hookrightarrow X$，其中 $A \subseteq X$，取$(X \amalg X)/\sim$，并定义 $\sim$，使 A的两个副本能够相互对应。

$$\delta([\![(x,i)]\!],[\![(y,j)]\!]) = \begin{cases} \delta(x,y), & i = j \\ \bigvee_{a\in A} \delta(x,a) \otimes \delta(a,y), & i \neq j \end{cases}$$

有两个显然的映射将 X 包含到这个集合中，分别对应上支和下支。它们恰好在对应于 A的截面上重合，因此这两个箭头的等化子必定是从 A 到X的子集包含映射； δ 必须尽可能大，也就是对 X的限制，以使其仍为一个态射。

例3.6:
设（X， d）是一个伪度量空间，则（X， d）是一个 $[0,\infty]$-集，其中 δ（x， y） $\neq \bot = \infty$， $\forall x$， $y \in X$。

例3.7:
给定一个非空指标集 I，我们有一个 $\mathscr{Q}$-集 $\coprod_{i\in I} \top$，其定义如下:

$$\delta((e,i),(e',i')) = \begin{cases} e \wedge e', & \text{if } i = i'; \\ \bot, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例3.8:
给定一个交换环 A，将其（左）理想集合记作 $\mathscr{I}_A$。 $\mathscr{I}_A$是一个量化格。给定一个左 A-模 M，我们可以赋予它一个 $\mathscr{I}_A$-集结构:

$$\delta(x,y) = \bigvee \{I \in \mathscr{I}_A \mid I \cdot x = I \cdot y\}$$

事实上，该上确界在某个特定理想处取到。此外， $Ex = A = \max \mathscr{I}_A$。

例3.9:
假设 $\mathscr{Q}$ 是一个具有“幂等上逼近”[4]的量化格:

$$\forall q \in \mathscr{Q} : \exists q^+ \in \mathrm{E}\,\mathscr{Q} : q^+ = \min\{e \in \mathrm{E}\,\mathscr{Q} \mid q \preceq e\}$$

Then

$$\delta(x,y) = \begin{cases} x \otimes y, & x \neq y; \\ x^+, & x = y. \end{cases}$$

定义了 $\mathscr{Q}$ 自身上的一个 $\mathscr{Q}$-集结构。

[4]在 [15]中描述了使 $\mathscr{Q}$ 具有此性质的充分条件。

3.2 底层图函子

定义 3.4:
存在一个函子 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$：$\mathscr{Q}$-Set$_f \to \mathscr{Q}$-Set$_r$，它是底层图函子，因为它将函数态射映射为相应的图关系。更准确地说，$\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(X) = X$，并且给定 $f\colon X \to Y$

$$(\mathcal{G}_{\mathbb{R}} f)(x, y) = \delta(f(x), y)$$

命题 3.3:
如上所定义，$\mathcal{G}_{\mathbb{R}} f$ 确实是一个函数态射，而 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ 确实是一个函子。

证明。显然，由于 f 是一个函数态射，$\mathcal{G}_{\mathbb{R}} f$ 至少应满足关系态射公理中的 δ 和 E 公理；(Σ) 公理由三角不等式成立；严格性公理也成立，因为取$b = f(a)$可得 E $f(a)$，而这等于 E a。

关于函子性，$\mathcal{G}_{\mathbb{R}}\mathsf{id} = \delta$，因此它是关系范畴中的恒等态射；此外，

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}_{\mathbb{R}} g) \circ (\mathcal{G}_{\mathbb{R}} f)(x, z) &= \bigvee_y (\mathcal{G}_{\mathbb{R}} f)(x, y) \otimes (\mathcal{G}_{\mathbb{R}} g)(y, z) \\ &= \bigvee_y \delta(f(x), y) \otimes \delta(g(y), z) \\ &= \delta(g \circ f(x), z) \\ &= \mathcal{G}_{\mathbb{R}}(g \circ f)\end{aligned}$$

□

间奏

一般来说，在研究某个框架/局部 Ω 的 Ω-Set 时，最终必然会遇到一个称为“完备性”的概念。广义而言，完备性是在 Ω-Set 世界与 ShΩ 世界之间转换所必需的一种性质 [3, 命题 2.7.10，参见定义 2.9.1]。我们将这种完备性称为 Scott 完备性，它涉及一个称为单点集的事物。

层几乎按定义就是关于粘合部分数据的——从实质上说，在一个覆盖上的相容元素恰好存在唯一一个粘合，而该粘合位于被覆盖开集之上。这带来了第二种自然的完备性概念——我们称之为粘合完备性。

因此，在接下来的几节中，我们将给出与这两个概念相关的精确定义，并明确说明它们之间的一些关系。

4 粘合完备性

定义 4.1（相容族）：
给定一个 $\mathcal{Q}$-集合 X，若其元素族 A 满足$\forall a, b \in A$，则称其相容。

$$\delta(a, b) = \mathrm{E}\, a \otimes \mathrm{E}\, b$$

自然地，因为外延是幂等的，对于幂等元 $\otimes = \wedge$，这等同于说 $\delta(a, b) = \mathrm{E}\ a \wedge \mathrm{E}\, b$。

注意， $\mathcal{Q}$-集合的空族显然相容。

鉴于我们通常将 δ 解释为“两个数据片段相一致之处”，这表示 a 和 b 在其外延的交集处相一致——也可以说，在它们的定义域和确定度上相一致。因此，它们是相容的。

定义 4.2（粘合元）：
给定一个 $\mathcal{Q}$-集 X 以及其元素的一个族 A，若 $x_A \in X$ 是 A 的粘合，或者说它粘合了 A，则称 $\forall a \in A$,

$$\delta(a, x_A) = \mathrm{E}\, a$$

$$\mathrm{E}\, x_A = \bigvee_{a \in A} \mathrm{E}\, a$$

因此，这一定义体现了这样的思想：局部数据的拼合与其所汇集的数据在整意义下相符；而且——重要的是——它不会作出选择，也不会提供其所粘合的族 A 中未包含的信息。

命题 4.1：
若一个族 A 存在粘合元，则该族相容。此外，任意两个粘合元在“实质上唯一”——也就是说，它们是 δ-等价的。

证明。假设 x_A 粘合 A；再设 a 和 b 是族 A中的元素；注意到

$$\delta(x_A, a) = \mathrm{E}\, a$$
$$\delta(x_A, b) = \mathrm{E}\, b$$

因此

$$\mathrm{E}\, a \otimes \mathrm{E}\, b = \delta(x_A, a) \otimes \delta(x_A, b)$$

但是,

$$\mathrm{E}\, a \otimes \mathrm{E}\, b \leq \delta(a, b)$$

但我们知道以下结论始终成立

$$\delta(a, b) \leq \mathrm{E}\, a \otimes \mathrm{E}\, b$$

因此它们相同。

这足以保证兼容性，接下来证明第二个结论：考虑 $y \in X$，比较两种可能的粘合——比如 x 和 x'。

$$\begin{aligned}
\delta(x,y) &= \delta(x,y) \otimes \mathrm{E}\, x \\
&= \bigvee_{a \in A} \delta(x,y) \otimes \mathrm{E}\, a \\
&= \bigvee_{a \in A} \delta(x,y) \otimes \mathrm{E}\, a \otimes \mathrm{E}\, a \\
&= \bigvee_{a \in A} \delta(x,y) \otimes \delta(x',a) \otimes \delta(x,a) \\
&\leq \bigvee_{a \in A} \delta(x,y) \otimes \delta(x',x) \\
&\leq \delta(x',y)
\end{aligned}$$

由于将 x 与 x' 互换，反过来亦然时同样成立，因此对于任意 y，都有 $\delta(x,y) = \delta(x',y)$；所以它们本质上相同。 □

定义 4.3（δ-等价关系）：
上述性质相当重要，因为——正如通常的情况一样——等式有害，而等价关系有益。在 $\mathcal{Q}$-集 X 中，若以下两个等价条件之一成立，则称两个元素 x、y 是δ-等价的：

$$\forall z \in X : \delta(x,z) = \delta(y,z)$$

$$\delta(x,y) = \mathrm{E}\, x = \mathrm{E}\, y$$

前者推出后者相当显然，只需将 z 代入y 以及 x即可。后者推出前者也很容易证明：

$$\begin{aligned}
\delta(x,z) &= \delta(x,z) \otimes \mathrm{E}\, x \\
&= \delta(x,z) \otimes \delta(x,y) \\
&\leq \delta(y,z)
\end{aligned}$$

作相应的修改，便可得到另一个所需的不等式。

注 4.1：
显然，这是一个等价关系。

两个 δ 等价的点不能——例如——通过函数态射映射到不等价的点；关系态射也无法区分它们。以下引理对此作了形式化表述

引理 4.1：
对于这两类态射，δ 等价关系都是“保持同余”的。更准确地说：给定等价的元素 x 和 x'；

1. 对于函数态射，保持同余意味着 $f(x) \sim f(x')$；
2. 对于关系态射，这意味着 $\varphi(x,y) = \varphi(x',y)$，且 $\psi(w,x) = \psi(w,x')$。

证明。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\, x = \mathrm{E}\, x' = \delta(x,x') &\leq \delta(f(x), f(x')) \\ &\leq \mathrm{E}\, f(x) = \mathrm{E}\, x \\ &= \mathrm{E}\, x' = \mathrm{E}\, f(x')\end{aligned}$$

至于关系态射，

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \varphi(x,y) \otimes \mathrm{E}\, x \\ &= \varphi(x,y) \otimes \delta(x,x') \\ &\leq \varphi(x'y)\end{aligned}$$

基于相同理由，对偶不等式成立；同样，也可以得到关于 ψ 的相同等式。

□

我们可以将粘合完备性表述如下

定义 4.4（粘合完备性）：
若一个 $\mathcal{Q}$-集合 X 的每个相容族都有且仅有一个粘合，则称其为粘合完备的。这等价于要求所有相容族都存在粘合，并且 δ-等价关系“外延地等于相等”——听起来真是矫揉造作。

只要认识到 $\{x, x'\}$ 可由 x 和 x' 同时粘合，当且仅当它们是 δ-等价的，就能看出这个等价关系确实成立。

定义 4.5（外延性）：
外延性是指 δ-等价关系外延地等于相等这一性质。也就是说：

$$\delta(x,y) = \mathrm{E}\, x = \mathrm{E}\, y \implies x = y$$

或者等价地

$$\delta(\_, x) = \delta(\_, y) \implies x = y$$

例4.1：
很容易看出，终端 $\top$ $\mathcal{Q}$-集是粘合完备的。由于 $\mathrm{E}\, a \otimes \mathrm{E}\, b = \delta(a,b)$ 总是成立，任意幂等元集合都是相容的。此外，这样一个集合的粘合就是其上确界，这一点很容易看出：

$$x_A = \mathrm{E}\, x_A = \bigvee_{a \in A} \mathrm{E}\, a = \bigvee_{a \in A} a$$

例4.2：
始对象，即空集，显然是外延的，但它不满足粘合条件，因为空族同样显然是相容的，而空集中不存在任何实际将其粘合起来的元素。因此，完备性不成立，而外延性成立。

例4.3：
在一个视为 $[0,\infty]$-集的扩展伪度量空间 (X,d) 中，无穷远点（具有最小范围）总是与其他任何点相容；正常点相容，当且仅当它们在本质上相同（即它们之间的距离为 0）。

因此，这样的扩展伪度量空间满足粘合条件，当且仅当它含有一个无穷远点；它是外延的，当且仅当它在本质上是一个度量空间（即去掉无穷远点后，它是一个度量空间），并且恰好含有一个无穷远点。

例4.4：
对于非平凡指标集 I （即包含多个元素）和含有 $\perp_i$ 无穷远元素（零外延的）的 $\mathscr{Q}$-集X_i， $\coprod_{i\in I} X$ 永远不是外延的，因为 $\delta((\perp_i,i),(\perp_j,j)) = \perp$ 对于多个不同的 $\perp_i$。一般而言，任何含有不止一个零范围元素的 $\mathscr{Q}$-集都不可能是外延的。

例4.5：1. 若 A 是交换环，且 M 是左 A-模，则 $\mathscr{Q} = Ideals(A)$上的集合 $X_M = (M,\delta)$ 满足：对每个 x， $y \in M$，当且仅当 $A.x = A.y$，因此一般而言它不是外延的 $\mathscr{Q}$-集：非空相容族(M,δ)中的任一成员都是该族的一个粘合。此外， M是可除 A-模，当且仅当 $\sim_\delta = \{(0,0)\} \cup (M \setminus \{0\}) \times (M \setminus \{0\})$。2. 若 $card(I) > 1$，则 $\mathscr{Q}$-集 $I.1_{\mathscr{Q}-set}$ 不是外延的，因为 $\delta((\perp,i),(\perp,j)) = \perp$ ，并且存在 $i,j \in I$ 使得 $i \neq j$。若 $I' \subseteq I$，则族$\{(\perp,i)\colon\ i \in I'\}$ 是相容的，并且对任意 $j \in I$，$(\perp,j)$都是该族的一个粘合。3. 若 $\mathscr{Q}$ 是带有上幂等逼近的积分量子格，则其在 $\mathscr{Q}$ 上的相应 $\mathscr{Q}$-集是外延的。该 $\mathscr{Q}$-集上的族 S 相容，当且仅当对每个 x， $y \in S$， $x \otimes y = x^+ \otimes y^+$。

命题4.2：
函子 $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ 仅在陪域为外延的对象对上是忠实的。也就是说：如果 Y 是外延的，那么对于所有 X，以下映射都是单射的

$$\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(X,Y) \xrightarrow{\mathcal{G}_{\mathcal{R}}} \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r(X,Y)$$

此外，外延的 $\mathscr{Q}$-集是对象中最大的一个类，使你可以对其进行全称量化 X。

证明。首先让我们证明后一项断言：设 Y 是任意一个 $\mathcal{Q}$-集；并假设 y 和 y' 是 δ-等价的。现在设 $X = \{*\}$，令 $\mathrm{E}\, * = \mathrm{E}\, y$。

有两个显然的映射 $X \to Y$，即 $* \mapsto y$ 和 $* \mapsto y'$。分别将它们称为 f 和 g。根据 δ-等价关系的等价定义，y 和 y' 具有相同的 δs，因此

$$\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(* \mapsto y) = \delta(\_, y) = \delta(\_, y') = \mathcal{G}_{\mathbb{R}}(* \mapsto y')$$

因此，若 $y \neq y'$，则 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ 必定会将不同的函数态射映射到同一个关系态射上，因而不具备单射性。

话虽如此，我们仍须证明，当陪域是外延的时，该函子在同态集上是单射的。不过这很简单。假设 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(f) = \mathcal{G}_{\mathbb{R}}(g)$，于是对所有 x 和 y，

$$\delta(f(x), y) = \delta(g(x), y)$$

取 y 为 $f(x)$，便得到 $\delta(g(x)\ f(x)) = \mathrm{E}\ f(x)$；同理，也可以证明 $f(x)$ 总是与 $g(x)$ δ-等价。由于 Y 是外延的，我们有 $g(x) = f(x)$，对所有 x 均成立，因此它们是同一个函数态射。 □

注 4.2:
无论是粘合意义上的完备性还是单点意义上的完备性，在关系态射范畴中都相当没有意义；这是因为每个 $\mathcal{Q}$-$\mathbf{Set}_r$ 都等价于其对象在任一种意义下均完备的满子范畴。

因此，我们能够证明这些子范畴具有的任何范畴性质，对更大的关系范畴也同样成立。

事实上，完备性可以在某种意义上理解为施加于对象的一种性质，使得其函数态射的可表函子与其关系态射的可表函子“相同”。后续章节将对此作进一步阐述。

鉴于上述说明，我们将聚焦于函数态射范畴，因为在关系态射下讨论完备的 $\mathcal{Q}$-sets，只不过是绕个弯子来讨论在相同态射下的一般 $\mathcal{Q}$-sets。

4.1 关于粘合与相容族的一些结果

引理 4.2:
函数态射的直接像保留族相容性。

证明。给定 A 与 X 和 f 相容：$X \to Y$；任取 a、$b \in A$；只需证明 $\delta(f(a)\ f(b)) = \mathrm{E}\ f(a) \otimes \mathrm{E}\ f(b)$。

$$\begin{aligned}
\delta(a,b) &\le \delta(f(a),f(b)) \\
&= \delta(f(a),f(b)) \otimes \mathrm{E}\, f(a) \\
&= \delta(f(a),f(b)) \otimes \mathrm{E}\, f(a) \otimes \mathrm{E}\, f(b) \\
&= \delta(f(a),f(b)) \otimes \delta(a,b) \\
&\le \delta(a,b) && \text{（半笛卡尔）}
\end{aligned}$$

□

引理 4.3：
粘合元在函数态射的直接像下保持不变

证明。设 x 粘合 A，我们已经知道 $f[A]$ 是相容的——根据前一个引理，以及可粘合的族必定相容这一事实——因此只需证明 $f(x)$ 粘合 $f[A]$。取 $a \in A$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, a &= \delta(x,a) \\
&\le \delta(f(x),f(a)) \\
&\le \mathrm{E}\, f(a) = \mathrm{E}\, a
\end{aligned}$$

由此建立了第一个条件。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, f(x) &= \mathrm{E}\, x \\
&= \bigvee_{a \in A} \mathrm{E}\, a \\
&= \bigvee_{a \in A} \mathrm{E}\, f(a) \\
&= \bigvee_{\alpha \in f[a]} \mathrm{E}\, \alpha
\end{aligned}$$

至此证明完成。 □

我们将看到，有一种自然的方法可以“使” $\mathcal{Q}$-集成为粘合完备的。这正是我们将在下一小节中重点讨论的内容。

4.2 粘合完备化

完备化问题通常表现为这样的形式：“所有 X 都诱导出一个 Y，但并非所有 Y 都来自某个 X ——我们能否使 X 与 Y 一一对应？”这类问题的解决方案往往可以从考察所有 Y 或其商集中找到。

本着这一精神，我们将赋予所有相容族的集合以一个 $\mathcal{Q}$-集的结构；将原始的 $\mathcal{Q}$-集嵌入其中；然后在适当的商中“丢弃”冗余点。

定义 4.6:
给定一个 $\mathscr{Q}$-集 X，我们称 $\mathfrak{G}(X)$为由下式给出的 $\mathscr{Q}$-集

$$
\begin{aligned}
|\,\mathfrak{G}(X)| &= \{A \subseteq |X| \;:\; A \text{ is compatible}\} \\
\delta(A,B) &= \bigvee_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \delta(a,b)
\end{aligned}
$$

显然，我们声称上述定义确实定义了一个 $\mathscr{Q}$-集。

证明。

$$
\begin{aligned}
\delta(A,B)\otimes\delta(B,C) &= \bigvee_{a\in A}\bigvee_{b\in B}\bigvee_{\beta\in B}\bigvee_{c\in C} \delta(a,b)\otimes\delta(\beta,c) \\
&= \bigvee_{a\in A}\bigvee_{b\in B}\bigvee_{\beta\in B}\bigvee_{c\in C} \delta(a,b)\otimes \mathrm{E}\, b\otimes \mathrm{E}\,\beta\otimes\delta(\beta,c) \\
&= \bigvee_{a\in A}\bigvee_{b\in B}\bigvee_{\beta\in B}\bigvee_{c\in C} \delta(a,b)\otimes\delta(b,\beta)\otimes\delta(\beta,c) \\
&\le \bigvee_{a\in A}\bigvee_{c\in C} \delta(a,c) \\
&= \delta(A,C)
\end{aligned}
$$

这足以证明传递性／三角不等式。定义显然是对称的，因此只需证明外延的行为符合预期。

$$
\begin{aligned}
\delta(A,A)\otimes\delta(A,B) &= \bigvee_{a,a'\in A}\bigvee_{\alpha\in A, b\in B} \delta(a,a')\otimes\delta(\alpha,b) \\
&\ge \bigvee_{\alpha\in A, b\in B} \delta(\alpha,\alpha)\otimes\delta(\alpha,b) \\
&= \delta(A,B)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mathrm{E}\, A\otimes\delta(A,B) = \delta(A,B) \qquad \text{(semi-cartesian)}
$$

由此证明它确实是所需的 $\mathscr{Q}$-集。 □

定义 4.7（ $\mathscr{Q}$-相容族集合）:
我们将 $\mathfrak{G}$[5] 从对象映射扩展为一个名副其实的函子，方法是将函数态射映射为其直接像；这其中暗含着一个前提：直接像确实是相容族$\mathscr{Q}$-集合之间的函数态射。

[5]这里似乎有必要说明使用哥特字体的理由；大写 G 没问题，因为我们取的是包含所有可能粘合的空间。但由于它们并非外延的，我们的函子仍有些“损坏”。你可以把它称作助记符，不过这其实是一个视觉双关。

证明。

$$\begin{aligned}\delta(A,B) &= \bigvee_{a,b} \delta(a,b)\\ &\le \bigvee_{a,b} \delta(f(a),f(b))\\ &= \delta(f[A],f[B])\end{aligned}$$

对于外延，这一点甚至更加直接

$$\mathrm{E}\, A = \bigvee_{a\in A} \mathrm{E}\, a = \bigvee_{a\in A} \mathrm{E}\, f(a) = \mathrm{E}\, f[A]$$

□

如前一条脚注所述， $\mathfrak{G}$ 不会将对象映射到粘合完备的 $\mathcal{Q}$-集合；可以将其视为与柯西序列类似的一类对象，只是不取商。我们首先证明， $\mathfrak{G}(X)$ 上的每个相容族都有一个粘合。

引理 4.4:
如果 $\mathcal{A}$ 是 $\mathfrak{G}(X)$ 上的相容族，那么 $\bigcup\mathcal{A}$ 在 X上相容。

证明。取 A、 $B \in \mathcal{A}$、 $a \in A$ 和 $b \in B$；只需证明 $\delta(a,b) \ge \mathrm{E}\, a \otimes \mathrm{E}\, b$，因为我们知道对偶不等式总是成立。

以下等式总是成立:

$$\delta(a,b) \ge \bigvee_{a'\in A}\bigvee_{b'\in B} \delta(a,a')\otimes\delta(b,b')\otimes\delta(a',b')$$

迫使我们接受其余论证

$$\begin{aligned}&= \bigvee_{a'\in A}\bigvee_{b'\in B} \mathrm{E}\, a\otimes\mathrm{E}\, a'\otimes\mathrm{E}\, b\otimes\mathrm{E}\, b'\otimes\delta(a',b')\\ &= \mathrm{E}\, a\otimes\mathrm{E}\, b\otimes\bigvee_{a',b'}\delta(a',b')\\ &= \mathrm{E}\, a\otimes\mathrm{E}\, b\otimes\delta(A,B)\\ &= \mathrm{E}\, a\otimes\mathrm{E}\, b\otimes\mathrm{E}\, A\otimes\mathrm{E}\, B\end{aligned}$$

因为对于外延 $\otimes = \wedge$，且 $\mathrm{E}\ a \le \mathrm{E}\, A$，对于 b 和 B 也同样如此，

$$= \mathrm{E}\, a\otimes\mathrm{E}\, b$$

□

命题 4.3（ $\mathfrak{G}$ 的相容族都有粘合）:
我们至少必须给出一个粘合，但一般来说，我们应当有许多这样的粘合。这是一个缺陷，我们稍后将通过取适当的商来加以修正。

证明。给定 $\mathcal{A}$，我们断言 $\bigcup \mathcal{A}$ 是其粘合的规范候选。现在我们将验证它确实能够胜任这一任务。首先，令 $A \in \mathcal{A}$，并令 X 表示由 $\bigcup \mathcal{A}$ 给出的族；我们继续进行。

$$\begin{aligned}\delta(X, A) &= \bigvee_{x \in X, a \in A} \delta(x, a) \\ &\geq \bigvee_{x \in A, a \in A} \delta(x, a) \\ &= \delta(A, A) = \mathrm{E}\, A \\ &\geq \delta(X, A)\end{aligned}$$

现在只需证明其范围符合我们的预期。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\, X &= \bigvee_{x \in X} \mathrm{E}\, x \\ &= \bigvee_{A \in \mathcal{A}} \bigvee_{x \in A} \mathrm{E}\, x \\ &= \bigvee_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{E}\, A\end{aligned}$$

□

粘合完备化的最后一块拼图是确保外延性；这由另一个函子，即 δ-商函子来完成。

定义 4.8（δ-商）：

我们通过将 δ-等价的元素取商，自然地定义 $^{-}/_{\delta}$ 函子。若取 $\delta(\llbracket x \rrbracket, \llbracket y \rrbracket) = \delta(x, y)$，它确实将 $\mathcal{Q}$-集映为 $\mathcal{Q}$-集。由于 δ 等价关系具有同余性，它也确实将态射映为态射。

引理 4.5：

一个 $X/_{\delta}$ 的相容族有粘合，当且仅当该族的（任意）截面在 X中有粘合。也就是说，若 A 是我们的相容族，且 A 是 $^{-}$，满足 $\pi[A] = A$，那么 A 有粘合，当且仅当 A 有粘合。此外，若任一截面有粘合，那么它也会粘合每一个截面。

证明。假设 A 有一个粘合，称其为 $\llbracket x \rrbracket$；根据定义，

$$\mathrm{E}\, x = \mathrm{E} \llbracket x \rrbracket = \bigvee_{\llbracket a \rrbracket \in A} \mathrm{E} \llbracket a \rrbracket = \bigvee_{\llbracket a \rrbracket \in A} \mathrm{E}\, a$$

因此，如果 A 是 A的一个截面，那么

$$\mathrm{E}\, x = \bigvee_{a \in \bar{A}} \mathrm{E}\, a$$

$$\delta(x, a) = \delta(\llbracket x \rrbracket, \llbracket a \rrbracket) = \mathrm{E} \llbracket a \rrbracket = \mathrm{E}\, a$$

因此， x 可以粘合 A的任意截面。现在反过来，假设 x 可以粘合 A的某个截面$_A$ 。当然， $[\![x]\!]$ 现在必须粘合 A:

$$\mathrm{E}\,[\![x]\!] = \mathrm{E}\,x = \bigvee_{a\in\bar{A}} \mathrm{E}\,a = \bigvee_{a\in\bar{A}} \mathrm{E}\,[\![a]\!] = \bigvee_{[\![a]\!]\in A} \mathrm{E}\,[\![a]\!] = \mathrm{E}\,A$$

$$\delta([\![a]\!],[\![x]\!]) = \delta(a,x) = \mathrm{E}\,a = \mathrm{E}\,[\![a]\!]$$

□

注释 4.3:
显然，每个定义在 $^{X}\!/_{\delta}$ 上的相容族都有一个截面，该截面是定义在 X 上的相容族。

引理 4.6:
函子 $^{-}\!/_{\delta}$ 使 $\mathcal{Q}$-集合成为外延的（事实上，它是外延近似中“最好的”）。

证明。设

$$\delta([\![x]\!],[\![y]\!]) = \mathrm{E}\,[\![x]\!] = \mathrm{E}\,[\![y]\!]$$

那么 $\delta(x,y) = \mathrm{E}\ x = \mathrm{E}\,y$，并且我们立即得到 $x \sim y$，因此 $[\![x]\!] = [\![y]\!]$。

声称它在这方面是“最好的”，更难表述和证明，而且它可以／应该成为一个定理。

□

定理 4.1（它成为了一个定理）：
函子 $\mathcal{Q}$-$\mathbf{Set}_{f\mathrm{Ext}} \hookrightarrow \mathcal{Q}$-$\mathbf{Set}_f$ 有一个左伴随，即 $^{-}\!/_{\delta}$。

证明。正如本文中逐渐形成的惯例，我们着手寻找单位和余单位，并证明它们满足三角／之字形恒等式。

余单位显而易见，因为将 $^{-}\!/_{\delta}$ 应用于一个已经是外延的对象，会得到一个同构对象，其元素是单元素集，且恰好包含原始 $\mathcal{Q}$-集合中的元素。因此，我们只需将它们拆开，这就是余单位。

单位也很简单，它就是商映射 $^{\pi}$ ——将元素映射到它们所属的 δ-等价类。

在这种情况下，证明这些锯齿恒等式成立并无实际意义；不过，读者若有兴趣，也可以证明。 □

定义 4.9（粘合完备化）：
粘合完备化函子 $\mathcal{G}$ 就是 $(^{-}\!/_{\delta}) \circ \mathfrak{G}$。

命题 4.4:
$\mathcal{Q}$-集的粘合完备化确实是粘合完备的。

证明。我们知道，在 $\mathcal{G}X$ 上的每个相容族至少有一个粘合；同时我们也知道它们是外延的，因此它们是粘合完备的。

□

定义 4.10（$\mathcal{GQ}$-集）：
这里我们将 $\mathcal{Q}$-Set$_f$ 中对象为粘合完备对象的全子范畴命名为 $\mathcal{GQ}$-Set。我们省略 f 下标，因为这个概念对关系态射而言并不特别有用，所以这个数据没有意义。在后面的小节中， f 下标将再次出现， r 下标也会出现，以便我们证明

$$\mathcal{GQ}\text{-}\mathbf{Set}_r \simeq \mathcal{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r$$

鉴于前述命题，我们可以说， $\mathcal{G}$ 的签名实际上

$$\mathcal{G} : \mathcal{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f \to \mathcal{GQ}\text{-}\mathbf{Set}$$

引理 4.7:
等价的相容族（按照我们为这类族的集合所定义的规范 δ 的意义）具有完全相同的粘合——并且，当且仅当其元素是它们其中一个粘合时，它们才等价于一个单元素集合。

证明。只需证明 x 粘合 A 当且仅当 $\{x\} \sim A$ ——因为作为等价关系的 $\sim$ 已经确保了该断言的其余部分。
那么，假设 x 确实粘合 A；由此可得

$$\delta(\{x\}, A) = \bigvee_{a \in A} \delta(x, a) = \bigvee_{a \in A} \mathrm{E}\, a = \mathrm{E}\, A = \mathrm{E}\{x\}$$

现在反过来假设 $\{x\} \sim A$；特别是，$\mathrm{E}\, x = \mathrm{E}\{x\}$ 必须是 $\mathrm{E}\ A$，因此 $\bigvee_{a \in A} \mathrm{E}\, a$。这样最后一个条件就解决了；但粘合的第一个条件仍未满足。不过很快就会解决:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, a &= \mathrm{E}\, a \otimes \mathrm{E}\, A \\
&= \mathrm{E}\, a \otimes \delta(\{x\}, A) \\
&= \bigvee_{a' \in A} \mathrm{E}\, a \otimes \delta(x, a') \\
&= \bigvee_{a' \in A} \mathrm{E}\, a \otimes \mathrm{E}\, a' \otimes \delta(x, a') \\
&= \bigvee_{a' \in A} \delta(a, a') \otimes \delta(x, a') \\
&\leq \delta(x, a)
\end{aligned}$$

□

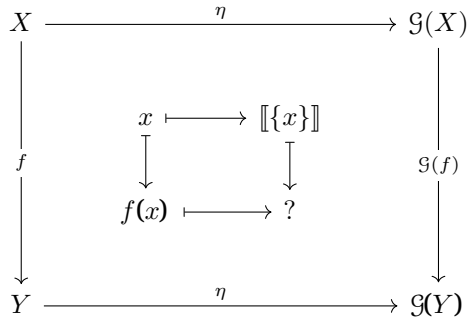
定理 4.2（粘合完备伴随）：
如果这个完备化并非真正具有“普遍性”，也就是说它不是我们所关注的子范畴的反射函子，那么构造一个使 $\mathcal{Q}$-集粘合完备的函子就没什么特别用处。

证明。我们再次通过构造满足之字形恒等式的单位-余单位对来进行。为了（我自己）理清思路，我们将 $L = \mathcal{G}$ 和 R 命名为全忠实嵌入$\mathcal{GQ}$-Set $\hookrightarrow \mathcal{Q}$-Set$_f$。

我们来找 $\eta\colon \mathsf{id} \to R \circ L$；它必须将 x 中的一个元素映到 X的完备化中的某个元素； X 的完备化由相容族的等价类构成，因此只需找到一个相容族，将 x 指派给它。 $\{x\}$ 是自然的候选，因为

$$\delta(x, y) = \delta(\{x\}, \{y\}) = \delta(\llbracket\{x\}\rrbracket, \llbracket\{y\}\rrbracket)$$

当然，我们只定义了各个分量，还不知道它们合在一起是否构成一个自然变换；不过自然性很容易验证：



我们知道 $\overline{\ }/_\delta$ 对一个箭头的作用是

$$f \overset{\overline{\ }/_\delta}{\longmapsto} (\llbracket x\rrbracket \overset{\llbracket f\rrbracket}{\longmapsto} \llbracket f(x)\rrbracket)$$

这是我们从基础集合论中知道的，这正是商集的运作方式。 $\mathfrak{G}$ 对态射的作用是

$$f \overset{\mathfrak{G}}{\longmapsto} (A \overset{f_*}{\longmapsto} f[A])$$

也就是说，显然，这只是将函数映射到直接像。因此，我们将两者结合起来，得到

$$\llbracket f_*\rrbracket (\llbracket\{x\}\rrbracket) = \llbracket f[\{x\}]\rrbracket = \llbracket\{f(x)\}\rrbracket$$

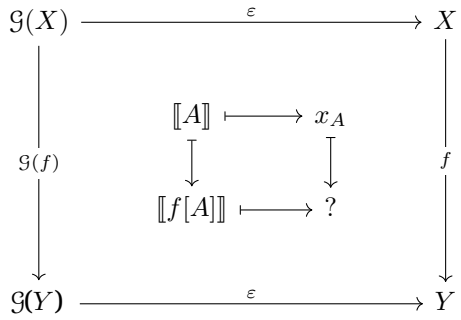
使上面的方形图可交换。

现在我们应该给出一个余单位 $\varepsilon\colon L \circ R \to$ 恒等映射。这样一个函数应当把一个已经粘合完备的 $\mathcal{Q}$-集合的完备化中的元素映回原来的 $\mathcal{Q}$-集合。 ε 作用的对象形如 $\llbracket A\rrbracket$ ，其中 A 是定义在——比如说—— X上的一个相容族。

自然的候选做法是将 A 映射到 X 中的唯一元素 x_A （它本来就是粘合完备的），该元素将其粘合起来。考虑到前面的引理，显然这个定义确实给出了一个映射，因为任何等价族都会由同一个唯一元素粘合。此外，由于 X 本来就是完备的， $\{x_A\} \in \llbracket A\rrbracket$ ，因此该映射显然是一个态射，因为

$$\delta(\llbracket A\rrbracket, \llbracket B\rrbracket) = \delta(\llbracket x_A\rrbracket, \llbracket x_B\rrbracket) = \delta(x_A, x_B)$$

现在只剩下证明 ε 是自然变换 $L\circ R\to$ 恒等映射；



由于粘合元在函数态射下保持不变，该方块确实可交换；因此，这个映射族实际上是一个自然变换，我们可以继续证明所选的变换满足之字形恒等式。总结一下，

$$\begin{aligned} x &\overset{\eta_X}{\longmapsto} [\![\{x\}]\!] \\ [\![A]\!] &\overset{\varepsilon_{X'}}{\longmapsto} x_A \end{aligned}$$

我们希望证明

$$\begin{aligned} (\varepsilon L)\circ(L\eta) &= \mathbf{id} \\ (R\varepsilon)\circ(\eta R) &= \mathbf{id} \end{aligned}$$

由此可见，我们确实有见证，证明我们所要展示的伴随成立。

$$\begin{aligned} L\eta : L &\longrightarrow L\circ R\circ L \\ (X\in \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}) &\mapsto ([\![A]\!] \overset{(L\eta)_X}{\longmapsto} [\![\{[\![A]\!]\}]\!]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon L : L\circ R\circ L &\longrightarrow L \\ (X\in \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}) &\mapsto ([\![\{[\![A]\!]\}]\!] \overset{(\varepsilon L)_X}{\longmapsto} [\![A]\!]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\varepsilon : R\circ L\circ R &\longrightarrow R \\ (K\in \mathcal{G}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}) &\mapsto ([\![A]\!] \overset{(R\varepsilon)_K}{\longmapsto} x_A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta R : R &\longrightarrow R\circ L\circ R \\ (K\in \mathcal{G}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}) &\mapsto (x \overset{(\eta R)_K}{\longmapsto} [\![\{x\}]\!]) \end{aligned}$$

□

注记 4.4:
很容易看出，伴随余单位是自然同构（因为R 是全忠实的），然而单位却不是: 考虑由下式自然给出的 $\mathscr{Q}$-集

$$X := \{\bot\} \amalg \{\bot\}$$

显然，它不是外延的，因为有 $\mathcal{G}(X) \cong \{\bot\}$ ，而且它们之间不可能存在函数同构，因为函数同构尤其也是双射。因此，上述伴随不是伴随等价。对于关系态射，则存在这类同构，因此伴随单位也会是自然同构。

5 单点集/Scott 完备性

如前所述，完备性还有另一种概念；它与单元素集这一概念有关，我们现在就来讨论。

从直观上说， $\mathscr{Q}$-集 X 上的单元素集是一个取值于 $\mathscr{Q}$ 的特征函数。虽然它本身并不是范畴 $\mathscr{Q}$-Set 中的一种构造，但确实会导出与范畴相关的结果。

定义 5.1（单元素集）:
X 上的单元素集是底集与 $\mathscr{Q}$之间的映射: $\sigma : |X| \to \mathscr{Q}$。预期此映射满足以下公理

1. $\sigma(x) \otimes \mathrm{E}\, x = \sigma(x)$;
2. $\sigma(x) \otimes \delta(x, y) \leq \sigma(y)$;
3. $\sigma(x) \otimes \sigma(y) \leq \delta(x, y)$;
4. $\sigma(x) \otimes \bigvee_y \sigma(y) = \sigma(x)$;

前两条称为“子集公理”，第三条称为“单点条件”，最后一条公理称为“严格性条件”。

直观而言，单点集表示与某个集合的隶属关系——这由子集公理规定；单点条件则指出，同时属于两个不同点意味着它们彼此相似；最后一条公理“严格性”在性质上更具技术性。

文献中对此已有多年的研究 [7, 第 30] 页——但其含义有些晦涩：它是单元素集可表示（定义见下文）的必要条件，却没有简洁明了的解释。我们目前能给出的最佳理解是，严格性使上确界 $\sup_y \sigma(y)$“表现得像一个范围”，因为它是幂等的。

5.1 单点集基础

定义 5.2（可表示单点集）:
当存在某个元素 x_σ 表示单元素集 σ 时，我们称其为可表示的。

存在这样一个元素 x_σ，使得

$$\sigma(y) = \delta(y, x_\sigma)$$

命题 5.1:
如果 A 是一个相容族，那么 $\delta(\{\_\}, A)$ 是一个单元素集。特别地，$\delta(x)$ 始终是一个单元素集（取 $A = \{x\}$ 即可）。

证明。由于 $\mathfrak{G}(X)$ 始终是一个 $\mathscr{Q}$-集，因此子集公理显然成立。单点条件也显然成立:

$$\sigma_A(x) \otimes \sigma_A(y) = \delta(\{x\}, A) \otimes \delta(\{y\}, A) \leq \delta(\{x\}, \{y\}) = \delta(x, y)$$

显然，考虑到这一点，它也是严格的

$$\bigvee_{y \in X} \sigma_A(y) \geq \bigvee_{a \in A} \sigma_A(a) = \bigvee_{a \in A} \mathrm{E}\, a = \mathrm{E}\, A \geq \bigvee_{y \in X} \sigma_A(y)$$

□

注记 5.1:
显然，如果上述单元素集是可表示的，那么表示元素会将 A 粘合起来。如果某个元素将 A 粘合起来，那么它必然表示这个单元素集。

命题 5.2:
如果 A 是一个相容族，且 σ 是 A的 $\mathscr{Q}$-集上的某个单元素集，那么如果 x_A 胶合 A，则

$$\sigma(x_A) = \bigvee_{a \in A} \sigma(a)$$

证明。

$$\begin{aligned}
\sigma(a) =& \sigma(a) \otimes \mathrm{E}\, a \\
=& \sigma(a) \otimes \delta(a, x_A) \\
\leq& \sigma(x_A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(x_A) =& \sigma(x_A) \otimes \mathrm{E}\, x_A \\
=& \sigma(x_A) \otimes \bigvee_{a \in A} \mathrm{E}\, a \\
=& \sigma(x_A) \otimes \bigvee_{a \in A} \delta(a, x_A) \\
=& \bigvee_{a \in A} \sigma(x_A) \otimes \delta(a, x_A) \\
\leq& \bigvee_{a \in A} \sigma(a)
\end{aligned}$$

□

定义 5.3（Scott 完备性）：
当 X 的每个单点集都恰有一个表示元素时，我们称 X 为 Scott 完备，或单元素完备。

例 5.1：
终对象是 Scott 完备的。间接的理解方法是跳读本文，直到我们证明 Scott 完备的 $\mathcal{Q}$-集的包含映射产生极限。更直接的回答源于这样一个事实：由于 $\top \in \mathrm{E}\,\mathcal{Q}$ 是相容族 $\mathrm{E}\,\mathcal{Q}$的粘合，根据命题 5.2，$\sigma(\top) = \bigvee_e \sigma(e)$。因此：

$$\sigma(e) = \sigma(e) \otimes e \leq \sigma(\top) \otimes e = \sigma(\top) \otimes \delta(e, \top) \leq \sigma(e)$$

因此，$\sigma(\top)$ 表示 σ。唯一性相当显然：若对某个 x，有 $\forall e$：$\sigma(e) = e \otimes x$，特别地，根据整性，$\sigma(\top) = \top \otimes x = x$。

例 5.2：1. 若 A 是交换环，且 M 是左 A-模，则 $\mathcal{Q} = Ideals(A)$ 上的集合 $X_M = (M, \delta)$ 满足：对每个 x，$y \in M$,$x \sim_\delta y$ 当且仅当 $A.x = A.y$，所以一般而言它不是外延的 $\mathcal{Q}$-集。

注 5.2：
在 $\mathcal{Q}$-Set^f 中，Scott 完备性在同构下保持不变；但在 $\mathcal{Q}$-Set$_r$ 中并非如此，这将在后面的小节中解释。

第一个断言很容易证明，因为函数同构只是保持 δ 的双射。

定理 5.1：
Scott 完备性蕴含粘合完备性

证明。取一个相容族 A，考虑前一命题中定义的单元素集；设 x_A 表示 σ_A；因此，

$$\bigvee_{a \in A} \delta(x_A, a) = \sigma_A(x_A) = \delta(x_A, x_A) = \mathrm{E}\, x_A$$

$$\delta(a, x_A) = \sigma_A(a) = \bigvee_{a' \in A} \delta(a, a') = \mathrm{E}\, a$$

于是 x_A 粘合 A。现在设 x_A 粘合 A，那么

$$\begin{aligned}\delta(y, x_A) &\geq \delta(x_A, a) \otimes \delta(a, y) \\ &\geq \mathrm{E}\, a \otimes \delta(a, y) = \delta(a, y)\end{aligned}$$

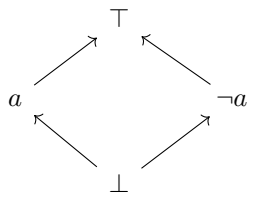
$$\begin{aligned}\delta(y, x_A) &\geq \bigvee_{a \in A} \delta(y, a) \\ &\geq \bigvee_{a \in A} \delta(a, x_A) \otimes \delta(y, x_A) \\ &= \delta(y, x_A) \otimes \bigvee_{a \in A} \delta(a, x_A) \\ &= \delta(y, x_A) \otimes \bigvee_{a \in A} \mathrm{E}\, a \\ &= \delta(y, x_A) \otimes \mathrm{E}\, x_A \\ &= \delta(y, x_A)\end{aligned}$$

因此 x_A 表示 σ_A。所以，如果每个单点集恰有一个表示元素，那么每个相容族都恰有一个粘合。 □

定理 5.2：

存在粘合完备的 $\mathscr{Q}$-集覆盖 $\mathscr{Q} = \mathscr{P}(2)$，但它们并非 Scott 完备——因此这两个概念在逻辑上并不等价。

证明。令 $\mathscr{Q}$ 为如下偏序：



首先，令 $S \subseteq \mathscr{Q}$，并令 $\delta = \wedge$； S 是粘合完备的，当且仅当 S 作为格是完备的：

如果 A 是 S的子集，那么它必定相容（！），因为 $\mathrm{E}\, x = x$ 和 $\delta(x, y) = x \wedge y$，因此 $\delta(x, y) = \mathrm{E}\, x \wedge \mathrm{E}\, y$。此外，如果 x_A 粘合 A，那么

$$\mathrm{E}\, x_A = x_A = \bigvee_{a \in A} \mathrm{E}\, a = \bigvee_{a \in A} a$$

因此， x_A 是 $\sup A$。很容易验证，上确界（如果它在S 中存在）就是 A的粘合。

因此，集合 $S = \{\bot, a, \top\}$ 显然是粘合完备的。但是，单元素集$\sigma(x) = \neg a \wedge x$ （它是由 $\neg a$表示的单元素集的限制）没有表示元素。

$$\sigma(\bot) = \bot \qquad \sigma(a) = \bot \qquad \sigma(\top) = \neg a$$

因此， S 是粘合完备的，但不是 Scott 完备的。 □

定义 5.4（单点集的 $\mathscr{Q}$-集）：
一般来说，无法在 $\mathscr{Q}$集 X上构造一个由单点集组成的 $\mathscr{Q}$-集。要以类似于 [3, 定理 2.9.5] 的方式为单点集定义 δ，存在一些困难。这是因为 $\bigvee_x \sigma(x) \otimes \sigma(x)$ 不一定具有“范围式”的性质。

看来，我们必须为量化格 $\mathscr{Q}$ 添加强性公理，才能保证可以构造单点的 $\mathscr{Q}$-集。这样便可定义如下命题：

$$|\mathbf{\Sigma}(X)| = \{\sigma \mid \sigma \text{ is a singleton over } X\}$$
$$\delta(\sigma, \xi) = \bigvee_{x \in X} \sigma(x) \otimes \xi(x)$$

命题 5.3：
显然，我们必须证明这确实是一个 $\mathscr{Q}$-集。
证明。首先，我们知道 $\bigvee_x \sigma(x)$是幂等的，因此

$$\bigvee_x \sigma(x) \leq \bigvee_x \sigma(x)$$

由于假设 $\mathscr{Q}$ 是强的，我们有

$$\bigvee_x \sigma(x) \leq \bigvee_x \sigma(x) \otimes \sigma(x)$$

并且由于 $\mathscr{Q}$ 是半笛卡尔的

$$\bigvee_x \sigma(x) \otimes \sigma(x) \leq \bigvee_x \sigma(x) \qquad \text{(semi-cartesian)}$$

因此，$\mathrm{E}\,\sigma = \bigvee_x \sigma(x)$。现在我们转向 $\mathscr{Q}$-集公理。按定义， δ 显然是对称的；下面证明外延性：

$$\delta(\sigma, \xi) \otimes \mathrm{E}\,\sigma = \bigvee_x \sigma(x) \otimes \xi(x) \otimes \mathrm{E}\,\sigma$$

现在回想一下 σ的严格性条件

$$= \bigvee_x \sigma(x) \otimes \xi(x)$$

现在我们只需证明三角不等式／传递性

$$\begin{aligned}
\delta(\sigma, \xi) \otimes \delta(\xi, \psi) &= \bigvee_x \bigvee_y \sigma(x) \otimes \xi(x) \otimes \xi(y) \otimes \psi(y) \\
&\leq \bigvee_x \bigvee_y \sigma(x) \otimes \delta(x, y) \otimes \psi(y) \\
&\leq \bigvee_y \sigma(y) \otimes \psi(y) \\
&= \delta(\sigma, \psi)
\end{aligned}$$

□

引理 5.1:
关系态射 $\varphi : X \to Y$ 诱导出一个函数映射 $\check{\varphi} : X \to \mathbf{\Sigma}(Y)$，其定义如下:

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(x, \_)$$

证明。我们需要证明该映射确实将每个 x 映射到单元素集 $\check{\varphi}(x)$，并且该映射确实是一个态射。

$$\begin{aligned}\delta(x, x') \otimes \check{\varphi}(x) &= \delta(x, x') \otimes \varphi(x, \_) \\ &\leq \varphi(x', \_)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\, x \otimes \check{\varphi}(x) &= \mathrm{E}\, x \otimes \varphi(x, \_) \\ &= \varphi(x, \_)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\check{\varphi}(x)](y) \overset{\check{\varphi}(x)}{\otimes} (y') &= \varphi(x, y) \otimes \varphi(x, y') \\ &\leq \delta(y, y')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\check{\varphi}(x)](y) \otimes \bigvee_{y'} [\check{\varphi}(x)](y') &= \varphi(x, y) \otimes \bigvee_{y} \varphi(x, y') \\ &= \varphi(x, y) \otimes \mathrm{E}\, x \\ &= \varphi(x, y) \\ &= \check{\varphi}(x')\end{aligned}$$

证明 $\check{\varphi}(x)$ 总是 Y 上的单元素集。至于它是一个态射这一点，我们刚才也已经证明了 $\mathrm{E}\, \check{\varphi}(x) = \mathrm{E}\, x$，因此只剩下一个公理需要验证:

$$\begin{aligned}\delta(\check{\varphi}(x), \check{\varphi}(x')) &= \bigvee_{y} \varphi(x, y) \otimes \varphi(x', y) \\ &\geq \bigvee_{y} \varphi(x, y) \otimes \varphi(x, y) \otimes \delta(x, x') \\ &\geq \delta(x, x') \otimes \bigvee_{y} \varphi(x, y) \otimes \varphi(x, y) \\ &= \delta(x, x') \otimes \mathrm{E}\, x \\ &= \delta(x, x')\end{aligned}$$

□

注 5.3:
对于 Scott 完备性的问题而言，$\mathscr{Q}$ 不必是强的

该问题仍然有意义；但若没有额外的强性，似乎不清楚该如何进行 Scott 完备化。现在我们来讨论完备化。

定义 5.5:
我们将 $\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}$-Set 记作 $\mathscr{Q}$-Set$_f$ 的全子范畴，其对象是 Scott-完备的。

定义 5.6（可分性）:
如果映射 $x \mapsto \delta(x)$ 是单射，则称一个 $\mathscr{Q}$-集是可分的；也就是说，它满足去掉满射条件后的完备性条件。

命题 5.4:
可分性等价于外延性。

证明。由 δ-等价关系定义中的证明可立即得出。 □

5.2 Scott 完备化

不出所料，Scott 完备化将是从 $\mathscr{Q}$-Set 到全子范畴 $\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}$-Set 的一个反射函子；因此，在本小节中，我们将证明 $\mathbf{\Sigma}(X)$ 确实是 Scott 完备的，并且可以将对象赋值构造成函子性方式，从而得到全忠实子范畴包含的一个左伴随。

引理 5.2（[3]参见第 158 页）:
若 σ_x 表示 $\delta(x)$，则

$$\delta(\sigma_x, \xi) = \xi(x)$$

一个类似于米田引理的结果，其中

$$\mathbf{hom}(ɬ(x), F) \cong F(x)$$

证明。

$$\begin{aligned}
\delta(\sigma_x, \xi) &= \bigvee_y \delta(y, x) \otimes \xi(y) \\
&\leq \xi(x) \\
&= \mathrm{E}\, x \otimes \xi(x) \\
&= \delta(x, x) \otimes \xi(x) \\
&\leq \bigvee_z \delta(z, x) \otimes \xi(z) \\
&= \delta(\sigma_x, \xi)
\end{aligned}$$

□

注 5.4:
请注意，这意味着 $\delta(\sigma_x, \sigma_y) = \delta(x, y)$，因此映射 $x \mapsto \sigma_x$ pre- serves δ，从而是一个态射——事实上，它是一个正则单态射。

命题 5.5：
$\mathbf{\Sigma}(X)$ 的确是 Scott 完备的。

证明。在此证明中，我们将把 $\mathbf{\Sigma}(X)$ 的元素称为 1-单点集，并用小写字母 ξ、ψ、φ 表示；把 $\mathbf{\Sigma}\circ\mathbf{\Sigma}(X)$ 的元素称为 2-单点集，并用大写字母 Σ 等表示。

为此，我们必须证明两点：两个 1-单点集不能表示同一个 2-单点集；并且每个 2-单点集都来自某个 1-单点集。

为证明 $\xi \mapsto \sigma_\xi$ 是单射，假设 ξ 和 ψ 满足 $\sigma_\xi = \sigma_\psi$。令 $x \in X$，并据此得到

$$\xi(x) = \delta(\sigma_x, \xi) = \sigma_\xi(\sigma_x) = \sigma_\psi(\sigma_x) = \delta(\sigma_x, \psi) = \psi(x)$$

因此它们外延相等。

现在取一个 2-单点 Σ，我们将定义一个 1-单点集，希望它能表示该 2-单点；具体如下：

$$\varphi(x) = \Sigma(\sigma_x)$$

令人确信 φ 确实是 X 上的单元素集的一种方法是，σ保留了 δ，因此 $\Sigma\circ\sigma$“大致上”就是 Σ 在可表示单点集上的限制。唯一一个显然不成立的公理是严格性——我们将在以下推导之后证明这一点：

$$\begin{aligned}
\Sigma(\xi) &= \mathrm{E}\,\xi \otimes \Sigma(\xi) \\
&= \bigvee_x \xi(x) \otimes \xi(x) \otimes \Sigma(\xi) \\
&= \bigvee_x \xi(x) \otimes \delta(\sigma_x, \xi) \otimes \Sigma(\xi) \\
&\leq \bigvee_x \xi(x) \otimes \Sigma(\sigma_x) \\
&= \delta(\xi, \varphi)
\end{aligned}$$

因此，只要我们能证明严格性，就大功告成了。于是，取 $x \in X$，我们需要证明它具有如下性质：

$$\varphi(x) \otimes \bigvee_y \varphi(y) = \varphi(x)$$

显然，只要我们证明 $\mathrm{E}\ \Sigma \leq \mathrm{E}\,\varphi$ 就足够了。因为这足以说明它们确实相等；而它们相等意味着我们就可以这样论证：

$$\varphi(x) \otimes \bigvee_y \varphi(y) = \varphi(x) \otimes \mathrm{E}\,\varphi = \Sigma(\sigma_x) \otimes \mathrm{E}\,\Sigma = \Sigma(\sigma_x) = \varphi(x)$$

由于 Σ 被视为严格的。因此，我们将改为仅证明 $\mathrm{E}\,\Sigma \leq \mathrm{E}\ \varphi$。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\Sigma &= \bigvee_{\xi} \Sigma(\xi) \otimes \Sigma(\xi) \\
&= \bigvee_{\xi} \Sigma(\xi) && \text{(Strength)} \\
&= \bigvee_{\xi} \Sigma(\xi) \otimes \mathrm{E}\,\xi \\
&= \bigvee_{x} \bigvee_{\xi} \Sigma(\xi) \otimes \xi(x) \\
&= \bigvee_{x} \bigvee_{\xi} \Sigma(\xi) \otimes \delta(\xi, \sigma_x) \\
&\leq \bigvee_{x} \Sigma(\sigma_x) \\
&= \bigvee_{x} \Sigma(\sigma_x) \otimes \Sigma(\sigma_x) && \text{(Strength)} \\
&= \mathrm{E}\,\varphi
\end{aligned}
$$

□

既然已经证明 $\mathbf{\Sigma}(X)$ 确实是 Scott 完备的，现在我们必须转向相关的完备化函子。

定义 5.7:
我们将 $\mathbf{\Sigma}$ 的作用扩展为如下方式，使其作用于函数态射：

$$
f : X \to Y
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}\, f : \mathbf{\Sigma}(X) &\to \mathbf{\Sigma}(Y) \\
\xi &\mapsto \bigvee_{x \in X} \delta(f(x), \_) \otimes \xi(x)
\end{aligned}
$$

从直观上说，如果 $\xi(x)$ 衡量 x 与某个抽象点的相似程度，那么 $(\mathbf{\Sigma}\, f)(\xi)$ 衡量 y 中的一个点与该抽象点在 f 下的“像”有多接近。

命题 5.6:
根据前面的定义，我们必须证明 $\mathbf{\Sigma}\, f(\xi)$ 确实是一个单元素集；该赋值是一个态射；并且它在态射上的作用具有函子性。

证明。首先，为了记号简洁，将 $\mathbf{\Sigma}\, f(\xi)$ 记为 ξ_f。

$$\begin{aligned}
\xi_f(y) \otimes \mathrm{E}\, y &= \bigvee_x \delta(f(x), y) \otimes \xi(x) \otimes \mathrm{E}\, y \\
&= \bigvee_x \delta(f(x), y) \otimes \xi(x) \\
&= \xi_f(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_f(y) \otimes \delta(y, y') &= \bigvee_x \delta(f(x), y) \otimes \delta(y, y') \otimes \xi(y) \\
&\leq \bigvee_x \delta(f(x), y') \otimes \otimes \xi(y) \\
&= \xi_f(y')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_f(y) \otimes \xi_f(y') &= \bigvee_{x,x'} \delta(f(x), y) \otimes \delta(f(x'), y') \otimes \xi(x) \otimes \xi(x') \\
&\leq \bigvee_{x,x'} \delta(f(x), y) \otimes \delta(f(x'), y') \otimes \delta(x, x') \\
&\leq \bigvee_{x,x'} \delta(f(x), y) \otimes \delta(f(x'), y') \otimes \delta(f(x), f(x')) \\
&\leq \bigvee_{x'} \delta(f(x'), y) \otimes \delta(f(x'), y') \\
&\leq \delta(y, y')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_f(y) \otimes \bigvee_{y'} \xi_f(y') &= \bigvee_{y'} \bigvee_{x'} \xi_f(y) \otimes \delta(f(x'), y) \otimes \xi(x') \\
&= \bigvee_{x'} \xi_f(y) \otimes \delta(f(x'), f(x')) \otimes \xi(x') \\
&= \bigvee_{x'} \xi_f(y) \otimes \mathrm{E}\, x' \otimes \xi(x') \\
&= \bigvee_{x'} \xi_f(y) \otimes \xi(x') \\
&= \bigvee_x \delta(f(x), y) \otimes \xi(x) \otimes \bigvee_{x'} \xi(x') \\
&= \bigvee_x \delta(f(x), y) \otimes \xi(x) \\
&= \xi_f(y)
\end{aligned}$$

我们应当做的第二件事是证明映射 $\mathbf{\Sigma}\, f$ 是一个态射；实际上这相当容易。令 ψ_f 表示 ψ 在 $\mathbf{\Sigma}\, f$ 下的像，正如我们对 $\mathbf{\Sigma}\, f$

所做的那样。

$$\begin{aligned}
\delta(\xi_f, \psi_f) &= \bigvee_y \xi_f(y) \otimes \psi_f(y) \\
&= \bigvee_y \bigvee_{x,x'} \delta(f(x), y) \otimes \delta(f(x'), y) \otimes \xi(x) \otimes \varphi(x') \\
&\geq \bigvee_y \bigvee_x \delta(f(x), y) \otimes \delta(f(x), y) \otimes \xi(x) \otimes \varphi(x) \qquad \text{(by letting } x = x'\text{)} \\
&\geq \bigvee_x \mathrm{E}\, f(x) \otimes \mathrm{E}\, f(x) \otimes \xi(x) \otimes \varphi(x) \qquad \text{(by letting } y = f(x)\text{)} \\
&= \bigvee_x \xi(x) \otimes \varphi(x) \\
&= \delta(\xi, \varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_f(y) &\geq \xi_f(y) \otimes \bigvee_{y'} \xi_f(y') \qquad \text{(semi-cartesian)} \\
&= \bigvee_{y'} \bigvee_{x'} \xi_f(y) \otimes \delta(f(x'), y') \otimes \xi(x') \\
&\geq \bigvee_{x'} \xi_f(y) \otimes \delta(f(x'), f(x')) \otimes \xi(x') \qquad \text{(by letting } y' = f(x')\text{)} \\
&= \bigvee_{x'} \xi_f(y) \otimes \mathrm{E}\, f(x') \otimes \xi(x') \\
&= \xi_f(y) \otimes \bigvee_{x'} \xi(x') \\
&= \bigvee_x \delta(f(x), y) \otimes \xi(x) \otimes \bigvee_{x'} \xi(x') \\
&= \bigvee_x \delta(f(x), y) \otimes \xi(x) \\
&= \xi_f(y)
\end{aligned}$$

最后一个需要解决的问题是函子性。我们必须证明恒等映射被映为恒等映射，且复合得到保持。 $\mathbf{\Sigma}$恒等映射定义为

$$\begin{aligned}
[\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{id}(\xi)](x) &= \bigvee_{x'} \delta(x, x') \otimes \xi(x') \\
&\geq \mathrm{E}\, x \otimes \xi x = \xi(x) \\
&\geq \delta(x', x) \otimes \xi(x), \ \forall x'
\end{aligned}$$

因此，根据上确界的泛性质，我们得到了所需的等式:

$$(\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{id})(\xi) = \xi$$

现在，取 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{\Sigma}(f \circ g)(\xi)](z) &= \bigvee_x \delta(g \circ f(x), z) \otimes \xi(x) \\
&= \bigvee_x \bigvee_y \delta(f(x), y) \otimes \xi(x) \otimes \delta(g(y), z) \\
&= \bigvee_y \delta(g(y), z) \otimes \left(\bigvee_x \delta(f(x), y) \otimes \xi(x) \right) \\
&= \bigvee_y \delta(g(y), z) \overset{\mathbf{\Sigma} f(\xi)}{\otimes} (y) \\
&= [(\mathbf{\Sigma} g)((\mathbf{\Sigma} f)(\xi))](z) \\
&= [(\mathbf{\Sigma} g) \circ (\mathbf{\Sigma} f)](z)
\end{aligned}$$

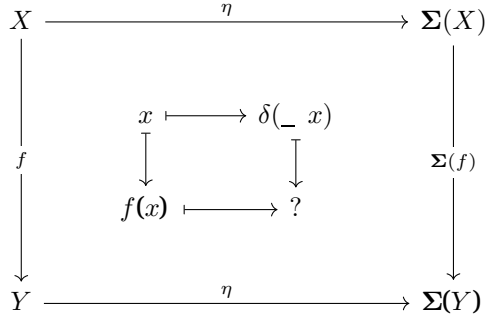
因此，我们已经证明 $\mathbf{\Sigma}$ 是一个从 $\mathscr{Q}$-Set^f 到 $\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}$-Set 的函子。 □

定理 5.3：
我们的目标是证明 $\mathbf{\Sigma}$ 确实是一个完备化，也就是说，它是 $\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}$-Set 的满子函子所对应的左伴随；由此可知，若 K 是 Scott 完备的，

$$\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}(X, K) \cong \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}(\mathbf{\Sigma}\, X, K)$$

证明。我们再次通过寻找单位和余单位来进行证明。再一次，我们将 $\mathbf{\Sigma}$ 改名为 L，并根据它们在伴随中的作用，将包含函子简称为 R。我们需要找到 η 和 ε，就像在粘合完备化证明中那样。

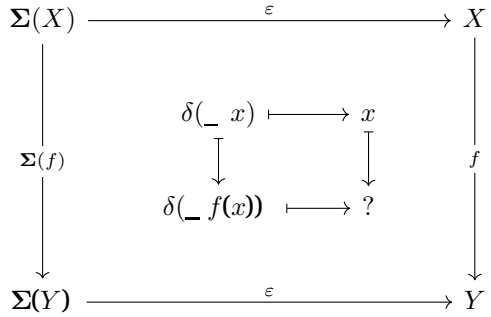
单位 η 很简单，它就是相应的单点态射 $x \mapsto \delta(\_\, x)$——我们已经知道它是一个态射，因此只需证明从 id 到 $R \circ L$ 的自然性。



$$\mathbf{\Sigma}\, f(\delta(\_\ x)) = \bigvee_{x'} \delta(\_\ f(x')) \otimes \delta(x', x) = \delta(\_\ f(x))$$

因此我们得到了自然性。需要指出的是，$\mathbf{\Sigma}\, f(\sigma_x) = \sigma_{f(x)}$ 正如上文刚刚证明的那样。

余单位也相当直接；我们从一个 Scott 完备X开始，暂且不考虑完备性并进行完备化。由于我们知道 $x \mapsto \sigma_x$ 是双射的（根据完备性的定义），且该映射保持 δ，因此我们知道 X 与 $\mathbf{\Sigma}(X)$同构。所以我们只需证明该映射是一个自然同构。在这里， ε 将一个单元素集（它总是可表示的）映射到其唯一的表示元素：



这显然是交换的。回顾一下定义，

$$\begin{aligned} \eta_X : X &\to \mathbf{\Sigma}(X) \\ x &\mapsto \delta(\_, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\eta : L &\longrightarrow L \circ R \circ L \\ (X \in \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}) &\mapsto (\xi \xmapsto{(L\eta)_X} \bigvee_x \delta(\_, \eta(x)) \otimes \xi(x)) \end{aligned}$$

正如我们从 Yoneda 类引理中所知，上式可以简化为：

$$\begin{aligned} L\eta : L &\longrightarrow L \circ R \circ L \\ (X \in \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}) &\mapsto (\xi \xmapsto{(L\eta)_X} \bigvee_x \_(x) \otimes \xi(x)) \end{aligned}$$

我们知道这不过是 $\delta(\xi)$。至于 $\underline{\varepsilon}L$，我们先回顾一下 2-单点 Σ 的表示元素是什么。它就是我们称为 φ 的东西——也就是 Σ 对可表示单点集的作用；更准确地说，是复合态射$\Sigma(\sigma)$，或者更好地说： $\Sigma \circ \eta$。

$$\varepsilon L : L \circ R \circ L \longrightarrow L$$
$$(X \in \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}) \mapsto (\Sigma \xrightarrow{(\varepsilon L)_X} \Sigma \circ \eta)$$

$$R\varepsilon : R \circ L \circ R \longrightarrow R$$
$$(X \in \mathcal{G}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}) \mapsto (\delta(\_, x) \xrightarrow{(R\varepsilon)_X} x)$$

$$\eta R : R \longrightarrow R \circ L \circ R$$
$$(X \in \mathcal{G}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}) \mapsto (x \xrightarrow{(\eta R)_X} \delta(\_, x))$$

沿着 $x\,(R\varepsilon) \circ (\eta R)$ 追踪，我们发现

$$x \xrightarrow{(\eta R)_X} \delta(\_, x) \xrightarrow{(R\varepsilon)_X)} x$$

现在，沿着 $\xi\,(\varepsilon L) \circ (L\eta)$ 追踪，我们得到

$$\xi \xrightarrow{(L\eta)_X} \delta(\_, \xi) \xrightarrow{(\varepsilon L)_X} \delta(\sigma\_, \xi)$$

同样，根据 Yoneda 类引理，这就是 $\xi(\,)$，当然它与 ξ 外延相等。因此，我们的两个复合态射等于相应的恒等态射；由此建立了伴随。

我们早已知道余单位是一个同构，但由于它是一个伴随的余单位，且该伴随的右伴随是全忠实的，因此这一点也可由此得证。

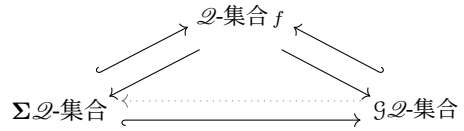
□

6 完备性条件之间的联系

定理 6.1：
设 (X, δ) 是一个外延的 $\mathscr{Q}$-集。以下条件等价：

1. (X, δ) 是 Scott 完备的。2. (X, δ) 是粘合完备的，并且对于 (X, δ) 上的每个单元素集 σ，都满足以下条件：$(*_\sigma)$ 对于每个 $x \in X$，存在 $y \in X$，使得 $\sigma(x) \leq \sigma(y) = \mathrm{E}\, y$。

我们已经提到，Scott 完备性蕴含粘合完备性；因此还存在另一个全忠实子范畴包含，构成如下三角形：



图中用灰色虚线箭头直观地提出了这样一个问题：“是否存在一个函子，作为那个孤立包含函子的左伴随？”答案不出所料，是肯定的。它由沿该方向的唯一复合态射给出。不过，这并不特别惊人，而且直接来自 hom 同构以及相关范畴是满的这一事实，等等。

更有意思的范畴性质是对 Scott 完备性的刻画；我们将在本小节中逐步展开。

6.1 Scott 完备性与关系态射

Scott 完备性与关系态射密切相关——这或许令人意外，因为迄今为止，在讨论完备性时，我们一直刻意不涉及 $\mathscr{Q}$-$\mathbf{Set}_r$ 。原因在于，单点完备性与关系态射的联系过于紧密。

定理 6.2：

$$\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r \simeq \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r$$

证明。我们将给出一个全忠实且本质满的函子；在此情形下，证明全子范畴包含是本质满的更为容易，因为它必然是全忠实的。

这就相当于为任意对象提供一个与某个 Scott 完备对象之间的同构。在这种情况下，我们有一个显而易见的候选对象，即$\mathbf{\Sigma}(X)$。定义

$$\begin{aligned} \varphi : X &\to \mathbf{\Sigma}(X) \\ (x, \xi) &\mapsto \xi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbf{\Sigma}(X) &\to X \\ (\xi, x) &\mapsto \xi(x) \end{aligned}$$

我们应该先证明它们二者都是态射，但如果读者允许我们暂且搁置这一点，我们便可以论证

$$\begin{aligned}\varphi \circ \varphi^{-1}(\xi, \psi) &= \bigvee_x \xi(x) \otimes \psi(x) \\ &= \delta(\xi, \psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} \circ \varphi(x, x') &= \bigvee_\xi \xi(x) \otimes \xi(x') \\ &\geq \delta(x, x) \otimes \delta(x, x') \\ &= \delta(x, x')\end{aligned}$$

因此，它们的复合态射逐点大于恒等态射；但我们知道，在强量子幺半群下，同态集上的逐点序实际上是离散的。所以它们实际上相等。

还需要证明，按照定义，φ 及其所谓的逆态射实际上都是态射。下面就来证明这一点。为什么外延性公理应当成立，应该显而易见：

$$\begin{aligned}\xi(x) \otimes \mathrm{E}\,\xi &= \xi(x) \otimes \bigvee_{x'} \xi(x') \\ &= \xi(x) \\ &= \xi(x) \otimes \mathrm{E}\,x\end{aligned}$$

δ 定律也自然成立：

$$\delta(x, x') \otimes \xi(x) \leq \xi(x) \qquad \text{(subset axiom)}$$

$$\begin{aligned}\delta(\xi, \psi) \otimes \xi(x) &= \delta(\xi, \psi) \otimes \delta(\sigma_x, \xi) \\ &\leq \delta(\sigma_x, \psi) \\ &= \psi(x)\end{aligned}$$

单点条件也显然成立——这取决于 $\delta(\xi, \psi)$ 的定义方式。

$$\begin{aligned}\varphi(x, \xi) \otimes \varphi(x, \psi) &= \xi(x) \otimes \psi(x) \\ &\leq \bigvee_x \xi(x) \otimes \psi(x) \\ &= \delta(\xi, \psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\xi, x) \otimes \varphi^{-1}(\xi, x') &= \xi(x) \otimes \xi(x') \qquad (\xi \text{ is a singleton}) \\ &\leq \delta(x, x')\end{aligned}$$

剩下的只需证明严格性

$$\begin{aligned}\bigvee_{\xi}\varphi(x,\xi) &= \bigvee_{\xi}\xi(x) && (\text{now let } \xi=\sigma_x)\\ &\geq \delta(x,x) = \mathrm{E}\,x\\ &\geq \xi(x)\ \forall\xi\end{aligned}$$

因此， φ 确实是严格的。现在来看 φ^{-1}:

$$\begin{aligned}\bigvee_{x}\varphi^{-1}(\xi,x) &= \bigvee_{x}\xi(x)\\ &= \mathrm{E}\,\xi\end{aligned}$$

□

定理 6.3:

$$\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f \cong \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r$$

回顾底层图函子 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$；我们提出，它在$\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}$-Set$_f$ 上的限制有一个逆态射，现将其明确给出:

$$\mathcal{F}_{\mathbb{N}} : \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r \to \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f$$

这是一个函子，它“记住”了 $\mathscr{Q}$-集之间的关系态射总是函数态射这一事实。它在对象上的作用是恒等映射。正如我们在上一小节提到的，关系态射 φ : $X \to Y$会导出一个函数态射 $\check{}\varphi$: $X \to \mathbf{\Sigma}(Y)$，其定义为 $x \mapsto \varphi(x,\_)$。

由于 Y是 Scott 完备的，它自然同构于 $\overline{\mathbf{\Sigma}}(Y)$，因此每个 $\check{}\varphi(x)$ 都对应于某个 $y_{\varphi(x)}$; 它是 y 中表示 $\check{}\varphi(x)$ 的唯一点。我们声称，这个映射是一个函数态射 $X \to Y$（显然），且它在态射上的作用具有函子性，并将其赋予 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$；我们还声称，$\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}} \restriction^{\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r}_{\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}}$-集$_f$ 的逆态射——这很难排版，所以我们就称之为 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$。

证明。这里有不少内容需要展开；形式上，若我们定义 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}(\varphi) = \varepsilon \circ \check{}\varphi$，那么这一作用既具有函子性，也使 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ 互为逆态射——其中 ε 是该伴随的余单位，它将 Scott-完备 $\mathscr{Q}$-集上的单元素集映射为其表示元素。

为简便起见，对于给定的 φ，我们将 $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}(\varphi)$记作 f_φ 。首先，注意到$\varphi(x, f_\varphi(x)) = \mathrm{E}\,x$——因为 $\varphi(x,\_) = \delta(\quad f_\varphi(x))$，且 $\mathrm{E}\,f_\varphi(x) = \mathrm{E}\,x$。显然， $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$保持恒等态射，因为

$$\begin{aligned}f_{\mathbf{id}} &= \varepsilon(x \mapsto (\_, x))\\ &= x \mapsto x\\ &= \mathbf{id}\end{aligned}$$

函子性现在可以看出成立：给定 x，考虑单元素集

$$\begin{aligned}\bigvee_y \varphi(x,y)\otimes\psi(y,\_) &\geq \varphi(x,f_\varphi(x))\otimes\psi(f_\varphi(x),\_)\\ &= \mathrm{E}\, f_\varphi(x)\otimes\psi(f_\varphi(x),\_)\\ &= \psi(f_\varphi(x),\_)\\ &\geq \psi(y,\_)\otimes\delta(f_\varphi(x),y) \qquad \text{(for any } y\text{)}\\ &= \psi(y,\_)\otimes\varphi(x,y)\end{aligned}$$

因此 $[\psi\circ\varphi](x,\_) = \psi(f_\varphi(x),\_)$，由此我们可以得出

$$f_{\psi\circ\varphi} = f_\psi \circ f_\varphi$$

我们需要证明 $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}\circ\mathcal{F}_{\mathcal{N}}(\varphi) = \varphi$ 以及 $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}\circ\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(f) = f$。我们按写下来的顺序来证明。取一个关系态射 $\varphi\colon X\to Y$，并考虑如下内容：

$$\begin{aligned}[\mathcal{G}_{\mathcal{R}}\circ\mathcal{F}_{\mathcal{N}}(\varphi)](x,y) &= [\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\varepsilon\circ\check{\varphi})](x,y)\\ &= \delta(\varepsilon\circ\check{\varphi}(x),y)\\ &= \delta(\check{\varphi}(x),\sigma_y)\\ &= \check{\varphi}(x)(y)\\ &= \varphi(x,y)\end{aligned}$$

现在取一个函数态射 $f\colon X\to Y$

$$\begin{aligned}[\mathcal{F}_{\mathcal{N}}\circ\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(f)](x) &= [\mathcal{F}_{\mathcal{N}}(\delta(f(\__1),\__2))](x)\\ &= [f(\__1)](x)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

因此，我们已经证明这些复合确实是恒等映射，并且 $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ 证明了这一事实：$\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}$-$\mathsf{Set}_r \cong \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}$-$\mathsf{Set}f$。 □

引理 6.1：

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}}\circ\mathbf{\Sigma}\cong\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$$

其中 $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}\circ\mathbf{\Sigma}$ 实际上应当是 $\mathbf{\Sigma}$ 与 $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ 在 $\mathbf{\Sigma}$的像所构成的全子范畴上的适当限制的复合。或者，也可以写作$\mathcal{G}_{\mathcal{R}}\circ i\circ\mathbf{\Sigma}_\circ$

证明。我们必须为每个 X 提供一个 α_X，使得

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & i\circ\mathbf{\Sigma}(X)\\ {\scriptstyle \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_{\mathcal{R}}\circ i\circ\mathbf{\Sigma}(f)}\\ Y & \xrightarrow{\alpha} & i\circ\mathbf{\Sigma}(X)\end{array}$$

这就简化为寻找一个 α_X，使得下图交换，从而说明我们在引理的“简洁”表述中没有精确定义是合理的：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{\Sigma}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_{\mathcal{R}} \circ \mathbf{\Sigma}(f)} \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{\Sigma}(X) \end{array}$$

如果接着令 α 为我们已知存在于 X 和 $\mathbf{\Sigma}(X)$ 之间的关系同构，那么自然性很可能会奇妙地成立。我们需要验证

$$\alpha \circ [\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(f)] = [\mathcal{G}_{\mathcal{R}} \circ \mathbf{\Sigma}(f)] \circ \alpha$$

我们通过取巧来做到这一点，转而证明

$$\alpha \circ [\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(f)] \geq [\mathcal{G}_{\mathcal{R}} \circ \mathbf{\Sigma}(f)] \circ \alpha$$

然后我们记得，对于关系态射，$\leq$ 是 $=$，因为 $\mathcal{Q}$ 是强的。

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}_{\mathcal{R}} \circ \mathbf{\Sigma}(f)] \circ \alpha(x, \psi) &= \bigvee_{\xi} \xi(x) \otimes \delta(\mathbf{\Sigma}\, f(\xi), \psi) \\ &= \bigvee_{\xi} \xi(x) \otimes \bigvee_{y} \bigvee_{x} \delta(f(x), y) \otimes \xi(x) \otimes \psi(y) \\ &= \bigvee_{y} \bigvee_{x'} \bigvee_{\xi} \xi(x) \otimes \delta(f(x'), y) \otimes \xi(x') \otimes \psi(y) \\ &\leq \bigvee_{y} \bigvee_{x'} \delta(x, x') \otimes \delta(f(x'), y) \otimes \psi(y) \\ &\leq \bigvee_{y} \bigvee_{x'} \delta(f(x), f(x')) \otimes \delta(f(x'), y) \otimes \psi(y) \\ &\leq \bigvee_{y} \delta(f(x), y) \otimes \psi(y) \\ &= \alpha \circ [\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(f)](x, \psi) \end{aligned}$$

□

现在我们准备好给出一个更范畴论的 Scott 完备性的描述，仅涉及可表函子等。

定理 6.4：
令 $\upharpoonright \mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ 表示 $\mathcal{Q}$-$\mathbf{Set}_r$ 与 $\mathcal{Q}$-$\mathbf{Set}_f$ 的预层范畴之间的函子，如下所示：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f & \xrightarrow{\mathcal{G}_{\mathcal{R}}} & \mathcal{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{PSh}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{PSh}} \\ \mathbf{PSh}(\mathcal{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f) & \xleftarrow[\upharpoonright \mathcal{G}_{\mathcal{R}}]{} & \mathbf{PSh}(\mathcal{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r) \end{array}$$

通过与函子 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ 复合来调整预层的定义域。于是

$$\left[よ_f(X) \cong よ_r(X) \upharpoonright \mathcal{G}_{\mathbb{R}}\right] \iff X \text{ is Scott-complete}$$

证明。若 X 确实完备，那么我们知道，以下是 Y中的自然同构

$$\begin{aligned} よ_f(X) &= よ_f(R(X)) \\ &\cong よ_f(X) \circ \mathbf{\Sigma} && \text{(adjunction)} \end{aligned}$$

而且，由于两项现在都完备，

$$= \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(\mathbf{\Sigma}(\_), X)$$

我们也知道， $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ 是子范畴 $\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}$-Set$_f$与 $\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}$-Set$_r$之间的同构；特别地，我们有

$$\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r(\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(\__1), \mathcal{G}_{\mathbb{R}}(\__2)) \cong \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(\__1, \__2)$$

若固定 $\__2 = X$，我们可以忽略第二个坐标上的 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ （因为它在那里只是为了作用于态射），从而得到

$$\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r(\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(\_), X) \cong \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(\_, X)$$

回到我们的同构链：

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(\mathbf{\Sigma}(\_), X) &\cong \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r(\mathcal{G}_{\mathbb{R}} \circ \mathbf{\Sigma}(\_), X) \\ &= よ_r(X) \circ \mathcal{G}_{\mathbb{R}} \circ \mathbf{\Sigma} \end{aligned}$$

要使我们的论断成立，我们需要一个自然同构 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{G}_{\mathbb{R}} \circ \mathbf{\Sigma}$——读者不妨记住，这个同构已在前面的一个引理中得到证明。然后我们可以再接上最后一个同构：

$$よ_r(X) \circ \mathcal{G}_{\mathbb{R}} \circ \mathbf{\Sigma} \cong よ_r \circ \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$$

接下来，我们可以将所有内容整合起来，并证明存在某个稍有扭曲的自然同构

$$よ_f(X) \cong よ_r \circ \mathcal{G}_{\mathbb{R}} = よ_r(X) \upharpoonright \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$$

反向蕴含幸而更容易；假设确实存在如上的同构；我们应当证明 X 从一开始就是 Scott 完备的。

$$\begin{aligned} よ_f(i \circ \mathbf{\Sigma}(X)) &\cong よ_r(i \circ \mathbf{\Sigma}(X)) \circ \mathcal{G}_{\mathbb{R}} && \text{(just proven)} \\ &\cong よ_r(X) \circ \mathcal{G}_{\mathbb{R}} && (X \cong_r i \circ \mathbf{\Sigma}(X)) \\ &\cong よ_f(X) && \text{(hypothesis)} \end{aligned}$$

由此，根据米田引理，我们得到

$$\mathbf{\Sigma}(X) \cong_f X$$

但 Scott 完备性在函数同构下保持不变。因此， X 起初就是 Scott 完备的，由此证明结束。 □

接下来，我们给出一个有用的方法，通过对象的可表示函子来证明 Scott 完备性。具体而言：

定理 6.5：

$$X \text{ is Scott-complete} \iff \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(\_, X) \cong \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(\mathbf{\Sigma}(\_), X)$$

这里我们又写得稍微不够严谨，实际想表达的是， $\mathscr{Q}$-Set$_f$($i \circ \mathbf{\Sigma}(\_)$ X) 与 $\mathscr{Q}$-Set$_f$($\_$ X) 同构。我们可以将其改写为

$$よ_f(X) \cong よ_f(X) \circ i \circ \mathbf{\Sigma}$$

证明。Scott 完备性蕴含该同构的存在，因为作为 $\mathscr{Q}$-Set$_f$ 中的一个对象， X 就是 $i(X)$，其中 X 是 $\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}$-Set 中的一个对象，因此可以应用伴随：

$$\begin{aligned}
\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(_, X) &= \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(_, i(X)) \\
&\cong \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}(\mathbf{\Sigma}(_), X) \\
&= \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(i \circ \mathbf{\Sigma}(_), i(X)) \\
&= \mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(\mathbf{\Sigma}(_), X)
\end{aligned}$$

现在，虽然有了该同构，却无法保证 X 是完备的，因此我们必须找到足够的理由来说明 X 是完备的。

$$\begin{aligned}
よ_f(X) &\cong よ_f(X) \circ i \circ \mathbf{\Sigma} \\
&= \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_f(\mathbf{\Sigma}(_), X) \\
&\cong \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r(\mathcal{G}_{\mathbb{R}} \circ \mathbf{\Sigma}(_), \mathcal{G}_{\mathbb{R}}(X)) \\
&= \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r(\mathcal{G}_{\mathbb{R}} \circ \mathbf{\Sigma}(_), X) \\
&\cong \mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}_r(\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(_), X) \\
&= よ_r(X) \restriction \mathcal{G}_{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

□

命题 6.1：

上述定理的真正意义在于， i 在 $\mathbf{\Sigma} \dashv i$ 中不仅保持极限，而且实际上会创造极限。

证明。取一个在 $\mathbf{\Sigma}\mathscr{Q}$-Set 上的图 D ，

$$\begin{aligned}
よ_f(\lim i \circ D) &\cong \lim よ_f(i \circ D) \\
&\cong \lim よ(i \circ D) \circ i \circ \mathbf{\Sigma} \\
&\cong よ(\lim i \circ D) \circ i \circ \mathbf{\Sigma}
\end{aligned}$$

这表明，完备 $\mathcal{Q}$-sets 的外部极限（即在 $\mathcal{Q}$-Set$_f$ 中）本身也是完备的。

由于任意一个以 D 为底的锥——例如以 X 为顶点的锥——也会是 $i \circ D$ 的锥（因为 i 只是一个包含映射，它们实际上就是同一个锥）——根据泛性质，恰好存在一个态射 $\lim i \circ D \to X$，使一切交换。

既然外部极限现在已知是完备的，那么根据必然性，它也是 $\mathbf{\Sigma}\mathcal{Q}$-Set 中的极限。因此，$i$ 既保持其定义域中的所有极限，也反映其陪域中的所有极限。□

参考文献

[1] Alvim、J. G、Mendes、C. de A. 和 Mariano、H. L.，《$\mathcal{Q}$-Set 与朋友：范畴构造及其性质》。2023 年。[2] F. Borceux 和 G. van den Bossche，《量化格及其层》。载于：Order 3（1986），第 61–87 页。[3] Francis Borceux，《范畴代数手册：第 3 卷，层理论》。数学及其应用百科全书。剑桥：剑桥大学出版社，1994 年。[4] Marcelo E Coniglio 和 Francisco Miraglia，《非交换拓扑与量化格》。载于：Studia Logica 65.2（2000），第 223–236 页。[5] Michael P Fourman 和 Dana S Scott，《层与逻辑》。载于：《层的应用》。施普林格，1979 年，第 302–401 页。[6] Hans Heymans 和 Isar Stubbe，《富集范畴寓言范畴的格罗滕迪克量子格范畴》。载于：《比利时数学学会公报——Simon Stevin》19.5（2012），第 859–888 页。[7] Ulrich H¨ohle，《幺半闭范畴、弱拓扑斯与广义逻辑》。载于：Fuzzy Sets and Systems 42.1（1991）。数学及其应用百科全书，第 15–35 页。ISSN：0165-0114。DOI：https://doi.org/10.1016/0165-0114(91)90086-6。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165011491900866。[8] Francisco Miraglia 和 Ugo Solitro，《右侧幂等量子格上的层》。载于：IGPL逻辑期刊 6.4（1998），第 545–600 页。[9] C. J. Mulvey 和 M. Nawaz，《量子格：量子集》。载于：《非经典逻辑及其在模糊子集中的应用：模糊集理论数学基础手册》。Ulrich H¨ohle 和 Erich Peter Klement 编。多德雷赫特：施普林格·荷兰，1995 年，第 159–217 页。ISBN：978-94-011-0215-5。DOI：10.1007/978-94-011-0215-5_8。URL：https://doi.org/10.1007/978-94-0

[10] Chris Mulvey。《J. 1986》。载于：Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. II 12（），第 99–104 页。[11] nLab 量化格词条。https://ncatlab.org/nlab/show/quantale。访问日期：2022年10月25日。[12] Pedro Resende。《群胚层作为量化代数层》。载于：纯粹与应用代数杂志 216.1（2012），第 41–70 页。

[13] David Reyes 和 Pedro H. Zambrano。《余量子格值逻辑》。载于：arxiv 预印本，https://arxiv.org/abs/2102.06067（2021）。[14] K.I. Rosenthal。《量子格及其应用》。Pitman 数学研究笔记丛书。朗文科技出版社，1990年。 ISBN: 9780582064232。URL: https://books.google.com.br/books?id=PrkrAAAAYAAJ。[15] Ana Luiza Ten´orio、Caio de Andrade Mendes 和 Hugo Luiz Mariano。《引入交换半笛卡尔量子格上的层》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2204.08351（2022）。[16] R. F. C. Walters。《层与柯西完备范畴》。载于：Cahiers de Topologie et G´eom´etrie Diff´erentielle Cat´egoriques 22.3（1981），第 283–286 页。[17] David N. Yetter。《量子格与（非交换）线性逻辑》。载于：Journal of Symbolic Logic 55.1（1990），第 41–64 页。 DOI: 10.2307/2274953。