arXiv:2302.03696v1 [math.OA] 7 Feb 2023

算子空间张量范数

JAVIER ALEJANDRO
CHAVEZ-DOMINGUEZ、VERONICA DIMANT 和 DANIEL GALICER

Abstract. 从张量积视角出发的研究丰富了泛函分析以及数学和物理学的其他重要领域。算子空间领域显然也不例外。本文旨在开启算子空间张量积与张量范数系统理论的发展，并探讨它们与相应映射理想之间的相互作用。基于巴拿赫空间中的张量积理论，我们在算子空间框架中给出了相应的自然定义。这一理论并非对经典情形已有成果的简单移植；在许多情况下，还需要新的见解、技巧、思路或假设。因此，与经典理论相比，这一理论呈现出显著差异。

Contents

1. 引言 2 2. 基本定义 7 2.1. 算子空间张量范数的定义 8 2.2. 张量范数的基本性质 10 2.3. Schatten 空间及其向量值版本 10 2.4. 直和 10 2.5. 嵌入与投影 11 2.6. 算子空间张量范数的例子 12 2.7. 一些常用记号 18 2.8. 算子逼近性质 18 2.9. 与巴拿赫空间情形的相关差异 18 3. 有限包与余有限包 20 4. 五个基本引理 24 4.1. 逼近引理 24 4.2. 延拓引理 25 4.3. 嵌入引理 28

2020年数学学科分类。主要分类：47L25、46M05、46B28。次要分类：46L06。关键词和短语：算子空间、张量范数、映射理想。第一作者获得美国国家科学基金会资助（DMS-1900985），部分支持本研究。第二作者获得 CONICET 的 PIP 11220200101609CO 和 ANPCyT 的 PICT 2018-04104 资助，部分支持本研究。第三作者获得 CONICET-PIP 11220200102366CO 和 ANPCyT 的 PICT 2018-4250 资助，部分支持本研究。

4.4. 稠密性引理 29 4.5. $\mathscr{OS}_p$-局部技巧引理 30 5. 对偶算子空间张量范数 30 6. 完全有界逼近性质 38 7. 映射理想 45 8. 极大算子空间映射理想 54 9. 极小算子空间映射理想 65 10. 完全投射和完全内射算子空间张量范数 72 10.1. 完全内射包 74 10.2. 完全投射包 77 11. 与完全内射/投射包相关的映射理想及可达性 84 12. 自然算子空间张量范数 91 12.1. proj 族 97 12.2. min 族 101 12.3. 双侧自然算子空间张量范数 102 13. 结论与一些开放问题 105 参考文献 107

1. Introduction

20世纪30年代，von Neumann 与 Murray 合作启动了“数学量子化计划”，旨在构建积分理论的算子版本。他们取得了成功，其核心思想是用希尔伯特空间上有界算子构成的 $*$-代数来取代函数空间。这为“非交换分析”开启了漫长的探索之路，最终发展成如今所称的算子空间理论。在这条探索之路上，早在该理论正式确立之前，许多如今在这一框架中颇具代表性的概念（例如完全有界映射）就已在 C^*-代数的背景下被提出。

算子空间是一个带有额外“矩阵范数结构”的巴拿赫空间 X：除了 X 上通常的范数外，对于所有由 X 中元素构成的 M_n 矩阵空间 $n \times n$，我们还定义了范数（通常称为矩阵层级），并要求这些范数满足某些一致性条件。它与算子代数的联系源于这样一个事实：当 X 是希尔伯特空间 H 上有界线性算子代数 $\mathcal{B}(H)$ 的一个子空间时，通过 $M_n(\mathcal{B}(H))$ 与 $\mathcal{B}(H^n)$ 之间的识别，可以在 $M_n(X)$ 上得到一个典范范数。这一范畴中的自然态射不再只是有界映射，而是完全有界映射：它们必须在所有矩阵层级上都一致有界。因此，算子空间是巴拿赫空间的一种量子化或非交换版本，由此产生的理论不仅在数学上颇具吸引力，也天然适用于

量子物理学中的应用。算子空间的系统研究始于 Ruan 的工作，随后主要由 Effros 和 Ruan、Blecher 和 Paulsen、Pisier 以及 Junge 深入发展（参见专著 [Jun96、Pis98、BLM04、ER00、Pis03] 及其中的参考文献）。算子空间常常为发展非交换分析的诸多领域提供了恰当的框架。

研究巴拿赫空间经典理论在多大程度上能够推广到非交换背景，是很自然的课题，多年来对此已有广泛研究。尽管有些性质确实能够保留，但许多性质并非如此，而这些差异正是新理论如此有趣且丰富的原因之一。即使对于那些确实能够推广的性质，其证明往往也有所不同，并且需要发展新的工具。本专著的主要目标正是沿着这一思路迈出第一步，系统地构建算子空间情形下张量积与张量范数的完整理论，并研究其与相应映射理想理论之间的联系。

值得注意的是，算子理想与张量范数都推动了算子空间情形下的重要发展。核、积分、可和等算子理想的非交换版本在例如 [ER00、Pis98、Jun96、EJR00、JP10]，中发挥了重要作用；算子空间的各种特定张量范数（尤其是 Haagerup 张量范数）也发挥了重要作用（关于这一点的简要综述，见 [BLM04，第 1 节。5] ）。

Blecher 和 Paulsen [BP91] 证明了，巴拿赫空间张量范数的部分初等和基础理论可以推广到算子空间，从而开启了算子空间的“张量范数计划”，该计划后来在 [Ble92b] 中得到进一步发展。然而，按照 [DF93] 意义下的算子理想和张量范数的许多抽象工具，似乎尚未得到研究。此外，尽管专家们清楚地知道，存在一些障碍，使得我们不可能将经典张量积理论完整地转移到算子空间情形，但究竟哪些部分可以转移、哪些部分不能转移，却尚未得到明确阐述。因此，我们将重点考察经典理论在多大程度上可以得到转移。在许多情形下，情况并非如此；此时，关于算子空间结构或所涉及张量范数的附加假设确实是必要的。局部自反性就是一个很好的例子：由于所有巴拿赫空间都具有这一性质，而并非所有算子空间都具有这一性质，因此众所周知，经典结果的算子空间版本通常需要将局部自反性作为附加假设。然而，就张量范数而言，事实证明，在某些情况下，只要张量范数满足一个额外条件，我们仍然可以得到某些经典结果的算子空间版本，而无需要求局部自反性。

尽管算子空间理论有其独特之处，经典理论仍将作为我们的参照和路线图，帮助我们获得并发展张量范数理论的非交换版本。因此，现在让我们简要回顾并概述经典理论的发展历程。张量积于三十年代末随着 Murray、von Neumann 和 Schatten 的研究进入泛函分析领域，但是真正揭示张量积丰富性质的第一人是 Grothendieck

。他的著名论文“R ´esum ´e de la th ´eorie m ´etrique des produits tensoriels topologiques” [Gro53] 奠定了我们今天所称“局部理论”的基础——也就是通过有限维子空间来研究巴拿赫空间——并展示了张量积在赋范空间理论中的重要性。这一切帮助他建立了一套成果丰硕的对偶性理论。

如今，“R ´esum ´e”被视为该领域的奠基性著作，但这部杰作多年来大多鲜为人知。直到六十年代末，它才开始受到科学界更多重视。Lindenstrauss 和 Pe lczy´nski [LP68] 指出了绝对 p-可和算子理论中的一些重要联系与应用，并将 Grothendieck 以某些张量范数表述的结果转化为算子理想的性质。另一方面，几乎与此同时，Pietsch（及其耶拿学派）发展了适用于巴拿赫空间类的算子理想一般理论，但并未使用张量范数及其语言。Pietsch 于七十年代末出版的著作《算子理想》 [Pie78],使这一理论成为巴拿赫空间理论的核心研究主题之一。

当时，泛函分析学家通常更倾向于使用算子理想的语言，而非张量积的语言，因此前者受到更多关注。八十年代，随着 Pisier 的开创性工作 [Pis83, Pis86], 的问世，巴拿赫空间中张量积的理论得到进一步发展并广泛应用；该工作展示了这些工具的实用价值。

随着时间的推移，张量范数理论本身逐渐发展成为一个引人入胜的领域。Defant和Floret在其著名专著《张量范数与算子理想》[DF93], 中明确指出，张量积理论与算子理想理论实为一体两面。他们的著作影响深远：如今，作者们会不加区别地使用这两种术语体系。其他关于巴拿赫空间张量积的著作也采用了同样的方法 [Rya02, DFS08]。

正如 [DF93], 所述：“如果同时研究这两种理论，即张量范数理论和范数算子理想理论，那么两者都会更容易理解，也会更加丰富。”有鉴于此，某些问题借助 Pietsch 提出的范畴论视角，或 Grothendieck 关于张量积的思想循环，会更容易处理。本著作旨在将上述两种平行视角的优势引入算子空间情形。如上所述，理想和张量范数这两种方法在算子空间文献中都曾被反复采用，但二者之间联系的系统性探索尚付阙如。值得一提的是，本著作并非要成为像 [DF93] 那样的全面专著。我们的目标要谦逊得多：启动一项研究计划，让算子空间共同体的贡献能够随着时间推移不断丰富其内容。因此， [DF93] 中涉及的许多主题都未予收录。本专著还包含一些文献中尚未出现的预期结果，以及一些没有对应结论或与巴拿赫空间理论有所不同的新见解。

本手稿的组织结构如下。第2节专门介绍背景材料。我们将规定一些记号，给出本手稿全文都会用到的基本定义（尤其说明我们所说的算子空间张量范数，或算子空间张量范数，具体指什么），并介绍一些已知的算子空间张量范数示例。此外，我们还将引入一类新的 Haagerup 型张量范数，它们是 λ-张量积的示例（见 [DW14、Wie09]）。另外，我们会着重说明算子空间框架与巴拿赫空间框架之间若干重要差异，以及这些差异对两种情形下张量范数研究的影响。

在第3节中，我们讨论有限生成和余有限生成算子空间张量范数的概念。前者实质上是指可以利用有限维子空间逼近张量范数；后者则是指可以利用有限余维子空间上的商空间来逼近它。我们还定义了给定算子空间张量范数的有限包和余有限包。

在第4节中，我们介绍算子空间情形下的“五个基本引理”（参见 [DF93] 中的第13节）。它们分别是逼近引理、延拓引理、嵌入引理、稠密性引理和 $\mathcal{L}_p$-技巧引理。与经典情形不同，为了证明其中一些结果，我们还需要局部自反性等较强的假设。不过，对于 λ-算子空间张量范数，这一额外假设往往并非必要。

在第 5 节中，我们讨论对偶张量范数，并发展了算子空间版本的对偶定理。我们还引入右可达和左可达张量范数，并证明任意 λ-算子空间张量范数都是可达的。此外，为了证明一些对偶关系，我们定义了局部可达性的概念；它是可达性的较弱形式，涉及局部自反算子空间。

在第6节中，我们讨论完全度量逼近性质和完全有界逼近性质，并将这些性质与 $B_{E'\otimes_{\min}F}$in $B_{\mathrm{CB}(E,F)}$ 的倍数的弱稠密性联系起来。此外，我们还考察一种弱完全有界逼近性质，它通过投影张量范数与最小算子空间张量范数之间的对偶性，给出了精确的刻画。

在第7节中，我们讨论映射理想的概念（定义见 [ER00，第12.2]节），并介绍文献中已有研究的一些例子。为了保留巴拿赫空间概念的核心，并使其与张量范数保持自然联系，我们必须略微加强 [ER00，第12.2]节中映射理想的定义，并增加一个额外条件。此外，我们还介绍了一些典型构造：给定映射理想的单射/满射包、对偶映射理想，并给出它们的一些性质。

第8节和第9节讨论极大映射理想与极小映射理想及其表示定理。顾名思义，与给定张量范数相关的极大理想与极小理想，分别是在有限维空间上一致的包含映射意义下最大的和最小的理想。极大映射理想的表示定理说明了如何将该理想视为某个张量积的对偶。再次，

此处需要局部自反性的假设，才能得到完整的刻画。因此，我们证明一个 *Embedding Theorem*（它给出了从张量积到映射理想的自然完全等距嵌入），并说明对偶理想和伴随理想如何通过其相关张量范数来描述。对于极小理想，表示定理给出了从张量积到映射理想的自然完全商映射。因此，从某种意义上说，这两个定理（分别针对极大理想和极小理想）建立了映射理想与张量积之间的联系。

在第10节中，我们给出算子空间张量范数的右、左完全内射包和完全投射包的定义。我们考察它们的一些有趣性质，并探讨它们何时是有限生成的。此外，我们定义了（双侧）完全内射包和完全投射包，并证明在这两种情形下，左、右过程可交换。

我们在第 11 节证明，与巴拿赫空间情形不同，要使对偶性与内射包／投射包之间具有通常的关系，张量范数必须具有可达性。要将范数的左（或右）内射包与映射理想的满射（分别为内射）包联系起来，也需要可达性。基于经典理论，我们还给出了映射理想的可达性定义。正如预期，右可达的有限生成张量范数与右可达映射理想相关联；但令人意外的是，这一结果的左侧版本并不成立。我们发现，左可达的算子空间张量范数所对应的映射理想可能并非左可达（尽管我们在命题 11.12 中证明，在这种情况下，该映射理想确实具有较弱形式的左可达性）。

第12节讨论 Grothendieck 意义下自然范数的结构。我们证明，巴拿赫空间理论中关于内射包与投射包之间的等价关系或不等式的一些结果，在这一新情形下仍然成立，但整体图景无疑有着实质性的不同。在经典理论中，格罗滕迪克不等式（例如，该不等式意味着一个张量范数不可能同时是内射的和投射的）对自然张量范数的描述有着重要影响。一个既是内射的又是投射的 Haagerup 张量范数的存在表明，算子空间情形绝不可能只是经典情形的简单翻译。我们用术语 proj *family* 表示：对范数 proj 进行有限次左侧或右侧内射/投射包运算后所得范数的集合。类似地，我们定义 min *family*。不同于经典情形，这些族并不交织：proj 族中的每个成员都支配 min 族中的任意成员。我们给出了这两个族的不完整图景，证明了一些支配关系和非等价关系，并留下了关于它们的大量开放问题。另一方面，对于由对 min 或 proj 应用双侧包运算（内射或投射）得到的所有自然范数，我们完整地描述了其列表。准确地说，该列表由六个算子空间张量范数组成。同样，这与巴拿赫空间情形不同，后者实际上有四个（见第12.3节）。

2. Basic definitions

我们只假定读者熟悉算子空间的基本理论，尽管也会回顾一些初等定义。著作 [Pis03] 和 [ER00] 是这一主题的优秀参考文献。我们的记号与 [Pis98, Pis03]中的记号十分接近。出于技术原因，不同于该领域的一般文献，我们不假定算子空间是完备的。因此，为避免混淆，我们选择将其称为赋范算子空间（不假定完备性时）和巴拿赫算子空间（要求完备性时）。字母 E、 F 和 G始终表示赋范算子空间，即带有我们现在将要解释的矩阵层级附加结构的赋范向量空间。

通常， $M_n(E)$ 表示由 E 中元素构成的 $n \times n$ 矩阵集合，以及 $a \in M_{n,\ m}$ ($n \times m$ 阶复标量矩阵)， $\|a\|$ 表示其作为从 ℓ_2^m 到 ℓ_2^n 的算子时的范数。

给定 $x = (x_{i,\ j}) \in M_n(E)$ 和 $y = (y_{k,\ l}) \in M_m(E)$，我们将 $x \oplus y \in M_{n+\ m}(E)$ 视为矩阵 $x \oplus y = \begin{pmatrix} (x_{i,\ j}) & 0 \\ 0 & (y_{k,\ l}) \end{pmatrix}$.

定义 2.1. 若对每个 n，都存在定义在 $M_n(E)$ 上的范数 $\|\cdot\|_n$，满足：则称 E 为赋范算子空间。

M1 $\|x \oplus y\|_{M_{n+m}(E)}$ =最大算子空间$\big\{\|x\|_{M_n(E)},\ \|y\|_{M_m(E)}\big\}$，对所有 $x \in M_n(E)$ 和 $y \in M_m(E)$ 均成立。**M2** $\|axb\|_{M_n(E)} \le \|a\| \cdot \|x\|_{M_m(E)} \cdot \|b\|$，对所有 $x \in M_m(E)$、$a \in M_{n,\ m}$和 $b \in M_{m,\ n}$ 均成立。

若 H 是希尔伯特空间，且 $E \subset \mathcal{B}(H)$ 是子空间，则通过识别 $M_n(\mathcal{B}(H)) = \mathcal{B}(H^n)$，可在 $M_n(E)$ 上自然地定义一个范数，从而赋予 E 赋范算子空间结构。另一方面，根据 Ruan表示定理，对于任意算子空间 E ，都存在一个希尔伯特空间 H 以及一个包含映射$E \subset \mathcal{B}(H)$，该映射在所有矩阵层级上都是等距同构。

每个线性映射 $T\colon E \to F$ 都会对每个 $n \in \mathbb{N}$ 诱导一个线性映射$T_n\colon M_n(E) \to M_n(F)$（称为 T 的放大），其定义如下：

$$T_n(x) = (T(x_{ij}))\,,\ \text{for all } x = (x_{ij}) \in M_n(E).$$

T 的完全有界范数定义为

$$\|T\|_{\mathrm{cb}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big\{\|T_n(x)\|_{M_n(F)} :\ \|x\|_{M_n(E)} \le 1\big\}.$$

若 $\|T\|_{\mathrm{cb}}$ 有限，则称 T 是完全有界的，并将从 E 到 F 的完全有界映射空间记为 $\mathrm{CB}(E,F)$。该空间是一个算子空间，其结构由识别 $M_n(\mathrm{CB}(E,F)) = \mathrm{CB}(E, M_n(F))$ 给出。

如果每个 $T_n\colon M_n(E) \to M_n(F)$ 都是等距同构，我们就称 T 为完全等距，并用 $E = F$ 表示 E 与 F 完全等距同构。

对偶空间的算子空间结构 E' 源于识别$M_n(E') =$ 完全有界算子(E, M_n)。矩阵在 $M_n(E')$ 中的范数也可以通过计算

矩阵配对 $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ 来计算： $M_n(E)\times M_n(E')\to M_{n^2}$，其中 $\langle\langle(x_{ij}),(\varphi_{kl})\rangle\rangle=(\varphi_{kl}(x_{ij}))$。更准确地说，

$$\|(\varphi_{kl})\|_{M_n(E')}=\sup\left\{\|\langle\langle(x_{ij}),(\varphi_{kl})\rangle\rangle\|_{M_{n^2}}:\|(x_{ij})\|_{M_n(E)}\le 1\right\}.$$

给定一个双线性映射 $\phi: E\times F\to G$，我们将 $\phi_n: M_n(E)\times M_n(F)\to M_{n^2}(G)$ 记为如下定义的映射，其中对每个 $n\in\mathbb{N}$:

$$\phi_n(v,w)=(\phi(v_{ij},w_{kl}))\,,\ \text{for all } v=(v_{ij})\in M_n(E), w=(w_{kl})\in M_n(F).$$

当满足以下条件时，我们称 ϕ 是联合完全有界的:

$$\|\phi\|_{\mathrm{jcb}}\equiv\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\phi_n\|<\infty.$$

所有从 $E\times F$ 到 G 的联合完全有界双线性映射构成的空间 $\mathbf{JCB}(E\times F,G)$，通过以下识别赋予算子空间结构:

$$M_n\left(\mathrm{JCB}(E\times F,G)\right)=\mathrm{JCB}\left(E\times F,M_n(G)\right).$$

ϕ 的另一个自然伴随映射是双线性映射 $\phi_{(n)}: M_n(E)\times M_n(F)\to M_n(G)$，它与矩阵乘积相关，并定义为:

$$\phi_{(n)}(v,w)=\left(\sum_{k=1}^{n}\phi(v_{ik},w_{kl})\right),\ \text{for all } v=(v_{ij})\in M_n(E), w=(w_{kl})\in M_n(F).$$

如果满足以下条件，则称双线性映射 ϕ 是乘法有界的:

$$\|\phi\|_{\mathrm{mb}}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\phi_{(n)}\|<\infty.$$

同样，对于从 $E\times F$ 到 G 的所有乘法有界双线性映射构成的空间 $\mathbf{MB}(E\times F,G)$，通过以下识别赋予其算子空间结构:

$$M_n\left(\mathrm{MB}(E\times F,G)\right)=\mathrm{MB}\left(E\times F,M_n(G)\right).$$

2.1. 算子空间张量范数的定义。我们首先回顾算子空间理论中最常见的三种张量范数的定义：最小张量范数、投射张量范数和 Haagerup 张量范数。

$u\in M_n(E\otimes F)$ 的算子空间注入张量范数（也称为最小张量范数）定义为

$$\min(u)=\sup\{\|(f\otimes g)_n(u)\|:f\in M_p(E'),g\in M_q(F'),\|f\|\le 1,\|g\|\le 1\}\tag{2.1}$$

$u\in M_n(E\otimes F)$ 的算子空间投射张量范数定义为

$$\mathrm{proj}(u)=\inf\{\|a\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|\cdot\|b\|\},\tag{2.2}$$

其中，下确界取遍 $u=a(x\otimes y)b$ 的所有表示形式，其中 $x\in M_p(E)$、$y\in M_q(F)$、$a\in M_{n,\,p\cdot q}$, $b\in M_{p\cdot q,\ n}$，对于某些 $p,q\in\mathbb{N}$.

$u\in M_n(E\otimes F)$ 的 Haagerup 张量范数定义为

$$h(u)=\inf\{\|x\|\cdot\|y\|:u=x\odot y,x\in M_{n,r}(E),y\in M_{r,n}(F),r\in\mathbb{N}\},\tag{2.3}$$

其中 $\odot$表示标准矩阵乘积。具体而言，

$$x \odot y = \left(\sum_{k=1}^{r} x_{ik} \otimes y_{kj} \right)_{i,j}.$$

上述三个著名的张量范数可以归纳为以下概念。

在所有赋范算子空间组成的类 ONORM 上，算子空间交叉范数 α 是一种赋值：对每一对赋范算子空间 (E, F)，赋予一个赋范算子空间 $E \otimes_\alpha F$，使得 $E \otimes_\alpha F$ 是代数张量积$E \otimes F$，并且在 $E \otimes F$ 上带有矩阵范数结构，记作 α_n 或$\|\cdot\|_{\alpha_n}$，且满足

$$\alpha_{nm}(x \otimes y) = \|x\|_{M_n(E)} \cdot \|y\|_{M_m(F)} \text{ for every } x \in M_n(E), y \in M_m(F). \tag{2.4}$$

这意味着恒等映射 $E \otimes_{\mathrm{proj}} F \to E \otimes_\alpha F$ 是完全压缩的[BP91，定理 5.5]。此外，如果恒等映射 $E \otimes_\alpha F \to E \otimes_{\min} F$ 也是完全压缩的，我们就称 α 是合理的。注意，如果映射$E \otimes_{\mathrm{proj}} F \to E \otimes_\alpha F$和 $E \otimes_\alpha F \to E \otimes_{\min} F$都是完全压缩的，那么显然可得 (2.4)。

此外，若算子空间交叉范数 α 还满足完全度量映射性质，则称其为一致的：若 $S \in \mathrm{CB}(E_1, E_2)$ 且 $T \in \mathrm{CB}(F_1, F_2)$，则

$$\|S \otimes T \colon E_1 \otimes_\alpha F_1 \to E_2 \otimes_\alpha F_2\|_{\mathrm{cb}} \leq \|S\|_{\mathrm{cb}} \|T\|_{\mathrm{cb}}.$$

ONORM 上既合理又一致的算子空间交叉范数称为算子空间张量范数，或简称算子空间张量范数。

定义 2.2. 算子张量范数 α 是指对每个 $E, F \in \mathrm{ONORM}$，赋予 $E \otimes F$ 中的一个矩阵范数，并满足以下两个条件：

(1) α是合理的：映射 $E \otimes_{\mathrm{proj}} F \to E \otimes_\alpha F \to E \otimes_{\min} F$是完全压缩的。(2) α 是一致的：若 $S \in \mathrm{CB}(E_1, E_2)$ 且 $T \in \mathrm{CB}(F_1, F_2)$，则

$$\|S \otimes T \colon E_1 \otimes_\alpha F_1 \to E_2 \otimes_\alpha F_2\|_{\mathrm{cb}} \leq \|S\|_{\mathrm{cb}} \|T\|_{\mathrm{cb}}.$$

查阅讨论算子空间张量积的不同文献时需要谨慎，因为“张量范数”一词的含义并非总是完全相同。我们采用的定义与 [ER00, DFU15a], 中的定义相同，但与 [BP91, Ble92b]中的定义略有不同；明确的比较请参见 [WBF$^+$，第 6 节1]。显然，也可以针对算子空间的子类给出类似的算子空间张量范数定义，例如所有有限维算子空间构成的类 OFIN，或对偶算子空间类。

2.2. 张量范数的基本性质。若 α 与 $E \otimes_\alpha F$（通过转置映射）典范完全等距，则算子空间张量范数 $F \otimes_\alpha E$ 称为对称的。若 $(\alpha)\, E \otimes_\alpha F$与 $\otimes_\alpha G\,(E \otimes_\alpha)$（通过恒等映射）典范完全等距，则范数 $F \otimes_\alpha G$称为结合的。已知最小张量范数和投影张量范数均具有对称性和结合性，而 Haagerup 算子空间张量范数 h 具有结合性但不具有对称性 [ER00，命题 9.3.4]。

对于算子空间张量范数 α 和 β 以及常数 c，我们用“$\alpha \le c\beta$ on$E \otimes F$”表示恒等映射 $E \otimes_\beta F \to E \otimes_\alpha F$的完全有界范数至多为 c。如果没有提及空间，则表示该不等式对任意一对赋范算子空间都成立。

2.3. Schatten 空间及其向量值版本。回顾一下，对于希尔伯特空间 H，当 $1 \le p < \infty$ 时，Schatten 类 $S_p(H)$定义为所有满足 $\mathrm{tr}\left(|T|^p\right) < \infty$ 的紧算子 T 在 H 上的空间，并赋予范数$\|T\|_{S_p} = \left(\mathrm{tr}\left(|T|^p\right)\right)^{1/p}$；在 $p = \infty$的情形下，我们用 $S_\infty(H)$表示 H 上的所有紧算子（也记作 $\mathcal{K}(H)$）构成的空间，并赋予算子范数。为了给空间 $S_p(H)$赋予算子空间结构，我们采用 Pisier 的方法 [Pis98]：由于 $S_\infty(H)$ 是一个 C^*- 代数，根据 ER00, p. 21], ，它具有典范的算子空间结构 [；由对偶性 $S_1(H)' = B(H)$，我们也可在 $S_1(H)$上得到自然的算子空间结构；再根据算子空间的复插值 [Pis03, Sec. 2.7] ，我们便为每个中间的 $S_p(H)$空间得到算子空间结构。在特殊情形 $H = \ell_2$下，我们直接写作 S_p ，而不写 $S_p(\ell_2)$。对于算子空间 E 和 $1 \le p \le \infty$ ，我们也可以类似地得到一个算子空间，它是 S_p的 E值版本，记作 $S_p[E]$：我们定义 $S_\infty[E] = S_\infty \otimes_{\min} E$和 $S_1[E] = S_1 \otimes_{\mathrm{proj}} E$；同样，在 $1 < p < \infty$ 的情形下，我们通过在 $S_\infty[E]$ 和 $S_1[E]$之间进行复插值来定义 $S_p[E]$ 。

将 S_1 替换为带迹范数的 $n \times n$ 矩阵空间 S_1^n，并将 S_∞ 替换为 M_n空间，同样的过程类似地得到算子空间 S_p^n 和 $S_p^n[E]$。关于这些空间的详细研究，请参阅 [Pis98] 。

2.4. 直和。 [Pis03，第 2.6]节。给定一族算子空间 $\{E_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ，其 ℓ_∞ 直和记作 $\ell_\infty(\{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$，是带有如下算子空间结构的直和$E = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$： 对于 $u = (u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in M_n(E)$，

$$\|u\|_{\ell_\infty(\{E_\gamma\,:\,\gamma\in\Gamma\})} = \sup\left\{\|u_\gamma\|_{M_n(E_\gamma)} \,:\, \gamma \in \Gamma\right\}.$$

当只有两个直和项时，我们通常改用记号 $E_1 \oplus_\infty E_2$。

ℓ_1-和也类似地记作 $\ell_1(\{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$；为简单起见，下面仅详细说明有两个直和项的情形 $E_1 \oplus_1 E_2$。对于 $u \in M_n(E_1 \oplus E_2)$，

$\|u\|_{M_n(E_1\oplus_1 E_2)}$ =上确界 $\left\{\|(T_1 \oplus T_2)_n(u)\|_{M_n(\mathcal{B}(H))} :\ \|T_j : E_j \to \mathcal{B}(H)\|_{\mathrm{cb}} \le 1 \text{对于 } j = 1, 2\right\}$其中 $T_1 \oplus T_2 : E_1 \oplus E_2 \to \mathcal{B}(H)$ 是映射 $(T_1 \oplus T_2)(x, y) = x + y$。

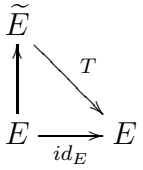
2.5. 嵌入与投影。赋范算子空间之间的线性映射 $q\colon E\to F$ 称为完全商映射、完全度量满射或完全投影，如果它是满射，且从 $E/\ker(q)$ 到 F 的关联映射是完全等距同构。在 [Pis03，第 2.4], 节中证明了，线性映射 $q\colon E\to F$ 是完全商映射，当且仅当其伴随 $q'\colon F'\to E'$ 是完全等距嵌入。注意，如果赋范算子空间之间的线性映射 $q\colon E\to F$ 是完全商映射，那么对于每个 $x\in M_n(F)$，我们有

$$\|x\|_{M_n(F)}=\inf\left\{\|y\|_{M_n(E)}\ :\ y\in M_n(E),\ q_n(y)=x\right\}.$$

完全等距嵌入 $T\colon E\to F$ 简称完全嵌入。

若对于任意赋范算子空间 G 以及任意完全投影（分别地，完全嵌入） $T\colon E\to F$，映射 $T\otimes id_G\colon E\otimes_\alpha G\to F\otimes_\alpha G$ 也为完全投影（分别地，完全嵌入），则称算子空间张量范数 α 为完全左投射（分别地，完全左内射）。完全右投射和完全右内射的算子空间张量范数定义类似；若算子空间张量范数既是完全左投射又是完全右投射（分别地，既是完全左内射又是完全右内射），则称其为完全投射（分别地，完全内射）。

若每当 $F\subseteq G$ 为算子空间且 $T\colon F\to E$ 为完全有界线性映射时，都存在延拓 $T\colon G\to E$ 满足 $\|T\|_{\mathrm{cb}}=\|T\|_{\mathrm{cb}}$，则称赋范算子空间 E 完全内射。根据 Arveson 延拓定理，对于任意希尔伯特空间 H，$B(H)$ 完全内射。现在我们来观察，任何完全内射赋范算子空间 E 都必定是完备的。事实上，考虑交换图



~其中，竖直箭头仅表示到 E 其完备化 E中的包含映射，而算子 T 由 E的内射性给出。若取 E中的柯西序列（v_n）$_n$，并取其极限 $v\in E$，则 T（v）$\in E$ 是（v_n）$_n$ 的极限，因为

$$T(v)=T\Big(\lim_{n\to\infty}v_n\Big)=\lim_{n\to\infty}T(v_n)=\lim_{n\to\infty}v_n.$$

若赋范算子空间 E 满足：对于任意到商空间的完全有界线性映射 $T\colon E\to G/F$ 以及任意 $\varepsilon>0$，都存在一个~ ~提升 $T\colon E\to G$，使得 T满足 $\|T\|_{\mathrm{cb}}\le$（$1+\varepsilon$）$\|T\|_{\mathrm{cb}}$，则称其为完全投射的。投射算子空间的基本例子是对任意 $n\in\mathbb{N}$，空间 S_1^n；我们还将用到这样一个事实：投射算子空间的 ℓ_1-和仍然是投射的。

每个巴拿赫算子空间 E 都可以看作某个完全投射空间的商空间。事实上，存在一个集合 I 和一个族 $(n_i)_{i\in I}\subset\mathbb{N}$，使得 E 是

$\ell_1(\{S_1^{n_i}\colon\ i\in I\})$ 的商空间（例如参见 [Pis03，命题 2.12.2]）。我们将后一个空间记为Z_E，并将 $q_E\colon Z_E\twoheadrightarrow E$ 记为相应的完全商映射。Z_E 是完全投射的这一事实可在 [Pis03，第 24] 章中查到。

有关完全内射和完全投射算子空间的更多内容，请参见 [Pis03，第 24] 章。

2.6. 算子空间张量范数的例子。除了上述定义的三种基本算子空间张量范数（内射、投射、Haagerup）之外，文献中还出现了许多其他例子，下面列出其中一些。前面三个例子在 [ER03], 中进行了讨论，其中证明了它们满足完全度量映射性质。为了得出它们是算子空间张量范数，我们只需检查它们介于最小张量范数和投影张量范数之间。

2.6.1. 核张量积。 $E\otimes_{\rm nuc}F$定义为 $E\otimes_{\rm proj}F$关于典范恒等映射 $E\otimes_{\rm proj}F\to E\otimes_{\rm min}F$的核的商空间。根据定义，显然有最小张量范数 $\le$核张量积 $\le$投影张量范数，因此核张量积是合理的。

2.6.2. 扩展 Haagerup 张量积 [EK87]。 $E\otimes_{\rm eh}F$ 是映射空间$u\colon\ E'\times F'\to\mathbb{C}$，其中映射在每个变量上都是正规（即弱* 连续的）且乘法有界的。若将这类映射组成的空间记为 $\mathrm{MB}^\sigma(E'\times F',\mathbb{C})$，则 $E\otimes_{\rm eh}F$上的矩阵范数由如下识别给出：$M_n\big(\mathrm{MB}^\sigma(E'\times F',\mathbb{C})\big)=\mathrm{MB}^\sigma(E'\times F',M_n)$。由此根据 (2.1) 可得，最小张量范数 $\le$扩展 Haagerup 张量积。

$E\otimes_{\rm eh}F$上的算子空间结构可按照与 (2.3) 相同的方式描述，只需将 $r\in\mathbb{N}$ 替换为任意集合 [（ER03，式 5）。10], 因此名称中有“扩展”一词。这尤其表明 $\mathrm{eh}\ \le h$，从而 $\mathrm{eh}\ \le\mathrm{proj}$。扩展 Haagerup 张量积具有结合性 [（ER03，第 149], 页），且完全内射，但并非完全投射 [（ER03，引理 5.4 和命题 5.5]）。

2.6.3. 正规 Haagerup 张量积 [EK87]。它仅对对偶算子空间定义，其定义为 $E'\otimes_{\sigma\rm h}F'=(E\otimes_{\rm eh}F)'$。由于恒等映射 $E\otimes_{\rm proj}F\to E\otimes_{\rm eh}F$是完全压缩映射，取对偶可得一个压缩映射

$$E'\otimes_{\sigma\rm h}F'=(E\otimes_{\rm eh}F)'\to(E\otimes_{\rm proj}F)'=\mathrm{CB}(E,F'),$$

这意味着恒等映射 $E'\otimes_{\sigma\rm h}F'\to E'\otimes_{\rm min}F'$是完全压缩映射。 $\sigma\mathrm{h}\ \le\mathrm{proj}$ 是完全压缩映射这一事实，即恒等映射 $E'\otimes_{\rm proj}F'\to(E\otimes_{\rm eh}F)'$是完全压缩映射，可由 (2.2) 以及将 $E\otimes_{\rm eh}F$ 描述为正规乘法有界映射的方式轻易推出（见 2.6.2）。

回顾上文，扩展 Haagerup 张量积并非完全投射，即存在完全投影 $\pi_j\colon\ E_j\to F_j,\ j=1,2$，使得 $\pi_1\otimes\pi_2\colon\ E_1\otimes_{\rm eh}E_2\to F_1\otimes_{\rm eh}F_2$ 不是完全投影。取对偶后，我们有完全单射 $\pi_j'\colon\ F_j'\to E_j',\ j=1,2$，使得 $\pi_1'\otimes\pi_2'\colon\ F_1'\otimes_{\sigma\rm h}F_2'\to E_1'\otimes_{\sigma\rm h}E_2'$ 不是完全单射，因此正规 Haagerup 张量积并非完全内射。

2.6.4. 对称化 Haagerup 张量范数。给定赋范算子空间 E 和 F 以及 $u \in M_n(E \otimes F)$，我们定义

$$(h \cap h^t)_n(u; E, F) = \max\left\{h_n(u; E, F), h_n^t(u; E, F)\right\}.$$

容易看出，$h \cap h^t$ 是一个对称算子空间张量范数。根据定义，显然存在一个完全等距嵌入

$$E \otimes_{h\cap h^t} F \hookrightarrow (E \otimes_h F) \oplus_\infty (E \otimes_{h_t} F)$$

由 $u \mapsto (u, u)$ 给出。由于 h 和 h^t 是完全内射的，因此显然 $h \cap h^t$也是完全内射的。注意，若 α 是一个满足 $h \le \alpha$的对称算子空间张量范数，则通过转置可得 $h^t \le \alpha$，因此有 $h \cap h^t \le \alpha$。于是，我们称 $h \cap h^t$ 为最小对称化豪格鲁普张量范数。此张量范数已见于 [PS02、HM08、DFU15b]。

另一方面，对于赋范算子空间 E 和 F 以及 $u \in M_n(E \otimes F)$，我们定义

$$(h + h^t)_n(u; E, F) = \inf\left\{\|(v, w)\|_{M_n\left((E\otimes_h F)\oplus_1(E\otimes_{h^t}F)\right)} : u = v + w\right\}.$$

也就是说，根据定义，由下式给出的映射

$$q : (E \otimes_h F) \oplus_1 (E \otimes_{h^t} E) \to E \otimes_{h+h^t} F$$

$q(u, v) = u + v$ 是一个完全商映射。再次容易验证，这定义了一个对称算子空间张量范数；由于 h是完全投射的，该范数也完全投射。算子空间张量范数 $h + h^t$ 由 [OP99], 引入，当时记作μ，并且已证明它既非结合的，也非完全内射的。我们称 $h + h^t$ 为最大对称化豪格鲁普张量范数，原因在于它具有以下性质。设 β 是一个满足 $\beta \le h$的对称张量范数。那么 $\beta \le h^t$，因此形式恒等映射

$$E \otimes_h F \to E \otimes_\beta F, \quad E \otimes_{h^t} F \to E \otimes_\beta F$$

都是完全压缩。因此，映射 $(v, w) \mapsto v + w$ 是一个完全压缩映射

$$(E \otimes_h F) \oplus_1 (E \otimes_{h^t} E) \to E \otimes_\beta F$$

根据商空间的标准性质 [Pis03，命题 2.4。1], 恒等映射$E \otimes_{h+h^t} F \to E \otimes_\beta F$也是完全压缩映射，即 $\beta \le h + h^t$。

2.6.5. Chevet-Saphar 张量积。受巴拿赫空间情形中定义的启发，对于 $1 \le p \le \infty$，右侧和左侧 p-Chevet-Saphar 算子空间张量范数 d_p和 g_p，在 [CD16] 中按以下方式定义：给定赋范算子空间 E 和

F，对于 $u \in E \otimes F$,

$$d_p(u) = \inf\left\{ \|(x_{ij})\|_{S^n_{p'} \otimes_{\min} E} \, \|(y_{ij})\|_{S^n_p[F]} : u = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} \otimes y_{ij} \right\}, \tag{2.5}$$

$$g_p(u) = \inf\left\{ \|(x_{ij})\|_{S^n_p[E]} \, \|(y_{ij})\|_{S^n_{p'} \otimes_{\min} F} : u = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} \otimes y_{ij} \right\} \tag{2.6}$$

其中，下确界取遍所有可能的表示方式，即将张量 u写成上述有限和的方式。

注意，上述表达式仅定义了 $E \otimes F$上的范数；张量积 $E\widehat{\otimes}_{d_p}F$ 和 $E\widehat{\otimes}_{g_p}F$ 的完整算子空间结构由以下商映射给出（参见 [CD16，第 3]节）

$$q_{d_p} : (S_{p'}\widehat{\otimes}_{\min}E)\widehat{\otimes}_{\mathrm{proj}}S_p[F] \to E\widehat{\otimes}_{d_p}F, \tag{2.7}$$

$$q_{g_p} : S_p[E]\widehat{\otimes}_{\mathrm{proj}}(S_{p'}\widehat{\otimes}_{\min}F) \to E\widehat{\otimes}_{g_p}F, \tag{2.8}$$

其中，$\widehat{\otimes}$ 表示相应张量积的完备化。在 [CD16，命题 3.5.] 中证明了，d_p 和 g_p 都是算子空间张量范数。

2.6.6. λ-张量积 [Wie09，DW14]。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令

$$B_k^\lambda : M_k \times M_k \to M_{\tau(k)}$$

（其中 $\tau(k) \in \mathbb{N}$ 是仅取决于 k的自然数）为一个双线性映射；我们将用 λ表示序列 $(B_k^\lambda)_k$。需要记住的两个基本例子是张量积 $\otimes$（即对所有 k，$B_k^\lambda(x,y) = x \otimes y$）和矩阵乘积 $\odot$（即对所有 k，$B_k^\lambda(x,y) = x \odot y$）。我们指出，为了保持本文符号的一致性，上述记法与 [Wie09，DW14], 中的记法略有不同。对于 $u \in M_k(E \otimes F)$，定义

$$\lambda_k(u) = \inf\{\|a\|\|v_1\|\|v_2\|\|b\|\} \tag{2.9}$$

其中，下确界取遍任意分解 $u = a \otimes_{B_j^\lambda} (v_1, v_2) b$ 满足$a \in M_{k,\ \tau(j)}$, $b \in M_{\tau(j),\ k}$, $v_1 \in M_j(E)$, $v_2 \in M_j(F)$，其中 $\otimes_{B_j^\lambda}$: $M_j(E) \times M_j(F) \to M_{\tau(j)}(E \otimes F)$ 是由 $(a_1 \otimes x, a_2 \otimes y) \mapsto B_j^\lambda(a_1, a_2) \otimes x \otimes y$ 给出的双线性映射。注意，$\lambda = \otimes$ 对应于射影张量范数，而 $\lambda = \odot$ 则给出 Haagerup 张量范数。

为了确保上述定义的范数构成算子空间张量范数，我们需要 λ 满足某些技术条件。首先介绍一些记号。我们用 $\varepsilon_{i,j} := \varepsilon_i^{[k,l]}{}_{,j} \in M_{k,l}$ 表示一个矩阵，该矩阵在第 (i,j) 个位置的元素为 1，其余位置均为 0；若 $(i,j) \notin \{1,\dots,k\} \times \{1,\dots,l\}$，则记作 $\varepsilon_i^{[k]}{}_{,j} := \varepsilon_i^{[k,k]}{}_{,j}$，$\varepsilon_i := \varepsilon_{i,i}$，$\varepsilon_i^{[k]} := \varepsilon_{i\,i}^{[k,k]}$,和 $\varepsilon_i^{[k,l]}{}_{,j} = 0$。按照惯例，我们用 I_n 表示恒等映射 $n \times n$ 矩阵。

命题 2.3（[DW14，命题 4.1] 和 [Wie09，命题 6.1]）。对于任意算子空间 E 和 F，上述定义的序列 $\lambda_k(\cdot)$ 在 λ 满足以下条件时，会在$E \otimes F$上定义一个算子空间结构：

(E1) 对所有 $k \in \mathbb{N}$，存在 $p \in \mathbb{N}$ 和矩阵 $S \in M_{k,\ \tau(p)}$, $T \in M_{\tau(p),\ k}$,$a_1, \cdots,$ $a_k \in M_p$，使得对所有 $j_1, j_2 \in \{1, \cdots, k\}$:

$$SB_p^{\lambda}(a_{j_1}, a_{j_2})T = \begin{cases} \varepsilon_j^{[k]} & \text{if } j_1 = j_2 = j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(E2) 对所有 $r, s \in \mathbb{N}$，存在矩阵 $P \in M_{\tau(r)+\tau(s),\ \tau(r+s)}$，其中 $\|P\| \le 1$，使得对所有满足 $k = 1$ 的 $(i_k, j_k) \in \{1, \cdots, r\}^2 \cup \{r+1, \cdots, r+s\}^2$，2:

$$\begin{aligned} &PB_{r+s}^{\lambda}(\varepsilon_{i_1,j_1}^{[r+s]}, \varepsilon_{i_2,j_2}^{[r+s]})P^* \\ &= \operatorname{diag}\Big(B_r^{\lambda}(\varepsilon_{i_1,j_1}^{[r]}, \varepsilon_{i_2,j_2}^{[r]}), B_s^{\lambda}(\varepsilon_{i_1-r,j_1-r}^{[s]}, \varepsilon_{i_2-r,j_2-r}^{[s]})\Big). \end{aligned}$$

(E3) $B_1^{\lambda}(1, 1) = 1$ 和 $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|B_k^{\lambda}\| < \infty$。

在这种情况下，我们用 $E \otimes_{\lambda} F$ 表示相应的算子空间。此外，完全度量映射性质成立。

注意，在记号的滥用中，我们用符号 λ 既表示双线性映射的序列 $M_k \times M_k \to M_{\tau(k)}$，也表示张量积上诱导的算子空间结构。

与投射张量积和 Haagerup 张量积的情形一样，λ-张量积的对偶可以识别为某个双线性形式空间。对于任意双线性映射 $\phi: E \times F \to W$，其中 E、F、W 是算子空间，定义双线性映射 $\phi_{B_k^{\lambda}}$: $M_k(E) \times M_k(F) \to M_{\tau(k)}(W)$，其在初等张量上的定义为

$$\phi_{B_k^{\lambda}}\big(a_1 \otimes v_1, a_2 \otimes v_2\big) = B_k^{\lambda}(a_1, a_2) \otimes \phi(v_1, v_2), \qquad a_1, a_2 \in M_k, v_1 \in E, v_2 \in F.$$

我们还定义

$$\|\phi\|_{\mathrm{cb},\lambda} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left\| \phi_{B_k^{\lambda}}(x, y) \right\|_{M_{\tau(k)}(W)} : \|x\|_{M_k(E)} \le 1, \|y\|_{M_k(F)} \le 1 \right\}$$

and

$$\mathrm{CB}_{\lambda}(E \times F; W) = \left\{ \phi : E \times F \to W \text{ bilinear} : \|\phi\|_{\mathrm{cb},\lambda} < \infty \right\}.$$

这个空间是一个算子空间，其识别为

$$M_k\big(\mathrm{CB}_{\lambda}(E \times F; W)\big) = \mathrm{CB}_{\lambda}\big(E \times F; M_k(W)\big).$$

注意，对于 $\lambda = \otimes$（投射张量积）和 $\lambda = \odot$（Haagerup 张量积）这两种情形，我们分别得到通常的对偶空间 $\mathrm{CB}_{\otimes} = \mathrm{JCB}$ 和 $\mathrm{CB}_{\odot} = \mathrm{MB}$。

定理 2.4（[DW14，定理 6.2]）。若 λ 满足 (E1)、(E2) 和 (E3)，则自然同一化给出一个典范完全等距映射

$$\mathrm{CB}(E \otimes_{\lambda} F, W) = \mathrm{CB}_{\lambda}(E \times F; W)$$

因此特别地

$$(E \otimes_\lambda F)' = \mathrm{CB}_\lambda(E \times F; \mathbb{C}) =: \mathrm{CB}_\lambda(E \times F).$$

我们用 $\odot^t$： $M_k \times M_k \to M_k$ 表示通常矩阵乘积的转置，即 $A \odot^t B = B \odot A$，其中 $A, B \in M_k$。显然，取 $\lambda = \odot^t$时， $E \otimes F$上的相应算子空间结构恰好是 $E \otimes_{h^t} F$，即 Haagerup 张量积的转置。现在我们引入一族新的 Haagerup 风格算子空间张量积，它们是 λ-张量积，可以看作是 h 与 h^t之间某种“插值”。对于任意 $\theta \in [0,1]$ 和 $k \in \mathbb{N}$，令$\odot_k^\theta$： $M_k \times M_k \to M_k$ 为 $(1-\theta) \odot + \theta \odot^t$，即 $\odot_k^\theta(A, B) = (1-\theta)AB + \theta BA$，其中$A, B \in M_k$。显然，每个 $\odot_k^\theta$ 都是双线性的；现在我们来证明它们都在张量积上诱导出算子空间结构。

命题 2.5. 对每个 $\theta \in [0,1]$， $\odot^\theta$ 满足 (E1)、(E2) 和 (E3)。

证明. 显然 $1 \odot 1 = 1 \odot^t 1 = 1$，且 $\|\odot_k\| = \|\odot_k^t\| = 1$（因为对于 A， $B \in M_k$，有 $\|A \odot B\| \le \|A\| \, \|B\|$）。取凸组合即可得到 $\odot^\theta$ 的 (E3)。

按照 [Wie09，命题 7.6]，的证明，通过取 $p = k$、$S = T = I_k$ 和 $a_{j_i} = \varepsilon_{j_i}^{[k]}$，可使 $\odot$ 满足 (E1)。由于涉及的所有矩阵都是对角矩阵，所有乘积都可交换，因此同样的取法可使 $\odot^t$ 满足 (E1)。取凸组合后，同样的取法再次可使 $\odot^\theta$ 满足 (E1)。完全相同类型的论证也适用于 (E2)：在 [Wie09，命题 7.6] 中，使用 $P = I_{r+s}$ 证明了 $\odot$ 满足 (E2)。□

命题 2.6. 对于每个 $\theta \in [0,1]$， $\odot^\theta$ 都是交叉范数。

证明。设 E、 F 为算子空间， $x \in M_m(E)$， $y \in M_n(F)$。众所周知，$x \otimes y = (x \otimes I_n) \odot (I_m \otimes y)$，例如参见 [ER00，公式 (9.1.10)]。完全相同的计算表明 $x \otimes y = (x \otimes I_n) \odot^t (I_m \otimes y)$，因此 $x \otimes y = \odot_{mn}^\theta (x \otimes I_n, \ I_m \otimes y)$。于是，根据 $\odot_{mn}^\theta$ 的定义，

$$\odot_{mn}^\theta (x \otimes y) \le \|x \otimes I_n\|_{M_{mn}(E)} \, \|I_m \otimes y\|_{M_{mn}(F)} = \|x\|_{M_m(E)} \cdot \|y\|_{M_n(F)} .$$

□

为了得出 $\odot^\theta$ 是算子空间张量范数，唯一缺少的步骤是验证 min $\le \odot^\theta$。我们证明一个更一般的结果。

命题 2.7. 假设 λ 满足 (E1)、(E2)、(E3)，并且对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\left\|B_k^\lambda\right\|_{\mathrm{jcb}} \le 1$。那么恒等映射 $E \otimes_\lambda F \to E \otimes_{\min} F$ 是一个完全压缩。证明。根据 [BP91，第 5.1]，条定理，只需证明对于每个 $U \in M_k(E \otimes F)$、$\phi \in M_m(E')$、 $\psi \in M_n(F')$，我们有

$$\|\langle\langle \phi \otimes \psi, U \rangle\rangle\|_{M_{mnk}} \le \|\phi\|_{M_m(E')} \, \|\psi\|_{M_n(F')} \, \lambda_k(U).$$

现在，根据识别 $(E \otimes_\lambda F)' =$完全有界算子$_\lambda(E \times F)$，我们已经知道

$$\|\langle\langle \phi \otimes \psi, U \rangle\rangle\|_{M_{mnk}} \le \|\phi \otimes \psi\|_{M_{mn}(\mathrm{CB}_\lambda(E \times F))} \, \lambda_k(U).$$

帽 $M_{mn}\big($完全有界算子$_\lambda(E\times F)\big)=$完全有界算子$_\lambda\left(E\times F;\ M_{mn}\right)$，我们只需证明
回顾 t

$$\|\varphi\|_{\lambda,\mathrm{cb}}\le\|\phi\|_{M_m(E')}\|\psi\|_{M_n(F')}$$

其中 $\varphi=\phi\otimes\psi:\ E\times F\to M_{mn}$；注意，这里我们将 $\phi\in M_m(E')$ =完全有界算子(E,M_m) 和 $\psi\in M_n(F')$ = 完全有界算子 (F,M_n) 来解释。

要计算 φ在完全有界算子$_\lambda(E\times F;\ M_{mn})$中的范数，取 $u\in M_k(E)$ 和 $v\in M_k(F)$，其中$\|u\|_{M_k(E)}\ \ \|v\|_{M_k(F)}\le 1$。表示 $u=\sum_i a_i\otimes u_i,\ v=\sum_j b_j\otimes v_j$其中$a_i,b_j\in M_k,\ u_i\in E,$ $v_j\in F$。于是，根据$\varphi_{B_k^\lambda}$的定义，

$$\begin{aligned}\varphi_{B_k^\lambda}(u,v)&=\sum_{i,j}B_k^\lambda(a_i,b_j)\otimes\varphi(u_i,v_j)=\sum_{i,j}B_k^\lambda(a_i,b_j)\otimes\phi(u_i)\otimes\psi(v_j)\\&=\otimes_{B_k^\lambda}\Big(\sum_i a_i\otimes\phi(u_i),\sum_j b_j\otimes\psi(v_j)\Big)=\otimes_{B_k^\lambda}\big((I_k\otimes\phi)u,(I_k\otimes\phi)v\big).\end{aligned}$$

注意，假设$\left\|B_k^\lambda\right\|_{\mathrm{jcb}}\le 1$ 的确意味着，对于任意 $A\in M_k(M_m)$ 和 $B\in M_k(M_n)$，我们都有

$$\left\|\otimes_{B_k^\lambda}(A,B)\right\|_{M_{\tau(k)mn}}\le\|A\|_{M_k(M_m)}\|B\|_{M_k(M_n)},$$

so

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_{B_k^\lambda}(u,v)\right\|&\le\|(I_k\otimes\phi)u\|_{M_k(M_m)}\|(I_k\otimes\phi)v\|_{M_k(M_n)}\\&\le\|I_k\otimes\phi\|\,\|u\|\,\|I_k\otimes\phi\|\,\|v\|\le\|\phi\|\,\|\phi\|\end{aligned}$$

由此得到所需结论。 □

定理 2.8. 对每个 $\theta\in[0,1],\ \ \odot^\theta$ 都是算子空间张量范数。

证明。由命题 2.5、2.6 和 2.7 可立即得出，其中对于最后一个命题，我们利用了这样的事实：$\|\odot\|_{\mathrm{jcb}}\le 1$，因此$\left\|\odot_k^\theta\right\|_{\mathrm{jcb}}\le 1$。□

在本文余下部分，每当考虑任意 λ-张量范数时，我们总是假设它满足 (E1)、(E2)、(E3)，并且还是算子空间张量范数。为强调这一点，我们将其称为 λ-算子空间张量范数。

注 2.9. 我们此前已经指出，在 o.s. 张量范数的定义中，我们对一致性的概念比 [BP91]中的概念更弱。这使得 $\odot^\theta$ 能够被纳入该理论：据我们所知，能够推出一个 λ-张量范数满足 [BP91] 中的一致性条件的唯一假设，是 [Wie09, Prop. 12.2],中的条件（W1）和（W2）；但 $\odot^\theta$ 仅在极端情形 $\theta=0$、1 中满足（W2）。

2.7. 一些常用记号。对于赋范算子空间 E，我们用 OFIN(E)（分别地，OCOFIN(E)）表示所有有限维（分别地，有限余维）子空间的集合。给定 $L \in$ OCOFIN(E)，令 q_L^E: $E \to E/L$ 为典范投影；给定 F 的一个子空间 E，令 i_F^E: $F \to E$ 为典范嵌入。为避免记号过载，当包含映射是算子空间 $E \subset \mathcal{B}(H)$中的典型完全等距时，我们仅将典范嵌入记为 i_E： $E \to \mathcal{B}(H)$。此外，沿用通常的巴拿赫空间记号，对于赋范算子空间 E，κ_E: $E \to E''$ 表示到二重对偶中的典范嵌入。

给定向量空间 E和 F，我们通过 $\beta_T(x,y) = (Tx)(y)$，将线性映射 T: $E \to F'$与双线性映射 β_T: $E \times F \to \mathbb{C}$对应起来；注意， β_T也可以视为 $(E \otimes F)'$中的一个元素。

赋范算子空间 E是一个$\mathscr{OS}_{p,C}$空间 [JNRX04，第 2] 节，如果存在由 E 的有限维子空间构成的族 $(F_i)_{i\in I}$，其并集在 E 中稠密，且对每个指标 i，都存在一个自然数 n_i，使得 $d_{\mathrm{cb}}(S_p^{n_i}, F_i) \le C$，其中 d_{cb} 表示完全有界 Banach–Mazur 距离，即，

$$d_{\mathrm{cb}}(E,F) := \inf\big\{\|T\|_{cb}\|T^{-1}\|_{cb} : T \in \mathrm{CB}(E,F) \text{ is a complete isomorphism}\big\}.$$

如果对每个 $C' > C$， E都是一个$\mathscr{OS}_{p,C'}$空间，我们就称 E是一个$\mathscr{OS}_{p,C+}$空间。

若 W 是一个巴拿赫空间，其极大算子空间结构 Max(W) 定义如下：对于 $A \in M_n(W)$

$$\|A\|_{M_n(\mathrm{Max}(W))} = \big\{\, \|u_n(A)\|_{M_n(B(H))} \;:\; \|u : W \to B(H)\| \le 1\big\}.$$

更多细节请参见 [Pis03，第 3] 章。

2.8. 算子逼近性质。若存在一个有限秩映射网 $T_\eta \in$ CB(E,E)，使该网 $id_{\mathcal{K}} \otimes T_\eta$ 在 $K_\infty(E) = \mathcal{K} \otimes_{\min} E$中逐点收敛到恒等映射，则称赋范算子空间 E 具有算子逼近性质（OAP） [ER00，第 11 节。2]类似地，若存在一个有限秩映射网$T_\eta \in$ CB(E,E)，使得 $\|T_\eta\|_{\mathrm{cb}} \le C$ 且对每个 $x \in E$都有 $\|T_\eta x - x\| \to 0$，则称 E 具有 C完全有界逼近性质（C-CBAP） [ER00，第 205] 页。注意，根据 [ER00，定理 11.3，3], 对于每个 $x \in M_n(E)$，我们还有 $\|(T_\eta)_n x - x\| \to 0$。特别地，当 $C = 1$ 时，称 E 具有完全度量逼近性质（CMAP）。

2.9. 与巴拿赫空间情形的相关差异。众所周知，巴拿赫空间理论无法毫无阻碍地移植到算子空间框架中，张量范数理论也不例外。我们来指出这一背景下的三个重要差异。

2.9.1. 局部自反性。若赋范算子空间 E 满足以下条件，则称其为局部自反的[EJR00] ：对每个有限维算子空间 F，任意完全压缩φ: $F \to E''$ 都可在点弱* 拓扑下由一网完全

压缩映射 $\varphi_\eta : F \to E$逼近。所有局部自反赋范算子空间构成的类记为 OLOC。

由于局部自反性与证明许多关于巴拿赫空间张量范数的性质有关，因此在这些结果的算子空间版本中，它往往是一个附加假设。此外，在某些情况下，已知这一假设是必要的： [ER00, 定理 14.3.1]就是一个例子，其中涉及张量范数的恒等式，其成立与否最终可用来刻画局部自反性。尽管如此，在某些特殊情形下，我们可以省略这一假设（例如，对于 λ-算子空间张量范数，参见引理 4.3 和引理 4.7）。

我们指出，供今后参考：给定一个完全算子空间 E，第 2.5 节中引入的完全投射空间 Z_E 实际上是局部自反的。事实上，它的对偶 $\ell_\infty(\{M_{n_i} : i \in I\})$显然是一个 C^*代数，因而是一个冯·诺依曼代数；而冯·诺依曼代数的预对偶是局部自反的（例如参见 [Pis03, 定理 18.7]）。

2.9.2. 精确性。每个有限维巴拿赫空间都可以（$1+\varepsilon$）-同构地嵌入到形如 ℓ_∞^n 的空间中，但算子空间情形下的类似性质通常并不成立：若对任意 $\varepsilon > 0$， E 的每个有限维子空间都（$C+\varepsilon$）-完全同构于某个 M_n 空间的子空间，则称算子空间 E 为 C-正合。当算子空间是 1-正合时，我们就简称它为正合。

注11.7 给出了一个并不令人意外的例子，说明这会导致经典张量范数理论与算子空间理论之间存在显著差异。

由于精确性问题，另一项对巴拿赫张量积论证有用、但无法推广到算子空间的性质，是 [DFS08, 引理 2.2.2] 中关于商空间的有限维部分所证明的性质：

定理2.10。以下陈述是错误的：

> 对于巴拿赫算子空间之间的每个完全商映射 $q : E \twoheadrightarrow F$、每个 $F_0 \in \mathrm{OFIN}(F)$ 以及每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $E_0 \in \mathrm{OFIN}(E)$，使得 $q(E_0) = F_0$；并且对于每个 $y \in M_n(F_0)$，都存在 $x \in M_n(E_0)$，使得 $q_n(x) = y$，且 $\|x\|_{M_n(E_0)} \le (1+\varepsilon)\|y\|_{M_n(F_0)}$。

证明。首先指出，若 $E_0 \in \mathrm{OFIN}(E)$ 满足陈述中的条件，那么显然，借助由 $q|_{E_0}$ 诱导的典范映射 $E_0/\ker(q|_{E_0}) \to F_0$， F_0 与 $E_0/\ker(q|_{E_0})$ 完全同构，且同构常数为 $(1+\varepsilon)$。

设 F_0 为有限维算子空间。根据 [Pis03, Cor. 2.12.3]，，存在一个完全商映射 $q : S_1 \twoheadrightarrow F_0$。给定 $\varepsilon > 0$，假设存在$E_0 \in \mathrm{OFIN}(S_1)$ 满足陈述中的条件。

由于 $E_0 \in \mathrm{OFIN}(S_1)$，我们可以找到 $G_0 \in \mathrm{OFIN}(S_1)$，使得 $E_0 \subseteq G_0$ 和 G_0 借助扰动论证，与某个 $N \in \mathbb{N}$ 完全同构，失真度为 $(1+\varepsilon)$，如 [Pis03，第 2.13] 节所示。首先，取 E_0 的一组基，并用有限支撑矩阵对其进行逼近。由此得到一个子空间 $E_1 \subset S_1$，它与

E_0 完全同构，并自然包含在一个子空间 $G_1 \subset S_1$ 中，而该子空间与某个 N 完全等距。对 G_1 进行扰动，使其“回到 E_0 上”，即可得到所需的 G_0。

由于 $G_0 \supseteq E_0$，显然 G_0 也满足陈述中的条件。这表明 F与 S_1^N的一个商空间 $(1+\varepsilon)^2$-完全同构，因此F'与 M_N的一个子空间 $(1+\varepsilon)^2$-完全同构。

但一般来说，这并不成立：根据 [Pis95，定理 7]，，对于任意 $n \geq 2$，从 Max(ℓ_1^n) 到某个 M_N 空间的子空间的任何完全同构，其常数都至少为$\frac{n}{2\sqrt{n-1}}$。□

正如预期的那样，这种利用有限维部分逼近商空间的思路，在研究巴拿赫空间张量范数的投射性时很有用。例如， [Rya02，命题 7.5] 中就用它证明：当一个张量范数的对偶张量范数是内射时，该张量范数是投射的。然而，这种论证不仅在算子空间情形中行不通，相应的结论事实上也不成立：见下文注 12.5；我们还指出， [Ble92b] 中未经证明而声称成立的、关于完全内射与完全投射包的一个相关对偶性结果也不成立。

2.9.3. 完全内射空间的逼近性质。每个巴拿赫空间 E都等距嵌入到 $\ell_\infty(B_{E'})$中，后者在巴拿赫空间情形下是内射空间。$\ell_\infty(B_{E'})$具有逼近性质这一事实，在巴拿赫空间框架中的许多张量积结果里发挥着重要作用，尤其是与逼近引理和完全内射张量范数相关的结果。相较之下，对于算子空间 E，标准的完全等距嵌入完全内射空间的方式是将其嵌入到某个希尔伯特空间 H上的 $\mathcal{B}(H)$中。 $\mathcal{B}(H)$缺乏逼近性质，这也是两个框架之间的另一个重要差异。

3. Finite and cofinite hulls

给定 OFIN 上的算子空间张量范数 α，我们可以通过以下两种方式将其扩展到所有算子空间组成的类。

定义 3.1. 给定算子空间 E和 F，以及 $u \in M_n(E \otimes F)$，令$\overrightarrow{\alpha}_n(u;\ E,F) = \inf\ \{\alpha_n(u;\ E_0,F_0) :\ E_0 \in \mathrm{OFIN}(E)\ F_0 \in \mathrm{OFIN}(F)\ u \in M_n(E_0 \otimes F_0)\}$并且

$\overleftarrow{\alpha}_n(u;\ E,F) = \sup\ \left\{\alpha_n\big((q_K^E \otimes q_L^F)_n(u);\ E/K, F/L\big):\ K \in \mathrm{OCOFIN}(E)\ L \in \mathrm{OCOFIN}(F)\right\}$

ONORM 上的算子空间张量范数 α称为有限生成的，当且仅当 $\alpha = \overrightarrow{\alpha}$；称为余有限生成的，当且仅当 $\alpha = \overleftarrow{\alpha}$。

显然，若 $\alpha \leq c\beta$，则可得 $\overleftarrow{\alpha} \leq c\overleftarrow{\beta}$ 和 $\overrightarrow{\alpha} \leq c\overrightarrow{\beta}$。由于最小张量范数和 h 是完全内射的，最小 $= \overrightarrow{\ \ }$最小且 $h = \overrightarrow{h}$。还要注意，将射影范数描述为下确界可得 proj $= \overrightarrow{\ \ }$proj。

出于同样的原因，任意 λ-算子空间张量范数都是有限生成的。

命题 3.2. 设 α 是 OFIN 上的一个算子空间张量范数。那么， α 的有限包 $\overrightarrow{\alpha}$ 和 α 的余有限包 $\overleftarrow{\alpha}$ 是 ONORM 上的算子空间张量范数，且

$$\min \leq \overleftarrow{\alpha} \leq \overrightarrow{\alpha} \leq \mathrm{proj}, \qquad \overleftarrow{\alpha}|_{\mathrm{OFIN}} = \overrightarrow{\alpha}|_{\mathrm{OFIN}} = \alpha.$$

如果 α 定义在 ONORM 上（而不只是 OFIN 上），那么

$$\overleftarrow{\alpha} \leq \alpha \leq \overrightarrow{\alpha}.$$

证明。 α 的完全度量映射性质推出 $\overleftarrow{\alpha} \leq \alpha \leq \overrightarrow{\alpha}$；命题陈述前的说明进而表明 $\min \leq \overleftarrow{\alpha} \leq \overrightarrow{\alpha} \leq \mathrm{proj}$。显然， α 在有限维空间上与 $\overleftarrow{\alpha}$ 和 $\overrightarrow{\alpha}$ 一致，因此剩下唯一需要证明的是，这两个包络确实都是算子空间张量范数。但我们已经证明它们介于 min 和 proj 之间，所以只需验证完全度量映射性质。

为此，设 $S \in \mathrm{CB}(E_1, E_2)$， $T \in \mathrm{CB}(F_1, F_2)$，且 $u \in M_n(E_1 \otimes F_1)$。那么，利用 α的完全度量映射性质，

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\alpha}_n\big((S \otimes T)_n u; E_2, F_2\big) \\
&= \inf\Big\{\alpha_n\big((S \otimes T)_n u; E_0^2, F_0^2\big) : E_0^2 \in \mathrm{OFIN}(E_2), F_0^2 \in \mathrm{OFIN}(F_2), (S \otimes T)_n u \in M_n(E_0^2 \otimes F_0^2)\Big\} \\
&\quad \leq \inf\Big\{\alpha_n\big((S \otimes T)_n u; SE_0^1, TF_0^1\big) : \\
&\qquad\qquad E_0^1 \in \mathrm{OFIN}(E_1), F_0^1 \in \mathrm{OFIN}(F_1), u \in M_n(E_0^1 \otimes F_0^1)\Big\} \\
&\quad \leq \|S\|_{\mathrm{cb}} \|T\|_{\mathrm{cb}} \inf\Big\{\alpha_n\big(u; E_0^1, F_0^1\big) : \\
&\qquad\qquad E_0^1 \in \mathrm{OFIN}(E_1), F_0^1 \in \mathrm{OFIN}(F_1), u \in M_n(E_0^1 \otimes F_0^1)\Big\} \\
&\qquad\qquad = \|S\|_{\mathrm{cb}} \|T\|_{\mathrm{cb}} \, \overrightarrow{\alpha}_n\big(u; E_1, F_1\big),
\end{aligned}$$

这表明 $\overrightarrow{\alpha}$具有完全度量映射性质。

现在，考虑 $K_0^2 \in \mathrm{OCOFIN}(E_2)$ 和 $L_0^2 \in \mathrm{OCOFIN}(F_2)$。注意到 $S^{-1}K_0^2 \in \mathrm{OCOFIN}(E_1)$ 和 $T^{-1}L_0^2 \in \mathrm{OCOFIN}(F_1)$。此外，根据商空间的基本性质，存在映射 $S_{K_0^2}\colon E_1/S^{-1}K_0^2 \to E_2/K_0^2$ 和 $T_{L_0^2}\colon F_1/T^{-1}L_0^2 \to F_2/L_0^2$，使得下列交换图成立

$$\begin{array}{ccc}
E_1 & \xrightarrow{S} & E_2 \\
{\scriptstyle q^{E_1}_{S^{-1}K_0^2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q^{E_2}_{K_0^2}} \\
E_1/S^{-1}K_0^2 & \xrightarrow[S_{K_0^2}]{} & E_2/K_0^2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
F_1 & \xrightarrow{T} & F_2 \\
{\scriptstyle q^{F_1}_{T^{-1}L_0^2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q^{F_2}_{L_0^2}} \\
F_1/T^{-1}L_0^2 & \xrightarrow[T_{L_0^2}]{} & F_2/L_0^2
\end{array}$$

此外，我们有 $\left\|S_{K_0^2}\right\|_{\mathrm{cb}} = \left\|q^{E_2}_{K_0^2} S\right\|_{\mathrm{cb}} \le \|S\|_{\mathrm{cb}}$并且 $\left\|T_{L_0^2}\right\|_{\mathrm{cb}} = \left\|q^{F_2}_{L_0^2} T\right\|_{\mathrm{cb}} \le \|T\|_{\mathrm{cb}}$。因此，再次利用 α的完全度量映射性质，

$$
\begin{aligned}
&\overleftarrow{\alpha}_n\big((S\otimes T)_n u; E_2, F_2\big)\\
&\quad = \sup\Big\{\alpha_n\big(\big(q^{E_2}_{K_0^2}\otimes q^{F_2}_{L_0^2}\big)_n (S\otimes T)_n(u); E_2/K_0^2, F_2/L_0^2\big):\\
&\qquad\qquad K_0^2\in \mathrm{OCOFIN}(E_2), L_0^2\in \mathrm{OCOFIN}(F_2)\Big\}\\
&\quad = \sup\Big\{\alpha_n\big((S_{K_0^2}\otimes T_{L_0^2})_n\big(q^{E_1}_{S^{-1}K_0^2}\otimes q^{F_1}_{T^{-1}L_0^2}\big)_n(u); E_2/K_0^2, F_2/L_0^2\big)\\
&\qquad\qquad : K_0^2\in \mathrm{OCOFIN}(E_2), L_0^2\in \mathrm{OCOFIN}(F_2)\Big\}\\
&\quad \le \|S\|_{\mathrm{cb}}\,\|T\|_{\mathrm{cb}} \sup\Big\{\alpha_n\big(\big(q^{E_1}_{K_0^1}\otimes q^{F_1}_{L_0^1}\big)_n(u); E_1/K_0^1, F_1/L_0^1\big):\\
&\qquad\qquad K_0^1\in \mathrm{OCOFIN}(E_1), L_0^1\in \mathrm{OCOFIN}(F_1)\Big\}\\
&\qquad\qquad = \|S\|_{\mathrm{cb}}\,\|T\|_{\mathrm{cb}}\ \overleftarrow{\alpha}_n\big(u; E_1, F_1\big),
\end{aligned}
$$

这表明 $\overleftarrow{\alpha}$ 具有完全度量映射性质。 □

由前一个命题可知，鉴于我们已经注意到 min

$\longrightarrow$ $= \min$，因此可得 $\min = \overrightarrow{\min} = \overleftarrow{\min}$。

我们还将在注记 5 8 $h = .$ 中看到，

$\overrightarrow{h} = \overleftarrow{h}$

Haagerup 算子空间张量范数满足 。

接下来我们证明，与经典理论一样，投射范数不是余有限生成的。

命题 3.3. (a) 设 W 是一个巴拿赫空间， F 是一个赋范算子空间。那么 $\mathrm{Max}(W) \otimes^{\longleftarrow}_{\mathrm{proj}} F$，且 $W \otimes^{\leftarrow}_{\pi} F$ 与 $\overleftarrow{\quad}$ 作为巴拿赫空间等距同构。(b) $\neq$ projproj。

证明. (*a*) 设 $u \in W \otimes F$。根据定义，

$$
\begin{aligned}
\overleftarrow{\mathrm{proj}}(u; \mathrm{Max}(W), F) = \sup\big\{\,\mathrm{proj}\,\big((q^W_K\otimes q^F_L)(u); \mathrm{Max}(W)/K, F/L\big):\\
K\in \mathrm{OCOFIN}(\mathrm{Max}(W)), L\in \mathrm{OCOFIN}(F)\big\}
\end{aligned}
$$

and

$$
\overleftarrow{\pi}(u; W, F) = \sup\big\{\pi\big((q^W_K\otimes q^F_L)(u); W/K, F/L\big):\, K\in \mathrm{COFIN}(W), L\in \mathrm{COFIN}(F)\big\}.
$$

由 [Pis03，命题 3.3] 可知，最大算子空间(W/K) = 最大算子空间$(W)/K$。因此，根据 [BLM04，命题 1.5.12.(1)]可得

$$
\mathrm{proj}\,\big((q^W_K\otimes q^F_L)(u); \mathrm{Max}(W)/K, F/L\big) = \pi\big((q^W_K\otimes q^F_L)(u); W/K, F/L\big)
$$

从而 $\overleftarrow{\text{投影张量范数}}(u;\ \text{最大算子空间}(W)\ F) = \overleftarrow{\pi}(u;\ W,\ F)$。

(b) 由于 $\overleftarrow{\pi} \neq \pi$，存在巴拿赫空间 W 和 V，使得 $W \otimes_\pi V$ 和$W \otimes_{\overleftarrow{\pi}} V$不同；于是由第（$a$）部分以及 [BLM04，命题 1.5.12.(1)]可知，$\mathrm{Max}(W) \overleftarrow{\otimes}_{\mathrm{proj}} \mathrm{Max}(V)$ 和 $\mathrm{Max}(W) \otimes_{\mathrm{proj}} \mathrm{Max}(V)$ 不同（甚至作为巴拿赫空间也不同）。□

注 3.4. 右有限包见定义 10.10。左有限包可以类似地定义。

命题 3.5. 对于 $1 \leq p \leq \infty$，算子空间张量范数 d_p 和 g_p 是有限生成的。

证明. 根据对称性，只需证明 d_p的情形。注意，若能证明对于任意 $u \in M_n(E \otimes F)$，都有

$$(d_p)_n(u; E, F) = \inf\{\|w\|_{M_n((S^k_{p'} \otimes_{\min} E) \otimes_{\mathrm{proj}} S^k_p[F])} : k \in \mathbb{N}, (q^{p,k})_n w = u\} \tag{3.1}$$

其中 $q^{p,\ k}$: $(S^k_{p'} \otimes_{\min} E) \otimes_{\mathrm{proj}} S^k_p[F] \to E \otimes F$是张量收缩。事实上，给定 ε >0，取 $k \in \mathbb{N}, w \in M_n((S^k_{p'} \otimes_{\min} E) \otimes_{\mathrm{proj}} S^k_p[F])$，使得 $(q^{p,\ k})_n w = u$且 $\|w\|_{M_n((S^k_{p'} \otimes_{\min} E) \otimes_{\mathrm{proj}} S^k_p[F])} \leq (1+\varepsilon)(d_p)_n(u;\ E, F)$。由于投影张量范数是有限生成的，我们可以通过取 $S^k_{p'} \otimes_{\min} E$ 和 $S^k_p[F]$ 的有限维子空间来 $1+\varepsilon$ 逼近 w 的范数。不失一般性，如有必要可扩大这些子空间；因此我们可以假设上述有限维子空间具有形式 $S^k_{p'} \otimes_{\min} E_0$和 $S^k_p[F_0]$，其中某些 $E_0 \in \mathrm{OFIN}(E)$ $F_0 \in \mathrm{OFIN}(F)$成立，并且还有 $u \in M_n(E_0 \otimes F_0)$。由此可得

$$(d_p)_n(u; E_0, F_0) \leq (1+\varepsilon)^2 (d_p)_n(u; E, F),$$

这表明 d_p 是有限生成的。

现在来证明 (3.1)。回顾一下，张量收缩 q^p: $\big(S_{p'} \widehat{\otimes}_{\min} E\big) \widehat{\otimes}_{\mathrm{proj}} S_p[F] \to E \widehat{\otimes}_{d_p} F$是一个完全 1-商映射。取对偶后，有一个完全等距嵌入 $(E \otimes_{d_p} F)' \hookrightarrow \mathrm{CB}(S_{p'} \widehat{\otimes}_{\min} E, S_{p'}[F'])$。由于空间 $S^k_{p'} \otimes_{\min} E$的并集在 $S_{p'} \widehat{\otimes}_{\min} E$中稠密，因此可以通过对限制映射到 $\mathrm{CB}(S^k_{p'} \otimes_{\min} E, S^k_{p'}[F'])$取上确界，来计算 $\mathrm{CB}(S_{p'} \widehat{\otimes}_{\min} E, S_{p'}[F'])$中的范数（更一般地说，也可以计算 $\mathrm{CB}(S_{p'} \widehat{\otimes}_{\min} E, S_{p'}[F'])$上矩阵的范数），其中 k遍历 $\mathbb{N}$。因此，$M_n(E \otimes_{d_p} F)$中u 的范数，可以通过对所有将 u与范数不超过一的 $\mathrm{CB}(S_{p'} \widehat{\otimes}_{\min} E, S_{p'}[F'])$中的矩阵 φ配对所得的值取上确界来计算。根据上述结果，我们可以改为令 φ 为 $\mathrm{CB}(S^k_{p'} \otimes_{\min} E, S^k_{p'}[F'])$中范数不超过一的矩阵；但这恰好就是 (3.1) 的右侧。□

命题 3.6. 对称化 Haagerup 算子空间张量范数 $h \cap h^t$ 和 $h + h^t$是有限生成的。

证明. 由于 h 和 h^t 是完全内射的，显然 $h\cap h^t$ 也如此，因此后者是有限生成的。

考虑算子空间 E和 F, $u\in M_n(E\otimes F)$，以及 $\varepsilon>0$。设 $v,w\in M_n(E\otimes F)$，使得 $u=v+w$ 和

$$\|(v,w)\|_{M_n\left((E\otimes_h F)\oplus_1(E\otimes_{h^t}F)\right)}<(h+h^t)_n(u;E,F)+\varepsilon.$$

设 $E_0\in\mathrm{OFIN}(E)$ 和 $F_0\in\mathrm{OFIN}(F)$，使得 $v,w\in M_n(E_0\otimes F_0)$。由于 h和 h^t都是完全内射的，其 ℓ_1-和也如此（这可由第2.4节中对 ℓ_1-和的描述以及 $\mathcal{B}(H)$ 的内射性直接看出），因此我们有

$$\|(v,w)\|_{M_n\left((E_0\otimes_h F_0)\oplus_1(E_0\otimes_{h^t}F_0)\right)}=\|(v,w)\|_{M_n\left((E\otimes_h F)\oplus_1(E\otimes_{h^t}F)\right)}.$$

由于 $(h+h^t)_n(u;\ E_0,F_0)\ \le\|(v,w)\|_{M_n\left((E_0\otimes_h F_0)\oplus_1(E_0\otimes_{h^t}F_0)\right)}$，合并这些不等式可得 $(h+h^t)_n(u;\ E_0,F_0)\ <(h+h^t)_n(u;\ E,F)\ +\varepsilon$，这意味着 $h+h^t$ 是有限生成的。

□

4. The five basic lemmas

在赋范空间张量积理论中，“五个基本引理”（参见 Defant 和 Floret 著作 [DF93]中的第13节）是一些相当简单的结果，但事实证明它们“是理解和运用张量范数的基础”。具体而言，它们是 *Approximation Lemma*、 *Extension Lemma*、 *Embedding Lemma*、*Density Lemma* 和 *Local Technique Lemma*。这里我们给出算子空间情形下的对应结果，并通过一些应用展示它们的潜在用途。我们的论述遵循 [DF93]的思路。尽管证明与巴拿赫空间情形下的证明相似，但张量积所具有的算子空间性质带来了一些困难，例如，我们所给出的扩张引理 4.3 的版本，其证明还需要局部自反性这一额外假设。

4.1. 逼近引理。

引理 4.1. 设 α 和 β 是算子空间张量范数（定义在 ONORM 上）， E 和 F 是赋范算子空间， $c\ge 1$ 和

$$\alpha\le c\beta\quad on\quad E\otimes N$$

对于共终多个 $N\in\mathrm{OFIN}(F)$。如果 F 具有常数为 $C\ge 1$ 的完全有界逼近性质，那么

$$\alpha\le Cc\beta\ on\ E\otimes F.$$

证明。固定 $n\in\mathbb{N}$和 $z\in M_n(E\otimes F)$，并取 $\varepsilon>0$。由于 F具有 C-完全有界逼近性质，因此存在一个有限秩算子网 $(T_\eta)_\eta$ ，属于 $\mathrm{CB}(F,F)$，其完全有界范数以 C为界，且对于每个 $x\in M_n(E)$，都有 $\|(T_\eta)_n x-x\|\to 0$。因此，$(id_E\otimes T_\eta)_n(z)$ 在射影范数下收敛于 z，从而也在 α范数下收敛。因此，对于某个足够大的 η，我们有 $\alpha_n(z-(id_E\otimes T_\eta)_n(z);\ E,F)\ <\varepsilon$

如果我们取一个包含 $T_\eta(E)$ 的子空间 N，使其满足引理的假设，那么根据算子空间张量范数 β 的完全度量映射性质，我们有

$$\begin{aligned}\alpha_n(z;E,F) &\le \alpha_n(z-(id_E\otimes T_\eta)_n(z);E,F)+\alpha_n((id_E\otimes T_\eta)_n(z);E,F)\\ &\le \varepsilon+\alpha_n((id_E\otimes T_\eta)_n(z);E,N)\\ &\le \varepsilon+c\beta_n((id_E\otimes T_\eta)_n(z);E,N)\\ &\le \varepsilon+c\,\|T_\eta:E\to N\|_{\mathrm{cb}}\,\beta_n(z;E,F)\\ &\le \varepsilon+Cc\beta_n(z;E,F).\end{aligned}$$

由于这对每个 $\varepsilon>0$ 都成立，我们有 $\alpha_n(z;\,E,F)\le Cc\beta_n(z;\,E,F)$。 □

由命题 3.2 和前述引理，我们得到如下结论。

推论 4.2。设 α 是（定义在 OFIN 上的）算子空间张量范数，E 和 F 是赋范算子空间，且具有完全有界逼近性质，其常数分别为 C_E 和 C_F。则

$$\overleftarrow{\alpha}\le\overrightarrow{\alpha}\le C_EC_F\overleftarrow{\alpha}\quad on\quad E\otimes F.$$

特别地，如果 E 和 F 都具有完全度量逼近性质，那么 $\overleftarrow{\alpha}=\overrightarrow{\alpha}$ 在 $E\otimes F$ 上。

4.2. 延拓引理。每个 $\varphi\in(E\otimes_{\mathrm{proj}}F)'=\mathrm{CB}(E,F')$ 都有一个典范扩张 $\varphi^\wedge\in(E\otimes_{\mathrm{proj}}F'')'=\mathrm{CB}(E,F'')$，且对每个 $x\in E$ 和 $y''\in F''$，满足关系

$$\langle\varphi^\wedge,x\otimes y''\rangle=\langle L_\varphi x,y''\rangle_{F',F''},$$

其中，$L_\varphi\in\mathrm{CB}(E,F')$ 是与 φ 相关联的线性映射。延拓引理针对更一般的算子空间张量范数处理了这种情形。与巴拿赫空间情形不同，局部自反性并非自动成立，因此我们不得不将其作为要求。以下陈述中的第（a）项此前已见于 [DFU15a]。为方便读者，我们在此给出证明。此外，第（b）项的证明受 [DFU15a, 命题 3.1]）启发；该文仅针对投射范数给出了同样的论证。

引理 4.3.（右扩张引理）设 α 是 ONORM 上的算子空间张量范数，E 和 F 是赋范算子空间，且 $\varphi\in(E\otimes_{\mathrm{proj}}F)'$。则

$$\varphi\in(E\otimes_\alpha F)'\ \textit{if and only if}\ \varphi^\wedge\in(E\otimes_\alpha F'')'$$

映射 $\varphi\mapsto\varphi^\wedge$ 是从 $(E\otimes_\alpha F)'$ 到 $(E\otimes_\alpha F'')'$ 的完全等距同构，适用于以下情形：

(a) α 是有限生成的，且 F 是局部自反的。(b) α 是一个 λ- 算子空间张量范数。

证明。完全度量映射性质表明 $id_E\otimes\kappa_F\colon E\otimes_\alpha F\hookrightarrow E\otimes_\alpha F''$ 是完全压缩映射，因此限制映射 $(id_E\otimes\kappa_F)'$ 也是完全压缩映射：

$(E \otimes_\alpha F'')' \to (E \otimes_\alpha F)'$。这表明，对于任意 $(\varphi_{ij}) \in M_m\big((E \otimes_{\mathrm{proj}} F)'$ $\big)$,

$$\|(\varphi_{ij})\|_{M_m((E\otimes_\alpha F)')} \le \big\|(\varphi_{ij}^\wedge)\big\|_{M_m((E\otimes_\alpha F'')')}.$$

(*a*) 现在考虑 $n \in \mathbb{N}$、 $z_0 \in M_n(E \otimes F'')$、 $M \in \mathrm{OFIN}(E)$ 和 $N \in \mathrm{OFIN}(F'')$，使得 $z_0 \in M_n(M \otimes N)$。由于 F 是局部自反的，根据 [ER00，引理 14.3.3]，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $R \in$ 完全有界算子(N, F)，使得 $\|R\|_{\mathrm{cb}} \le 1+\varepsilon$，对于每个 $y'' \in N$、$x \in M$ 和 $1 \le i$、$j \le m$

$$\langle y'', L_{\varphi_{ij}} x\rangle_{F'',F'} = \langle Ry'', L_{\varphi_{ij}} x\rangle_{F,F'}.$$

这意味着

$$\langle \varphi_{ij}^\wedge, x \otimes y''\rangle = \langle \varphi_{ij}, (id_E \otimes R)(x \otimes y'')\rangle,$$

thus

$$\langle\langle(\varphi_{ij}^\wedge), z_0\rangle\rangle = \langle\langle(\varphi_{ij}), (id_E \otimes R)z_0\rangle\rangle$$

因此

$$\begin{aligned}
\big\|\langle\langle(\varphi_{ij}^\wedge), z_0\rangle\rangle\big\|_{M_{mn}} &\le \|(\varphi_{ij})\|_{M_m((E\otimes_\alpha F)')}\, \alpha_n((id_E \otimes R)z_0; E, F)\\
&\le \|(\varphi_{ij})\|_{M_m((E\otimes_\alpha F)')}\, \|id_E \otimes R\|_{\mathrm{cb}}\, \alpha_n(z_0; E, N)\\
&\le \|(\varphi_{ij})\|_{M_m((E\otimes_\alpha F)')}\, \|R\|_{\mathrm{cb}}\, \alpha_n(z_0; E, N)\\
&\le \|(\varphi_{ij})\|_{M_m((E\otimes_\alpha F)')}\, (1+\varepsilon)\alpha_n(z_0; E, N)
\end{aligned}$$

由于 α 是有限生成的，因此得出该结果。

(*b*) 回想一下，根据定理 2.4，我们可以将 $(E \otimes_\lambda F)' =$ 完全有界算子$_\lambda(E \times F)$ 视为，因此我们需要证明的只是映射 $\varphi \mapsto \varphi^\wedge$ 给出了一个完全等距嵌入 完全有界算子$_\lambda$ $(E\times F) \to$完全有界算子$_\lambda(E\times F'')$。注意到在证明开始时已经证明了这是一个完全压缩。根据 $\|\cdot\|_{\mathrm{cb},\lambda}$ 的定义，以及 Goldstine 定理所述的 $M_k(F)$ 的单位球在弱*-稠密于 $M_k($ $F'') = M_k(F)''$ 的单位球这一事实，我们显然得到一个完全等距。 □

类似地，可为每个 $\varphi \in (E \otimes_{\mathrm{proj}} F)'$ 定义一个左扩张：令 $^\wedge\varphi \in (E'' \otimes_\alpha F)'$ 由下式给出，其中 $x'' \in E''$ 且 $y \in F$,

$$\langle {}^\wedge\varphi, x'' \otimes y\rangle = \langle x'', R_\varphi y\rangle_{E'',E'},$$

其中 $R_\varphi \in \mathrm{CB}(F, E')$ 是映射 $R_\varphi(y)(x) = \langle \varphi, x \otimes y\rangle$。

引理 4.4。（左扩张引理）设 α 是 ONORM 上的一个算子空间张量范数， E 和 F 是赋范算子空间，且 $\varphi \in (E \otimes_{\mathrm{proj}} F)'$。那么

$$\varphi \in (E \otimes_\alpha F)' \text{ if and only if } {}^\wedge\varphi \in (E'' \otimes_\alpha F)'.$$

并且映射 $\varphi \mapsto {}^\wedge\varphi$ 在以下情形下是从 $(E \otimes_\alpha F)'$ 到 $(E'' \otimes_\alpha F)'$ 的完全等距：

(a) α 是有限生成的，且 E 是局部自反的。(b) α 是一个 λ-算子空间张量范数。

现在，这两种方法都可以应用于给定的 $\varphi \in (E \otimes_\alpha F)'$ ，从而得到两个（可能不同的）到$(E'' \otimes_\alpha F'')'$的延拓。

推论 4.5. 设 α 是 ONORM 上的算子空间张量范数， E 和 F 是赋范算子空间，并设 $\varphi \in (E \otimes_{\mathrm{proj}} F)'$。那么，从 $(E \otimes_\alpha F)'$ 到 $(E'' \otimes_\alpha F'')'$ 的下列映射都是完全等距映射：

$$\varphi \mapsto \ {}^\wedge(\varphi^\wedge) \quad and \quad \varphi \mapsto ({}^\wedge\varphi)^\wedge$$

在以下情形下：

(a) α 是有限生成的，且 E 和 F 是局部自反的。(b) α 是一个 λ-算子空间张量范数。

正如我们此前提到的，如果所涉及的算子空间张量范数是投影张量范数，那么延拓引理中不需要局部自反性；这一事实已在 [DFU15a, 命题 3.1] 中得到证明。同一篇文章还证明了 Haagerup 算子空间张量范数 h 也具有这一性质：对于任意算子空间E和 F以及 $\varphi \in (E \otimes_h F)'$，存在唯一的延拓 $\widetilde{\varphi} \in (E'' \otimes_h F'')'$，它分别关于变量 w^*连续，见 [BLM04, 1.6.7]。

关于这两个延拓是否相等，可以说明如下。重复 [DF93，推论 1.9] 中的论证，我们可以得到适用于当前情形的类似结果。也就是说，给定 $\varphi \in (E \otimes_{\mathrm{proj}} F)'$，当且仅当 $L_\varphi : E \to F'$ 弱紧时，有 ${}^\wedge(\varphi^\wedge) = ({}^\wedge\varphi)^\wedge$。这也等价于存在一个将 φ 延拓到 $(E'' \otimes_{\mathrm{proj}} F'')'$ 的延拓，且该延拓分别关于 w^* 连续。请注意，根据上文的评论，若 $\varphi \in (E \otimes_h F)'$ ，则 L_φ 弱紧。

请注意，我们有如下分离对偶对 $\left\langle E \otimes F'', (E \otimes_\alpha F)' \right\rangle$：

$$\langle z, \varphi \rangle = \varphi^\wedge(z).$$

利用双极定理，很容易看出，在巴拿赫空间的情形下，只要 α 是有限生成张量范数，单位球 $B_{E \otimes_\alpha F}$ 就在 $(E \otimes F'', (E \otimes_\alpha F)')$ 意义下稠密于单位球 $B_{E \otimes_\alpha F''}$。换言之，给定 $z \in B_{E \otimes \alpha F''}$ ，存在一个网 $(u_\eta)_\eta \subset B_{E \otimes_\alpha F}$ ，使得对每个 $\varphi \in (E \otimes_\alpha F)'$，

$$\varphi(u_\eta) \to \varphi^\wedge(z).$$

在我们的设定中，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们可以考虑以下对偶对：

$$\left\langle M_n(E \otimes F''), S_1^n[(E \otimes_\alpha F)'] \right\rangle$$

定义为

$$\langle (z_{ij}), (\varphi_{ij}) \rangle = \sum_{i,j} \varphi_{ij}^\wedge(z_{ij}).$$

容易看出，这个对偶配对系统是分离的。此外，我们有以下稠密性结果。

推论 4.6. 设 α 是 ONORM 上的算子空间张量范数， E 和 F 是赋范算子空间。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，在以下情形中，单位球 $B_{M_n(E\otimes_\alpha F)}$ 在 $\sigma(M_n(E\otimes F'')\ S_1^n[(E\otimes_\alpha F)'])$ 意义下稠密于单位球 $B_{M_n(E\otimes_\alpha F'')}$：
（a） α 是有限生成的，且 F 局部自反。（b） α 是一种 λ- 算子空间张量范数。

证明。由于 $(M_n(E\otimes_\alpha F))'$ 与 $S_1^n[(E\otimes_\alpha F)']$ 等距，因此显然，极集$\big(B_{M_n(E\otimes_\alpha F)}\big)^\circ$（在此配对系统中）为 $B_{S_1^n[(E\otimes_\alpha F)']}\cdot$。根据双极定理，只需证明 $B_{M_n(E\otimes_\alpha F'')} \subset \big(B_{S_1^n[(E\otimes_\alpha F)']}\big)^\circ\cdot$。事实上，给定 $(z_{ij})\in B_{M_n(E\otimes_\alpha F'')}$ 和 $(\varphi_{ij})\in B_{S_1^n[(E\otimes_\alpha F)']}$；由扩张引理 4.3 以及 [ER00, Thm. 4.1.8]，我们知道 $(\varphi_{ij}^\wedge)\in B_{S_1^n[(E\otimes_\alpha F'')']}$。再次利用 $(M_n(E\otimes_\alpha F''))' = S_1^n[(E\otimes_\alpha F'')']$ 等距，我们得到

$$|\langle (z_{ij}),(\varphi_{ij})\rangle| = \left|\sum_{i,j}\varphi_{ij}^\wedge(z_{ij})\right| \le 1.$$

证明至此结束。 □

4.3. 嵌入引理。算子空间张量范数通常不对子空间保持不变，但在某些条件下，嵌入到二重对偶中的映射会保持不变。

引理 4.7. 设 α 是一个算子空间张量范数（定义在 ONORM 上）。映射 g

$$id_E\otimes\kappa_F : E\otimes_\alpha F \to E\otimes_\alpha F''$$

在以下情形下是完全等距的：
(a) α 是有限生成的，且 F 是局部自反的。(b) α 是余有限生成的。(c) α 是一个 λ-算子空间张量范数。

证明。L 以及 $n\in\mathbb{N}$ 和 $z\in M_n(E\otimes_\alpha F)$。根据完全度量映射性质

$$id_E\otimes\kappa_F : E\otimes_\alpha F \to E\otimes_\alpha F''$$

始终是完全压缩映射，因此

$$\alpha_n(z;E,F'') \le \alpha_n(z;E,F).$$

(a) 根据延拓引理，

$$\begin{aligned}\alpha_n(z;E,F) &= \sup\left\{\|\langle\langle z,\Phi\rangle\rangle\|_{M_{nm}} \ :\ \Phi\in M_m((E\otimes_\alpha F)'), \|\Phi\|_{M_m((E\otimes_\alpha F)')}\le 1\right\}\\ &= \sup\left\{\|\langle\langle z,\Phi^\wedge\rangle\rangle\|_{M_{nm}} \ :\ \Phi\in M_m((E\otimes_\alpha F)'), \|\Phi\|_{M_m((E\otimes_\alpha F)')}\le 1\right\}\\ &\le \sup\left\{\|\langle\langle z,\Psi\rangle\rangle\|_{M_{nm}} \ :\ \Psi\in M_m((E\otimes_\alpha F'')'), \|\Psi\|_{M_m((E\otimes_\alpha F'')')}\le 1\right\}\\ &= \alpha_n(z;E,F''),\end{aligned}$$

这就得到了反向不等式。

(*b*) 设 $L \in$ OCOFIN(F)，那么 L^{00}（在 F''中构成）属于 OCOFIN(F'')，且映射

$$\kappa_{F/L} : F/L \to (F/L)'' = F''/L^{00}$$

是完全等距且满射的；此外，$q^{F''}_{L^{00}} \circ \kappa_F = \kappa_{F/L} \circ q^F_L$。因此，

$$\begin{aligned}
\alpha_n\big((id_E \otimes q^F_L)_n(z); E, F/L\big) &= \alpha_n\big((id_E \otimes (\kappa_{F/L} \circ q^F_L))_n(z); E, (F/L)''\big) \\
&= \alpha_n\big((id_E \otimes q^{F''}_{L^{00}}) \circ (id_E \otimes \kappa_F))_n(z); E, F''/L^{00}\big) \\
&\leq \overleftarrow{\alpha}_n((id_E \otimes \kappa_F))_n(z); E, F'') \\
&= \overleftarrow{\alpha}_n(z; E, F'') = \alpha_n(z; E, F'')
\end{aligned}$$

用 E替代 E/K作同样的论证，我们可以得出 α_n(z; E, F) $\leq \alpha_n$(z; E, F'')。

(*c*) 这里可以采用情形（*a*）中的同一证明，因为 λ-算子空间张量范数是有限生成的，而且对于采用此范数的延拓引理而言，并不需要假设 F 具有局部自反性。

□

我们指出，上面的 (c) 部分是 [AK21, 引理 11], 的推广；在该文中，假设这些空间是 C^*-代数，且只证明了嵌入是等距同构，而非完全等距。

注意，算子空间 F 的完备化与 F 具有相同的二重对偶。因此，作为前一结果的推论，我们有：

~推论 4.8. 设 α 是 ONORM 上的算子空间张量范数，且 F 是赋范算子空间 F 的完备化。映射

$$id_E \otimes \iota_F : E \otimes_\alpha F \to E \otimes_\alpha \widetilde{F},$$

~其中 ι_F: $F \to F$ 是典范嵌入，在以下情形下是完全等距且具有稠密值域：

(a) α 是有限生成的，且 F 是局部自反的。(b) α 是余有限生成的。(c) α 是一种 λ-算子空间张量范数。

4.4. 稠密性引理。现在我们陈述所谓的稠密性引理，它断言：定义在某些赋范算子空间的张量积上的给定完全有界映射，可以扩展为定义在这些空间的完备化的张量积上的完全有界映射。和往常一样，对于有限生成的情形，我们需要局部自反性假设。证明可由推论 4.8 轻易得出。

引理 4.9。设 α 是一个算子空间张量范数（定义在 ONORM 上），E、F 是赋范算子空间，E_0 和 F_0 分别是 E 和 F 的稠密子空间。假设 $T \in$

$CB(E \otimes_{\mathrm{proj}} F;\, G)$，使得 $T|_{E_0 \otimes_\alpha F_0} \in CB(E_0 \otimes_\alpha F_0;\, G)$。那么 $T \in CB(E \otimes_\alpha F;\, G)$，且

$$\|T\|_{CB(E_0 \otimes_\alpha F_0;G)} = \|T\|_{CB(E \otimes_\alpha F;G)},$$

在以下情形下：
(a) α 是有限生成的，且 F 是局部自反的。(b) α是
余有限生成的。(c) α 是一个 λ算子空间张量范数。

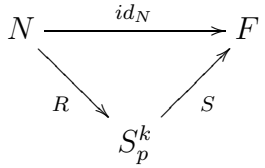
4.5. $\mathscr{OS}_p$局部技巧引理。在巴拿赫空间情形下，$\mathscr{L}_p$局部技巧引理使我们能够将关于 ℓ_p^n 空间张量积的结果转移到一般的 $\mathscr{L}_p$空间（粗略地说，这类空间的有限维子空间"一致地类似于" ℓ_p^n）。在算子空间情形下，$\mathscr{L}_p$空间的一种可能延拓是 $\mathscr{OS}_p$ 空间（定义见第 2.7 节）。对于这一延拓，我们有以下局部技巧引理。

引理 4.10. 设 α 和 β 是算子空间张量范数，$c \geq 0$ 和 E 是赋范算子空间，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$,

$$\alpha \leq c\beta \quad on \quad E \otimes S_p^k.$$

则对于每个$\mathscr{OS}_p$, c空间 F，$\alpha \leq Cc\overrightarrow{\beta}$在$E \otimes F$上。

证明。对于 $N \in \mathrm{OFIN}(F)$，根据 [JNRX04，引理 2.1] ，我们可以作如下分解



其中 $\|R\|_{\mathrm{cb}} \|S\|_{\mathrm{cb}} \leq C(1+\varepsilon)$。令 $M := S(S_p^k)$。那么对于每个 $z \in M_n(E \otimes N)$,

$$\begin{aligned}\alpha_n(z; E, M) = \alpha_n((id_E \otimes (S \circ R))_n z; E, M) &\leq \|S\|_{\mathrm{cb}}\, \alpha_n((id_E \otimes R)_n z; E, S_p^k) \\ &\leq \|S\|_{\mathrm{cb}}\, c\beta_n((id_E \otimes R)_n z; E, S_p^k) \leq \|S\|_{\mathrm{cb}}\, \|R\|_{\mathrm{cb}}\, c\beta_n(z; E, N).\end{aligned}$$

结论得证。 □

注 4.11。注意到，更一般地，只要 F 具有 γ_p-逼近性质 [JNRX04，第 1], 节，借助于 [JNRX04，引理 1.4], 上述证明便适用。还要注意，同样的论证也能为这些空间的其他算子空间版本给出局部技巧引理的相应版本，例如 $\mathscr{L}_p$ 空间的 $\mathscr{OL}_p$ 版本，见 [JNRX04]。

5. Dual o.s. tensor norms

简而言之，算子空间张量范数 α 的对偶算子空间张量范数 α' ，是使

$$E \otimes_{\alpha'} F = (E' \otimes_\alpha F')'$$

对任意 E、$F \in$ OFIN 都成为完全等距映射的范数。更明确地，当 E、$F \in$ OFIN 且满足 $z \in M_n(E \otimes F)$ 时，我们定义

$$\alpha'_n(z; E, F) := \sup\big\{ \|\langle\langle u, z\rangle\rangle\|_{M_{mn}} \mid \alpha_m(u; E', F') \le 1\big\}.$$

例如，我们来验证最小张量范数和射影算子空间张量范数互为对偶。设 E 和 F 是有限维算子空间。根据定义，$E \otimes_{\min} F$ 上的算子空间结构由嵌入 $E \otimes_{\min} F \to \mathrm{CB}(E', F)$诱导。现在，$(E' \otimes_{\mathrm{proj}} F')'$完全等距于 $\mathrm{CB}(E', F'') = \mathrm{CB}(E', F)$，由此我们得出典范识别

$$E \otimes_{\min} F = (E' \otimes_{\mathrm{proj}} F')'$$

是完全等距的。取对偶空间并交换 E, F与 E', F'的角色，我们还得到一个完全等距映射

$$E \otimes_{\mathrm{proj}} F = (E' \otimes_{\min} F')'.$$

命题 5.1. 若 α 是 OFIN 上的算子空间张量范数，则 α'也是。

证明. 设 E, F是有限维算子空间。显然，α'是 $E \otimes F$上的一种算子空间结构。由最小张量范数 $\le \alpha \le$ 投影张量范数，取对偶空间可得最小张量范数 =投影张量范数$' \le \alpha' \le$ 最小张量范数 $' =$ 投影张量范数（对有限维空间而言）。类似的对偶性论证表明，α' 是一致的。□

$\overrightarrow{\alpha'}$ α' 的有限包 α' 称为算子空间张量范数 α （定义在 OFIN 或 ONORM 上）的对偶算子空间张量范数（定义在 ONORM 上）。

以下性质易于验证：

命题 5.2. (a) 若 $\alpha \le c\beta$，则 $\beta' \le c\alpha'$。

(b) $\alpha = \alpha''$ 在 OFIN 上，且

(c) α 是有限生成的，当且仅当 $\alpha = \alpha''$ 在 ONORM 上。

由于 min 和 proj 都是有限生成的，min$'$ = proj，且 proj$'$ =min。此外，$h' = h$（例如参见 [ER00，第 9] 章）。另外，对称化 Haagerup 算子空间张量范数彼此对偶。

命题 5.3. $(h \cap h^t)' = h + h^t$ 和 $(h + h^t)' = h \cap h^t$。

证明。根据命题 3.6，$h \cap h^t$ 和 $h + h^t$ 都是有限生成的，因此只需验证它们在有限维空间上互为对偶。设 $E, F \in$ 属于 OFIN。对典范完全等距映射 $E \otimes_{h \cap h^t} F \hookrightarrow (E \otimes_h F) \oplus_\infty (E \otimes_{h^t} F)$取伴随，可得一个典范完全商映射$(E \otimes_h F)' \oplus_1 (E \otimes_{h^t} F)' \twoheadrightarrow (E \otimes_{h \cap h^t} F)'$。但 h 和 h^t的自对偶性意味着$(E \otimes_h F)' = E' \otimes_h F'$和$(E \otimes_{h^t} F)' = E' \otimes_{h^t} F'$，因此可得完全商映射$(E' \otimes_h F') \oplus_1 (E' \otimes_{h^t} F') \twoheadrightarrow (E \otimes_{h \cap h^t} F)'$。这正是赋予 $E' \otimes_{h+h^t} F'$序结构的同一个商映射，因此 $E' \otimes_{h+h^t} F' = (E \otimes_{h \cap h^t} F)'$，如所声称。□

定义 5.4。给定一个算子空间张量范数 α，其伴随（或逆变）算子空间张量范数定义为 $\alpha^* = (\alpha^t)' = (\alpha')^t$。

与经典情形一样，下面的定理说明，完全等距嵌入

$$E \otimes_{\alpha'} F \to (E' \otimes_{\alpha} F')',$$

对有限维空间成立，并以何种方式推广到无限维空间。

定理 5.5（对偶定理）。设 α 是一个算子空间张量范数（定义在 OFIN 上），且 E、 F 是赋范算子空间。以下自然映射均为完全等距映射:

$$E \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F \hookrightarrow (E' \otimes_{\alpha'} F')' \tag{5.1}$$

$$E' \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F \hookrightarrow (E \otimes_{\alpha'} F')' \qquad \textit{whenever } E \textit{ is locally reflexive} \tag{5.2}$$

$$E' \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F' \hookrightarrow (E \otimes_{\alpha'} F)' \qquad \textit{whenever } E \textit{ and } F \textit{ are locally reflexive} \tag{5.3}$$

证明。为证明 (5.1)，首先注意到

$$\mathrm{OFIN}(E') = \{K^0 \mid K \in \mathrm{OCOFIN}(E)\}$$

并且对于 $(K, L) \in \mathrm{OCOFIN}(E) \times \mathrm{OCOFIN}(F)$、 $z \in M_n(E \otimes F)$ 和 $u \in M_m(K^0 \otimes L^0) \subset M_m(E' \otimes F')$，有

$$\langle\langle z, u\rangle\rangle = \langle\langle (q_K^E \otimes q_L^F)(z), u\rangle\rangle$$

现在，根据对有限维空间成立的对偶关系，

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{\alpha}_n(z; E, F) &= \sup_{K,L} \left\{\alpha_n\big((q_K^E \otimes q_L^F)(z); E/K, F/L\big)\right\} \\
&= \sup_{K,L} \sup \left\{ \left\| \langle\langle (q_K^E \otimes q_L^F)(z), u\rangle\rangle \right\|_{M_{mn}} \mid \alpha'_m(u; K^0, L^0) < 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \|\langle\langle z, u\rangle\rangle\|_{M_{mn}} \mid \overrightarrow{\alpha'}_m(u; E', F') < 1 \right\}
\end{aligned}$$

而这正是（5.1）。

现在考虑这个交换图

$$\begin{array}{ccc}
E' \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F & \xrightarrow{\phi_1} & (E'' \otimes_{\alpha'} F')' \\
& \searrow & \uparrow \phi_2 \\
& & (E \otimes_{\alpha'} F')'
\end{array}$$

注意，根据（5.1），ϕ_1 是完全等距；而根据扩张引理 4.3，ϕ_2 是完全等距；由此可得（5.2）。同理，在这个交换图中

$$\begin{array}{ccc} E' \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F' & \xrightarrow{\psi_1} & (E \otimes_{\alpha'} F'')' \\ & \searrow & \uparrow \psi_2 \\ & & (E \otimes_{\alpha'} F)' \end{array}$$

ψ_1 由 (5.2) 可知是完全等距的，而 ψ_2 由扩张引理 4.3 可知是完全等距的；由此得到 (5.3)。□

注5.6。对于 λ-算子空间张量范数，扩张引理 4.3 无需局部自反性这一假设也成立。因此，在对偶定理的方程 (5.2) 和 (5.3) 中，若 α' 是一个 λ-张量范数，则无需涉及空间具有局部自反性。

特别地，对于 $\alpha' =$ 投影张量范数，回顾 $\overleftarrow{\alpha}$ =最小张量范数 =最小，由此可知，对于任意赋范算子空间 E 和 F，有以下已知的完全等距嵌入

$$E' \otimes_{\min} F \hookrightarrow (E \otimes_{\mathrm{proj}} F')' \quad \text{and} \quad E' \otimes_{\min} F' \hookrightarrow (E \otimes_{\mathrm{proj}} F)'.$$

对偶定理的一个重要推论如下：

推论 5.7。若 E 和 F 是具有完全度量逼近性质的赋范算子空间，则自然映射

$$E \otimes_\alpha F \to E \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F \qquad and \qquad E \otimes_\alpha F \to (E' \otimes_{\alpha'} F')'$$

是完全等距映射。

证明。命题 3.2 和推论 4.2 表明，$E \otimes_\alpha F$与 $E \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F$之间是完全等距的；现在由 (5.1) 即可推出其余结论。□

注意，若将 CMAP 性质替换为 CBAP 性质，则上述识别变为完全同构（其范数由 CBAP 常数控制）。

现在我们证明 Haagerup 算子空间张量范数既是有限生成的，也是余有限生成的。

注 5.8。设 h 为 Haagerup 算子空间张量范数。那么，

$$h = \overleftarrow{h} = \overrightarrow{h}.$$

证明。$h = \overrightarrow{h}$ 这一事实很容易得出，因为 Haagerup 算子空间张量范数保持完全等距映射 [ER00, 命题 9.25]。

为了看出 $h = \overleftarrow{h}$，注意，根据对偶定理 5.5，下面的典范嵌入是完全等距的

$$E \otimes_{\overleftarrow{h}} F \hookrightarrow (E' \otimes_{h'} F')' = (E' \otimes_h F')', \tag{5.4}$$

其中，在最后一个等式中我们用到了算子空间张量范数的自对偶性质h [ER00，推论 9.4。8]。

另一方面，由 [ER00，定理 9.4.7.] 以及嵌入引理 4.7 可知

$$E \otimes_h F \hookrightarrow E'' \otimes_h F'' \hookrightarrow (E' \otimes_h F')', \tag{5.5}$$

是完全等距映射。

由于等式 (5.4)、(5.5) 中的两个包含映射都是完全等距映射， h 和 $\overleftarrow{h}$必定作为算子空间张量范数相同。□

一般而言，算子空间张量范数并非既有限生成又余有限生成，正如我们刚刚看到的 Haagerup 算子空间张量范数和极小算子空间张量范数的情形。对于许多目的而言，只需等式 $\overrightarrow{\alpha} = \overleftarrow{\alpha}$ 对有限维空间或局部自反空间成立即可。这促使我们给出以下定义，并将在下文中使用。

定义 5.9。若算子空间张量范数 α 满足以下条件，则称其为右可达:

$$\overrightarrow{\alpha}_n(\cdot; M, F) = \overleftarrow{\alpha}_n(\cdot; M, F) \qquad \text{for all } M \in \mathrm{OFIN}, F \in \mathrm{ONORM}, n \in \mathbb{N}$$

若满足以下条件，则称其为左可达:

$$\overrightarrow{\alpha}_n(\cdot; E, M) = \overleftarrow{\alpha}_n(\cdot; E, M) \qquad \text{for all } M \in \mathrm{OFIN}, E \in \mathrm{ONORM}, n \in \mathbb{N}.$$

同时左可达和右可达的算子空间张量范数称为可达，而完全可达意味着 $\overrightarrow{\alpha} = \overleftarrow{\alpha}$。

在许多情况下，讨论可达性时会自然地涉及局部自反性。基于此，我们引入以下定义:

定义 5.10. 若算子空间张量范数 α 满足

$$\overrightarrow{\alpha}_n(\cdot; M, F) = \overleftarrow{\alpha}_n(\cdot; M, F) \qquad \text{for all } M \in \mathrm{OFIN}, F \in \mathrm{OLOC}, n \in \mathbb{N}$$

若满足，则称其为局部左可达

$$\overrightarrow{\alpha}_n(\cdot; E, M) = \overleftarrow{\alpha}_n(\cdot; E, M) \qquad \text{for all } M \in \mathrm{OFIN}, E \in \mathrm{OLOC}, n \in \mathbb{N}.$$

同时局部左可达和局部右可达的算子空间张量范数称为局部可达，而局部完全可达意味着 $\overrightarrow{\alpha} = \overleftarrow{\alpha}$ 属于 OLOC $\otimes$ OLOC。

我们已经看到，最小张量范数和 Haagerup 算子空间张量范数都是有限生成且余有限生成的，换言之，它们都是完全可达的。回想一下，正如我们在命题 3.3 中看到的，投射算子空间张量范数不是余有限生成的，因此它并非完全可达。不过，与巴拿赫空间框架中的情形一样，proj 确实是可及的。为此，令 $E \in$ ONORM 和 $M \in$OFIN。我们总有如下自然映射

$$E \otimes_{\mathrm{proj}} M \to (E' \otimes_{\min} M')' \tag{5.6}$$

是完全等距的（见 [ER90，定理 2.2] 或注 8.11）。另一方面，由对偶定理 5.5 可知，我们还有如下映射

$$E \otimes_{\overleftarrow{\text{proj}}} M \to (E' \otimes_{\min} M')'$$

是完全等距的。因此，两个算子空间张量范数，$\overrightarrow{\text{proj}} = \text{proj}$ 和 $\overleftarrow{\text{proj}}$，在 $E \otimes M$ 上必定一致。这说明 proj 具有左可及性。类似地，我们有 proj 也具有右可达性，因此它是可及的。

更一般地，类似的论证将表明，任意 λ-算子空间张量范数都是可及的。我们先给出一个计算 λ-算子空间张量范数对偶的公式，该公式本质上是 [Wie09，命题 5.3]。

命题 5.11. 设 E 和 F 是算子空间，且 $u \in M_n(E \otimes F)$。对于任意λ-算子空间张量范数，

$$\lambda'_n(u; E, F) = \sup\left\{ \left\| \left(\otimes_{B_k^\lambda} (\phi, \psi) \right)_n (u) \right\|_{M_{n\tau(k)}} : k \in \mathbb{N}, \|\phi\|_{M_k(E')}, \|\psi\|_{M_k(F')} \le 1 \right\}$$

证明。首先假设 E 和 F 是有限维的。根据 λ' 的定义和定理 2.4，

$$E \otimes_{\lambda'} F = (E' \otimes_\lambda F')' = \mathrm{CB}_\lambda(E' \times F').$$

因此，$\lambda'_n(u; E, F)$ 是双线性映射 $\Phi_u : E' \times F' \to M_n$（与 u相关联）的范数$\|\Phi_u\|_{\mathrm{cb},\lambda}$。根据定义，该范数为

$$\|\Phi_u\|_{\mathrm{cb},\lambda} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left\| (\Phi_u)_{B_k^\lambda}(\phi, \psi) \right\|_{M_{n\tau(k)}} : \|\phi\|_{M_k(E')}, \|\psi\|_{M_k(F')} \le 1 \right\},$$

因此只需验证

$$\left(\otimes_{B_k^\lambda} (\phi, \psi) \right)_n (u) = (\Phi_u)_{B_k^\lambda}(\phi, \psi)$$

这可由定义直接推出。

现在考虑任意的 E 和 F 的情形。设 $E_0 \in \mathrm{OFIN}(E)$ 和 $F_0 \in \mathrm{OFIN}(F)$，使得 $u \in M_n(E_0 \otimes F_0)$。根据前面的论证，

$$\lambda'_n(u; E_0, F_0) = \sup\left\{ \left\| \left(\otimes_{B_k^\lambda} (\phi_0, \psi_0) \right)_n (u) \right\|_{M_{n\tau(k)}} : k \in \mathbb{N}, \|\phi_0\|_{M_k(E_0')}, \|\psi_0\|_{M_k(F_0')} \le 1 \right\}.$$

根据 Arveson 延拓定理，$\phi_0 \in M_k(E_0') = \mathrm{CB}(E_0, M_k)$ 和 $\psi_0 \in M_k(F_0') = \mathrm{CB}(F_0, M_k)$ 分别存在保范延拓 $\phi \in \mathrm{CB}(E, M_k)$ 和 $\psi \in \mathrm{CB}(F, M_k)$。由于显然

$$\left(\otimes_{B_k^\lambda} (\phi, \psi) \right)_n (u) = \left(\otimes_{B_k^\lambda} (\phi_0, \psi_0) \right)_n (u),$$

由此可得

$$\lambda'_n(u; E_0, F_0) = \sup\left\{ \left\| \left(\otimes_{B_k^\lambda} (\phi, \psi) \right)_n (u) \right\|_{M_{n\tau(k)}} : k \in \mathbb{N}, \|\phi\|_{M_k(E')}, \|\psi\|_{M_k(F')} \le 1 \right\},$$

因此，$\lambda'_n(u; E, F)$ 也等于同一个量。 □

作为直接推论，我们得到以下结果（在 [Wie09，定义 5.1] 中，该结果被作为 λ 的对偶的定义）。

推论 5.12. 设 E 和 F 为算子空间。对于任意 λ-算子空间张量范数，自然映射

$$E \otimes_{\lambda'} F \hookrightarrow \mathrm{CB}_\lambda(E' \times F')$$

是完全等距的。

推论 5.13. 设 E 和 F 为算子空间。对于任意 λ-算子空间张量范数，自然映射

$$E' \otimes_{\lambda'} F' \hookrightarrow \mathrm{CB}_\lambda(E \times F)$$

是完全等距的。

证明. 根据前一个结果，自然映射

$$E' \otimes_{\lambda'} F' \hookrightarrow \mathrm{CB}_\lambda(E'' \times F'') \tag{5.7}$$

是完全等距的。正如我们已经注意到的（见扩张引理 4.3 的证明），我们还有一个典范的完全等距嵌入

$$\mathrm{CB}_\lambda(E \times F) \hookrightarrow \mathrm{CB}_\lambda(E'' \times F''). \tag{5.8}$$

显然，映射 (5.7) 的像包含于映射 (5.8) 的像中，由此得到所需结果。□

命题 5.14. 设 E 和 F 为算子空间，且 E 为有限维。对于任意 λ-算子空间张量范数，自然映射

$$E \otimes_\lambda F \hookrightarrow (E' \otimes_{\lambda'} F')'$$

是完全等距的。

证明. 根据前一个结果，自然映射

$$E' \otimes_{\lambda'} F' \hookrightarrow \mathrm{CB}_\lambda(E'' \times F'')$$

是完全等距的；又由于 E 是有限维的，可知该映射是满射，因此 $E' \otimes_{\lambda'} F' = \mathrm{CB}_\lambda(E'' \times F'')$。取对偶空间并利用定理 2.4，得到

$$(E \otimes_\lambda F'')'' = \mathrm{CB}_\lambda(E'' \times F'')' = (E' \otimes_{\lambda'} F')',$$

结合嵌入引理 4.7，即得所需结果。□

定理 5.15. 任意 λ-算子空间张量范数都是可及的。

证明. 设 E 和 F 是算子空间，且 E 是有限维的。由前面的结果，自然映射

$$E \otimes_\lambda F \hookrightarrow (E' \otimes_{\lambda'} F')'$$

是完全等距的，根据对偶定理 5.5，亦然

$$E \otimes_{\check{\lambda}} F \hookrightarrow (E' \otimes_{\lambda'} F')',$$

这意味着 $E \otimes_\lambda F = E \otimes_{\overleftarrow{\lambda}} F$，因此 λ 是右可达的。左可及性的证明类似。□

算子空间张量范数 α 的左可达性给出了一个完全等距映射，类似于公式（5.6）中出现的映射（针对算子空间张量范数 proj）。这一事实结合 CMAP 假设可推出以下结果。

推论 5.16。(a) 设 $E \in$ONORM，F 为具有 CMAP 的赋范算子空间，且 α 为左可达的算子空间张量范数。那么，

$$E \otimes_{\overrightarrow{\alpha}} F \to E \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F \qquad and \qquad E \otimes_{\overrightarrow{\alpha}} F \to (E' \otimes_{\alpha'} F')'$$

是完全等距映射。
(b) 设 $E \in$ OLOC，F 为具有 CMAP 的赋范算子空间，且 α 为局部左可达的算子空间张量范数。那么，

$$E \otimes_{\overrightarrow{\alpha}} F \to E \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F \qquad and \qquad E \otimes_{\overrightarrow{\alpha}} F \to (E' \otimes_{\alpha'} F')'$$

是完全等距映射。
(c) 对右可达性／局部右可达性，也有类似结果。

证明。我们只证明 (a)，因为其他结论的证明类似。注意，由于算子空间张量范数的左可达性，我们有

$$\overrightarrow{\alpha} = \overleftarrow{\alpha} \qquad \text{on} \qquad E \otimes M \tag{5.9}$$

对每个 $M \in$OFIN(F) 都成立。现在，根据逼近引理 4.1，由于 F具有 CMAP，$\overrightarrow{\alpha}$和 $\overleftarrow{\alpha}$在 $E \otimes F$上重合，因此

$$E \otimes_{\overrightarrow{\alpha}} F \to E \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F$$

是完全等距的。根据前面的识别和对偶定理 5.5，$E \otimes_{\overrightarrow{\alpha}} F \to (E' \otimes_{\alpha'} F')'$ 也是完全等距的。□

注意，根据前一推论陈述中的命题 3.2，我们可以用 α 替换 $\overrightarrow{\alpha}$，当然，其他一切都保持不变。现在我们来考察对偶算子空间张量范数的可达性问题。

命题 5.17。设 α 是 ONORM 上的一个算子空间张量范数。
(a) 如果 α 右可达（分别为左可达、可及），那么 α' 局部右可达（分别为局部左可达、局部可及）。(b) 如果 α 可及，那么转置算子空间张量范数 α^t 可及，而伴随算子空间张量范数 α^* 局部可及。

证明。假设 α 是右可达的。那么对于所有 $M \in$ OFIN 和 $F \in$OLOC，我们都有完全等距映射

$$M' \otimes_{\alpha''} F' = M' \otimes_{\overrightarrow{\alpha}} F' = M' \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F' = (M \otimes_{\alpha'} F)'$$

其中，第一个等式由命题 5.2 得出，第二个等式由右可达性得出，第三个等式由对偶定理 5.5 得出。因此，我们也有完全等距映射

$$M \otimes_{\alpha'} F \hookrightarrow (M \otimes_{\alpha'} F)'' = (M' \otimes_{\alpha''} F')',$$

这意味着 $\overleftarrow{\alpha'} = \alpha' = \overrightarrow{\alpha'}$（同样由对偶定理可得）属于 OFIN $\otimes$ OLOC。这表明 α' 是局部右可达的。 (b) 部分显然成立。 □

在巴拿赫空间情形中，右（左）可达张量范数的对偶仍是右（左）可达的。对于算子空间，我们在前一个命题中得到的结论较弱，因为我们证明的只是对偶范数是 *locally* 右（左）可达的。不过，我们不知道这一概念是否确实较弱，因为我们没有任何例子能说明某个算子空间张量范数是局部右（左）可达的，却不是右（左）可达的。

6. The completely bounded approximation property

回顾一下，给定 $C \geq 1$，如果一个赋范算子空间具有 C-完全有界逼近性质（简称C-CBAP），则存在一个有限秩映射网 $\phi_i : E \to E$，使得 $\|\phi_i\|_{\mathrm{cb}} \leq C$ 对所有 i 以及每个 $x \in E$, $\|\phi_i(x) - x\| \to 0$。本节的目标之一是通过研究涉及张量积的各种条件来探讨 CBAP，这与 [ER00 第 11 节中对算子空间逼近性质的刻画思路一致。2]我们还将讨论一种较弱的版本，称为 W*CBAP，它沿用了张量积经典理论 [DF93 第 16]节中的许多重要等价关系。

对于赋范算子空间 E，我们采用记号 $K_\infty(E) = \mathcal{K} \otimes_{\min} E$，以强调我们将该空间视为由无穷多个 E 值矩阵组成；关于如何将 $K_\infty(E)$ 理解为由 $M_n(E)$ 这些 E 值矩阵空间的并所作的完备化，具体细节见[ER00，第 10 节。1] 给定赋范算子空间E和 F，回忆一下，若 CB(E,F) 中的网 (φ^α) 满足：对于每个 $x \in K_\infty(E)$，都有 $\varphi^\alpha_\infty(x) \to \varphi_\infty(x)$ 在 $K_\infty(F)$ [的范数拓扑中收敛，则称其在稳定点范数拓扑下收敛至 φ；见 ER00，第 11 节。2]

我们对 CBAP 的第一个刻画（下文命题 6.2）对应于 [ER00，引理 11.2，1]，但我们使用的不是稳定点范数拓扑，而是点范数拓扑（记作 τ）。原因将在下面的备注中说明。

注 6.1. 注意，对于 CB(E,F) 中的有界网，稳定点范数拓扑中的收敛与点范数拓扑中的收敛一致。事实上，设 $\varphi^\alpha, \varphi \in$ CB(E,F) 且 $x \in K_\infty(E)$。若 $P^m : K_\infty(E) \to K_\infty(E)$ 表示

截断算子，

$$\|\varphi_\infty^\alpha(x)-\varphi_\infty(x)\|_{K_\infty(F)} \le \|\varphi^\alpha\|_{\mathrm{cb}}\,\|x-P^m(x)\|_{K_\infty(E)} + \|\varphi_m^\alpha(P^m(x))-\varphi_m(P^m(x))\|_{M_m(F)} + \|\varphi\|_{\mathrm{cb}}\,\|P^m(x)-x\|_{K_\infty(E)},$$

这表明，当 φ^α 有界时，点范数拓扑中的收敛蕴含稳定点范数拓扑中的收敛（反向蕴含显然成立，且一般情况下都成立）。

命题 6.2. 设 E 是一个赋范算子空间，且 $C \ge 1$。以下条件等价：

(a) E 具有 C-完全有界逼近性质。（b） $C\cdot B_{E'\otimes_{\min}E}$ 在 $B_{\mathrm{CB}(E,E)}$ 中关于 τ 稠密。（c）对于任意赋范算子空间 F， $C\cdot B_{E'\otimes_{\min}F}$ 在 $B_{\mathrm{CB}(E,F)}$ 中关于 τ 稠密。（d）对于任意赋范算子空间 F， $C\cdot B_{F'\otimes_{\min}E}$ 在 $B_{\mathrm{CB}(F,E)}$ 中关于 τ 稠密。

证明. $(a)\Rightarrow(b)$：设 E 具有 C-完全有界逼近性质，因此存在一个有限秩映射网 $\phi_i : E\to E$，使得对所有 i 以及每个 $x\in E$，都有 $\|\phi_i\|_{\mathrm{cb}}\le C$、$\|x-\phi_i x\|\to 0$。这恰好意味着 $\phi_i \xrightarrow{\tau} id_E$，并注意到每个 ϕ_i 都可以与 $C\cdot B_{E'\otimes_{\min}E}$ 中的一个元素等同。对于任意其他的 $\varphi\in B_{\mathrm{CB}(E,E)}$，网 $(\phi_i\circ\varphi)_i$ 即可满足要求。反向推理便得到 $(b)\Rightarrow(a)$。

现在，若 (ϕ_i) 是 $C\cdot B_{E'\otimes_{\min}E}$ 中收敛到 id_E 的一个网（相对于 τ 拓扑），那么对任意 $\psi\in B_{\mathrm{CB}(E,F)}$，网 $\psi\circ\phi_i\in C\cdot B_{E'\otimes_{\min}F}$ 都在 τ 拓扑下收敛到 ψ。类似地，对 $\psi\in B_{\mathrm{CB}(F,E)}$，网 $\phi_i\circ\psi\in C\cdot B_{F'\otimes_{\min}E}$ 都在 τ 拓扑下收敛到 ψ。这证明了 $(b)\Rightarrow(c)$ 和 $(b)\Rightarrow(d)$。通过取 $F=E$，显然可得蕴含关系 $(c)\Rightarrow(b)$ 和 $(d)\Rightarrow(b)$。□

值得注意的是，尽管完备性在 [ER00, 第 11 节2], 中起着重要作用，但我们并不假设它。这是意料之中的，因为巴拿赫空间情形也是如此：请注意，在 [DF93] 中，关于 BAP 的一节讨论的是赋范空间，而关于 AP 的一节讨论的是巴拿赫空间。关于这一点，我们指出下面这个简单的引理，它表明对于 CBAP，使用一个空间还是使用它的完备化 E 并无区别。照例， E 表示 E的完备化。此外，给定 $\varphi\in$ CB(E,F)，我们用 $\widetilde{\varphi}$ 表示它到一个属于 CB(E,F) 的映射的唯一延拓~ ~。

~引理 6.3。 E 具有 C-完全有界逼近性质，当且仅当 E 具有 C-完全有界逼近性质。

证明。（⇒）设（φ^α）是 CB(E,E) 中由有限秩映射构成的网，其完全有界范数至多为 C~，并在点范数拓扑下收敛到 E 的恒等映射。令 $\widetilde{x}\in E$。由三角不等式可得，对于 $x\in E$

$$\|\widetilde{\varphi}^\alpha(\widetilde{x})-\widetilde{x}\| \le \|\widetilde{\varphi}^\alpha\|\,\|\widetilde{x}-x\| + \|\varphi^\alpha(x)-x\| + \|x-\widetilde{x}\|,$$

这表明 $(\widetilde{\varphi}^\alpha)$ 是一列完全有界范数至多为 C、在点范数拓扑下收敛到 E 上恒等映射的有限秩映射网~。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$($\Leftarrow$) 设 (ψ^α) 是 CB(E,E) 中一列完全有界范数至多为 $C\widetilde{\ }$、在点范数拓扑下收敛到 E 上恒等映射的有限秩映射网。对每个 α，令 E_α 为 ψ^α 的值域；对每个 $\delta>0$，利用扰动求得一个线性映射 $R_\delta\colon E_\alpha\to E$，使得 $\|R_\delta - Id_{E_\alpha}\|_{\mathrm{cb}}<\delta$。令 $\varphi^{\alpha,\,\delta}$ 为 $\frac{1}{1+\delta}R_\delta\circ\psi^\alpha$ 在 E 上的限制映射。那么对任意 $x\in E$,

$$\left\|\varphi^{\alpha,\delta}(x)-x\right\|\le\frac{1}{1+\delta}\left\|R_\delta\psi^\alpha(x)-\psi^\alpha(x)\right\|+\frac{\delta}{1+\delta}\left\|\psi^\alpha(x)\right\|+\left\|\psi^\alpha(x)-x\right\|,$$

因此，$(\varphi^{\alpha,\,\delta})$ 是 CB(E,E) 中由有限秩映射组成的一个网，其完全有界范数至多为 C，并在 E 的点范数拓扑下收敛于恒等映射。□

对于赋范算子空间 E和 F，回忆一下，若 CB(E,F) 中的一个网 (φ^α) 满足：对每个 $x\in K_\infty(E)$，我们都有 $\varphi^\alpha_\infty(x)\to\varphi_\infty(x)$，且在 $K_\infty(F)$ 的弱拓扑下 [ER00，第 11 节。2]，则称其在稳定逐点弱拓扑（记为 τ_w）下收敛于 φ。

我们指出，尽管 [ER00，第 11 节。2]处理的是巴拿赫算子空间，但 [ER00，命题 11.2。2] 的证明对赋范算子空间也同样适用。因此， [ER00，推论 11.2。3] 的证明结合命题 6.2，得到以下结果。

推论 6.4。设 E 是赋范算子空间，且 $C\ge 1$。以下条件等价：

(a) E 具有 C-完全有界逼近性质。 (b) $C\cdot B_{E'\otimes_{\min}E}$ 在 $B_{\mathrm{CB}(E,E)}$ 中关于 τ_w 稠密。 (c) 对任意算子空间 F， $C\cdot B_{E'\otimes_{\min}F}$ 在 $B_{\mathrm{CB}(E,F)}$ 中关于 τ_w 稠密。
(d) 对任意算子空间 F， $C\cdot B_{F'\otimes_{\min}E}$ 在 $B_{\mathrm{CB}(F,E)}$ 中关于 τ_w 稠密。

现在考虑自然嵌入

$$\mathrm{CB}(E,F)\subseteq\mathrm{CB}(E,F'')=(E\otimes_{\mathrm{proj}}F')'.$$

在 [ER00 的引理 11.2.4] 中证明了，当 E 和 F 完备时，CB(E,F) 上的稳定逐点弱拓扑恰好是由$E\otimes_{\mathrm{proj}}F'$确定的相对弱* 拓扑，因此 CB$(E,F)$ 上每个稳定逐点弱连续泛函都由 $E\widehat{\otimes}_{\mathrm{proj}}F'$ 中的一个元素确定。我们再次指出，[ER00 的引理 11.2.4] 的证明对赋范算子空间也更一般地适用。

在赋范空间的语境中，有界逼近性质在张量积领域有许多重要的等价刻画。事实上，巴拿赫空间 E具有C-逼近性质，当且仅当 $E\otimes_\pi F\to(E'\otimes_\varepsilon F')'$是到其像上的一个 C-同构。此外，这些性质也等价于以下不等式：$\pi\le C\overline{\pi}$在 $E\otimes F$上成立（对所有赋范空间 F）。乍看之下，CBAP 似乎是有界逼近性质向算子空间的一种很自然的延拓，而且文献中也有不少例子表明，这种类比非常有效。然而，缺乏局部自反性，使得我们无法直接得出 CBAP 与上述结果的自然算子空间版本之间的等价关系；这些结果与

张量积有关。尽管如此，我们将看到，[ER90] 中引入的 CBAP 弱版本，将使我们能够把赋范空间张量积相关的那些逼近性质转化到这一语境中。

以下是对 [ER90] 中定义的 W*MAP 概念所作的显然推广。

定义 6.5. 若存在一网有限秩映射 $\phi_i : E \to E''$，使得对于所有 i 以及每个 $x \in E$，$\phi_i(x) \to \kappa_E(x)$ 在弱*拓扑下成立，则称算子空间 E 具有 C-W*CBAP。

显然，C-CBAP 蕴含 C-W*CBAP，因为范数收敛蕴含弱*拓扑下的收敛。与 [ER90] 中相同的论证表明，若 E 具有 C-W*CBAP，则 $M_n(E)$ 也具有该性质。

注 6.6. 与 [ER90] 中类似，容易证明（取伴随）E 具有 C-CBAP，当且仅当存在一网弱*连续有限秩映射$\psi_i : E' \to E'$，使得对于所有 i 以及每个 $x' \in E'$，$\|\psi_i\|_{cb} \le C$ 且 $\psi_i(x') \to x'$ 在弱*拓扑下成立。另一方面，E 具有 C-W*CBAP，当且仅当满足上述相同条件，唯一的区别是映射 ψ_i 不要求具有弱*连续性。

现在我们证明推论 6.4 的一个变体。

命题 6.7. 设 E 是一个赋范算子空间，且 $C \ge 1$。以下各项等价：

(a) E 具有 C-W*完全有界逼近性质。(b) $C \cdot B_{E' \otimes_{\min} E''}$ 在 $B_{\mathrm{CB}(E, E'')}$ 中逐点弱*稠密。(c) 对任意算子空间 F，$C \cdot B_{E' \otimes_{\min} F'}$ 在 $B_{\mathrm{CB}(E, F')}$ 中逐点弱*稠密。

证明。蕴含关系（a）$\Rightarrow$（c）已隐含在 [ER90，定理 2.2] 的证明中。设 $T : E \to F'$ 是一个完全压缩。考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} E'' & \xrightarrow{T''} & F''' \\ {\scriptstyle \kappa_E}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \kappa'_F} \\ E & \xrightarrow[T]{} & F' \end{array}$$

注意到 T'' 和 κ'_F 都是弱*连续的。因此，如果 $\phi_i : E \to E''$ 是 $C \cdot B_{E' \otimes_{\min} E}$ 中的映射网，并且按照 C-W*完全有界逼近性质的定义，在逐点弱*拓扑下收敛到 κ_E，那么显然，$\kappa'_F T'' \phi_i : E \to F'$ 在逐点弱*拓扑下收敛到 T。

(c) $\Rightarrow$(b) 是平凡的。

最后，(b) 表明，典范嵌入 $\kappa_E : E \to E''$ 可由一网有限秩映射在逐点弱*拓扑下逼近，且这些映射的完全有界范数至多为 C；这正是 C-W*完全有界逼近性质的定义，因此得到 (a)。

□

The 以下结果在某种意义上是 [ER90，定理 2.2] 的定量版本 .

定理 6.8. 设 E 是一个算子空间，且 $C \geq 1$。以下条件等价：
(a) 对任意算子空间 F，自然映射 $E \otimes_{\mathrm{proj}} F \to (E' \otimes_{\min} F')'$ 是一个完全C-同构，并且映到其像上。(b) 对任意算子空间 F，自然映射 $E \otimes_{\mathrm{proj}} F \to (E' \otimes_{\min} F')'$ 是一个 C-同构，并且映到其像上。(c) E 具有 C-W*完全有界逼近性质。(d) 对任意完全压缩 $T\colon E \to E''$，都存在一个有限秩映射网$\phi_i\colon E \to E''$，使得对所有 i 以及每个 $x \in E$，$\phi_i(x) \to Tx$ 在弱 * 拓扑下成立。(e) 对任意算子空间 F 以及任意完全压缩 $T\colon E \to F'$，存在一个有限秩映射网 $\psi_i\colon E \to F'$，使得对所有 i 以及每个 $x \in E$，$\psi_i x \to Tx$ 在弱 * 拓扑下成立。(f) 自然映射 $E \otimes_{\mathrm{proj}} E' \to (E' \otimes_{\min} E'')'$ 是一个完全 C-同构，并且映到其像上。(g) 自然映射 $E \otimes_{\mathrm{proj}} E' \to (E' \otimes_{\min} E'')'$ 是一个 C-同构，并且映到其像上。

证明。$(a) \Rightarrow (b)$ 显然。设 (b) 成立，且 F 是一个算子空间。为了证明自然映射 $E \otimes_{\mathrm{proj}} F \to (E' \otimes_{\min} F')'$ 是到其像上的完全C-同构，只需证明其伴随 $(E' \otimes_{\min} F')'' \to (E \otimes_{\mathrm{proj}} F)' = \mathrm{CB}(E, F')$ 是一个完全 C-商映射。进而，只需证明对任意 n，放大映射 $M_n((E' \otimes_{\min} F')'') \to M_n(\mathrm{CB}(E, F'))$ 是一个 C-商映射。考虑标准识别 $M_n((E' \otimes_{\min} F')'') = (M_n(E' \otimes_{\min} F'))'' = (E' \otimes_{\min} M_n(F'))'' = (E' \otimes_{\min} S_1^n[F]')''$ 和 $\mathrm{CB}(E, M_n(F')) = \mathrm{CB}(E, S_1^n[F]')$，我们需要证明自然映射 $(E' \otimes_{\min} (S_1^n[F])')'' \to \mathrm{CB}(E, S_1^n[F]')$ 是一个 C-商映射。由将 $S_1^n[F]$ 代入 F 并取伴随后的 (b) 可得此结论。因此，$(a) \Leftrightarrow (b)$。

现在，$(c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e)$ 只是对命题 6.7 的重新表述。

现在我们来证明 $(b) \Leftrightarrow (e)$。首先注意到，自然映射 $E \otimes_{\mathrm{proj}} F \to (E' \otimes_{\min} F')'$ 的完全有界范数总是为 1。因此，(b) 等价于满足

$$(E \otimes F) \cap B_{(E' \otimes_{\min} F')'} \subset C \cdot B_{E \otimes_{\mathrm{proj}} F}$$

根据双极定理，这又等价于

$$B_{\mathrm{CB}(E, F')} \subset \overline{C \cdot B_{E' \otimes_{\min} F'}}^{w^*}.$$

其中，闭包取自与识别 $\mathrm{CB}(E, F') = (E \otimes_{\mathrm{proj}} F)'$ 相关的弱*拓扑。而这显然等价于 (e) 的表述。

最后，显然有 $(a) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g)$，并按照 $(b) \Leftrightarrow (e)$ 中的论证，我们很容易得到 $(g) \Leftrightarrow (d)$。□

备注 6.9。鉴于我们之前的结果，似乎可以将通常关于某个张量范数的有界逼近性质这一概念（参见

例如 [DF93, 21.7]）推广到算子空间情形。也就是说，可以考虑如下自然定义：若一个算子空间 E 具有（常数为 $C > 0$ 的） α-W*完全有界逼近性质，则自然映射

$$F \otimes_\alpha E \to (F' \otimes_{\alpha'} E')'$$

对于每个算子空间 F，它都是到其像上的完全 C-同构。不过，我们在此不处理这个问题，而将其留待未来研究。

以下两个结果可分别以与 [ER90，命题 2.3] 和 [ER90，命题 2.4] 类似的方式推出。为保证完备性，我们给出略有不同的证明。

命题 6.10. 若算子空间 E 具有 C-W*完全有界逼近性质且局部自反，则 E 具有 C-完全有界逼近性质。

证明. 若 E 具有 C-W*完全有界逼近性质，则存在一个有限秩映射网 $\phi_i : E \to E''$，使得对所有 i 以及每个 $x \in E$， $\phi_i(x) \to \kappa_E(x)$ 在弱*拓扑下成立。对于每个 i，记映射 ϕ_i 的值域为 $F_i \in \mathrm{OFIN}(E'')$。由于对每个 i， E 都是局部自反的，因此存在一个完全压缩网 $(\psi_\eta^i)_\eta \subset \mathrm{CB}(F_i, E)$，在逐点弱*拓扑下逼近包含映射 $F_i \hookrightarrow E''$。复合后，我们得到一个有限秩映射网 $(\psi_\eta^i \circ \phi_i) \subset \mathrm{CB}(E, E)$，它在逐点弱拓扑下收敛到恒等映射 $id : E \to E$，且满足 $\left\|\psi_\eta^i \circ \phi_i\right\|_{\text{完全有界算子}} \leq C$。利用经典的凸组合论证，可以得到一个具有相同性质、但在点范数拓扑下收敛到恒等映射的网；从而得出 E 具有 C-完全有界逼近性质。□

命题 6.11. 若 E 是一个算子空间，且 E' 具有 C-W*完全有界逼近性质，则 E 也具有该性质。

证明. 若 E' 具有 C-W*完全有界逼近性质，由定理 6.8 (a)（应用于 $F = E$）可得映射 $E' \otimes_{\mathrm{proj}} E \to (E'' \otimes_{\min} E')'$ 是到其像上的完全 C-同构。由于投影张量范数和最小张量范数都是对称的，我们可以交换空间的位置（通过转置），从而得到 $E \otimes_{\mathrm{proj}} E' \to (E' \otimes_{\min} E'')'$ 是到其像上的完全 C-同构。这正是定理 6.8 (f) 中所述的结论。因此， E 具有 C-W*完全有界逼近性质。□

作为推论，我们看到，在局部自反性成立的条件下，可以将 C-完全有界逼近性质从对偶空间 E' 传递到 E。

推论 6.12. 设 E 是一个局部自反的算子空间。若 E' 具有 C-完全有界逼近性质，则 E 也具有该性质。（事实上，若 E' 具有 C-W*完全有界逼近性质，则 E 具有 C-完全有界逼近性质。）

作为定理 6.8 的推论，我们得到 [DF93，定理 16.2] 的以下类似结论：

定理 6.13. 设 E 是一个算子空间，且 $C \geq 1$。以下条件等价：
(a) E 具有 C-W*完全有界逼近性质。(b) 对每个算子空间 F（或仅对 $F = E'$），恒等映射 $E \otimes_{\overleftarrow{\mathrm{proj}}} F \to E \otimes_{\mathrm{proj}} F$的完全有界范数至多为 C。

(c) 对每个算子空间 F，恒等映射 $E \otimes_{\overleftarrow{\text{proj}}} F \to E \otimes_{\text{proj}} F$的范数至多为$C$。

特别地， E 具有 W*完全度量逼近性质，当且仅当

$$\text{proj} = \overleftarrow{\text{proj}} \quad on\ E \otimes F$$

对每个算子空间 F （或仅对 $F = E'$）成立。

证明。根据对偶定理 5.5，我们有完全等距 $E \otimes_{\overleftarrow{\text{proj}}} F \hookrightarrow (E' \otimes_{\min} F')'$。此外，我们知道 $\overleftarrow{\text{投影张量范数}} \leq$ 投影张量范数。因此， $E \otimes_{\overleftarrow{\text{proj}}} F \to E \otimes_{\text{proj}} F$的完全有界范数至多为 C （相应地，范数至多为 C），当且仅当映射 $E \otimes_{\text{proj}} F \to (E' \otimes_{\min} F')'$ 是到其像上的完全 C-等距同构（相应地， C-等距同构）。现在，定理 6.8 给出了所需结果。□

现在我们给出 [DF93，引理 16.2] 的算子空间版本，从而能够证明下面的推论。

引理 6.14. 设 α 是一个算子空间张量范数， E 和 F 是赋范算子空间，且 $n \in \mathbb{N}$。那么 $\alpha_n \leq C\overleftarrow{\alpha}_n$ 在 $E \otimes F$ 上当且仅当

$$B_{M_n\left((E \otimes_\alpha F)'\right)} \subset C \cdot \overline{B_{M_n(E' \otimes_{\alpha'} F')}}^{\tau_w} \subset M_n\big(\text{CB}(E, F')\big) = \text{CB}\left(E, M_n(F')\right).$$

证明. 设 $z \in M_n(E \otimes F)$。由对偶定理 5.5，

$$\overleftarrow{\alpha}_n(z; E, F) = \sup\left\{ \|\langle\langle T, z\rangle\rangle\|_{M_{nm}} \mid T \in B_{M_m(E' \otimes_{\alpha'} F')} \right\},$$

而显然

$$\alpha_n(z; E, F) = \sup\left\{ \|\langle\langle T, z\rangle\rangle\|_{M_{nm}} \mid T \in B_{M_m((E \otimes_\alpha F)')} \right\}$$

由双极定理，包含关系

$$B_{M_n\left((E \otimes_\alpha F)'\right)} \subset C \cdot \overline{B_{M_n(E' \otimes_{\alpha'} F')}}^{\tau_w}$$

于是等价于 $\alpha_n \leq C\overleftarrow{\alpha}_n$ 在 $M_n(E \otimes F)$ 上。 □

由定理 6.13 和引理 6.14 可得以下推论。可与命题 6.7 对照。

推论 6.15。设 E 是一个赋范算子空间，且 $C \geq 1$。以下条件等价：

(a) E 具有 C-W*完全有界逼近性质。 (b) $C \cdot B_{E' \otimes_{\min} E''}$ 在 $B_{\text{CB}(E, E'')}$ 中是 τ_w-稠密的。 (c) 对任意算子空间 F， $C \cdot B_{E' \otimes_{\min} F'}$ 在 $B_{\text{CB}(E, F')}$ 中是 τ_w-稠密的。

证明。(a)与(c)等价，这是由定理 6.13 (c)和引理 6.14得出的。显然，(c)蕴含(b)。假设(b)，任意$T \in B_{\text{CB}(E, E'')}$ 都是 $C \cdot B_{E' \otimes_{\min} E''}$中某个网的 τ_w极限，这意味着 T 也是同一网的逐点弱极限（论证与注 6.1类似），因此也是逐点弱*极限。现在，命题 6.7蕴含(a)。□

7. Mapping ideals

现在我们引入映射理想的定义，也就是由Pietsch定义、并由Defant和Floret广泛发展的巴拿赫算子理想的算子空间版本。我们框架中的这一概念源自 [ER00, 第 12 节2], ，不过我们必须加强Effros和Ruan的定义，以保留传统巴拿赫空间概念的本质，并允许其与张量范数建立自然联系。与 [DF93] 一样，理想的定义仅限于完备空间这一范畴。我们用OBAN表示所有巴拿赫算子空间构成的类。

定义 7.1. 一个（赋范）映射理想 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 是指：对于每一对算子空间 $E, F \in$ OBAN，都指定一个线性空间 $\mathfrak{A}(E,F) \subseteq \mathrm{CB}(E,F)$，并在 $\mathfrak{A}(E,F)$ 上赋予算子空间结构 A，使得

(a) 恒等映射 $\mathfrak{A}(E,F) \to \mathrm{CB}(E,F)$ 是完全压缩。(b) 对每个 $x' \in M_n(E')$ 和 $y \in M_m(F)$，映射 $x' \otimes y$ belongs to $M_{nm}(\mathfrak{A}(E,F))$，且 $\mathbf{A}_{nm}(x' \otimes y) = \|x'\|_{M_n(E')} \|y\|_{M_m(F)}$。(c) 理想性质：只要 $T \in M_n(\mathfrak{A}(E,F))$、 $r \in \mathrm{CB}(E_0, E)$ 且 $s \in \mathrm{CB}(F, F_0)$，就有 $s_n \circ T \circ r$ belongs to $M_n(\mathfrak{A}(E_0, F_0))$，并满足

$$\mathbf{A}_n(s_n \circ T \circ r) \leq \|s\|_{\mathrm{cb}} \, \mathbf{A}_n(T) \, \|r\|_{\mathrm{cb}} .$$

注 7.2。前一定义中的 (b) 项是 *new* 要求，ER00 第 12 节2]并未考虑这一点。在巴拿赫空间领域，赋范算子理想的定义还包括：恒等映射 $id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的理想范数为 1 [（Pie67，定义 6.1.1]）。这一要求实际上是将赋范理想与有限生成张量范数联系起来的关键。遗憾的是，无法将这一要求直接转换到算子空间框架中，但仍有办法处理这个问题。根据 [Pie80，命题 6.1，5]上述关于恒等映射范数的条件（连同赋范算子理想的其他性质）蕴含——事实上，它等价于——任意初等张量 $x' \otimes y$（对于 $x' \in E'$ 和 $y \in F$）的理想范数恰好为 $\|x'\|\|y\|$。这启发了我们在定义中加入 (b) 项。请注意，这一陈述与算子空间张量范数定义中的方程（2.4）相似。

现在我们来说明，条件 (b) 可以在某种程度上放宽。

首先，注意到由于 $\|x' \otimes y\|_{cb} = \|x'\|_{M_n(E')} \|y\|_{M_m(F)}$，条件 (a) 蕴含 $\mathbf{A}_{nm}(x' \otimes y) \geq \|x'\|_{M_n(E')} \|y\|_{M_m(F)}$。因此，我们可以在 (b) 中用 $\leq$ 替换符号 $=$。

此外，只需对每个 $E, F \in$ OFIN 都满足这个不等式即可。事实上，我们来证明：如果该不等式对每个有限维算子空间都成立，那么它对每个巴拿赫算子空间也成立。设 $x' = (x'_{ij}) \in M_n(E')$ 且 $y = (y_{ij}) \in M_m(F)$，其中 $E, F \in$ OBAN。取 $L = \bigcap_{i,j} \ker(x'_{ij}) \in$ OCOFIN(E) 和 $u' \in M_n((E/L)')$，使得 $x' = (q_L^E)'_n(u')$。由于 $(q_L^E)'$ 是完全等距的，我们有 $\|u'\|_{M_n((E/L)')} = \|x'\|_{M_n(E')}$。选取满足 $y \in M_m(N)$ 的 $N \in$ OFIN(F)

利用定义中的条件 (c)，我们得到

$$\mathbf{A}_{nm}(x'\otimes y; E, F) \le \mathbf{A}_{nm}(u'\otimes y; E/L, N) \le \|u'\|_{M_n((E/L)')}\|y\|_{M_m(N)} = \|x'\|_{M_n(E')}\|y\|_{M_m(F)}.$$

因此，我们可以用以下条件替换前一定义中的条件 (b)：

(b') 对任意 $E, F \in$ OFIN、 $x' \in M_n(E')$ 和 $y \in M_m(F)$，映射 $x' \otimes y$属于 $M_{nm}(\mathfrak{A}(E, F))$，且 $\mathbf{A}_{nm}(x' \otimes y) \le \|x'\|_{M_n(E')}\|y\|_{M_m(F)}$。

当然，完全有界映射类 CB 显然是一个映射理想。

我们来回顾文献中已经出现过的其他一些映射理想的定义。我们将在每种情形下（只要不显而易见）说明条件 (b') 为何成立。令 E 和 F 为巴拿赫算子空间。

(i) 有限秩映射 $\mathcal{F}$：空间 $\mathcal{F}(E, F)$ 由从 E 到 F 的有限秩映射构成。这是一个带有完全有界范数的映射理想。(ii) 完全可逼近映射 $\mathcal{A}$：空间 $\mathcal{A}(E, F)$ 是 $\mathrm{CB}(E, F)$ 中 $\mathcal{F}(E, F)$ 的闭包。(iii) 完全核映射 $\mathcal{N}$ [ER00, 12.2]：空间 $\mathcal{N}(E, F)$ 是映射的像

$$\Phi : E'\widehat{\otimes}_{\mathrm{proj}}F \to E'\widehat{\otimes}_{\min}F \subset \mathrm{CB}(E, F) \tag{7.1}$$

赋予典范识别所给出的商算子空间结构

$$\mathcal{N}(E, F) = \frac{E'\widehat{\otimes}_{\mathrm{proj}}F}{\ker \Phi}.$$

核算子空间范数记为 ν。proj 范数的方程（2.4）表明，$\mathcal{N}$ 满足条件 (b')。

(iv) 完全积分映射 $\mathcal{I}$ [ER00, 12.3]：空间 $\mathcal{I}(E, F)$ 由满足下述条件的映射构成：

$$\iota(T) = \sup\{(\nu(T|_M) : M \in \mathrm{OFIN}(E)\} < \infty.$$

给定 $T = (T_{ij}) \in M_n(\mathcal{I}(E, F))$，定义为

$$\iota_n(T) = \sup\{(\nu_n(T|_M) : M \in \mathrm{OFIN}(E)\}.$$

这在 $\mathcal{I}(E, F)$ 上赋予了一种算子空间结构。由于 $\mathcal{I}$和 $\mathcal{N}$在 OFIN 上一致，$\mathcal{I}$ 满足条件 (b')。

(v) 完全 p-可和映射 Π_p [Pis98，第 5] 章：对于 $1 \le p < \infty$，线性映射$T: E \to F$属于 $\Pi_p(E, F)$，当且仅当映射

$$i_{S_p} \otimes T : S_p \otimes_{\min} E \to S_p[F]$$

是有界的（等价地说，是完全有界的），其范数记为$\pi_p(T)$。 $\Pi_p(E, F)$的算子空间结构继承自 $\mathrm{CB}(S_p \otimes_{\min}$

$E, S_p[F]$)。由 [CDD16，定理 3.1] 可知，对于任意 $E, F \in$ OFIN，我们有以下完全等距映射：

$$\Pi_p(E,F) = (E \otimes_{d_{p'}} F')' = E' \otimes_{(d_{p'})'} F.$$

方程（2.4）表明，对于 $(d_{p'})'$ 范数，(Π_p) 满足 (b')。

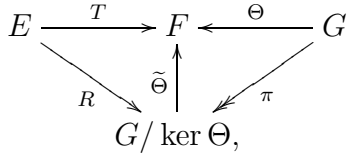
(vi) 完全右 p-核 $\mathcal{N}^p$ [CDDG19，定义 2.1]：若线性映射 T：$E \to F$ 属于典范嵌入的值域，我们称其属于 $\mathcal{N}^p(E,F)$

$$J^p : E' \widehat{\otimes}_{d_p} F \to E' \widehat{\otimes}_{\min} F \subset \mathrm{CB}(E,F).$$

我们赋予 $\mathcal{N}^p(E,F)$ 算子空间商结构 $E' \widehat{\otimes}_{d_p} F / Ker J^p$.方程（2.4）表明，对于 d_p 范数，($\mathcal{N}^p$) 满足 (b')。

(vii) 算子 p-紧映射 $\mathcal{K}_p$ [CDDG19，定义 3.2]：映射 $T \in \mathcal{K}_p(E,F)$，若存在 $G \in$ OBAN、完全右 p-核映射 $\Theta \in \mathcal{N}^p(G,F)$ 以及完全有界映射 $R \in \mathrm{CB}(E, G/\ker\Theta)$，使得 $\|R\|_{\mathrm{cb}} \le 1$，且下列交换图成立

(7.2)



~其中，π 和 Θ 分别表示与 Θ 相关联的自然商映射和自然单态射。

对于 $T \in \mathcal{K}_p(E,F)$，我们还定义

$$\kappa_p(T) := \inf\{\nu^p(\Theta)\},$$

其中，下确界取遍所有可能的完全右 p-核映射 $\Theta \in \mathcal{N}^p(G,F)$，如 (7.2) 中所述。应当指出，[CDDG19，命题 3.8。]中证明，$\mathcal{K}_p$ 恰好是 $\mathcal{N}^p$ 的满射包（见下文命题 7.12）。这为 $\mathcal{K}_p$ 提供了算子空间结构，并表明此类满足条件 (b')。

(viii) 完全 p-核映射 $\mathcal{N}_p$ [Jun96]：若线性映射 u：$E \to F$ 存在如下分解，则称其为完全 p-核映射（记作 $u \in \mathcal{N}_p(E,F)$）：

$$E \xrightarrow{\alpha} S_\infty \xrightarrow{M(a,b)} S_p \xrightarrow{\beta} F$$

其中，$a, b \in S_{2p}$，$M(a,b)$ 是乘法算子 $x \mapsto axb$，而 α, β 是完全有界映射。u 的完全 p-核范数定义为

$$\nu_p(u) = \inf\left\{ \|\alpha\|_{\mathrm{cb}} \|a\|_{S_{2p}} \|b\|_{S_{2p}} \|\beta\|_{\mathrm{cb}} \right\}$$

其中，下确界取遍上述所有关于 u 的分解。根据 [Jun96, Cor. 3.1.3.9], ，当 E、$F \in$ OBAN 且 $1 \le p < \infty$ 时，迹对偶给出一个

$\mathcal{N}_p(E,F)'$ 与 $\Pi_{p'}(F,E'')$ 之间的等距同构。这使我们能够在 $\mathcal{N}_p(E,F)$ 上赋予算子空间结构。此外，条件 (b') 成立，因为对于 E、$F \in$ OFIN，$\mathcal{N}_p(E,F) = F \otimes_{d_p} E'$。

(ix) 完全 (q,p)-混合映射 $\mathfrak{M}_{q,p}$ [Yew08, CD12]: 令 $1 \le p \le q < \infty$。若存在常数 K，使得对于任意 $G \in$ OBAN 以及任意完全 q-可和映射 $v: F \to G$，复合 $v \circ u$ 是完全p-可和映射，且 $\pi_p(v \circ u) \le K\pi_q(v)$，则称映射 $u: E \to F$ 是完全 (q,p)-混合的（记作 $u \in \mathfrak{M}_{q,p}(E,F)$）。$u$的完全 (q,p)-混合范数是满足上述条件的最小 K，记作 $\mathfrak{m}_{q,p}(u)$。根据 [CD12, Thm. 4.3], ，当$F \subseteq B(H)$时，我们有 $u \in \mathfrak{M}_{q,p}(E,F)$，当且仅当对于所有 n 以及 $M_n(E)$ 中所有 (x_{ij})，都有

$$\sup\left\{ \left\| \big(a(ux_{ij})b\big) \right\|_{S_p^n[S_q(H)]} : a,b \in B_{S_{2q}(H)},\ a,b \ge 0 \right\} \le C \left\| (x_{ij}) \right\|_{S_p^n \otimes_{\min} E},$$

因此，$\mathfrak{M}_{q,p}(E,F)$ 以这种方式从 CB$(S_p \otimes_{\min} E, \ell_\infty(S_p[S_q(H)]))$ 继承了算子空间结构。为验证条件 (b')，设 $E,F \in$ OFIN，$x' \in M_n(E')$ 且 $y \in M_m(F)$。令 $(x_{ij}) \in M_k(E)$，并考察 $a,b \in B_{S_{2q}(H)}$。注意，对于每个 i,j，都有 $a\big((x' \otimes y)x_{ij}\big)b = (x' \otimes ayb)(x_{ij})$。现在，由于我们已经观察到，完全 p-可和映射满足条件 (b')，因此 $x' \otimes ayb$ 在 M_{nm}(CB$(S_p \otimes_{\min} E, S_p[S_q(H)])$) 中的范数至多为 $\|x'\|_{M_n(E')}$ $\|ayb\|_{M_m(S_q(H))}$。由于从$\mathcal{B}(H)$到 $S_q(H)$ 的乘法映射 $w \mapsto awb$ 的完全有界范数至多为 $\|a\|_{S_{2q}} \|b\|_{S_{2q}}$ [Pis98, Prop. 5.6], ，对 a,b 取上确界，即得 $\mathfrak{M}_{q,p}$满足条件 (b')。

当然，上述列表并非旨在穷尽所有情况。这里不深入细节，只指出 [Jun96] 定义了许多其他可能的映射理想实例，包括：完全 p-积分映射（定义 3.1.3.2）、完全 p-核映射的完全内射包（定义 3.1.3.5）、完全 (p,k)-映射和 (p,k)-积分映射（定义 3.1.3.6）、可经由从 ℓ_p 到 ℓ_q 的对角算子进行完全有界分解的映射，以及它们的非交换类比，即从 S_p 到 S_q的双侧乘法算子（第 3.1.4 节）。虽然起初只定义了一个范数，但我们证明了若干刻画，从而可以得到序结构。注意，根据命题 7.7，上述完全 p-核映射的完全内射包确实是一个映射理想。请注意，这是经典准 p- 核算子理想的算子空间版本；该经典理想由 [PP69] 引入（通常记作 $\mathcal{QN}_p$），并在例如 [Re˘ı82、DPnS10]中得到进一步研究。对于 [Jun96] 中的所有其他上述实例，我们尚未验证条件 (b') 是否成立，但预计确实如此。

以下定义涉及 $\mathfrak{A}(E,F)$ 的完备性。

定义 7.3. 如果对于任意 $E,F \in \in$OBAN，$\mathfrak{A}(E,F)$ 都是一个巴拿赫空间，则称映射理想 $\mathfrak{A}$ 为巴拿赫映射理想。

请注意，除有限秩映射理想外，上面列出的所有例子都是巴拿赫映射理想。

与巴拿赫空间情形一样，每个算子空间张量范数都允许我们构造一个与之“对偶”的映射理想。

例 7.4. 给定一个算子空间张量范数 α，对于 E、$F \in \mathrm{OBAN}$，令

$$\mathfrak{A}_\alpha(E,F) := (E \otimes_\alpha F')' \cap \mathrm{CB}(E,F).$$

那么， $\mathfrak{A}_\alpha$ 是一个映射理想。

事实上，完全压缩 $E \otimes_{\mathrm{proj}} F' \hookrightarrow E \otimes_\alpha F'$ 意味着恒等映射 $\mathfrak{A}_\alpha(E,F) \subset \mathrm{CB}(E,F)$ 也是完全压缩的。此外，对于 E、$F \in \mathrm{OFIN}$，$\mathfrak{A}_\alpha(E,F) = E' \otimes_{\alpha'} F$，因此定义中的条件 (b') 成立。另一方面， α 的度量映射性质立即推出$\mathfrak{A}_\alpha$的理想性质。

现在我们考虑那些“在完全等距同构之后保持不变”的理想。准确地说：

定义 7.5. 如果对于每个完全等距同构 $i: F \to G$ 和 $T \in M_n(\mathrm{CB}(E,F))$，以下等价关系成立，则称映射理想 $\mathfrak{A}$ 是完全内射的：$T \in M_n(\mathfrak{A}(E,F))$ 当且仅当 $i_n \circ T \in M_n(\mathfrak{A}(E,G))$，其中 $\mathrm{A}_n(T) = \mathrm{A}_n(i_n \circ T)$。

显然，映射理想 CB 是完全内射的。因此，我们也有 Π_p 是完全内射的。事实上，设 $T \in M_n(\mathrm{CB}(E,F))$，并且 $i: F \to G$ 是一个完全等距映射，使得 $i_n \circ T \in M_n(\Pi_p(E,G))$。由于

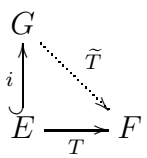
$$M_n(\Pi_p(E,G)) \hookrightarrow M_n(\mathrm{CB}(S_p \otimes_{\min} E, S_p[G]))$$

而 i 诱导了一个从 $S_p[F]$ 到 $S_p[G]$ [的完全等距映射，根据 Pis98，推论 1.2], ，我们得到 $T \in M_n(\Pi_p(E,F))$。

注 7.6. 注意，要证明映射理想 $\mathfrak{A}$ 是完全内射的，只需验证以下两个条件：

(a) 对每个完全等距映射 $i: F \to G$，以及满足 $i \circ T \in \mathfrak{A}(E,G)$ 的 $T \in \mathrm{CB}(E,F)$，都有 $T \in \mathfrak{A}(E,F)$。 (b) 对每个完全等距映射 $i: F \to G$，以及 $T \in M_n(\mathfrak{A}(E,F))$，都有 $\mathrm{A}_n(T) \leq \mathrm{A}_n(i_n \circ T)$。

赋范算子空间 E 具有完全 C-延拓性质，当对于每个$\sim T \in \mathrm{CB}(E,F)$以及完全嵌入 $i: E \to G$，都存在 $\widetilde{T} \in \mathrm{CB}(G,F)$，使得下图交换



w ith $\|T\|_{\mathrm{cb}} \leq C\|T\|_{\mathrm{cb}}$.回忆一下， $B(H)$ 具有完全1-延拓性质 [Pis03，定理 1.6]。

给定一个映射理想（$\mathfrak{A}$,A），下面的命题使我们能够讨论包含它的最小完全内射理想。

命题 7.7. 设（$\mathfrak{A}$, A）为一个映射理想。那么存在一个包含 $\mathfrak{A}$ 的（唯一）最小完全内射映射理想 $\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}$，称为 $\mathfrak{A}$ 的完全内射包。此外，如果 V 是一个完全内射算子空间，且 $i\colon F \to V$ 是一个完全等距同构，那么 $T \in M_n(\mathrm{CB}(E,F))$ 属于 $M_n(\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E,F))$ 当且仅当 $i_n \circ T \in M_n(\mathfrak{A}(E,V))$，其中

$$\mathbf{A}_n^{\mathrm{inj}}(T) = \mathbf{A}_n(i_n \circ T).$$

证明. 给定 $F \in$ OBAN，我们记 $i_F\colon F \hookrightarrow B(H_F)$ 为任意一个提供 F 算子空间结构的嵌入。我们定义

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E,F) := \{T \in \mathrm{CB}(E,F) : i_F \circ T \in \mathfrak{A}(E, B(H_F))\},$$

赋予其如下算子空间范数：对于 $T \in M_n(\mathrm{CB}(E,F))$，a s

$$\mathbf{A}_n^{\mathrm{inj}}(T) := \mathbf{A}_n((i_F)_n \circ T).$$

为说明这一定义良好，我们证明：若 $i\colon F \to V$ 是将 F 嵌入完全内射空间 V 中的任意完全等距同构（如第 2.5 节所述，该空间必须是完备的），那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $T \in M_n(\mathrm{CB}(E,F))$，使得 $i_n \circ T \in M_n(\mathfrak{A}(E,V))$，我们都有等式

$$\mathbf{A}_n(i_n \circ T) = \mathbf{A}_n((i_F)_n \circ T). \tag{7.3}$$

事实上，由于 $B(H_F)$ 的内射性，存在一个映射 $i_F\colon V \to B(H_F)$，使得 $i_F = i_F \circ i$，其中 $\|i_F\|_{\mathrm{cb}} = 1$。于是，根据理想性质

$$\mathbf{A}_n((i_F)_n \circ T) = \mathbf{A}_n((\widetilde{i_F})_n \circ i_n \circ T) \leq \mathbf{A}_n(i_n \circ T).$$

另一方面，由于 V 的内射性，我们可以像之前那样论证，得到 存在一个映射 $i\colon B(H_F) \to V$，使得 $i = i \circ i_F$，其中 $\|i\|_{\mathrm{cb}} = 1$，因此

$$\mathbf{A}_n(i_n \circ T) = \mathbf{A}_n((\widetilde{i})_n \circ (i_F)_n \circ T) \leq \mathbf{A}_n((i_F)_n \circ T).$$

这就证明了公式（7.3）。

为了说明 $\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}$ 是一个映射理想，我们只需证明理想性质，因为其他条件很容易成立。设 $T \in M_n(\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E,F))$、 $r \in$完全有界算子(E_0, E) 以及$s \in$ 完全有界算子(F, F_0)。那么，

$$\mathbf{A}_n^{\mathrm{inj}}(s_n \circ T \circ r) = \mathbf{A}_n((i_{F_0})_n \circ s_n \circ T \circ r) \leq \mathbf{A}_n((i_{F_0} \circ s)_n \circ T)\|r\|_{\mathrm{cb}}$$

再次，由 $B(H_{F_0})$ 的内射性可知，存在一个映射 $\widetilde{s} \in$ 完全有界算子$(B(H_F)\ B(H_{F_0}))$，满足 $i_{F_0} \circ s = \widetilde{s} \circ i_F$，其中 $\|\widetilde{s}\|_{\mathrm{cb}} \leq \|s\|_{\mathrm{cb}}$。因此，

$\mathbf{A}_n^{\mathrm{inj}}(s_n \circ T \circ r) \leq \mathbf{A}_n((\widetilde{s} \circ i_F)_n \circ T)\|r\|_{\mathrm{cb}} \leq \|s\|_{\mathrm{cb}}\mathbf{A}_n((i_F)_n \circ T)\|r\|_{\mathrm{cb}} = \|s\|_{\mathrm{cb}}\mathbf{A}_n^{\mathrm{inj}}(T)\|r\|_{\mathrm{cb}}.$

现在我们看到，$\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}$ 是完全内射的。事实上，设 $i\colon F \to G$ 是一个完全等距映射，$T \in \mathrm{CB}(E,F)$，并假设 $i\circ T \in \mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E,G)$。若 $i_G\colon G \to B(H_G)$ 是一个完全等距嵌入，则 $B(H_G)$的延拓性质表明，存在一个映射 $\widetilde{i_F}$，使得

$$\widetilde{i_F}\circ(i_G\circ i) = i_F. \tag{7.4}$$

现在，根据该理想的定义可知 $i_G\circ i\circ T \in \mathfrak{A}(E,B(H_G))$。于是，$i_F\circ(i_G\circ i)\circ T = i_F\circ T$属于 $\mathfrak{A}(E,B(H_F))$。因此，$T\in\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E,F)$。

现在，若 $T\in M_n(\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E,F))$ 且 $i\colon F\to G$ 是完全等距，则有

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_n^{\mathrm{inj}}(T) &= \mathbf{A}_n((i_F)_n\circ T) = \mathbf{A}_n((\widetilde{i_F}\circ i_G\circ i)_n\circ T)\\ &\le \mathbf{A}_n((i_G)_n\circ(i_n\circ T)) = \mathbf{A}_n^{\mathrm{inj}}(i_n\circ T).\end{aligned}$$

$\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}$ 是包含 $\mathfrak{A}$ 的最小完全内射理想，这一点由 $\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}$ 的定义显而易见。陈述的最后一部分可由证明开头为说明 $\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(T)$ 定义良好所做的论证推出。□

例 7.8。对于由完全积分映射构成的映射理想 $\mathcal{I}$，前一个命题表明，$T\in\mathcal{I}^{\mathrm{inj}}(E,F)$ 当且仅当 $i_F\circ T\in\mathcal{I}(E,B(H_F))$。根据 [ER00，命题 15.5，1] $\mathcal{I}(E,B(H_F)) = \Pi_1(E,B(H_F))$。由于我们已经说明，$\Pi_1$ 是一个完全内射映射理想，因此可得 $\mathcal{I}^{\mathrm{inj}} = \Pi_1$（正如巴拿赫空间框架中的情形）。

下　　述简单结果表明，内射过程保持完备性。

命题 7.9. 设 (𝔄,A) 是巴拿赫映射理想，则 ($\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}$,$\mathrm{A}^{\mathrm{inj}}$) 也是巴拿赫映射理想。

证明. 设 $E,F\in$ OBAN，我们只需验证 $\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E,F)$ 是完备的。设 $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E,F)$ 中的柯西序列。注意，$(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 也是 CB(E,F) 中的柯西序列，因此它在 cb-范数下收敛到算子 $T\in$CB(E,F)。另一方面，$(i_F\circ T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathfrak{A}(E,B(H_F))$ 中的柯西序列，它收敛到算子 $S\in\mathfrak{A}(E,B(H_F))$。最后，只需证明 $S = i_F\circ T$。事实上，注意到 $T_k\to T$ 逐点成立，因此 $i_F\circ T_k\to i_F\circ T$ 也逐点成立。现在由极限的唯一性即可得到所需结果。

□

由此可得 DF93 推论 9 的类似版本，适用于算子空间情形。

推论 7.10. 设 $F\in$ OBAN 具有完备的 C-延拓性质，且 (𝔄, A) 是一个映射理想。那么对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 以及任意 $E\in$ OBAN，我们有 $M_n(\mathfrak{A}(E,F)) = M_n(\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E,F))$。此外，

$$\mathbf{A}_n(T)\le C\mathbf{A}_n^{\mathrm{inj}}(T),$$

对所有 $T\in M_n(\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E,F))$.

同样，我们可以考虑与完全度量满射复合时表现良好的理想。

定义 7.11. 若对每个完全度量满射 $q\colon G \twoheadrightarrow E$ and $T \in M_n(\mathrm{CB}(E,F)$，以下等价关系成立： $T \in M_n(\mathfrak{A}(E,F))$ 当且仅当 $T\circ q \in M_n(\mathfrak{A}(G,F))$，且 $\mathsf{A}_n(T) = \mathsf{A}_n(T\circ q)$，则称映射理想 $(\mathfrak{A},\mathsf{A})$ 是完全满射的。

显然，映射理想 CB 是完全满射的 e.

给定一个映射理想 $(\mathfrak{A}, \mathsf{A})$，以下命题定义了包含它的最小完全满射理想。这已在 [CDDG19, 命题 3.6], 中证明；为确保完备性，我们仍给出详细证明。

命题 7.12. 设 $(\mathfrak{A}, \mathsf{A})$ 为一个映射理想。那么存在一个包含 $\mathfrak{A}$ 的（唯一）最小完全满射映射理想 $\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}$（称为 $\mathfrak{A}$ 的完全满射包）。此外：若 G 是一个完全投射巴拿赫算子空间，$E \in \mathsf{OBAN}$，且 $q\colon G \twoheadrightarrow E$ 是一个完全度量满射，则 $T \in M_n(\mathrm{CB}(E,F))$ 属于 $M_n(\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E,F))$ 当且仅当 $T\circ q \in M_n(\mathfrak{A}(G,F))$，其中

$$\mathbf{A}_n^{\mathrm{sur}}(T) = \mathbf{A}_n(T\circ q).$$

证明。我们定义

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E,F) = \{T \in \mathrm{CB}(E,F) : T\circ q_E \in \mathfrak{A}(Z_E,F)\},$$

赋予陈述中定义的算子空间结构。首先，我们证明它定义良好。为此，设 G 是一个完全投射巴拿赫算子空间，且 $q\colon G \twoheadrightarrow E$ 是一个完全度量满射， $T \in M_n(\mathrm{CB}(E,F))$ 满足 $T\circ q \in M_n(\mathfrak{A}(G,F))$，我们需要证明

$$\mathbf{A}_n(T\circ q_E) = \mathbf{A}_n(T\circ q). \tag{7.5}$$

由 Z_E 的完全投射性，存在一个映射 $\widetilde{q_E}\colon Z_E \to G$，使得 $q_E = q\circ\widetilde{q_E}$ 且 $\|\widetilde{q_E}\|_{\mathrm{cb}} \le 1$。于是，

$$\mathbf{A}_n(T\circ q_E) = \mathbf{A}_n(T\circ q\circ\widetilde{q_E}) \le \mathbf{A}_n(T\circ q).$$

另一方面，由 G 的投射性，存在一个映射 $\widetilde{q}\colon G \to Z_E$，使得 $q = q_E\circ\widetilde{q}$ 且 $\|\widetilde{q}\|_{\mathrm{cb}} \le 1.$。如前所述，

$$\mathbf{A}_n(T\circ q) = \mathbf{A}_n(T\circ q_E\circ\widetilde{q}) \le \mathbf{A}_n(T\circ q_E).$$

这就证明了方程 (7.5)。

为证明 $\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}$ 是一个映射理想，我们只需证明理想性质，因为其他条件很容易得出。

设 $T \in M_n(\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E,F))$，$r \in$完全有界算子$(E_0,E)$ 且 $s \in$完全有界算子(F,F_0)。由于 Z_{E_0} 是完全投射的，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $L_\varepsilon \in$ 完全有界算子(Z_{E_0},Z_E)，它是 $r\circ q_{E_0}$ 的一个提升，并满足 $\|L_\varepsilon\|_{\mathrm{cb}} \le (1+\varepsilon)\|r\|_{\mathrm{cb}}$，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccccccc} E_0 & \xrightarrow{r} & E & \xrightarrow{T_{ij}} & F & \xrightarrow{s} & F_0\ . \\ {\scriptstyle q_{E_0}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle q_E} & & & & \\ Z_{E_0} & \xrightarrow[L_\varepsilon]{} & Z_E & & & & \end{array}$$

于是，对任意 $1 \le i, j \le n$，我们有 $s \circ T_{ij} \circ r \circ q_{E_0} = s \circ T_{ij} \circ q_E \circ L_\varepsilon \in \mathfrak{A}(Z_{E_0}, F_0)$，因此 $s \circ T_{ij} \circ r \in \mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E_0, F_0)$。此外，根据 $\mathfrak{A}$ 的理想性质，

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n^{\mathrm{sur}}(s_n \circ T \circ r) &= \mathbf{A}_n(s_n \circ T \circ r \circ q_{E_0}) = \mathbf{A}_n(s_n \circ T \circ q_E \circ L_\varepsilon) \\ &\le \mathbf{A}_n(s_n \circ T \circ q_E)(1+\varepsilon)\|r\|_{\mathrm{cb}} \\ &\le (1+\varepsilon)\|s\|_{\mathrm{cb}} \mathbf{A}_n^{\mathrm{sur}}(T)\|r\|_{\mathrm{cb}}. \end{aligned}$$

现在证明映射理想 $\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}$ 是满射的。设 $q: G \twoheadrightarrow E$ 是完全商映射，且 $T \in \in \mathrm{CB}(E, F)$，满足 $T \circ q \in \mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(G, F)$。由于 Z_E 是完全投射的，且 $q \circ q_G: Z_G \twoheadrightarrow E$ 是完全商映射，对于给定的 $\varepsilon > 0$，存在 q_E 的一个提升 $L_\varepsilon: Z_E \to Z_G$，其完全有界范数小于或等于 $1+\varepsilon$。

由于 $T \circ q \circ q_G \in \mathfrak{A}(Z_G, F)$，我们有 $T \circ q_E = T \circ q \circ q_G \circ L_\varepsilon \in \mathfrak{A}(Z_E, F)$。于是，$T \in \mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E, F)$。此外，若 $T \in M_n(\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E, F))$，则得到

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\mathrm{sur}}(T) = \mathbf{A}(T \circ q_E) = \mathbf{A}(T \circ q \circ q_G \circ L_\varepsilon) &\le (1+\varepsilon)\mathbf{A}(T \circ q \circ q_G) \\ = (1+\varepsilon)\mathbf{A}^{\mathrm{sur}}(T \circ q) &\le (1+\varepsilon)\mathbf{A}^{\mathrm{sur}}(T). \end{aligned}$$

根据 $\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}$ 的定义，$\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}$ 是最小的完全投射理想，这一点显然。陈述的最后一部分可由证明开头为说明 $\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(T)$ 定义良好所做的论证推出。□

在 [CDDG19，命题 3.8] 中已证明

$$\mathcal{K}_p = (\mathcal{N}^p)^{\mathrm{sur}}.$$

A因此，我们显然有 $\mathcal{K}_p$ 是一个满射映射理想 .

作为前一个命题的推论，我们得到了 [DF93，推论 9.8] 在算子空间情形下的类似版本。

推论 7.13. 设 E 是一个完全投射巴拿赫算子空间，且 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 是一个映射理想。那么对于每个每个 $F \in \mathrm{OBAN}$，我们有 $\mathfrak{A}(E, F)$ 和$\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E, F)$ 完全等距。

至于内射过程，我们有满射过程也保持完备性。证明与命题 7.9 的证明类似，故从略。

命题 7.14. 设 $(\mathfrak{A},\mathrm{A})$ 是一个巴拿赫映射理想，则 $(\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}},\mathrm{A}^{\mathrm{sur}})$ 也是一个巴拿赫映射理想。

现在我们定义映射理想的对偶过程。

定义 7.15. 若 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 是一个映射理想，则对 $E, F \in \mathrm{OBAN}$，定义

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{dual}}(E,F) := \{T \in \mathrm{CB}(E,F) : T' \in \mathfrak{A}(F',E')\}$$

and

$$\mathbf{A}_n^{\mathrm{dual}}(T) := \mathbf{A}_n(T'), \quad T \in M_n(\mathfrak{A}^{\mathrm{dual}}(E,F)).$$

容易看出，$(\mathfrak{A}^{\mathrm{dual}}, \mathrm{A}^{\mathrm{dual}})$ 也是一个映射理想。

由定义可知，完全可逼近映射的理想满足 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathrm{dual}}$。另一方面，根据 [ER00，命题 12.2.5], ，若 $T \in \mathcal{N}(E,F)$，则有 $T \in \mathcal{N}^{\text{对偶}}(E,F)$，其中 $\nu^{\mathrm{dual}}(T) = \nu(T') \leq \nu(T)$。事实上，还有更强的结论：同样的证明表明，由 $T \mapsto T'$ 给出的映射 $\mathcal{N}(E,F) \to \mathcal{N}(F',E')$ 是完全压缩，因此恒等映射 $\mathcal{N}(E,F) \to \mathcal{N}^{\text{对偶}}(E,F)$ 也是完全压缩。若 E' 具有算子逼近性质，则 (7.1) 中的映射 Φ 是内射的（见 [ER00，定理 11.2.5], ），因此，与 [ER00，命题 12.2.6] 中相同的证明表明，上述两个映射实际上是完全等距映射。

还需指出，属于理想 $(\Pi_p)^{\mathrm{dual}}$ 的映射早已在文献中有所研究。例如， [Pis98, Thm. 6.5] 刻画了那些可通过 Pisier 算子希尔伯特空间 OH 进行完全有界分解的映射，其刻画条件涉及 Π_2 和 $(\Pi_2)^{\mathrm{dual}}$；而 [Pis98, Cor. 7.2.2]则以类似方式刻画了那些可通过有限维 Schatten p 空间进行完全有界分解的映射，其条件涉及 $\Pi_{p'}$ 和 $(\Pi_p)^{\mathrm{dual}}$。

8. 极大算子空间映射理想

在巴拿赫空间情形中，张量范数与算子理想之间存在内在联系。如前所述，在非交换背景下也有同样的情形。本节将发展极大映射理想理论，说明后者与算子空间张量范数理论实为同一事物的两个方面。

若 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 是一个映射理想，则

$$M \otimes_\alpha N := \mathfrak{A}(M', N)$$

在 OFIN 上定义了一个算子空间张量范数 α；换言之，若 $z \in M_n(M \otimes N)$ 且 $T_z \in M_n(\mathrm{CB}(M', N))$ 是相应的线性算子矩阵，则

$$\alpha_n(z; M, N) := \mathbf{A}_n(T_z : M' \to N).$$

由于自然映射 $\mathfrak{A}(M', N) \to \mathrm{CB}(M', N)$ 和 $M \otimes_{\min} N \to \mathrm{CB}(M', N)$ 分别是完全压缩和完全等距映射，因此

$$M \otimes_\alpha N \to M \otimes_{\min} N$$

是一个完全压缩。

请注意，方程（2.4）可由映射理想定义中的条件 (b) 立即推出。此外， $\mathfrak{A}$ 的理想性质蕴含了 α 的完全度量映射性质：对于任意线性映射 $r \in \mathrm{CB}(M, M_0)$ 和 $s \in \mathrm{CB}(N, N_0)$，注意，对于任意 $z \in M_n(M \otimes N)$

$$s_n \circ T_z \circ r' = T_{(r \otimes s)(z)}.$$

从而

$$\alpha_n\big((r \otimes s)(z)\big) = \mathbf{A}_n(T_{(r\otimes s)(z)}) = \mathbf{A}_n(s_n \circ T_z \circ r') \le \|s\|_{\mathrm{cb}}\, \mathbf{A}_n(T_z)\, \|r'\|_{\mathrm{cb}} = \|s\|_{\mathrm{cb}}\, \|r\|_{\mathrm{cb}}\, \alpha_n(z).$$

反过来，设 α 是 OFIN 上满足完全度量映射性质的算子空间张量范数。对 M、$N \in \in$OFIN 以及 $T \in M_n \in \mathrm{CB}(M, N)$，定义

$$\mathbf{A}_n(T : M \to N) := \alpha_n(z_T; M', N).$$

其中 $z_T \in M_n(M' \otimes N)$ 是相应的张量矩阵。设 $r \in \in \mathrm{CB}(M_0, M)$，且 $s \in CB(N, N_0)$。同样，条件 (b) 与方程（2.4）相关。注意到

$$z_{s_n \circ T \circ r} = \big(r' \otimes s\big) z_T$$

因此，由 α 的完全度量映射性质可得，

$$\mathbf{A}_n(s_n \circ T \circ r) = \alpha_n(z_{s_n \circ T \circ r}) \le \|r'\|_{\mathrm{cb}}\, \|s\|_{\mathrm{cb}}\, \alpha_n(z_T) = \|r\|_{\mathrm{cb}}\, \|s\|_{\mathrm{cb}}\, \mathbf{A}_n(T)$$

因此，在有限维情形下，映射理想与算子空间张量范数之间存在完全对应关系。本节余下部分将探讨在无限维情形下能得到什么结论。自然地，对于那些能够由有限维部分良好逼近的映射理想，答案是令人满意的；这一想法引出了下一个定义。

定义 8.1。设 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 是一个映射理想。对 E、$F \in \in$OBAN 以及 $T \in M_n \in \mathrm{CB}(E, F)$，定义

$$\mathbf{A}_n^{\max}(T) = \sup\left\{\mathbf{A}_n((q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E) \colon M \in \mathrm{OFIN}(E), L \in \mathrm{OCOFIN}(F)\right\}$$

and

$$\mathfrak{A}^{\max}(E, F) = \left\{T \in \mathrm{CB}(E, F) \,:\, \mathbf{A}_1^{\max}(T) < \infty\right\}.$$

我们称 $(\mathfrak{A}^{\max}, \mathbf{A}^{\max})$ 为 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 的极大包，并称 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 是极大的，若 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A}) = (\mathfrak{A}^{\max}, \mathbf{A}^{\max})$。

命题 8.2. 设 $(\mathfrak{A},\mathbf{A})$ 是一个映射理想。那么 $(\mathfrak{A}^{\max},\mathbf{A}^{\max})$ 是一个巴拿赫映射理想，当然，它也是极大的。

证明. 显然，每个 $\mathbf{A}_n^{\max}$ 都是一个范数，并且 $\mathbf{A}^{\max}$ 满足 Ruan 公理（例如，可参见 [ER00, 命题 2.3.6]）。

利用恒等映射 $\mathfrak{A}(E, F) \to \mathrm{CB}(E, F)$ 是完全压缩映射这一事实，以及完全有界范数的理想性质，对于 $T \in M_n(\mathrm{CB}(E, F))$，我们有

$$\mathbf{A}_n((q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E) \le \left\|(q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E\right\|_{M_n(\mathrm{CB}(M, F/L))} \le \|T\|_{M_n(\mathrm{CB}(E,F))},$$

这意味着恒等映射 $\mathfrak{A}^{\max}(E,F) \to \mathrm{CB}(E,F)$ 也是完全压缩映射。类似地，$(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 的理想性质表明，所有有限秩算子都属于 $\mathfrak{A}^{\max}$，因为它们属于 $\mathfrak{A}$。此外，给定 $x' \in M_n(E')$ 和 $y \in M_m(F)$，我们有

$$\mathbf{A}_{nm}((q_L^F)_{nm} \circ x' \otimes y \circ i_M^E) = \mathbf{A}_{nm}(x' \circ i_M^E \otimes (q_L^F)_m(y)) = \|x' \circ i_M^E\|_{\mathrm{cb}} \|(q_L^F)_m(y)\|_{\mathrm{cb}},$$

这表明 $\mathbf{A}_{nm}^{\max}(x' \otimes y) \le \|x'\|_{\mathrm{cb}} \|y\|_{\mathrm{cb}}$。

现在假设 $r \in \mathrm{CB}(E_0, E)$ 且 $s \in \mathrm{CB}(F, F_0)$。令 $M_0 \in \mathrm{OFIN}(E_0)$ 且 $L_0 \in \mathrm{OCOFIN}(F_0)$。定义 $M = r(M_0) \in \mathrm{OFIN}(E)$，以及 $L = s^{-1}(L_0) \in \mathrm{OCOFIN}(F)$。注意到 $r = i_M^E \circ r$，且 $q_{L_0}^{F_0} \circ s = \widetilde{s} \circ q_L^F$ 对于某个 $\widetilde{s} \in \mathrm{CB}(F/L, F_0/L_0)$ 有 $\|\widetilde{s}\|_{\mathrm{cb}} = \|s\|_{\mathrm{cb}}$。因此，由 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 的理想性质可得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_n\big((q_{L_0}^{F_0})_n \circ s_n \circ T \circ r \circ i_{M_0}^{E_0}\big) &= \mathbf{A}_n\big(\widetilde{s}_n \circ (q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E \circ r \circ i_{M_0}^{E_0}\big) \\ &\le \|\widetilde{s}\|_{\mathrm{cb}} \mathbf{A}_n\big((q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E\big) \|r \circ i_{M_0}^{E_0}\|_{\mathrm{cb}} \le \|s\|_{\mathrm{cb}} \mathbf{A}_n^{\max}(T) \|r\|_{\mathrm{cb}},\end{aligned}$$

这便得到了 $(\mathfrak{A}^{\max}, \mathbf{A}^{\max})$ 的理想性质。

现在我们来验证，当 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 是一个映射理想时，$\mathfrak{A}^{\max}(E,F)$ 是完备的。为此，设 $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathfrak{A}^{\max}(E,F)$ 中的一个序列，且 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_1^{\max}(T_k) < \infty$。由于 $\mathbf{A}_1^{\max}$ 支配完全有界范数，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} T_k$ 在 $\mathrm{CB}(E,F)$ 中收敛到一个算子 T。现在来证明该收敛对于 $\mathbf{A}_1^{\max}$ 也成立。固定 $M \in \mathrm{OFIN}(E)$ 和 $L \in \mathrm{OCOFIN}(F)$。对于 $m \in \mathbb{N}$，注意到

$$\mathbf{A}_1\Big(q_L^F \circ \Big(\sum_{k=m}^{\infty} T_k\Big) \circ i_M^E\Big) \le \sum_{k=m}^{\infty} \mathbf{A}_1\big(q_L^F \circ T_k \circ i_M^E\big) \le \sum_{k=m}^{\infty} \mathbf{A}_1^{\max}(T_k),$$

由此 $\mathbf{A}_1^{\max}\big(\sum_{k=m}^{\infty} T_k\big) \le \sum_{k=m}^{\infty} \mathbf{A}_1^{\max}(T_k)$，因此 $\sum_{k=1}^{\infty} T_k$ 关于 $\mathbf{A}_1^{\max}$ 收敛到 T。□

例 8.3。以下映射理想是极大的。

(i) 完全有界映射 CB。(ii) 完全积分映射 $\mathcal{I}$：见下文例 8.8。(iii) 完全 p-可和映射 Π_p：设 $E, F \in \mathrm{OBAN}$，$T \in M_n(\Pi_p(E,F))$ 且 $\varepsilon > 0$。假设 $(\pi_p)_n(T) = 1$。由于 $\Pi_p(E,F)$ 典范完全等距地嵌入 $\mathrm{CB}(S_p \otimes_{\min} E, S_p[F])$，根据稠密性论证，存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 $x \in M_n(S_p^k \otimes_{\min} E)$，满足 $\|x\| = 1$，使得

$$\Big\| (id_{S_p^k} \otimes T)(x) \Big\|_{M_n(S_p^k[F])} > 1 - \varepsilon,$$

由于 $S_p^k[F]$ 完全等距地嵌入到 $S_p^k[F''] = (S_{p'}[F'])'$ 中，存在 $y \in M_\ell(S_{p'}^k[F'])$，使得 $\|y\| = 1$，并且

$$\Big\| \langle\langle y, (id_{S_p^k} \otimes T)(x) \rangle\rangle \Big\|_{M_{n\ell}} > 1 - \varepsilon.$$

将 y 视为 F'上的一个 $k\ell \times k\ell$ 矩阵，并令 L 为 F'中这些 $(k\ell)^2$ 个泛函的交集。注意， $L \in \mathsf{OCOFIN}(F)$，且 y是一个取值于 L 在 F中的湮灭子 L^0 上的 $k\ell \times k\ell$ 矩阵。由于 $(F/L) = L^0$ 完全等距，因此 $S^k_{p'}[F/L] = S^k_{p'}[L^0]$ 也完全等距。于是， y 作为 $M_\ell(S^k_{p'}[(F/L)'])$中的元素，其范数也等于一。若 M 是由构成 x的 $(nk)^2$ 个向量在 E 中张成的有限维子空间，则

$$(\pi_p)_n\big((q^F_L)_n \circ T \circ i^E_M\big) > 1 - \varepsilon.$$

定义 8.4。若映射理想 $(\mathfrak{A}, \mathsf{A})$ 与有限生成算子空间张量范数 α（在 ONORM 上）相关联，则记为 $(\mathfrak{A}, \mathsf{A}) \sim \alpha$；如果对于每个 M、$N \in \mathsf{OFIN}$，我们都有一个完全等距

$$\mathfrak{A}(M, N) = M' \otimes_\alpha N,$$

由典范映射 $T \mapsto z_T$ 给出。

注 8.5。注意，由于该定义仅基于有限维空间，因此两个不同的映射理想可能与同一个算子空间张量范数相关联。特别地， $\mathfrak{A} \sim \alpha$ 当且仅当 $\mathfrak{A}^{\max} \sim \alpha$。

例如，CB $\mathcal{A} \sim$最小张量范数或 $\mathcal{N}$、$\mathcal{I} \sim$投影张量范数。此外，根据定义本身， $\mathcal{N}_p \sim d_p$。

注意，定义 3.1 和 8.1 中的构造在极大映射理想与有限生成算子空间张量范数之间建立了一一对应。本节的主要结果如下定理所述，它表明，定义这种对应关系的有限维对偶性可以扩展到无限维情形。

定理 8.6（极大映射理想的表示定理）。设 $(\mathfrak{A},\mathsf{A})$ 是与算子空间张量范数 α 相关联的极大映射理想。那么对于任意$E, F \in \mathsf{OBAN}$，存在一个完全等距

$$\mathfrak{A}(E, F) = \big(E \otimes_{\alpha'} F'\big)' \cap \mathrm{CB}(E, F) \tag{8.1}$$

证明。为证明 (8.1)，我们需要证明：对于 $T \in M_n(\mathsf{CB}(E, F))$，以下结论成立： T 属于 $M_n(\mathfrak{A}(E, F))$，当且仅当双线性映射的关联矩阵 $\beta_{\kappa_F \circ T}$属于 $M_n\big((E \otimes_{\alpha'} F')'\big)$，且范数相等。注意，不等式$\|\beta_{\kappa_F \circ T}\| \le C$等价于

$$\big\|\langle\langle \beta_{\kappa_F \circ T}, z\rangle\rangle\big\|_{M_{nm}} \le C(\alpha')_m(z; E, F') \text{ for all } z \in M_m(E \otimes_{\alpha'} F'). \tag{8.2}$$

由 $\mathfrak{A}$ 的极大性可知， $T \in M_n(\mathfrak{A}(E, F))$ 且 $\mathsf{A}_n(T) \le C$，当且仅当

$$\mathsf{A}_n\big((q^F_L)_n \circ T \circ i^E_M\big) \le C \tag{8.3}$$

对于任意 $M \in \mathsf{OFIN}(E)$ 和 $L \in \mathsf{OCOFIN}(F)$。

由于 $\mathfrak{A}(M, F/L) = (M \otimes_{\alpha'} L^0)'$ 完全等距地成立，并且回顾当 L 遍历 OCOFIN(F) 中的所有空间时， L^0 遍历 OFIN(F') 中的所有空间，条件 (8.3) 等价于

$$\left\| \langle\langle \beta_{(q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E}, z \rangle\rangle \right\|_{M_{mn}} \leq C(\alpha')_m(z; M, L^0) \tag{8.4}$$
$$\text{for any } M \in \mathrm{OFIN}(E),\ L^0 \in \mathrm{OFIN}(F') \text{ and } z \in M_m(M \otimes_{\alpha'} L^0).$$

注意，对于 $z \in M_m(M \otimes_{\alpha'} L^0)$,

$$\langle\langle \beta_{\kappa_F \circ T}, z \rangle\rangle = \langle\langle \beta_{(q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E}, z \rangle\rangle.$$

因此，(8.4) 等价于 (8.2)，因为 α' 是有限生成的，从而完成证明。□

事实上，逆命题也成立。我们将此结论表述为下面的命题，并将证明留作习题。回想一下，在例 7.4 中，我们定义了一个与给定算子空间张量范数“对偶”的映射理想。

命题 8.7. 设 α 是一个有限生成算子空间张量范数。映射理想 $(\mathfrak{A}_{\alpha'}, \mathrm{A}_{\alpha'})$（定义为

$$\mathfrak{A}_{\alpha'}(E, F) := (E \otimes_{\alpha'} F')' \cap \mathrm{CB}(E, F) \tag{8.5}$$

对于任意 $E, F \in$ OBAN）是极大的，其相应的算子空间张量范数为 α.

在下面的例子中，我们利用这一事实说明，完全积分映射的理想是极大的。

例 8.8. $\mathcal{I}$ 是一个极大映射理想。

证明. 我们将给出两种证明（第二种只给出证明概要）。先从第一种开始。

回顾一下，与 $\mathcal{I}$ 相关的算子空间张量范数是 proj。根据前一个命题，要证明 $\mathcal{I}$ 是极大的，我们需要验证：对于任意 $E, F \in$ OBAN，都存在一个完全等距映射

$$\mathcal{I}(E, F) = (E \otimes_{\min} F')' \cap \mathrm{CB}(E, F). \tag{8.6}$$

根据 [ER00，引理 12.3.3]典范嵌入

$$S_0 : \mathcal{I}(E, F) \hookrightarrow (E \otimes_{\min} F')'$$

是完全等距的。因此，剩下要证明的是，若 $\Psi \in (E \otimes_{\min} F')' \cap \mathrm{CB}(E, F)$，则 $\Psi = S_0(T)$, 其中存在某个 $T \in \mathcal{I}(E, F)$。不失一般性，我们假设$\|\Psi\|_{(E \otimes_{\min} F')'} < 1$. 根据注5.6，以下包含映射是完全等距的:

$$E \otimes_{\min} F' \hookrightarrow (E' \otimes_{\mathrm{proj}} F)' = \mathrm{CB}(E', F').$$

那么，根据 Averson-Wittstock Hahn-Banach 定理 [ER00, 定理 4.1.5], Ψ等距延拓到 $(E' \otimes_{\mathrm{proj}} F)''$。因此，Goldstine 定理为我们提供了

一个网 $(\Psi_\gamma)_\gamma$，使得 $\|\Psi_\gamma\|_{E'\otimes_{\mathrm{proj}}F} < 1$，它在 Ψ 处 w^*-收敛（即在拓扑 $\sigma((E'\otimes_{\mathrm{proj}}F)'', (E'\otimes_{\mathrm{proj}}F)')$ 中）。我们考虑 $\Phi(\Psi_\gamma)_\gamma \subset \mathcal{N}(E,F)$，其中 $\nu(\Phi(\Psi_\gamma)) < 1$，这里 Φ 是 (7.1) 中定义的映射。注意，给定 $x \in E, y' \in F'$

$$\langle y', \Phi(\Psi_\gamma)\rangle \to \langle \Psi, x\otimes y'\rangle.$$

现在，表达式 $\langle T(x)\ y'\rangle := \langle \Psi, x\otimes y'\rangle$ 定义了一个映射 $T \in \mathrm{CB}(E,F)$，满足 $\Phi(\Psi_\gamma)$ 在逐点弱拓扑下收敛到 T。最后，依据 [ER00，引理 12.3。1]，我们得到 T 是完全积分映射，且 $\Psi = S_0(T)$。至此，第一种证明完成。

现在，我们概述一种不同的论证，来证明 $\mathcal{I}$ 是极大的；这种视角或许能带来启发。首先注意，[DF93，例 17。1] 在算子空间情形下同样成立。也就是说，假设对于每个 $\gamma \in \Gamma$，$(\mathfrak{A}^\gamma, \mathrm{A}^\gamma)$ 都是一个极大映射理想。定义 $E, F \in \mathrm{OBAN}$，并令 $T \in M_n(\mathrm{CB}(E,F))$，

$$\mathbf{A}_n(T) = \sup\{\mathbf{A}_n^\gamma(T) : \gamma\in\Gamma\} \quad \text{and} \quad \mathfrak{A}(E,F) = \{S \in \mathrm{CB}(E,F) : \mathbf{A}_1(S) < \infty\}.$$

容易看出，$(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 也是一个极大映射理想。现在注意，[ER00，引理 12.3。1]指出，完全积分映射理想可以通过将上述过程应用于由完全等距嵌入定义的理想 $(\mathfrak{A}^G, \mathrm{A}^G)$ 得到

$$\mathfrak{A}^G(E,F) \hookrightarrow \mathrm{CB}(E\otimes_{\min} G, F\otimes_{\mathrm{proj}} G),$$

其中 G遍历所有巴拿赫算子空间（或仅遍历有限维的巴拿赫算子空间）。由于每个 $\mathfrak{A}^G$ 显然都是极大的，因此 $\mathcal{I}$也同样如此。至此，第二个证明的概要就完成了。□

命题 8.9. 设 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 和 $(\mathfrak{B}, \mathrm{B})$ 是巴拿赫映射理想。假设对每个 $M, N \in \mathrm{OFIN}$，都有包含映射 $\|\mathfrak{A}(M,N) \hookrightarrow \mathfrak{B}(M,N)\|_{\mathrm{cb}} \le c$。那么，对每个 $E, F \in \mathrm{OBAN}$，$\mathfrak{A}^{\max} \subset \mathfrak{B}^{\max}$ 且 $\|\mathfrak{A}^{\max}(E,F) \hookrightarrow \mathfrak{B}^{\max}(E,F)\|_{\mathrm{cb}} \le c$。

证明。设 $T \in M_n(\mathrm{CB}(E,F))$。固定 $M \in \mathrm{OFIN}(E)$ 和 $L \in \mathrm{OCOFIN}(F)$。由假设可知，$\mathrm{B}_n((q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E) \le c\mathrm{A}_n((q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E)$。对所有 M 和 L 取上确界，得到 $\mathrm{B}_n^{\max}(T) \le c\mathrm{A}_n^{\max}(T)$，结论成立。□

命题 8.10. 设 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 是与有限生成算子空间张量范数 α 相关联的映射理想。那么，$(\mathfrak{A}^{\max}, \mathrm{A}^{\max})$ 是与 α 相关联的最大映射理想。

证明。$(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 的理想性质表明，对于任意 $E, F \in \mathrm{OBAN}$，恒等映射 $\mathfrak{A}(E,F) \to \mathfrak{A}^{\max}(E,F)$ 是完全压缩的。对于 $M, N \in \mathrm{OFIN}$，由于对于 $T \in \mathrm{CB}(M,N)$ 有 $T = (q_{\{0\}}^N)_n \circ T \circ i_M^M$，我们还可得到恒等映射 $\mathfrak{A}^{\max}(M,N) \to \mathfrak{A}(M,N)$ 也是完全压缩的。因此，恒等映射 $\mathfrak{A}^{\max}(M,N) \to \mathfrak{A}(M,N)$ 是完全同构的，从而 $(\mathfrak{A}^{\max}, \mathrm{A}^{\max})$ 与 α 相关联。

设 $(\mathfrak{B}, \mathrm{B})$ 是与 α 相关的任意映射理想，并设 $T \in M_n(\mathfrak{B}(E,F))$。令 $M \in \mathrm{OFIN}(E)$ 且 $L \in \mathrm{OCOFIN}(F)$。由 $(\mathfrak{B}, \mathrm{B})$ 的理想性质可得

$$\mathbf{A}_n((q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E) = \mathbf{B}_n((q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E) \le \mathbf{B}_n(T),$$

由此可得 $\mathrm{A}_n^{\max}(T) \leq \mathrm{B}_n(T)$，这表明 $\mathfrak{B}(E,F) \subseteq \mathfrak{A}^{\max}(E,F)$（事实上，包含映射 $\mathfrak{B}(E,F) \to \mathfrak{A}^{\max}(E,F)$ 是完全压缩的）。

□

注 8.11. 给定一个有限维算子空间 M 和任意一个 OBAN $E \in$，存在一个典范完全等距映射：

$$M \otimes_{\mathrm{proj}} E \hookrightarrow (M' \otimes_{\min} E')'.$$

事实上，由于 M 是有限维的，我们有 $M \otimes_{\mathrm{proj}} E = \mathcal{N}(M', E) = \mathcal{I}(M', E)$。现在，利用例 8.8 中提到的嵌入 S_0，即可得到所需结果。通过转置，还可得到以下完全等距映射：

$$E \otimes_{\mathrm{proj}} M \hookrightarrow (E' \otimes_{\min} M')'.$$

表示定理的另一个经典版本指出，取值于对偶空间的极大理想本身也是一个对偶空间。要得到算子空间版本，我们还需要局部自反这一附加假设。

推论 8.12. 设 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 是一个极大映射理想，α 是其相应的算子空间张量范数。若 F 是局部自反的，则

$$\mathfrak{A}(E, F') = (E \otimes_{\alpha'} F)'$$

证明. 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} \varphi \in (E \otimes_{\alpha'} F)' & \longrightarrow & (E \otimes_{\mathrm{proj}} F)' & = & \mathrm{CB}(E, F') \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ \varphi^{\wedge} \in (E \otimes_{\alpha'} F'')' & \longrightarrow & (E \otimes_{\mathrm{proj}} F'')'. & & \end{array}$$

根据扩张引理 4.3，竖直箭头是完全等距映射；而水平箭头是连续的，因为 $\alpha' \leq$ 是投影张量范数。由 (8.5) 即得所需结论。□

注意，前述结果中的局部自反性假设不可省略。事实上，取与投影张量范数相关的完全积分映射的映射理想 $\mathfrak{A} = \mathcal{I}$，由 [ER00，定理 14.3.1] 可知，对于每个 $E \in$ OBAN，等式 $\mathcal{I}(E, F') = (E \otimes_{\min} F)'$ 成立，当且仅当 F 是局部自反的。

另一方面，只要 α' 是一个 λ-算子空间张量范数，扩张引理 4.3 无需局部自反性假设即可成立。因此，前述推论在没有这一假设的情况下同样成立。

沿着 sim类似的思路，在同一设定下，我们可以得到 [DF93，定理 17.15] 的一个版本。

定理 8.13. 设 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 是与算子空间张量范数 α 相关的极大映射理想。假设 α' 是一个 λ-算子空间张量范数。那么对于任意 $E, F \in$ OBAN 以及 $T \in \mathrm{CB}(E, F)$，以下条件等价：

(a) $T \in \mathfrak{A}(E,F)$。 (b) 对任意 $G \in \mathrm{OBAN}$（或仅对 $G = F'$），映射

$$T \otimes id_G : E \otimes_{\alpha'} G \to F \otimes_{\mathrm{proj}} G$$

是有界的。

在这种情况下,

$$\mathbf{A}(T) = \|T \otimes id_{F'} : E \otimes_{\alpha'} F' \to F \otimes_{\mathrm{proj}} F'\| \geq \|T \otimes id_G : E \otimes_{\alpha'} G \to F \otimes_{\mathrm{proj}} G\|.$$

证明。设 $T \in \mathfrak{A}(E,F)$。令 $\varphi \in (F \otimes_{\mathrm{proj}} G)' =$完全有界算子$(F, G')$。注意, $L_\varphi \circ T \in \mathfrak{A}(E,G') = (E \otimes_{\alpha'} G)'$，这里我们用到前一个推论普遍成立，因为 α' 是一个 λ-算子空间张量范数。于是，对 $z \in E \otimes G$，利用[DF93，公式 17.15.(1)]„，可得

$$|\langle \varphi, (T \otimes id_G)(z)\rangle| = |\langle \beta_{L_\varphi \circ T}, z\rangle| \leq \mathbf{A}(L_\varphi \circ T)\alpha'(z; E, G) \leq \|\varphi\|\, \mathbf{A}(T)\alpha'(z; E, G).$$

对 $\|\varphi\| \leq 1$ 取上确界，得到

$$\mathrm{proj}((T \otimes id_G)(z); F, G) \leq \mathbf{A}(T)\alpha'(z; E, G).$$

现在，假设 (b) 对 $G = F'$成立。回忆一下，根据表示定理， $\mathfrak{A}(E,F)$与 $(E \otimes_{\alpha'} F')' \cap$完全有界算子$(E,F)$一致。由于 $T \in$完全有界算子(E,F)，只需证明 $\beta_{\kappa_F \circ T} \in (E \otimes_{\alpha'} F')'$。现在若令 $z \in E \otimes F'$，利用 [DF93，公式 17.15.(2)]„，可得

$$\begin{aligned} |\langle \beta_{\kappa_F \circ T}, z\rangle| = |\langle \mathrm{tr}_F, (T \otimes id_{F'})(z)\rangle| &\leq \mathrm{proj}((T \otimes id_{F'})(z); F, F') \\ &\leq \alpha'(z; E, F')\, \|T \otimes id_G : E \otimes_{\alpha'} F' \to F \otimes_{\mathrm{proj}} F'\|. \end{aligned}$$

□

有了上述定理，我们便得到 [DF93，命题 17.20] 的一个版本。注意，这是对 [AK21，命题 4]，的推广；其中，对某些 λ-算子空间张量范数，得到了相同的结果。

命题 8.14. 对任意 λ-算子空间张量范数以及 $E, F \in$ OBAN，若其中一个具有 OAP，则自然映射

$$i : E\widehat{\otimes}_\lambda F \to E\widehat{\otimes}_{\min} F$$

是内射的。

证明. 假设 F 具有 OAP。取 $z \in E\widehat{\otimes}_\lambda F$ 使得 $i(z) = 0$。注意，我们需要证明：只要 $\varphi \in (E\widehat{\otimes}_\lambda F)' \hookrightarrow \mathrm{CB}(E, F')$，就有 $\langle \varphi, z\rangle = 0$。

注意，由于 λ 是有限生成的，我们有 $\lambda = (\lambda')'$，因此前一个定理适用，所以

$$L_\varphi \otimes id_F : E\widehat{\otimes}_\lambda F \to F'\widehat{\otimes}_{\mathrm{proj}} F$$

是连续的。在交换图中

$$\begin{array}{ccc} E\widehat{\otimes}_{\lambda}F & \xrightarrow{\ i\ } & E\widehat{\otimes}_{\min}F \\ \Big\downarrow{\scriptstyle L_{\varphi}\widehat{\otimes}_{\lambda,\mathrm{proj}}id_F} & & \Big\downarrow{\scriptstyle L_{\varphi}\widehat{\otimes}_{\min}id_F} \\ F'\widehat{\otimes}_{\mathrm{proj}}F & \longrightarrow & F'\widehat{\otimes}_{\min}F \end{array}$$

底行是内射的，因为 F 具有有界逼近性质 [ER00，定理 11.2.5], 这意味着

$$(L_{\varphi}\widehat{\otimes}_{\lambda,\mathrm{proj}}id_F)(z) = 0 \in F'\widehat{\otimes}_{\mathrm{proj}}F.$$

再次利用 [DF93，公式 17.15.(2)], ，我们得到

$$\langle \varphi, z\rangle = \langle \operatorname{tr} F, (L_{\varphi}\widehat{\otimes}_{\lambda,\mathrm{proj}}id_F)(z)\rangle = 0.$$

□

例 8.15。对于 Haagerup 算子空间张量范数 h ，如例 7.4 中所示，考虑映射理想 $\mathfrak{A}_h$。于是， $\mathfrak{A}_h$ 是一个极大映射理想，定义如下

$$\mathfrak{A}_h(E,F) := (E \otimes_h F')' \cap \mathrm{CB}(E,F)$$

对每个 E， $F \in$ OBAN。

由于 $\alpha' = h$ 是一个 λ-算子空间张量范数，我们有

$$\mathfrak{A}_h(E,F') = (E \otimes_h F)'$$

对每个 E， $F \in$ OBAN。另外，回顾一下， $E \otimes_h F$ 的对偶可与乘法有界双线性映射空间 MB($E \times F$) 等同（例如参见 [ER00，命题 9.2.2]），于是我们得到如下完全等距同构：

$$\mathfrak{A}_h(E,F') = \mathrm{MB}(E \times F).$$

结合表示定理 8.6 和 8.12 与对偶定理 5.5，我们得到：

定理 8.16（嵌入定理）。设 ($\mathfrak{A}$, A) 是与算子空间张量范数 α 相关联的极大映射理想。那么对于任意 $E, F \in$ OBAN，都存在完全等距映射：

$$\begin{aligned} E \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F &\hookrightarrow \mathfrak{A}(E', F) \\ E' \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F &\hookrightarrow \mathfrak{A}(E, F) \qquad \textit{whenever } E \textit{ is locally reflexive} \\ E' \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F' &\hookrightarrow \mathfrak{A}(E, F') \qquad \textit{whenever } E \textit{ and } F \textit{ are locally reflexive.} \end{aligned}$$

注记 8.17. 如对偶定理 5.5 和推论 8.12 之后的评论所述，若 α' 是 λ-算子空间张量范数，则无需局部自反性这一假设，嵌入定理 8.16 仍然成立。特别地，这对 $\overleftarrow{\alpha} = \overleftarrow{\ \ }$最小张量范数 $=$ 最小张量范数且 $\mathfrak{A} =$ 为完全有界算子，以及 $\overleftarrow{\alpha} = \overleftarrow{h} = h$ 与 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_h$的情形均成立。

给定一个算子空间张量范数 α，我们将其转置算子空间张量范数记为 α^t。也就是说，对于每一对满足以下条件的算子空间 α^t：

$$E \otimes_\alpha F = F \otimes_{\alpha^t} E$$

在自然同一化下是完全等距映射。如引言中所述，投影张量范数 $= \mathrm{proj}^t$、最小张量范数 $= \min^t$，但 $h \neq h^t$。此外，由定义可知，$(d_p)^t = g_p$ 以及 $(g_p)^t = d_p$.

在经典情形下，极大理想的对偶也是极大理想，且它们相关的张量范数互为转置。在算子空间情形下，为了得到类似的结果，我们再次需要局部自反性这一附加假设。

推论 8.18. 设 $(\mathfrak{A},\mathrm{A})$ 是与有限生成的算子空间张量范数 α 相关联的极大映射理想。则 $\mathfrak{A}^{dual}$ 与 α^t 相关联。此外，若 $(\mathfrak{B},\mathrm{B})$ 是与 α^t 相关联的极大映射理想，且 E 是局部自反的巴拿赫算子空间，则 $\mathfrak{B}(E,F) = \mathfrak{A}^{\mathrm{dual}}(E,F)$。

证明. 若 $\mathfrak{A} \sim \alpha$ 和 M, N 是有限维算子空间，则 $\mathfrak{A}^{\mathrm{dual}}(M,N) = M' \otimes_{\alpha^t} N$. 这表明 $\mathfrak{A}^{\mathrm{dual}} \sim \alpha^t$. 。此外，由表示定理 8.6 和推论 8.12，我们有完全等距映射

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(E,F) &= (E \otimes_{(\alpha^t)'} F')' \cap \mathrm{CB}(E,F) = \left\{T \in \mathrm{CB}(E,F) : \beta_T \in (E \otimes_{(\alpha^t)'} F')'\right\} \\ &= \left\{T \in \mathrm{CB}(E,F) : \beta_{T'} \in (F' \otimes_{\alpha'} E)'\right\} \\ &= \left\{T \in \mathrm{CB}(E,F) : T' \in \mathfrak{A}(F',E')\right\} = \mathfrak{A}^{\mathrm{dual}}(E,F)\end{aligned}$$

因此，对于 $S \in M_n(\mathfrak{B}(E,F))$，有 $\mathrm{B}_n(S) = \mathrm{A}_n(S')$。这就是所需的结论。□

如果 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 是极大映射理想，那么应当注意，$\mathfrak{A}^{\mathrm{dual}}$ 不一定是极大的，这与巴拿赫空间情形不同。事实上，$\mathfrak{A} = \mathcal{I}$ 完全积分映射的极大映射理想与投影张量范数 proj 相关，它为我们提供了一个例子。为说明这一点，注意到对于每个 $M, N \in \mathrm{OFIN}$，$\mathcal{I}^{\mathrm{dual}}(M,N) = M' \otimes_{\mathrm{proj}} N$。因此，如果 $\mathcal{I}^{\mathrm{dual}}$ 是极大映射理想，它就应当与 $\mathcal{I}$ 一致（因为 $\mathrm{proj}^t = \mathrm{proj}$）。如果 W 是任意一个非局部自反算子空间，那么根据 [ER00，定理 14.3.1]，存在 $L \in \mathrm{OFIN}$，使得包含映射 $\mathcal{N}(W, L^*) \hookrightarrow \mathcal{I}(W, L^*)$ 不是等距的。取 $T \in \mathcal{N}(W, L^*)$，使得 $\iota(T) < \nu(T)$。我们有 $T' \in \mathcal{N}(L, W^*) = \mathcal{I}(L, W^*)$（因为 L 是有限维的），并且

$$\iota^{\mathrm{dual}}(T) = \iota(T') = \nu(T') = \nu(T) > \iota(T).$$

回顾一下，对于有限维空间 E 和 F 以及线性映射 $T\colon M \to N$、$S\colon N \to M$，它们的迹对偶配对定义为

$$\langle T, S\rangle = \mathrm{tr}(S \circ T).$$

更一般地，对于 $T \in M_n$(完全有界算子(M, N)) 和 $S \in M_m$(完全有界算子(N, M))，它们的迹对偶（矩阵）配对是 M_{nm} 中的矩阵，定义为

$$\langle\langle T, S\rangle\rangle = [\mathrm{tr}(S_{kl} \circ T_{ij})].$$

定义 8.19. 设 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 是一个映射理想。对于 $M, N \in$ OFIN、$T \in M_n$(CB(M, N)) 和 $S \in M_m$(CB(N, M))，我们将映射 $M \to M$ 所诱导的 $S \circ T$矩阵记为 $mn \times mn$。对于 $T \in M_n$(CB(E, F))，定义

$$\mathbf{A}_n^*(T) = \sup\Big\{ \big\|\langle\langle (q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E, S\rangle\rangle\big\|_{M_{mn}} : M \in \mathrm{OFIN}(E), L \in \mathrm{OCOFIN}(F), S \in M_m(\mathrm{CB}(F/L, M)), \mathbf{A}_m(S) \le 1\Big\}$$

and

$$\mathfrak{A}^*(E, F) = \{T \in \mathrm{CB}(E, F) : \mathbf{A}_1^*(T) < \infty\}.$$

如下命题所示，$(\mathfrak{A}^*, \mathbf{A}^*)$ 是一个极大映射理想，它与所谓的伴随算子空间张量范数相关联。因此，我们将 $(\mathfrak{A}^*, \mathbf{A}^*)$ 称为 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 的伴随映射理想。

命题 8.20. 设 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 是一个与有限生成算子空间张量范数 α 相关联的极大映射理想。那么，$(\mathfrak{A}^*, \mathbf{A}^*)$ 是一个极大映射理想，并且它与伴随算子空间张量范数 $\alpha^* := (\alpha^t)'$ 相关联。

证明。令 $(\mathfrak{B}, \mathbf{B})$ 为与 α^* 关联的极大映射理想。现在证明 $(\mathfrak{B}, \mathbf{B})$ 实际上是 $(\mathfrak{A}^*, \mathbf{A}^*)$。首先注意，对于 $M, N \in$ OFIN,

$$\big(\mathfrak{A}(N, M)\big)' = (N' \otimes_\alpha M)' = (M \otimes_{\alpha^t} N') = M' \otimes_{(\alpha^t)'} N = M' \otimes_{\alpha^*} N.$$

因此,

$$\mathfrak{B}(M, N) = \big(\mathfrak{A}(N, M)\big)'$$

完全等距地，其中对偶配对由典范迹对偶给出。这意味着对于 $T \in M_n$(CB(M, N))，我们有

$$\mathbf{B}_n(T) = \sup\{\|\langle\langle T, S\rangle\rangle\|_{M_{nm}} : S \in M_m(\mathfrak{A}(N, M)), \mathbf{A}_m(S) \le 1\}.$$

由于 $\mathfrak{B}$ 是极大的，因此对于任意 $E, F \in$ OBAN，以及 $T \in M_n$(CB(E, F)),

$$\mathbf{B}_n(T) = \sup\Big\{ \big\|\langle\langle (q_L^F)_n \circ T \circ i_M^E, S\rangle\rangle\big\|_{M_{mn}} : M \in \mathrm{OFIN}(E), L \in \mathrm{OCOFIN}(F), S \in M_m(\mathrm{CB}(F/L, M)), \mathbf{A}_m(S) \le 1\Big\}$$

这与 $\mathbf{A}_n^*(T)$ 的定义一致。 □

命题 8.21。设 $1 \le p \le \infty$。算子空间张量范数 $(g_p)^*$ 与映射理想 Π_p 相关联。

证明。注意，$(g_p)^* = ((g_p)^t)'$ 是有限生成算子空间张量范数，因为对偶算子空间张量范数被定义为有限包。

最后，根据完全 p-求和映射与 Chevet-Saphar 算子空间张量范数 [CD16], 之间的对偶性，对于任意 E, $F \in$ OFIN，我们有一个典范对偶性

$$\Pi_p(E,F) = (E \otimes_{d_{p'}} F')' = E' \otimes_{(d_{p'})'} F = E' \otimes_{(g_{p'})^*} F,$$

证明至此结束。 □

9. Minimal o.s. mapping ideals

在巴拿赫空间理论中，关于张量积与理想之间相互作用的另一个重要主题是极小算子理想类 [DF93，第22]节。本节将构造这一概念的算子空间类比；核映射的定义中已经出现了这一过程的一个实例，正如下面的定理 9.6 将要说明的那样。

给定一个巴拿赫映射理想 $\mathfrak{A}$，我们将描述与 $\mathfrak{A}$ 在 OFIN 上重合的最小巴拿赫映射理想。这个映射理想称为 $\mathfrak{A}$ 的极小核，记作 $\mathfrak{A}^{\min}$。换言之，若 $\mathfrak{A}$ 是一个与有限生成算子空间张量范数 α相关联的巴拿赫映射理想，那么 $\mathfrak{A}^{\min}$ 将是同样与 α. 相关联的最小巴拿赫映射理想。

在巴拿赫空间框架中，极小巴拿赫理想的表示定理 [DF93，22.2] 给出了与张量积的联系。在我们的情形下，我们将利用这一对应关系为映射理想 $\mathfrak{A}^{\min}$赋予序结构。

定义 9.1. 设 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 是一个映射理想。对于 $E, F \in$ ONORM，我们定义 $\mathfrak{A}^{\min}(E,F)$ 为所有映射 $T\colon E \to F$的类，这些映射允许以下形式的分解

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ {\scriptstyle R}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle S} \\ G & \xrightarrow[\widehat{T}]{} & H, \end{array} \tag{9.1}$$

其中 $G, H \in$ OBAN，且 $R \in \mathcal{A}(E,G)$、 $T \in \mathfrak{A}(G,H)$ 以及 $S \in \mathcal{A}(H,F)$。对于这样的映射 T，我们记作

$$\mathbf{A}^{\min}(T) := \inf \|R\|_{\mathrm{cb}} \mathbf{A}(\widehat{T}) \|S\|_{\mathrm{cb}},$$

其中，下确界取遍 T 如上所述的所有可能分解。

显然:

例 9.2. $\mathcal{F}_{\text{最小张量范数}} = \mathcal{F}$。

现在我们看到， $\mathfrak{A}^{\min}(E,F)$ 具有某种结构。

命题 9.3. 设 $(\mathfrak{A}, \mathbf{A})$ 是一个巴拿赫映射理想，且 $E, F \in$ ONORM。那么，类 $\mathfrak{A}^{\min}(E,F)$ 是一个向量空间，且 $\mathbf{A}^{\min}$ 是一个范数。此外，若 $E, F \in$ OBAN，则 $(\mathfrak{A}^{\min}(E,F), \mathbf{A}^{\min})$ 是一个巴拿赫空间。

证明. 显然，对于所有 $T \in \mathfrak{A}^{\min}(E,F)$，都有 $\mathsf{A}^{\min}(T) \geq 0$。此外，由于对于 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$的每一个分解，如定义 T所述，我们知道 $\|T\|_{\mathrm{cb}} \leq \mathsf{A}(T)$ 和 $\|T\|_{\mathrm{cb}} \leq \|R\|_{\mathrm{cb}}\|\widehat{T}\|_{\mathrm{cb}}\|S\|_{\mathrm{cb}}$，由此可得 $\|T\|_{\mathrm{cb}} \leq \mathsf{A}^{\min}(T)$。因此，$\mathsf{A}^{\min}(T) = 0$意味着 $T = 0$。

正齐次性显然。因此，为完成第一个断言，我们只需验证三角不等式。设 T_1, $T_2 \in \mathfrak{A}^{\min}(E,F)$。对于给定的 $\varepsilon > 0$，存在如下分解

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T_1} & F \\ {\scriptstyle R_1}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle S_1} \\ G_1 & \xrightarrow[\widehat{T_1}]{} & H_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T_2} & F \\ {\scriptstyle R_2}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle S_2} \\ G_2 & \xrightarrow[\widehat{T_2}]{} & H_2 \end{array}$$

其中 $\|R_j\|_{\mathrm{cb}} = \|S_j\|_{\mathrm{cb}} = 1$，且 $\mathsf{A}(\widehat{T_j}) \leq (1+\varepsilon)\mathsf{A}^{\min}(T_j)$，对于 $j = 1, 2$。现在考虑如下分解

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T_1+T_2} & F \\ {\scriptstyle R}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle S} \\ G_1 \oplus_\infty G_2 & \xrightarrow[\widehat{T}]{} & H_1 \oplus_1 H_2, \end{array}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中 $R(x) = (R_1(x)\ R_2(x))$，$T(g_1,g_2) = (T_1(g_1)\ T_2(g_2))$，且 $S(h_1,h_2) = S_1(h_1) + S_2(h_2)$，对于每个 $x \in E, g_j \in G_j, h_j \in H_j$, $j = 1, 2$。

注意，$\|R\|_{\mathrm{cb}} \leq \max\{\|R_1\|_{\mathrm{cb}}, \|R_2\|_{\mathrm{cb}}\} = 1$。由对偶性，同样的论证 $\widehat{\ }$ 得到 $\|S\|_{\mathrm{cb}} = \|S'\|_{\mathrm{cb}} \leq \max\{\|S_1'\|_{\mathrm{cb}}, \|S_2'\|_{\mathrm{cb}}\} = 1$。写作 $T = i_1 \circ T_1 \circ q_1 + i_2 \circ_\frown T_2 \circ q_2$，其中对于每个 $j = 1, 2$，$i_j\colon\ H_j \to H_1 \oplus_1 H_2$ 是典范嵌入，且 $\frown$ $\frown$ $\frown q_j\colon\ G_1 \oplus_\infty G_2 \to G_j$ 是典范投影，由此得到 $\mathsf{A}(T) \leq \mathsf{A}(T_1) + \mathsf{A}(T_2)$。

为了得出 $\mathsf{A}^{\min}(T_1+T_2) \leq (1+\varepsilon)\left(\mathsf{A}^{\min}(T_1) + \mathsf{A}^{\min}(T_2)\right)$，我们只需验证 $R \in \mathcal{A}(E, G_1 \oplus_\infty G_2)$ 和 $S \in \mathcal{A}(H_1 \oplus_1 H_2, F)$。第一点由 R_1 和 R_2 是可逼近的这一事实可轻易得出。第二点则由对偶性推出。

现在还需证明：对于 $E, F \in \mathsf{OBAN}$，$\mathfrak{A}^{\min}(E,F)$ 是完备的。设 $\{T_k\}_k \subset \mathfrak{A}^{\min}(E,F)$ 满足 $\sum_{k=1}^\infty \mathsf{A}^{\min}(T_k) < \infty$。取 $(t_k)_k \subset \mathbb{R}$，使得 $1 \leq t_k \uparrow \infty$ 满足

$$\sum_{k=1}^\infty t_k \mathbf{A}^{\min}(T_k) \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^\infty \mathbf{A}^{\min}(T_k).$$

注意，不等式 $\|\cdot\|_{\mathrm{cb}} \leq \mathsf{A}^{\min}$ 告诉我们，线性映射 $T = \sum_{k=1}^\infty T_k$ 定义良好，并且级数在 $\mathsf{CB}(E,F)$ 中收敛。

对于每个 k，取一个分解

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T_k} & F \\ {\scriptstyle R_k}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle S_k} \\ G_k & \xrightarrow[\widehat{T}_k]{} & H_k \end{array}$$

其中 $\|R_k\|_{\mathrm{cb}} = \|S_k\|_{\mathrm{cb}} = 1$ 和 $\mathbf{A}(\widehat{T}_k) \leq (1+\varepsilon)\mathbf{A}^{\min}(T_k)$。现在，考虑

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ {\scriptstyle R}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle S} \\ c_0(G_k) & \xrightarrow[\widehat{T}]{} & \ell_1(H_k), \end{array}$$

其中 $R(x) = (\overline{R_k(x)}\sqrt{t_k})$，$\widehat{T}((g_k)_k) = ((t_k\widehat{T}_k(g_k))_k)$ 且 $S((h_k)_k) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(h_k)\sqrt{t_k}$，对每个$x \in E$，$(g_k)_k \in c_0(G_k)$，$(h_k)_k \in \ell_1(H_k)$。容易看出，每个映射都是良定义的。

我们来证明 T 属于 $\mathfrak{A}(c_o(G_k)\ \ell_1(H_k))$。注意，逐点来看，

$$\widehat{T} = \sum_{j=1}^{\infty} t_j i_j \circ \widehat{T}_j \circ q_j, \tag{9.2}$$

其中，对每个 j，$i_j : H_j \to \ell_1(H_k)$ 是典范嵌入，而 $q_j : c_0(G_k) \to G_j$ 是典范投影。由于

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{A}(t_j i_j \circ \widehat{T}_j \circ q_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} t_j \mathbf{A}(\widehat{T}_j) \leq (1+\varepsilon)\sum_{j=1}^{\infty} t_j \mathbf{A}^{\min}(T_j) < \infty$$

我们得到 $T \in \mathfrak{A}(c_o(G_k)\ \ell_1(H_k))$。此外，级数 (9.2) 在 $\mathfrak{A}$ 中收敛，且 $\mathbf{A}(T) \leq \sum_{j=1}^{\infty} t_j \mathbf{A}(T_j)$。

现在我们证明 $R \in \mathfrak{A}(E, c_0(G_k))$。由于 $t_k \geq 1$ 显然有 $\|R : E \to \ell_\infty(G_k)\|_{\mathrm{cb}} \leq 1$。此外，$t_k \uparrow \infty$ 蕴含 R 取值于 $c_0(G_k)$。对于给定的 $\varepsilon > 0$，取 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{\sqrt{t_N}} < \frac{\varepsilon}{2}$。对于每个 $1 \leq j \leq N$，取 $R_j \in \mathcal{F}(E, G_j)$ 满足 $\|R_j - R_j\|_{\mathrm{cb}} \leq \frac{\varepsilon}{2N}$。令 $R : E \to c_0(G_k)$ 由下式给出

$$x \mapsto \left(\frac{\widetilde{R}_1(x)}{\sqrt{t_1}}, \ldots, \frac{\widetilde{R}_N(x)}{\sqrt{t_N}}, 0, 0, \ldots\right).$$

显然，$R \in \mathcal{F}(E, c_0(G_k))$ 且 $\|R - R\|_{\mathrm{cb}} \leq \varepsilon$。因此，$R \in \mathcal{A}(E, c_0(G_k))$，其中$\|R\|_{\mathrm{cb}} \leq 1$。

最后我们验证 $S \in \mathcal{A}(\ell_1(H_k)\ F)$。注意，$S' : F' \to \ell_\infty(H_k')$ 由$S'(y') = (\overline{S_k'(y')}\sqrt{t_k})_k$) 给出，因此由与上述相同的论证可得 $\|S\|_{\mathrm{cb}} = \|S'\|_{\mathrm{cb}} \leq 1$。此外，

~同样地，按照之前的方法，我们可以证明，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $S \in \mathcal{F}(\ell_1(H_k)\ F)$~ 使得 $\|S - S\|_{\mathrm{cb}} \leq \varepsilon$。

由上述论证，我们当然得到了 $T \in \mathfrak{A}^{\min}(E, F)$ with $\mathsf{A}^{\min}(T) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{A}^{\min}(T_k)$。这意味着 $T = \sum_{k=1}^{\infty} T_k$ 在 $\mathfrak{A}^{\min}(E, F)$ 中收敛，从而完成证明。□

为了像巴拿赫空间情形中那样，将张量积 $E' \otimes_\alpha F$ 与 $\mathfrak{A}^{\min}(E, F)$ 联系起来，我们需要以下引理。

引理 9.4. 设 $(\mathfrak{A}, \mathsf{A})$ 是与有限生成的算子空间张量范数 α 相关联的巴拿赫映射理想。那么，对于任意 $E, F \in \mathsf{ONORM}$，自然映射

$$J : E' \otimes_\alpha F \to \mathfrak{A}^{\min}(E, F) \tag{9.3}$$

是赋范空间之间的压缩映射，即 $\mathsf{A}^{\min}(J(z)) \leq \alpha(z;\ E', F)\ \ \forall z \in E' \otimes F.$

证明. 设 $z \in E' \otimes F$, $M \in \mathsf{OFIN}(E')$, $N \in \mathsf{OFIN}(F)$, $u \in M \otimes N$，且 $z = (i_M^{E'} \otimes i_N^F)(u)$。

由交换图

$$\begin{array}{ccc} E' \otimes_\alpha F & \xrightarrow{\ J\ } & \mathfrak{A}^{\min}(E, F) \\ \uparrow{\scriptstyle i_M^{E'} \otimes i_N^F} & & \uparrow \\ M \otimes_\alpha N & = & \mathfrak{A}(E/^\circ M, N) \end{array} \qquad \begin{array}{c} i_N^F \circ T \circ q_{\circ M}^E \\ \wr \\ T \end{array}$$

可得

$$\mathbf{A}^{\min}(J(z)) = \mathbf{A}^{\min}(i_N^F \circ T_u \circ q_{\circ M}^E) \leq \mathbf{A}(T_u) = \alpha(u; M, N).$$

由于 α 是有限生成的，我们得到 $\mathsf{A}^{\min}(J(z)) \leq \alpha(z;\ E', F)$。 □

引理 9.5. 设 $T \in \mathfrak{A}^{\min}(E, F)$，其分解 $T = S \circ \widehat{T} \circ R$ 如 (9.1) 所示。若

~$R \in \mathcal{A}(E, G)$ 且 $S \in \mathcal{A}(H, F)$，则

$$\mathbf{A}^{\min}(T - \widetilde{S} \circ \widehat{T} \circ \widetilde{R}) \leq \|S - \widetilde{S}\|_{\mathrm{cb}} \mathbf{A}(\widehat{T}) \|R - \widetilde{R}\|_{\mathrm{cb}}$$

证明. 由范数的定义及以下事实显然可得

$$T - \widetilde{S} \circ \widehat{T} \circ \widetilde{R} = (S - \widetilde{S}) \circ \widehat{T} \circ (R - \widetilde{R}).$$

□

现在我们可以证明本节的一项主要结果，该结果将使我们能够为 $\mathfrak{A}^{\min}$ 提供序结构。

定理 9.6. 设 $(\mathfrak{A}$,A) 是与有限生成的算子空间张量范数 α 相关联的巴拿赫映射理想。那么对于任意 $E, F \in \mathsf{OBAN}$，自然映射

$$J : E' \widehat{\otimes}_\alpha F \to \mathfrak{A}^{\min}(E, F)$$

是一个度量满射（在巴拿赫空间层面）。

证明。利用引理 9.4，我们知道 J 是一个压缩映射。取 $R \in \mathcal{A}(E,G)$、$\widehat{\sim}T \in \mathfrak{A}(G,H)$ 和 $S \in \mathcal{A}(H,F)$。如果 $z \in E' \otimes F$ 满足 $J(z) = S \circ T \circ R$，考虑分解

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{S\circ\widehat{T}\circ R} & F \\ {\scriptstyle \overline{R}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i_2} \\ M = im(\widetilde{R}) & \xrightarrow[T_1]{} & im(S) = N \\ {\scriptstyle i_1}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{S}} \\ G & \xrightarrow[\widehat{T}]{} & H \end{array}$$

因此，

$$\begin{aligned} \alpha(z;E',F) &= \alpha((\overline{R}' \otimes i_2)z_{T_1};E',F) \le \|\overline{R}'\|_{\mathrm{cb}}\|i_2\|_{\mathrm{cb}}\alpha(z_{T_1};M',N) \\ &= \|\overline{R}\|_{\mathrm{cb}}\mathbf{A}(T_1) \le \|\overline{R}\|_{\mathrm{cb}}\|i_1\|_{\mathrm{cb}}\mathbf{A}(\widehat{T})\|\overline{S}\|_{\mathrm{cb}} \\ &= \|R\|_{\mathrm{cb}}\mathbf{A}(\widehat{T})\|S\|_{\mathrm{cb}}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

现在，设 $T \in \mathfrak{A}^{\min}(E,F)$。给定 $\varepsilon > 0$，找出一个分解 $T = S \circ \widehat{T} \circ R$ with $\|R\|_{\mathrm{cb}}\mathbf{A}(\widehat{T})\|S\|_{\mathrm{cb}} \le (1+\varepsilon)\mathbf{A}^{\min}(T)$。选取 $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(E,G)$ 和 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(H,F)$，使得 $\|R - R_n\|_{\mathrm{cb}} \to 0$ and $\|S - S_n\|_{\mathrm{cb}} \to 0$ as $n \to \infty$。由引理 9.5 可知，$S_n \circ \widehat{T} \circ R_n$ 在 $\mathfrak{A}^{\min}(E,F)$ 中收敛到 T。现在，取 $z_n \in E' \otimes F$ with $\widehat{\sim}J(z_n) = S_n \circ T \circ R_n$。于是，

$$\begin{aligned} J(z_n - z_m) &= J(z_n) - J(z_m) \\ &= S_n \circ \widehat{T} \circ R_n - S_m \circ \widehat{T} \circ R_m \\ &= (S_n - S_m) \circ \widehat{T} \circ R_n + S_m \circ \widehat{T} \circ (R_n - R_m) \end{aligned}$$

按照 (9.4) 中的推理并利用三角不等式，我们有

$$\alpha(z_n - z_m;E',F) \le \|S_n - S_m\|_{\mathrm{cb}}\mathbf{A}(\widehat{T})\|R_n\|_{\mathrm{cb}} + \|S_m\|_{\mathrm{cb}}\mathbf{A}(\widehat{T})\|R_n - R_m\|_{\mathrm{cb}}.$$

因此，$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $E'\widehat{\otimes}_\alpha F$ 中的一个柯西序列，其极限记为 z。由于 J 是连续的，

$$J(z) = \lim_{n\to\infty} J(z_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \circ \widehat{T} \circ R_n,$$

其中极限在 $\mathfrak{A}^{\min}(E,F)$ 中。我们已在上文验证，后一个极限实际上属于 T。换言之，给定 $T \in \mathfrak{A}^{\min}(E,F)$，我们找到了 $z \in E'\widehat{\otimes}_\alpha F$ 使得

$J(z) = T$ 而且，根据 (9.4)，再次可得

$$\begin{aligned}\alpha(z; E', F) &= \lim_{n\to\infty} \alpha(z_n; E', F) \\ &\le \|S_n\|_{\mathrm{cb}} \mathbf{A}(\widehat{T}) \|R_n\|_{\mathrm{cb}} \\ &\le \mathbf{A}^{\min}(T)(1+\varepsilon).\end{aligned}$$

这表明映射 J 是度量满射（因为我们已经知道 $\|J\| \le 1$）。□

利用前一个定理，我们现在可以为 $\mathfrak{A}^{\min}(E, F)$ 提供一种算子空间结构。

定义 9.7。给定一个巴拿赫映射理想 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$，我们在 $\mathfrak{A}^{\min}(E, F)$ 上赋予唯一的算子空间结构，使得自然映射 J 成为完全商映射。具体而言，给定 $T \in M_n(\mathfrak{A}^{\min}(E, F))$，我们定义

$$\mathbf{A}_n^{\min}(T) := \inf \alpha_n(z; E', F),$$

其中，下确界取遍所有满足 $J_n(z) = T.$ 的 $z \in M_n(E' \widehat{\otimes} F)$

在此结构下，显然有如下结论:

定理 9.8（极小映射理想表示定理）。设 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 是与有限生成算子空间张量范数 α 相关联的巴拿赫映射理想。那么，对于任意 $E, F \in \mathrm{OBAN}$，自然算子

$$J : E' \widehat{\otimes}_\alpha F \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathfrak{A}^{\min}(E, F) \tag{9.5}$$

是一个完全商映射。特别地，若 $M, N \in \mathrm{OFIN}$，则我们有一个完全等距映射 $\mathfrak{A}^{\min}(M, N) = M' \widehat{\otimes}_\alpha N$。

定理 9.9. 设 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 是与有限生成的算子空间张量范数 α 相关联的巴拿赫映射理想。那么 $(\mathfrak{A}^{\min}, \mathrm{A}^{\min})$ 也是与 α 相关联的巴拿赫映射理想。此外，$\mathfrak{A}^{\min}$ 是与 $\alpha.$ 相关联的最小巴拿赫映射理想。

证明。为说明 $(\mathfrak{A}^{\min}, \mathrm{A}^{\min})$ 是一个映射理想，我们首先注意到恒等映射 $\mathfrak{A}^{\min}(E, F) \to \mathrm{CB}(E, F)$ 是一个完全压缩映射。

考虑以下交换图:

$$\begin{array}{ccc} E' \widehat{\otimes}_\alpha F & \xrightarrow{J} & \mathfrak{A}^{\min}(E, F) \\ \downarrow & & \vdots \\ E' \widehat{\otimes}_{\min} F & \xhookrightarrow{i} & \mathrm{CB}(E, F), \end{array} \tag{9.6}$$

现在，根据极小映射理想表示定理，我们知道 J 是完全商映射。另一方面，包含映射 i 是完全等距的（见注5.6），而典范映射 $E' \widehat{\otimes}_\alpha F \to E' \widehat{\otimes}_{\min} F$ 是完全

压缩映射。只需沿着交换图推理，即可得出下降箭头$\mathfrak{A}^{\min}(E,F) \dashrightarrow \mathrm{CB}(E,F)$是完全压缩映射。

注意到，条件 (b') 立即由前一个定理的最后一个断言推出：$\mathfrak{A}^{\min}(M,N) = M' \widehat{\otimes}_\alpha N$。

现在我们来关注理想性质。考虑 $T \in M_n(\mathfrak{A}^{\min}(E,F))$、$r \in \mathrm{CB}(E_0,E)$ 和 $s \in \mathrm{CB}(F,F_0)$。由 $\mathcal{A}$ 的理想性质可容易看出，$s_n \circ T \circ r$ 属于 $M_n(\mathfrak{A}^{\min}(E_0,F_0))$。为估计范数，考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} E' \widehat{\otimes}_\alpha F & \twoheadrightarrow & \mathfrak{A}^{\min}(E,F) \\ {\scriptstyle r'\otimes s}\downarrow & & \downarrow \\ E_0' \widehat{\otimes}_\alpha F_0 & \twoheadrightarrow & \mathfrak{A}^{\min}(E_0,F_0) \end{array} \qquad \begin{array}{c} T \\ \downarrow \\ s \circ T \circ r. \end{array} \tag{9.7}$$

由于水平箭头是完全商映射，且映射

$$r' \otimes s : E' \widehat{\otimes}_\alpha F \to E_0' \widehat{\otimes}_\alpha F_0$$

的完全有界范数不超过 $\|s\|_{\mathrm{cb}} \|r\|_{\mathrm{cb}}$，因此可得

$$\mathbf{A}_n^{\min}(s_n \circ T \circ r) \le \|s\|_{\mathrm{cb}} \, \mathbf{A}_n^{\min}(T) \, \|r\|_{\mathrm{cb}} .$$

由定理 9.8 可知，若 $M, N \in \mathrm{OFIN}$，则存在完全等距映射$\mathfrak{A}^{\min}(M,N) = M' \widehat{\otimes}_\alpha N$，因此映射理想 $\mathfrak{A}^{\min}$ 与 α 相关联。

最后，我们证明 $\mathfrak{A}^{\min}$ 是与 α 相关联的最小巴拿赫映射理想。由于对于任意巴拿赫映射理想 $\mathfrak{B}$，都有 $\mathfrak{B}^{\min} \subset \mathfrak{B}$，因此只需证明：若 $\mathfrak{B}$ 也与 α 相关联，则 $\mathfrak{A}^{\min} = \mathfrak{B}^{\min}$。事实上，这显然成立，因为我们有完全商映射 $J\colon E' \widehat{\otimes}_\alpha F \twoheadrightarrow \mathfrak{A}^{\min}(E,F)$ 和 $J\colon E' \widehat{\otimes}_\alpha F \twoheadrightarrow \mathfrak{B}^{\min}(E,F)$。□

现在我们给出 [DF93，命题 22.1] 的算子空间版本。

命题 9.10. 设 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 是与有限生成算子空间张量范数 α 相关联的巴拿赫映射理想。那么，

(1) 对每个 $M, N \in \mathrm{OFIN}$，$\mathfrak{A}^{\min}(M,N) = \mathfrak{A}^{\max}(M,N) = \mathfrak{A}(M,N) = M' \otimes_\alpha N$ 都完全等距成立。(2) $\mathfrak{A}^{\min}$ $\max = \mathfrak{A}^{\max}$。(3) $\mathfrak{A}^{\max}$ $\min = \mathfrak{A}^{\min}$。(4) 给定 $E, F \in \mathrm{OBAN}$ 和 $T \in M_n(\mathfrak{A}^{\min}(E,F))$，存在 $T_k \in M_n(\mathcal{F}(E,F))$，使得 $\mathrm{A}_n^{\min}(T_k - T) \to 0$。(5) 设 $\mathfrak{B}$ 是一个巴拿赫映射理想。假设对每个 $M, N \in \mathrm{OFIN}$，包含映射 $\|\mathfrak{A}(M,N) \hookrightarrow \mathfrak{B}(M,N)\|_{\mathrm{cb}} \le c$，那么对每个 $E, F \in \mathrm{OBAN}$，$\mathfrak{A}^{\min} \subset \mathfrak{B}^{\min}$ 且 $\|\mathfrak{A}^{\min}(E,F) \hookrightarrow \mathfrak{B}^{\min}(E,F)\|_{\mathrm{cb}} \le c$。

证明。(1)、(2) 和 (3) 直接由极大理想与极小理想的表示定理得出。

(4) 这可以很容易地由引理 9.5 推得。

(5) 设 β 为算子空间张量范数 $\mathfrak{B}$。假设可表述为：对于每个 M， $N \in$ OFIN，均有 $\|M' \widehat{\otimes}_\alpha N \hookrightarrow M' \widehat{\otimes}_\beta N\|_{\mathrm{cb}} \leq c$。由于这两个范数都是有限生成的，因此这个完全有界包含映射可以扩展到 OBAN。此外，根据命题 8.9，我们知道 $\mathfrak{A}^{\max} \subset \mathfrak{B}^{\max}$。现在，利用 (3)，可得 $\mathfrak{A}^{\min} \subset \mathfrak{B}^{\min}$。最后，考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccc} E' \widehat{\otimes}_\alpha F & \xrightarrow{J_\alpha} & \mathfrak{A}^{\min}(E,F) \\ \downarrow \iota & & \vdots \\ E' \widehat{\otimes}_\beta F & \xrightarrow{J_\beta} & \mathfrak{B}^{\min}(E,F). \end{array} \tag{9.8}$$

结论由以下事实得出： J_α 和 J_β 是完全商映射，且 $\|\iota\|_{\mathrm{cb}} \leq c$。□

定义 9.11。若巴拿赫映射理想 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 满足 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A}) = (\mathfrak{A}^{\min}, \mathrm{A}^{\min})$，则称其为极小的。

下面给出一些例子

(i) $\mathcal{A} = \mathrm{CB}^{\min}$。此外，给定 E、$F \in$ OBAN，我们有完全等距同构 $\mathcal{A}(E,F) = E' \widehat{\otimes}_{\min} F$。

事实上，已知典范映射 i： $E' \widehat{\otimes}_{\min} F \hookrightarrow \mathrm{CB}(E,F)$ 是完全等距的，并且根据表示定理， J： $E' \widehat{\otimes}_{\min} F \twoheadrightarrow \mathrm{CB}^{\min}(E,F)$ 是一个完全商映射。因此，包含映射 $\mathrm{CB}^{\min}(E,F) \hookrightarrow \mathrm{CB}(E,F)$ 必须是完全等距的。这意味着 $\mathrm{CB}^{\min}(E,F)$ 中的范数是 $\|\cdot\|_{\mathrm{cb}}$。由于 $\mathcal{A}$ 包含于任何范数为 cb-范数的巴拿赫映射理想中，因此应有 $\mathcal{A} = \mathrm{CB}^{\min}$。此外， J 是一个完全等距同构，因此 $\mathcal{A}(E,F) = E' \widehat{\otimes}_{\min} F$。

(ii) $\mathcal{N} = \mathcal{I}^{\min}$。

事实上，由于 $\mathcal{I} \sim$ 投影张量范数，我们有一个完全商映射 J： $E' \widehat{\otimes}_{\mathrm{proj}} F \twoheadrightarrow \mathcal{I}^{\min}(E,F) \subset \mathrm{CB}(E,F)$，这与 $\mathcal{N}(E,F)$ 的定义一致。

(iii) 完全右-p 核映射理想 $\mathcal{N}^p$ 是极小的。事实上，由其定义可知 $\mathcal{N}^p = (\mathcal{N}^p)^{\min}$，因为 $\mathcal{N}^p \sim d_p$和 J^p： $E' \widehat{\otimes}_{d_p} F \twoheadrightarrow \mathcal{N}^p(E,F) \subset \mathrm{CB}(E,F)$ 是一个完全商映射。

10. Completely projective and completely injective o.s. tensornorms

本节我们回到算子空间张量范数的抽象理论。特别地，我们研究在完全单射或投影方面表现良好的算子空间张量范数。我们知道，极小算子空间张量范数保持完全单射 [ER00, 命题 8.1.5]，而射影算子空间张量范数保持完全投影 [ER00, 命题 7.1.7]。Haagerup

算子空间张量范数的一个著名性质是，它同时保持完全投影和单射 [ER00, 命题 9.2.5]。值得注意的是，格罗滕迪克不等式 [DF93, 20.20]表明，在巴拿赫空间／赋范空间框架下，这种情况不可能发生。基于经典定义，本节考察算子空间张量范数上的两种自然构造：完全内射包和完全投射包。 [Ble92b]中也讨论过类似构造。

我们首先回顾第 2.5 节中完全内射/投射算子空间张量范数的定义。

定义 10.1. ONORM 上的算子空间张量范数 α 称为完全右内射的，如果对所有 E、F、$G \in$ ONORM 以及所有完全单射 $i\colon F \hookrightarrow G$，映射

$$id_E \otimes i : E \otimes_\alpha F \to E \otimes_\alpha G$$

是完全单射；如果对所有 E、F、$G \in$ONORM、所有完全度量满射 $q\colon G \twoheadrightarrow F$，以及所有空间 E，映射

$$id_E \otimes q : E \otimes_\alpha G \to E \otimes_\alpha F$$

是完全度量满射。左侧版本的定义类似；当 α 同时完全左内射和完全右内射（分别地，同时完全左投射和完全右投射）时，我们称其为完全内射（分别地，完全投射）。对于 ONORM 以外的其他空间类（例如 OFIN），也将采用类似的定义。

作为这些定义的一些例子，CD16 命题 3.4] 证明，Chevet-Saphar 张量范数 d_p 是完全右投射的，而 Chevet-Saphar 张量范数 g_p 是完全左投射的。此外，根据 Pis98 命题 6.1]，范数 d_2 是完全左内射的，而 g_2 是完全右内射的。还应提及，根据 Wie09 命题 6.2], ，任意 λ-算子空间张量范数都是完全投射的。关于使 λ-算子空间张量范数成为完全内射的若干条件，见 AKL19 命题 1.2]。

对于 $M, N \in$ OFIN，完全等距

$$M \otimes_{\alpha'} N = (M' \otimes_\alpha N')'$$

推出以下结论：

注记 10.2. α 在 OFIN 上完全右投射，当且仅当 α' 在 OFIN 上完全右内射。

在巴拿赫空间的领域中，相应的对偶性可以扩展到有限维情形之外。令人惊讶的是，正如注 12.5 (c) 之后所述，对于一般的算子空间张量范数，这一性质无法扩展到 OBAN 中。这是经典张量范数理论与非交换理论之间一个重要的区别。也就是说，在 OBAN 中，算子空间张量范数完全右内射这一事实并

不意味着其对偶范数是完全右投射的。不过，反过来则成立（见下文推论 10.4）。

命题 10.3. 若 α 是有限生成的，且在 OFIN 上完全右内射，则 α 在 ONORM 上完全右内射。

证明. 设 $i: F \hookrightarrow G$ 是一个完全嵌入，且 $z \in M_n(E \otimes F)$。由于 α 是有限生成的，给定 $\varepsilon > 0$，考虑 $M \in \mathrm{OFIN}(E)$ 和 $N \in \mathrm{OFIN}(G)$，使得

$$\alpha_n((id_E \otimes i)_n(z); M, N) \leq (1+\varepsilon)\alpha_n((id_E \otimes i)_n(z); E, G).$$

给定 $M \in \mathrm{OFIN}(E)$ 和 $N \in \mathrm{OFIN}(F)$，使得 $z \in M_n(M \otimes N)$，我们有：

$$\begin{aligned}\alpha_n(z; E, F) &\leq \alpha_n(z; M + \widetilde{M}, \widetilde{N}) = \alpha_n((id_E \otimes i)_n(z); M + \widetilde{M}, N + i(\widetilde{N})) \\ &= \alpha_n((id_E \otimes i)_n(z); M, N) \leq (1+\varepsilon)\alpha_n((id_E \otimes i)_n(z); E, G),\end{aligned}$$

其中等式成立是因为 α 在 OFIN 上完全右内射。证明至此完成，因为我们总有 $\alpha_n((id_E \otimes i)_n(z);\ E, G) \leq \alpha_n(z;\ E, F)$。□

根据注记 10.2、命题 10.3 以及 α' 是有限生成这一事实，我们有：

推论 10.4. 若 α 在 OFIN 上完全右投射，则 α' 在 ONORM 上完全右内射。

如上所述，前述结论的逆命题一般并不成立。不过，在对张量范数附加一个假设后，我们确实可以得到其逆命题（见命题 11.1）。

10.1. 完全内射包。与巴拿赫空间情形一样，现在我们来描述给定算子空间张量范数的内射包的类似理论。

定理 10.5. 设 α 是 ONORM 上的算子空间张量范数。则存在唯一的 ONORM 上完全右内射的算子空间张量范数 $\alpha\backslash$，使得对所有完全右内射的算子空间张量范数 $\beta \leq \alpha$，$\beta \leq \alpha\backslash$。对所有赋范算子空间 E 和 $F \subseteq B(H)$，

$$E \otimes_{\alpha\backslash} F \to E \otimes_{\alpha} B(H)$$

是完全等距。

证明。假设有两个完全等距嵌入 $i_j: F \to B(H_j), j = 1, 2$，并定义由下式诱导的 $E \otimes F$ 上的算子空间结构 α_j

$$id_E \otimes i_j : E \otimes F \to E \otimes_{\alpha} B(H_j).$$

由 $B(H_j)$的内射性，存在完全有界压缩映射 $R_1: B(H_1) \to B(H_2)$ 和 $R_2: B(H_2) \to B(H_1)$，使得 $i_1 = R_2 \circ i_2$ 和 $i_2 = R_1 \circ i_1$。映射 $(id_E \otimes R_1) \circ (id_E \otimes i_1)$ 表明恒等映射 $E \otimes_{\alpha_1} F \to E \otimes_{\alpha_2} F$ 是完全

压缩的， $E \otimes_{\alpha_2} F \to E \otimes_{\alpha_1} F$也同样如此。因此，若将 $\alpha\backslash$ 上的 $E \otimes F$定义为由特定嵌入诱导的 $E \otimes F$的算子空间结构，就不会产生歧义

$$E \otimes F \to E \otimes_\alpha B(H).$$

由 min 的内射性、$\min \leq \alpha$ 这一事实以及交换图

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_{\alpha\backslash} F & \longrightarrow & E \otimes_\alpha B(H) \\ \vdots & & \downarrow \\ E \otimes_{\min} F & \longrightarrow & E \otimes_{\min} B(H) \end{array}$$

可得 $\min \leq \alpha\backslash$。类似地，由 $\alpha \leq \mathrm{proj}$ 以及

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_{\mathrm{proj}} F & \longrightarrow & E \otimes_{\mathrm{proj}} B(H) \\ \vdots & & \downarrow \\ E \otimes_{\alpha\backslash} F & \longrightarrow & E \otimes_\alpha B(H) \end{array}$$

可得 $\alpha\backslash \leq \mathrm{proj}$。因此，显然 $\alpha\backslash$ 是一种合理的算子空间交叉范数。

不难看出， $\alpha\backslash$ 具有完全度量映射性质。令 $S \in \mathrm{CB}(E_1, E_2)$ 且 $T \in \mathrm{CB}(F_1, F_2)$，并考虑完全等距嵌入$F_j \subseteq B(K_j)$。由 $B(H)$ 的内射性，存在一个完全有界映射 $\widehat{T}: B(K_1) \to B(K_2)$，使得 $\|T\|_{\mathrm{cb}} = \|\widehat{T}\|_{\mathrm{cb}}$ 并且

$$\begin{array}{ccc} B(K_1) & \xrightarrow{\widehat{T}} & B(K_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ F_1 & \xrightarrow{T} & F_2 \end{array}$$

可交换。张量化后，

$$\begin{array}{ccc} E_1 \otimes_\alpha B(K_1) & \xrightarrow{S \otimes \widehat{T}} & E_2 \otimes_\alpha B(K_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E_1 \otimes_\alpha F_1 & \xrightarrow{S \otimes T} & E_2 \otimes_\alpha F_2 \end{array}$$

由此显然可见，根据 α 的完全度量映射性质，

$$\left\| S \otimes T : E_1 \otimes_{\alpha\backslash} F_1 \to E_2 \otimes_{\alpha\backslash} F_2 \right\|_{\mathrm{cb}} \leq \|S\|_{\mathrm{cb}} \|T\|_{\mathrm{cb}}.$$

假设 $i: F \to G$ 和 $i_G: G \to B(H)$ 是完全嵌入。由于我们已经证明， $\alpha\backslash$ 不依赖于嵌入到某个 $B(H)$ 中的具体方式，并且

$i_G \circ i\colon\ F \to B(H)$ 是一个完全嵌入，因此对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $z \in M_n(E \otimes F$),

$$\begin{aligned}\alpha\backslash_n((id_E \otimes i)_n(z); E, G) &\le \alpha\backslash_n(z; E, F) = \alpha_n((id_E \otimes i_G \circ i)_n(z); E, B(H)) \\ &= \alpha\backslash_n((id_E \otimes i)_n(z); E, G),\end{aligned}$$

这表明 $\alpha\backslash$ 是完全右单射的。

最后，若 β 是一种被 α 支配的完全右单射算子空间张量范数，那么该交换图

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_{\alpha\backslash} F & \longrightarrow & E \otimes_{\alpha} B(H) \\ \vdots & & \downarrow \\ E \otimes_{\beta} F & \longrightarrow & E \otimes_{\beta} B(H) \end{array}$$

表明 $\beta \le \alpha\backslash$。 □

引理 10.6. 设 α 是一种有限生成算子空间张量范数，那么 $\alpha\backslash$ 也有限生成。

证明. 设 E 和 F 属于 ONORM，且 $z \in M_n(E \otimes F)$。根据算子空间张量范数的定义，若 $F \subseteq B(H)$，则有 $\alpha\backslash$

$$(\alpha\backslash)_n(z; E, F) = \alpha_n(z; E, B(H)).$$

由于 α 是有限生成的，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $M \in$ OFIN(E) 和 $N \in$ OFIN($B(H)$)，使得

$$\alpha_n(z; \widetilde{M}, \widetilde{N}) \le (1+\varepsilon)\alpha_n(z; E, B(H)).$$

现在，给定 $M \in$ OFIN(E) 和 $N \in$ OFIN(F)，使得 $z \in M \otimes N$，我们有

$$\begin{aligned}(\alpha\backslash)_n(z; (M + \widetilde{M}), N) &= (\alpha\backslash)_n(z; (M + \widetilde{M}), (N + \widetilde{N})) \\ &\le \alpha_n(z; (M + \widetilde{M}), (N + \widetilde{N})) \le \alpha_n(z; \widetilde{M}, \widetilde{N}) \\ &\le (1+\varepsilon)\alpha_n(z; E, B(H)) = (1+\varepsilon)(\alpha\backslash)_n(z; E, F).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

定义 10.7。定理 10.5 中给出的算子空间张量范数 $\alpha\backslash$ 称为 α的完全右内射包。类似地，可以定义 α的完全左内射包，记作 $/\alpha$，以及完全内射包

$$/\alpha\backslash := (/\alpha)\backslash = /(\alpha\backslash).$$

注意，由于 $(/\alpha)\backslash = /(\alpha\backslash)$，前述等式不存在歧义。事实上，设 $E, F \in$ ONORM，并假设 $E \subset B(H_E)$ 且 $F \subset B(H_F)$；根据定理 10.5 及其左侧版本，算子空间张量范数 $(/\alpha)\backslash$ 和 $/(\alpha\backslash)$ 可通过完全等距在 $E \otimes F$ 上计算

$$E \otimes F \hookrightarrow B(H_E) \otimes_{\alpha} B(H_F).$$

10.2. 完全投射包。现在该来描述给定算子空间张量范数的完全投射包了。

为此，我们需要一些将在后文用到的预备结果。先来证明 DF93 引理 20.2.(2) 的扰动步骤的一个算子空间版本，而不借助局部自反性。证明受到 Pis03 引理 2.13. 的启发。

引理 10.8. 设 ONORM，且设为其完备化。给定 OFIN() 和，存在一个线性映射：，使得，并且对所有都有。

证明。设 () 是空间的一个双正交系，也就是说，是的一组基，且是满足 () 的泛函（我们不对它们的范数作任何假设）。不失一般性，可以假设是一组基（若，则）。对于，令；对于，选取足够接近的，使得

$$\sum_{j=m_0+1}^{m} \left\|x_j'\right\| \|x_j - y_j\| < \varepsilon.$$

~定义 $R\colon\ N \to F$为 $y \mapsto \sum_{j=1}^{m} x_j'(y)y_j$。由于恒等映射 $I\colon\ N \to F$可写为 $y \mapsto \sum_{j=1}^{m} x_j'(y)x_j$，显然对所有 $y \in F \cap N$，都有 $Ry = y$，并且

$$\|R\|_{\mathrm{cb}} \le \|I\|_{\mathrm{cb}} + \sum_{j=m_0+1}^{m} \left\|x_j'\right\| \|x_j - y_j\| < 1 + \varepsilon.$$

证明至此结束。 □

我们引用经典理论 [DF93 中关于度量满射的一个重要引理，即商空间引理 7.4]。通过对证明作相应调整，可以将其自然地推广到算子空间情形。其陈述如下：

引理 10.9。设 $E, F \in$ ONORM，$E_0 \subset E$为一个稠密子空间，$q \in$ CB(E, F) 是满射，并考虑其限制映射 $q_0 = q|_{E_0}\colon E_0 \to q(E_0)$。那么，$q_0$ 是完全度量满射，当且仅当 ker $q_0 =$ ker q，且 q是完全度量满射。

构造完全投射包还需要另一个要素，即算子空间张量范数的右有限包这一概念：

定义 10.10. 给定赋范算子空间 E 和 F、OFIN 上的算子空间张量范数 α以及 $u \in M_n(E \otimes F)$，α 的右有限包定义为

$$\alpha_n^{\rightarrow}(u; E, F) = \inf\left\{\alpha_n(u; E, F_0)\colon F_0 \in \mathrm{OFIN}(F), u \in M_n(E \otimes F_0)\right\}.$$

显然，$\alpha^{\rightarrow}$ 是一个算子空间张量范数，且 $\alpha \le \alpha^{\rightarrow} \le \overrightarrow{\alpha}$。

我们是 现在我们可以介绍 [DF93 的算子空间版本，引理 20.2] :

引理 10.11. 设 α 是 ONORM 上的算子空间张量范数。
(a) 如果 α 在 ONORM $\times$ OBAN 上是完全右投射的，那么 $\alpha = \alpha^{\rightarrow}$ 在 ONORM $\times$OBAN 上也是如此。(b) 如果 $\alpha = \alpha^{\rightarrow}$ 在 ONORM$\times$ OBAN 上，那么 $\alpha = \alpha^{\rightarrow}$ 在 ONORM $\times$ ONORM 上，并且对所有满足 F 是 F 的完备化的 E、$F \in$ ONORM，下面的典范嵌入是完全等距的：

$$E \otimes_\alpha F \hookrightarrow E \otimes_\alpha \widetilde{F}.$$

(c) 如果 α 在 ONORM $\times$OBAN 上是完全右投射的，那么它在 ONORM $\times$ONORM 上也是完全右投射的。

证明。（a）对于 $G \in$ OBAN，根据第 2.5 节中提到的构造，存在一个完全度量满射 $q_G\colon Z_G \twoheadrightarrow G$。由于 Z_G 是有限维空间的 ℓ_1 和，因此显然具有完全度量逼近性质。根据逼近引理 4.1，对于每个赋范算子空间 E，我们有 $\alpha = \alpha^{\rightarrow}$ 在 $E \otimes Z_G$ 上。

因此，对于 $z \in M_n(E \otimes G)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathrm{OFIN}(Z_G)$ 以及 $u \in E \otimes N$，使得 $Id_E \otimes q_G(u) = z$，并且

$$\alpha_n(u; E, N) \le (1+\varepsilon)\alpha_n(z; E, G).$$

因此，

$$\alpha_n(z; E, G) \le \alpha_n^{\rightarrow}(z; E, G) \le \alpha_n(z; E, q_G(N)) \le \alpha_n(u; E, N) \le (1+\varepsilon)\alpha_n(z; E, G).$$

(b) 设 $z \in M_n(E\otimes F)$。根据度量映射性质，$\alpha_n^{\rightarrow}(z;\, E, F) \le \alpha_n^{\rightarrow}(z;\, E, F)$。对于 $\varepsilon > 0$，取 $N \in \mathrm{OFIN}(F)$，使得 $z \in M_n(E \otimes N)$，且 $\alpha_n(z;\, E, N) \le (1+\varepsilon)\alpha_n^{\rightarrow}(z;\, E, F)$。根据引理 10.8，存在一个完全有界线性映射 $R\colon N \to F$，满足 $\|R\|_{\mathrm{cb}} \le 1+\varepsilon$，并且对所有 $y \in F \cap N$都有 $Ry = y$。注意，由于矩阵的每个元素都可以看作从 E' 到 F 的算子，同时也可以看作从 E' 到 N 的算子，因此 $z \in M_n(E \otimes (F \cap N))$。于是，我们有 $(Id_E \otimes R)_n(z) = z \in M_n(E \otimes R(N))$。因此，

$$\alpha_n^{\rightarrow}(z;\, E, F) \le \alpha_n((Id_E\otimes R)_n(z); E, R(N)) \le (1+\varepsilon)\alpha_n(z; E, N) \le (1+\varepsilon)^2\alpha_n^{\rightarrow}(z; E, \widetilde{F}).$$

(c) 令 $E, F, G \in$ ONORM，且 $q\colon F \twoheadrightarrow G$ 是一个完全度量满射。根据引理 10.9，完备化 $\widetilde{q}\colon F \twoheadrightarrow G$ 也是一个完全度量满射，其核为 $\widetilde{q} = \ker q$。由 (a) 和 (b) 可知，以下嵌入都是完全等距映射：

$$E \otimes_\alpha F \hookrightarrow E \otimes_\alpha \widetilde{F} \quad \text{and} \quad E \otimes_\alpha G \hookrightarrow E \otimes_\alpha \widetilde{G},$$

因此，$Id_E \otimes \widetilde{q}(E \otimes_\alpha F) = E \otimes_\alpha G$。现在，我们的假设是 $Id_E \otimes \widetilde{q}\colon E \otimes_\alpha F \to E \otimes_\alpha G$ 是完全度量满射。因此，再次应用引理 10.9，要证明 $Id_E \otimes q\colon E \otimes_\alpha F \to E \otimes_\alpha G$ 是完全度量满射，我们只需验证 $\ker(Id_E \otimes \widetilde{q}) \subset \ker(Id_E \otimes q)$（闭包是在 $E \otimes_\alpha F$ 内考虑的）。事实上，这成立是因为

$$\ker(Id_E \otimes \widetilde{q}) = E \otimes \ker \widetilde{q} = E \otimes \overline{\ker q} \subset \overline{E \otimes \ker q} = \overline{\ker(Id_E \otimes q)}.$$

□

注记 10.12。注意，利用前述引理，如果 α 在 ONORM 上是完全右投射的，那么它就是右有限生成的，即 $\alpha = \alpha^{\rightarrow}$。

定理 10.13。设 α 是 ONORM 上的一个算子空间张量范数。则 ONORM 上存在唯一的完全右投射算子空间张量范数 $\alpha/$，使得对于所有完全右投射算子空间张量范数 $\beta \geq \alpha$，都有 $\beta \geq \alpha/$。

对于 $E \in$ ONORM 和 $F \in$ OBAN，若 Z_0 是一个完全投射巴拿赫算子空间且 $q : Z_0 \to F$ 是一个完全度量满射，则

$$E \otimes_\alpha Z_0 \to E \otimes_{\alpha/} F$$

是一个完全度量满射。

我们回顾一下，给定一个完全算子空间 E，第 2.5 节中引入的完全投射空间 Z_E 是局部自反的（正如第 2.9.1 节末尾所述）。利用这一性质，我们现在可以证明定理 10.13。

定理 10.13 的证明。设 $F \in$ OBAN。假设我们有两个完全商 $q_j : Z_j \twoheadrightarrow F$、$j = 1$，其中空间 Z_j 是完全投射算子空间，并且假设我们在 $E \otimes F$ 上有算子空间结构 α_j，使得

$$id_E \otimes q_j : E \otimes_\alpha Z_j \to E \otimes_{\alpha_j} F$$

到完全商映射中。固定 $\varepsilon > 0$。由 Z_i 的投射性，存在算子 $L_1 : Z_1 \to Z_2$ 和 $L_2 : Z_2 \to Z_1$，使得 $\|L_i\|_{\mathrm{cb}} \leq 1 + \varepsilon$ 满足 $q_2 \circ L_1 = q_1$ 且 $q_1 \circ L_2 = q_2$。注意，根据 α 的度量映射性质，$id_E \otimes L_1 : E \otimes_\alpha Z_1 \to E \otimes_\alpha Z_2$ 和 $id_E \otimes L_2 : E \otimes_\alpha Z_2 \to E \otimes_\alpha Z_1$ 的完全有界范数至多为 $1+\varepsilon$。由于 $id_E \otimes q_j : E \otimes_\alpha Z_j \to E \otimes_{\alpha_j} F$ 是一个完全商映射，由 [Pis03, Prop. 2.4.1] 可知，恒等映射 $E \otimes_{\alpha_1} F \to E \otimes_{\alpha_2} F$ 和 $E \otimes_{\alpha_2} F \to E \otimes_{\alpha_1} F$ 的完全有界范数至多为 $1 + \varepsilon$。令 $\varepsilon \to 0$，我们得出 $E \otimes_{\alpha_1} F$ 和 $E \otimes_{\alpha_2} F$ 典范完全等距。因此，若将 $\alpha/$ 在 $E \otimes F$ 上定义为由特定商映射诱导的 $E \otimes F$ 上的算子空间结构，则不会产生歧义

$$E \otimes_\alpha Z_F \twoheadrightarrow E \otimes_{\alpha/} F$$

其中 Z_F 是第 2.5 节中引入的投射空间。

由投影张量范数的投射性、$\alpha \leq$投影张量范数以及交换图可知

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_{\mathrm{proj}} Z_F & \twoheadrightarrow & E \otimes_{\mathrm{proj}} F \\ \downarrow & & \vdots \\ E \otimes_\alpha Z_F & \twoheadrightarrow & E \otimes_{\alpha/} F \end{array}$$

结合 [Pis03，命题 2.4.1]，可得 $\alpha/ \leq$ 投影张量范数。

同样，由不等式 最小张量范数 $\leq \alpha$ 以及交换图

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_{\alpha} Z_F & \twoheadrightarrow & E \otimes_{\alpha/} F \\ \downarrow & & \vdots \\ E \otimes_{\min} Z_F & \longrightarrow & E \otimes_{\min} F \end{array}$$

由此可得 min $\leq \alpha/$。因此， $\alpha/$ 是一个合理的算子空间交叉范数。

现在我们来证明， $\alpha/$ 具有完全度量映射性质。设$S \in \mathrm{CB}(E_1, E_2)$，且 $T \in \mathrm{CB}(F_1, F_2)$，并考虑完全商映射 $Z_j \twoheadrightarrow F_j$，其中空间 Z_j 是完全投射的。因此，给定 $\varepsilon > 0$ ，存在一个$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$完全有界映射 $T\colon Z_1 \to Z_2$，使得 $\|T\|_{\mathrm{cb}} \leq (1+\varepsilon)\ \|T\|_{\mathrm{cb}}$，且交换图

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{\widehat{T}} & Z_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_1 & \xrightarrow{T} & F_2 \end{array}$$

可交换。经过张量化，我们得到

$$\begin{array}{ccc} E_1 \otimes_{\alpha} Z_1 & \xrightarrow{S \otimes \widehat{T}} & E_2 \otimes_{\alpha} Z_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_1 \otimes_{\alpha} F_1 & \xrightarrow{S \otimes T} & E_2 \otimes_{\alpha} F_2 \end{array}$$

由此，显然可知，利用 α的完全度量映射性质，

$$\left\| S \otimes T : E_1 \otimes_{\alpha/} F_1 \to E_2 \otimes_{\alpha/} F_2 \right\|_{\mathrm{cb}} \leq (1+\varepsilon) \|S\|_{\mathrm{cb}} \|T\|_{\mathrm{cb}}.$$

令 $\varepsilon \to 0$ ，即可得到 $\alpha/$的完全度量映射性质。

现在，设 $G \in$ 为OBAN，并假设 $q:\ F \twoheadrightarrow G$ 是一个完全商映射。若q_F: $Z_F \twoheadrightarrow F$是标准完全商映射，则注意到复合 $q \circ q_F$:$Z_F \twoheadrightarrow G$ 也是一个完全商映射。对于 $z \in M_n(E \otimes G)$，根据证明开头所示，我们有

$$\begin{aligned} \alpha/_n(z; E, G) &= \inf\left\{\alpha_n(w; E, Z_F) \,:\, (q \circ q_F)_n w = z\right\} \\ &= \inf\left\{\alpha_n(w; E, Z_F) \,:\, (q_F)_n w = u, q_n u = z\right\} \\ &= \inf\left\{\inf\{\alpha_n(w; E, Z_F) \,:\, (q_F)_n w = u\} \,:\, q_n u = z\right\} \\ &= \inf\left\{\alpha/_n(u; E, F) \,:\, q_n u = z\right\}. \end{aligned}$$

也就是说， $id_E \otimes q:\ E \otimes_{\alpha/} F \to E \otimes_{\alpha/} G$ 是完全商映射，因此 $\alpha/$ 在 ONORM 中是完全右投射的 ×OBAN。

根据引理 10.11（a），我们知道范数 $\alpha/$ 在 ONORM ×OBAN 中是右有限生成的。因此，由引理 10.11（b）和（c）可知，这个范数可以

扩展到 ONORM $\times$ONORM，且此延拓在 ONORM 上是完全右投射的。此外，根据定义， $\alpha \leq \alpha/$ 在 ONORM $\times$OFIN，这意味着

$$\alpha \leq \alpha^{\rightarrow} \leq (\alpha/)^{\rightarrow} = \alpha/.$$

最后，设 β 是任意一个支配 α 的完全右投射范数。根据定义， $\alpha/\leq \beta$ 属于 ONORM $\times$ OFIN。注记 10.12 指出 $\beta = \beta^{\rightarrow}$ 在 ONORM 上成立，因此由引理 10.11（a），我们有

$$\alpha/ = (\alpha/)^{\rightarrow} \leq \beta^{\rightarrow} = \beta.$$

□

引理 10.14. 若 α 是 ONORM 中的有限生成算子空间张量范数，则 $\alpha/$ 也是有限生成的。

证明. 设 $z \in M_n(E \otimes F)$。由引理 10.11 可知， $\alpha/$ 是右侧有限生成的。于是，对于给定的 $\varepsilon > 0$ ，存在子空间 $N \in \text{OFIN}(F)$，使得

$$(\alpha/)_n(z; E, N) \leq (1 + \varepsilon)(\alpha/)_n(z; E, F).$$

由于 N 是有限维的，因此它是完备的。因此，存在一个完全投射巴拿赫算子空间 Z_N ，使得

$$id_E \otimes q_N : E \otimes_\alpha Z_N \twoheadrightarrow E \otimes_{\alpha/} N$$

是一个完全商映射。因此，存在元素 $w \in M_n(E \otimes Z_N)$，使得 $(id_E \otimes q_N)_n(w) = z$ ，并且

$$\alpha_n(w; E, Z_N) \leq (1 + \varepsilon)(\alpha/)_n(z; E, N).$$

Now，由于 α 是有限生成的，存在 $M \in$OFIN(E)，使得

$$\alpha_n(w; M, Z_N) \leq (1 + \varepsilon)\alpha_n(w; E, Z_N).$$

注意到 $id_M \otimes q_N : \ E \otimes_\alpha Z_N \to E \otimes_{\alpha/} N$ 的范数为一，且$(id_M \otimes q_N)_n(w) = z$，因此

$$(\alpha/)_n(z; M, N) \leq \alpha_n(w; M, Z_N) \leq (1 + \varepsilon)^3\alpha_n(z; E, F).$$

□

下面的引理将对我们有所帮助。

引理 10.15. 设 α 是一个右有限生成的算子空间张量范数，则$\backslash\alpha$是有限生成的。

证明. 设 $E, F \in$ONORM，且 $z \in M_n(E \otimes F)$。根据注记 10.12 的左侧版本，我们知道 $\backslash\alpha$ 是左有限生成的。于是，给定 $\varepsilon > 0$ ，存在$M \in$ OFIN(E)，使得 $z \in M_n(M \otimes F)$，并且

$$(\backslash\alpha)_n(z; M, F) \leq (1 + \varepsilon)(\backslash\alpha)_n(z; E, F).$$

应用定理 10.13 的左侧版本（并利用 $M \in \text{OFIN} \subset \text{OBAN}$），可知存在满足 $(q_M \otimes id_F)_n(u) = z$ and 的 $u \in M_n(Z_M \otimes F)$

$$\alpha_n(u; Z_M, F) \leq (1 + \varepsilon)(\backslash\alpha)_n(z; M, F).$$

由于 α 是右有限生成的，存在空间 $N \in \mathrm{OFIN}(F)$，使得$u \in M_n(Z_M \otimes N)$ and

$$\alpha_n(u; Z_M, N) \leq (1+\varepsilon)\alpha_n(u; Z_M, F).$$

映射

$$q_M \otimes id_N : Z_M \otimes_\alpha N \twoheadrightarrow M \otimes_{\backslash\alpha} N$$

满足 $(q_M \otimes id_N)_n(u) = z$。这意味着 $z \in M_n(M \otimes N)$，并且

$$(\backslash\alpha)_n(z; M, N) \leq \alpha_n(u; Z_M, N),$$

由此完成证明。 □

注记 10.16。关于完全右内射和完全右投射算子空间张量范数的所有前述结果，都有相应的左侧版本，且证明类似。具体而言，注记 10.2、命题 10.3、推论 10.4、定理 10.5 和引理 10.6 都有成立的左侧表述。此外，在定义算子空间张量范数的左有限包之后，引理 10.11、注记 10.12、定理 10.13、引理 10.14 和引理 10.15 也都有相应的左侧版本。

定义 10.17。定理 10.13 中给出的算子空间张量范数 $\alpha/$ 称为 α的完全右投射包。类似地，可以定义 α的完全左投射包，记作 $\backslash\alpha$，以及完全投射包

$$\backslash\alpha/ := (\backslash\alpha)/ = \backslash(\alpha/).$$

注意，前一个等式不存在歧义，因为 $\backslash(\alpha/)$ 和 $(\backslash\alpha)/$ 相等。事实上，设 E、$F \in OBAN$、Z_E 和 Z_F 是完全投射算子空间，使得

$$q_E : Z_E \twoheadrightarrow E \quad \text{and} \quad q_F : Z_E \twoheadrightarrow F$$

是完全商映射，那么我们知道，两个范数 $(\backslash\alpha)/$ 和 $\backslash(\alpha/)$ 在 $E \otimes F$ 上一致，并且可以通过完全商映射计算

$$q_E \otimes q_F : Z_E \otimes_\alpha Z_F \twoheadrightarrow E \otimes_{\backslash\alpha/} F.$$

利用注记 10.12，我们知道 $\alpha/$ 是右有限生成的，因此由引理 10.15，算子空间张量范数 $\backslash(\alpha/)$ 是有限生成的。可以用同样的论证证明 $(\backslash\alpha)/$ 是有限生成的。由于两个范数 $\backslash(\alpha/)$ 和 $(\backslash\alpha)/$ 在 OBAN 上一致，且它们都是有限生成的，因此它们在 ONORM 上必定相等。

算子空间 $S_1(H)$ 并非完全投射 [Ble92a], ，但相对于有限生成算子空间张量范数的完全右（或左）投射包，它的表现就仿佛是完全投射的一样。其原因在于，$S_1(H)$ 是一个 $\mathscr{OS}_{1,\ 1+}$空间（参见第 2.7 节）： $S_1(H)$ 的每个有限维子空间都包含在一个更大的有限维子空间中，而该子空间“几乎是” S_1^k 的一个副本，其中某个 k:

命题 10.18. [ER94, 命题 5.3] 给定 $M \in \mathrm{OFIN}(S_1(H))$ 和 $\varepsilon > 0$，则存在一个子空间 $M \in \mathrm{OFIN}(S_1(H))$、一个数 $k \in \mathbb{N}$ 以及一个完全同构 $T\colon M \to S_1^k$，使得 $M \supset M$、$\|T\|_{cb} \le 1+\varepsilon$ 和 $\|T^{-1}\|_{cb} \le 1+\varepsilon$。

现在我们可以陈述并证明上面提到的结果。

命题 10.19. 设 α 是一个有限生成算子空间张量范数，并设 $E \in$ 为 ONORM。那么，

$$E \otimes_\alpha S_1(H) = E \otimes_{\alpha/} S_1(H) \quad \text{and} \quad S_1(H) \otimes_\alpha E = S_1(H) \otimes_{\backslash\alpha} E.$$

证明。由于 $\alpha \le \alpha/$，为了证明第一个恒等式（另一个可通过转置得到），我们只需证明，对于任意 $z \in M_n(E \otimes S_1(H))$，有 $(\alpha/)_n(z; E, S_1(H)) \le \alpha_n(z; E, S_1(H))$。给定 $\varepsilon > 0$，存在 $M \in \mathrm{OFIN}(S_1(H))$ 满足 $z \in M_n(E \otimes M)$，且

$$\alpha_n(z; E, M) \le (1+\varepsilon)\alpha_n(z; E, S_1(H)). \tag{10.1}$$

根据命题 10.18，存在 $M \supset M$，$k \in \mathbb{N}$ 以及一个完全同构 $T\colon M \to S_1^k$，使得 $\|T\|_{cb} \le 1+\varepsilon$ 且 $\|T^{-1}\|_{cb} \le 1+\varepsilon$。于是

$$\alpha_n((id \otimes T)_n(z); E, S_1^k) \le (1+\varepsilon)\alpha_n(z; E, \widetilde{M}) \le (1+\varepsilon)\alpha_n(z; E, M). \tag{10.2}$$

现在，应用 T^{-1}，并利用 S_1^k 是完全投射的这一点，我们得到

$$(\alpha/)_n(z; E, \widetilde{M}) \le (1+\varepsilon)\alpha_n((id \otimes T)_n(z); E, S_1^k). \tag{10.3}$$

最后，由于 $(\alpha/)_n(z; E, S_1(H)) \le (\alpha/)_n(z; E, M)$，将恒等式 (10.1)、(10.2) 和 (10.3) 复合起来，我们得到

$$(\alpha/)_n(z; E, S_1(H)) \le (1+\varepsilon)^3 \alpha_n(z; E, S_1(H)),$$

至此证明完毕。 □

作为前述结果的推论，我们给出经典巴拿赫空间恒等式的以下算子空间版本。

例 10.20. $d_\infty =$ 最小张量范数 /。

事实上，由于这两个范数都是有限生成的（由命题 3.5 和引理 10.15 可知），只需证明对于每个 $M, N \in \mathrm{OFIN}$，$M \otimes_{d_\infty} N = M \otimes_{\min/} N$ 即可。利用每个可分算子空间都完全等距同构于 S_1 [的一个商空间（Pis03，推论 2.12），并且 d_∞ 和最小张量范数 / 都是完全右投射的，我们知道存在一个完全商映射 $q\colon S_1 \twoheadrightarrow N$，从而得到另外两个完全商映射

$$id \otimes q : M \otimes_{d_\infty} S_1 \twoheadrightarrow M \otimes_{d_\infty} N \quad \text{and} \quad id \otimes q : M \otimes_{\min/} S_1 \twoheadrightarrow M \otimes_{\min/} N.$$

因此，只需证明对于每个 $M \in \mathrm{OFIN}$，都有 $M \otimes_{d_\infty} S_1 = M \otimes_{\min/} S_1$，即可得到结论。这显然成立，因为 $M \otimes_{d_\infty} S_1 = M \otimes_{\min} S_1$（根据 [CD16，定理 3.7]），并且 $M \otimes_{\min/} S_1 = M \otimes_{\min} S_1$（根据命题 10.19）。

命题 10.18 和 10.19 还推出了以下结论，后文将会用到。其证明可仿照例 10.20，并结合命题 10.19 得出。

推论 10.21. 设 $E, F \in \mathrm{ONORM}$，F 可分，且 α 是有限生成的算子空间张量范数。若 $z \in M_n(E \otimes_{\alpha/} F)$ 且 $\varepsilon > 0$ 存在一个数 k、一个映射 $R\colon S_1^k \to F$ 和一个矩阵 $u \in M_n(E \otimes_\alpha S_1^k)$，使得 $(id \otimes R)_n(u) = z, \|R\|_{cb} \le 1 + \varepsilon$ 且

$$\alpha_n(u; E, S_1^k) \le (1+\varepsilon)(\alpha/)_n(z; E, F).$$

11. Mapping ideals associated to completely injective/projective hulls and accessibility

在推论 10.4 中，我们已经证明，完全右投射（完全左投射）算子空间张量范数的对偶是完全右内射（完全左内射）的。在巴拿赫空间情形中，反过来的结论也成立；但在算子空间背景下，这不再成立（见下文注 12.5）。请注意，所有已知的关于巴拿赫空间张量范数这一事实的证明，都运用了第 2.9 小节中提到的理论。

因此，为了得到关于完全内射/投射包与对偶性的结果，我们必须额外假设可达性。

尽管此前我们详细介绍了关于右包的结果，并通过类比得出左侧的结论，但现在，*to see the other side of the moon*，我们选择先讨论左包，再通过类似的方法推导出右侧的版本。

命题 11.1. 设 α 是一个有限生成算子空间张量范数。
(a) 若 α 左可达，则 $(\backslash\alpha')' = /\alpha$ 且 $(/\alpha)' = \backslash\alpha'$。(b) 若 α 右可达，则 $(\alpha'/)' = \alpha\backslash$ 且 $(\alpha\backslash)' = \alpha'/$。(c) 若 α 完全可达，则 $(\backslash\alpha'/)' = /\alpha\backslash$ 且 $(/\alpha\backslash)' = \backslash\alpha'/$。

证明. 我们只证明 (a)，因为 (b) 和 (c) 可类似得出。为验证第一个恒等式，只需在 OFIN 中检验，因为这两个范数都是有限生成的。事实上，范数 $(\backslash\alpha')'$ 是有限生成的，因为它是一个对偶范数；而根据引理 10.6 的左侧版本，$/\alpha$ 也具有这一性质。

设 M 和 N 是有限维算子空间。我们需要证明

$$\big(M \otimes_{\backslash\alpha'} N'\big)' = M' \otimes_{/\alpha} N. \tag{11.1}$$

为验证 (11.1)，我们考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
(M \otimes_{\backslash\alpha'} N')' & & \xhookrightarrow{\quad (A) \quad} & & (Z_M \otimes_{\backslash\alpha'} N')' \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (\spadesuit)} & & & & \Big\| {\scriptstyle (B)} \\
M' \otimes_{/\alpha} N & \xhookrightarrow{\quad} & Z_M' \otimes_{/\alpha} N \overset{(C)}{=} Z_M' \otimes_\alpha N & \xhookrightarrow{(D)} & (Z_M \otimes_{\alpha'} N')'
\end{array},$$

注意，箭头 (A) 是完全等距的，因为它是以下完全商映射的转置

$$Z_M \otimes_{\backslash\alpha'} N' \twoheadrightarrow M \otimes_{\backslash\alpha'} N'.$$

(B) 和 (C) 中的等式成立，因为 Z_M 是完全投射的，而 Z'_M 是完全内射的（见 [Pis03，推论 24.6], ）。根据对偶定理 5.5，映射 (D) 是完全等距的（注意， Z_M 是局部自反的）；此外， $Z'_M \otimes N$ 中的等式 $\alpha = \overleftarrow{\alpha}$ 成立，因为 α 是左可达的。因此，映射 (♠) 是完全等距同构。

(a) 的第二个恒等式可通过取伴随并利用以下事实得到：根据引理 10.14 的左侧版本，$\backslash\alpha'$ 是有限生成的。□

注 11.2. 考察前一个交换图的底行可知，若 α 是左可达的有限生成算子空间张量范数，且 M 和 N是有限维算子空间，则有如下完全等距：

$$M' \otimes_{/\alpha} N \hookrightarrow (Z_M \otimes_{\alpha'} N')'.$$

类似地，对于 α 右可达且有限生成的情形，我们有：

$$M' \otimes_{\alpha\backslash} N \hookrightarrow (M \otimes_{\alpha'} Z_{N'})'.$$

例 11.3。由于 proj 既左可达又右可达，且为有限生成，命题 11.1 告诉我们：

$$(\backslash \min)' = / \operatorname{proj} \quad and \quad (\min /)' = \operatorname{proj} \backslash.$$

有趣的是，等式 $(\backslash \min /)' = / \operatorname{proj} \backslash$ 是否成立。这无法轻易从命题 11.1 (a) 推导出来，因为我们不知道 $\operatorname{proj}\backslash$ 是否左可达；也无法从命题 11.1 (c) 推导出来，因为我们知道 proj 并非完全可达。稍后，在注 12.17 中我们将看到，这两个范数 $(\backslash \min /)'$ 和 $/ \operatorname{proj} \backslash$ 在巴拿赫空间层面上是等价的。它们作为算子空间张量范数是否相等（或至少是否等价）这一问题仍未解决。

正如我们所见，可达性与算子空间张量范数的内射包和投射包之间的对偶性有关。在描述映射理想的满射包和内射包所关联的范数时，也会出现这一性质（见下文定理 11.6）。首先，我们需要以下引理。

引理 11.4。设 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 是一个映射理想。
(a) 若 β 是与 $\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}$ 相关联的有限生成算子空间张量范数，则 β 是完全左内射的。
(b) 若 β 是与 $\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}$ 相关联的有限生成算子空间张量范数，则 β 是完全右内射的。

证明。(*a*) 我们首先假设 E_1、E_2、F 是有限维的，且 $i: E_1 \to E_2$ 是完全等距同构。于是，

$$E_1 \otimes_\beta F = \mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E_1', F)$$
$$E_2 \otimes_\beta F = \mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E_2', F).$$

通过这些识别，映射 $i \otimes id_F: E_1 \otimes_\beta F \to E_2 \otimes_\beta F$ 看起来像

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E_1', F) \longrightarrow \mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E_2', F)$$
$$T \longmapsto T \circ i'.$$

由于 $\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}$ 是满射，且 $i': E_2' \twoheadrightarrow E_1'$ 是完全商映射，因此对所有 $T \in M_n(\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(E_1', F))$，都有 $\mathsf{A}_n^{\mathrm{sur}}(T) = \mathsf{A}_n^{\mathrm{sur}}(T \circ i')$，由此得出有限维情形的证明。

现在，设 E_1, E_2, F 为赋范算子空间，且 $i: E_1 \to E_2$ 为完全等距。对于 $z \in M_n(E_1 \otimes_\beta F)$，我们必须证明

$$\beta_n(i \otimes id_F(z); E_2, F) = \beta_n(z; E_1, F). \tag{11.2}$$

度量映射性质表明，$\beta_n(i \otimes id_F(z); E_2, F) \le \beta_n(z; E_1, F)$。为证明反向不等式，设 $M_1 \subset E_1, M_2 \subset E_2, N \subset F$ 为有限维算子空间，使得 $z \in M_n(M_1 \otimes N)$ 且 $i \otimes id_F(z) \in M_n(M_2 \otimes_\beta N)$。于是，

$$\beta_n(z; E_1, F) \le \beta_n(z; M_1, N) = \beta_n(i \otimes id_F(z); i(M_1) + M_2, N) \le \beta_n(i \otimes id_F(z); M_2, N \tag{11.3}$$

由于 β 是有限生成的，等式成立。

(*b*) 如同前一项，我们首先假设 E、F_1、F_2 是有限维算子空间，并且 $i: F_1 \to F_2$ 是完全等距的。于是，

$$E \otimes_\beta F_1 = \mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E', F_1)$$
$$E \otimes_\beta F_2 = \mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E', F_2).$$

通过这些识别，映射 $id_E \otimes i: E \otimes_\beta F_1 \to E \otimes_\beta F_2$ 看起来像

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E', F_1) \longrightarrow \mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E', F_2)$$
$$T \longmapsto i \circ T.$$

现在，对于所有 $T \in M_n(\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(E', F_1))$，等式 $\mathsf{A}_n^{\mathrm{inj}}(T) = \mathsf{A}_n^{\mathrm{inj}}(i_n \circ T)$ 完成了有限维情形下的证明。任意算子空间的情形可按照第 (*a*) 项轻易推出。□

注 11.5. 设 α、β、γ 是分别与映射理想 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}$ 和 $\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}$ 相关联的有限生成算子空间张量范数。根据前述引理，我们有

$$\beta \le /\alpha \quad \text{and} \quad \gamma \le \alpha\backslash. \tag{11.4}$$

定理 11.6. 设 $(\mathfrak{A}, \mathsf{A})$ 为一个映射理想，其相应的算子空间张量范数为 α .
(a) 如果 α 是左可达的，那么算子空间张量范数 $/\alpha$ 与 $\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}$ 相关联。(b) 如果 α 是右可达的，那么算子空间张量范数 $\alpha\backslash$ 与 $\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}$ 相关联。

证明。（a）首先，假设 $\mathfrak{A}$ 是一个极大映射理想，并设 M、N 是有限维算子空间。令 q_M：$Z_M \twoheadrightarrow M$ 为规范完全商映射。那么，对于每个 $T \in M_n$（$\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}$（$M$，$N$）），我们有

$$\mathbf{A}_n^{\mathrm{sur}}(T) = \mathbf{A}_n(T \circ q_M) = \|T \circ q_M\|_{M_n((Z_M \otimes_{\alpha'} N')')} = (/\alpha)_n(T; M', N).$$

第二个等式由表示定理 8.6 得出，第三个等式则来自注 11.2。因此，我们有完全等距

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}(M, N) \stackrel{1}{=} M' \otimes_{/\alpha} N.$$

特别地，$/\alpha$ 是 $\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}}$.的伴随算子空间张量范数

现在，设 $\mathfrak{A}$ 是任意映射理想。注意，若 $\mathfrak{A} \sim \alpha$，则 $\mathfrak{A}^{\max} \sim \alpha$，因此由证明的第一部分（$\mathfrak{A}^{\max}$）可得$^{\mathrm{sur}} \sim /\alpha$。

包含映射 $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^{\max}$（在算子空间情形下）蕴含 $\mathfrak{A}^{\mathrm{sur}} \subset (\mathfrak{A}^{\max})^{\mathrm{sur}}$。记 β 为与 $\mathcal{A}^{\mathrm{sur}}$ 相关联的算子空间张量范数，我们得到

$$/\alpha \leq \beta. \tag{11.5}$$

现在，由注 11.5 可得该等式。

（b）首先假设 $\mathfrak{A}$ 是极大映射理想，并设 M、N 是有限维算子空间。令 $q_{N'}$：$Z_{N'} \twoheadrightarrow N'$ 为规范完全商映射。那么，对于每个 $T \in M_n$（$\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}$（$M$，$N$）），我们有

$$\mathbf{A}_n^{\mathrm{inj}}(T) = \mathbf{A}_n((q'_{N'})_n \circ T) = \|(q'_{N'})_n \circ T\|_{M_n((M \otimes_{\alpha'} Z_{N'})')} = (\alpha\backslash)_n(T; M', N).$$

第二个等号由表示定理 8.6 得出，第三个等号则来自注 11.2。因此，我们得到完全等距

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}(M, N) \stackrel{1}{=} M' \otimes_{\alpha\backslash} N.$$

特别地，$\alpha\backslash$ 是与 $\mathfrak{A}^{\mathrm{inj}}$.相关联的算子空间张量范数

对任意映射理想 $\mathfrak{A}$ 的证明与前一个条目中的证明类似 m. □

注11.7。在巴拿赫空间框架中，一个重要性质是 [DF93，命题 20.9] 指出，若 α 和 β 是巴拿赫空间张量范数，且 β 完全右内射，则以下条件等价：

(a) $\beta = \alpha\backslash$(b) 对每个赋范空间 E都成立。

这一等价关系的证明关键依赖于这样一个事实：在巴拿赫空间情形中，内射包由嵌入到一个 $\ell_\infty(I)$空间给出，而该空间是一个$\mathcal{L}_{\infty\text{内射}1+}$ 空间（也就是说，对每个 $\varepsilon > 0$，$\ell_\infty(I)$的任意有限维子空间都包含在一个更大的有限维子空间中，且该子空间与一个ℓ_∞^n同构），因此可以应用 $\mathcal{L}_p$-局部技巧引理。

然而，算子空间情形下的类似论证并不成立。虽然我们确实有一个局部技巧引理（引理 4.10），但它只适用于 $\mathcal{OS}_{p,C}$空间（定义见第 2.7 节）。特别要注意，$\mathcal{OS}_{\infty,C}$ 空间显然是正合的（回忆一下，若每个有限维

F 的子空间都与某个 M_n 空间的子空间 C-完全同构，则称算子空间 F 是 C-正合的）。由于在算子空间情形下，完全内射包是通过嵌入到一个 a$B(H)$ 空间中得到的，而当 H 为无限维时， $B(H)$ 并非正合，因此不可能将前述巴拿赫空间结果的证明改编到算子空间情形中。

我们可以得到以下替代结果：

命题 11.8. 设 α 和 β 是算子空间张量范数，且 β 完全右内射。若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $E \otimes_\beta M_n = E \otimes_\alpha M_n$，则对任意 $F \subseteq \mathcal{K}$（ℓ_2），都有 $E \otimes_\beta F = E \otimes_{\alpha\backslash} F$。

现在我们研究张量范数的可达性与其关联映射理想的某些性质之间的关系。按照算子空间框架中的惯例，我们考虑这些定义的局部自反性版本。

定义 11.9. 若对所有 $M \in$ OFIN、$F \in$ OBAN（$F \in$ OLOC）、$n \in \mathbb{N}$、$T \in M_n$（CB(M, F)）以及 $\varepsilon > 0$，都存在 $N \in$ OFIN（F）和 $S \in M_n$（CB(M, N)），使得 A$_n$（S） $\leq$（$1+\varepsilon$）A$_n$（T），且下列交换图可交换，则称映射理想 ($\mathfrak{A}$,A) 为右可达（局部右可达）。

$$\begin{array}{ccc} M_n(M) & \xrightarrow{T} & M_n(F) \\ & \searrow^{S} & \uparrow{\scriptstyle (i_N^F)_n} \\ & & M_n(N) \end{array}$$

若对所有 $E \in$ OBAN ($E \in$OLOC)、 $N \in$OFIN、 $n \in \mathbb{N}$, $T \in M_n$(CB(E, N)) 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $L \in$OCOFIN(E) 及 $S \in M_n$(CB($E/L, N$))，使得 A$_n$(S) $\leq$($1+\varepsilon$)A$_n$(T)，且下列交换图可交换，则称 ($\mathfrak{A}$,A) 为左可达（局部左可达）。

$$\begin{array}{ccc} M_n(E) & \xrightarrow{T} & M_n(N) \\ {\scriptstyle (q_L^E)_n}\downarrow & \nearrow_{S} & \\ M_n(E/L) & & \end{array}$$

既是左可达又是右可达（局部左可达且局部右可达）的映射理想称为可达（局部可达）。此外，若对于完全算子空间（完备局部自反算子空间）之间的每个有限秩算子矩阵T： $M_n(E) \to M_n(F)$以及 $\varepsilon > 0$，都存在 $L \in$ OCOFIN(E)、 $N \in$ OFIN(F)和$S \in M_n$(CB($E/L, N$))，使得 A$_n$(S) $\leq(1+\varepsilon)$A$_n$(T)，并且下图成立，则称($\mathfrak{A}$, A)完全可达（局部完全可达）：

可交换

$$\begin{array}{ccc} M_n(E) & \xrightarrow{T} & M_n(F) \\ {\scriptstyle (q_L^E)_n}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle (i_N^F)_n} \\ M_n(E/L) & \xrightarrow[S]{} & M_n(N) \end{array}$$

例 11.14（2）证明了这些可达性定义的局部版本确有必要：我们在那里展示了映射理想 $\mathcal{I}$ 是局部左可达的，但不是左可达的。

注 11.10. 显然，每个完全内射映射理想都是右可达的，而每个完全投射映射理想都是左可达的。设T： $M_n(E) \to M_n(F)$ 是一个有限秩算子矩阵。令 $\mathrm{im}(T)$ 表示空间 $(T_{ij}(E))_{i,j=1}^n$ 的并集的张成空间，并注意到 $\mathrm{im}(T) \in \mathrm{OFIN}(F)$。记 $\ker(T) = \bigcap_{i,j=1}^n \ker(T_{ij})$，注意 $\ker(T) \in \mathrm{OCOFIN}(E)$，此外还存在一个典范分解

$$\begin{array}{ccc} M_n(E) & \xrightarrow{T} & M_n(F) \\ \downarrow & & \uparrow \\ M_n(E/\ker(T)) & \xrightarrow[S]{} & M_n(\mathrm{im}(T)) \end{array}$$

这表明，同时完全内射且完全投射的映射理想是完全可达的。

例如，由于我们已经注意到 CB 既是完全内射的又是完全投射的，因此可推出映射理想 CB 是完全可达的。

注 11.11. 注意，如果 $(\mathfrak{A}^{\max}, \mathrm{A}^{\max})$ 是右可达的（左可达的、完全可达的、局部可达的），那么 $(\mathfrak{A}, \mathrm{A})$ 也是右可达的（左可达的、完全可达的、局部可达的）。事实上，根据不同可达性变体的定义，以及对于 $E, F \in \mathrm{OBAN}$ 的完全压缩包含 $\mathfrak{A}(E,F) \subset \mathfrak{A}^{\max}(E,F)$，和对于 $M, N \in \mathrm{OFIN}$ 的完全等距等式 $\mathfrak{A}(M,N) = \mathfrak{A}^{\max}(M,N)$，这一点是显然的。

我们之所以要分别为交叉范数和映射理想定义可达性概念，是有原因的：在巴拿赫空间情形中，对于与（有限生成）交叉范数 α 相对应的极大映射理想 $\mathfrak{A}$，这两种可达性概念是一致的。现在我们将说明，在算子空间世界中，算子空间张量范数与算子理想的（某些）可达性概念之间存在联系，不过一如既往，这涉及局部自反性。事实上，右可达性的等价性与巴拿赫空间情形完全相同；但对于左可达性，我们只能证明一个较弱的结论。

命题 11.12。设 $(\mathfrak{A}, \mathsf{A})$ 是一个映射理想，α 是其对应的有限生成算子空间张量范数。那么：

(a) α 是右可达的（局部右可达的），当且仅当（$\mathfrak{A}$,A）是右可达的（局部右可达的）。（b）如果 α 是左可达的（完全可达的），那么（$\mathfrak{A}$,A）是局部左可达的（局部完全可达的）。

证明。（a）假设 α 是右可达的。根据注 11.11，我们可以认为（$\mathfrak{A}$, A）是极大的。令 $M \in \mathsf{OFIN}$、$F \in \mathsf{OBAN}$ 且 $T \in M_n(\mathsf{CB}(M, F))$。用 $z_T \in M_n(M' \otimes F)$ 表示与 T相对应的张量矩阵。根据右可达性的定义和嵌入定理 8.16（利用M 是有限维的，因而是局部自反的这一事实），我们有

$$\overrightarrow{\alpha}_n(z_T; M', F) = \overleftarrow{\alpha}_n(z_T; M', F) = \mathbf{A}_n(T). \tag{11.6}$$

这意味着存在 $M \in \mathsf{OFIN}(M')$，$N \in \mathsf{OFIN}(F)$ 以及 $u \in M_n(M \otimes$使得

$$\alpha_n(u; \widetilde{M}, N) \le (1+\varepsilon)\mathbf{A}_n(T) \quad \text{and} \quad (i_{\widetilde{M}}^{E'} \otimes i_N^F)_n(u) = z_T;$$

此外，注意我们可以假设 $M = M'$。因此，若 $T_u \in M_n(\mathsf{CB}(M, N))$ 是与 u 对应的映射矩阵，则它满足 $\mathbf{A}_n(T_u) \le (1+\varepsilon)\mathbf{A}_n(T)$ 和 $(i_N^F)_n \circ T_u = T$。

反过来，假设 $(\mathfrak{A}, \mathsf{A})$ 具有右可达性。由于 α 是有限生成的，$\alpha = \overrightarrow{\alpha}$。我们总有 $\overleftarrow{\alpha} \le \alpha$，因此只需证明

$$\alpha(\cdot; M', F) \le \overleftarrow{\alpha}(\cdot; M', F)$$

对于有限维的 M和任意的 F。给定 $z \in M_n(M' \otimes F)$ 和 $\varepsilon > 0$，由 $\mathfrak{A}$的右可达性可知，存在 $N \in \mathsf{OFIN}(F)$ 和 $S \in M_n(\mathsf{CB}(M, N))$，使得

$$\mathbf{A}_n(S) \le (1+\varepsilon)\mathbf{A}_n(T_z) \quad \text{and} \quad (i_N^F)_n \circ S = T_z$$

其中 $T_z \in M_n(\mathsf{CB}(M, F))$ 是与 z 对应的映射矩阵。若 $z_S \in M_n(E' \otimes N)$ 是与 S 对应的张量矩阵，由于 $M' \otimes_\alpha N = \mathfrak{A}(M, N)$ 完全等距地，故可得

$$\alpha_n(z_S; M', N) = \mathbf{A}_n(S) \le (1+\varepsilon)\overleftarrow{\alpha}_n(z; E', F)$$

且 $(i_{M'} \otimes i_N^F)_n(z_S) = z$，这表明 α 是右可达的。

局部右可及性的情形也可同理得出，只需将 $F \in \mathsf{OBAN}$ 替换为 $F \in \mathsf{OLOC}$。

(b) 我们证明左可及性的情形；另一种情形类似。再次根据注 11.11，我们可以假设 $(\mathfrak{A}, \mathsf{A})$ 是极大的。设 $E \in \mathsf{OLOC}$，$N \in \mathsf{OFIN}$ 且 $T \in M_n(\mathsf{CB}(E, N))$。用 $z_T \in M_n(E' \otimes N)$ 表示对应于 T 的张量矩阵，并应用左可及性的定义和嵌入定理 8.16，可得

$$\overrightarrow{\alpha}_n(z_T; E', N) = \overleftarrow{\alpha}_n(z_T; E', N) = \mathbf{A}_n(T).$$

这意味着存在 $M \in \mathrm{OFIN}(E')$ 和 $u \in M_n(M \otimes N)$，使得 t

$$\alpha_n(u; M, N) \le (1+\varepsilon)\mathbf{A}_n(T) \quad \text{and} \quad (i_M^{E'} \otimes id)_n(u) = z_T.$$

因此，如果 $T_u \in M_n(\mathrm{CB}(E/{}^0M, N))$ 是与 u 相对应的映射矩阵，我们得到 $\mathrm{A}_n(T_u) \le (1+\varepsilon)\mathrm{A}_n(T)$ 以及 $T_u \circ q_{0_M}^E = T$，从而证明完毕。□

注记 11.13. 如果 α' 是一个 λ 算子空间张量范数，那么命题 11.12（b）的结论中无需“局部”一词。根据前面的论证，这一点是显然的，因为正如我们在注记 8.17 中所述，在此情形下，嵌入定理 8.16 在局部自反性假设下仍然成立。另一方面，一般而言，不可能在命题 11.12（b）的结论中去掉“局部”一词。事实上，在例 11.14（2）中我们看到，尽管相应的算子空间张量范数 proj 是左可达的，$\mathcal{I}$ 却不是左可达的。

例 11.14. (1) 映射理想 $\mathfrak{A}_h$ 是完全可达的。由于 h 是完全可达的，且 $h' = h$ 是一个 λ-算子空间张量范数，结论由命题 11.12 和注记 11.13 得出。(2) 映射理想 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{I}$ 是右可达且局部左可达的。映射理想 $\mathcal{I}$ 不是左可达的。由于 proj 既是右可达的，也是左可达的，故由命题 11.12 得到第一个断言。现在，假设 $\mathcal{I}$ 是左可达的。那么，对于每个 $E \in \mathrm{OBAN}$、$N \in \mathrm{OFIN}$、$T \in \mathrm{CB}(E, N)$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $L \in \mathrm{OCOFIN}(E)$ 和 $S \in \mathrm{CB}(E/L, N)$，使得 $T = S \circ q_L^E$ 且 $\iota(S) \le (1+\varepsilon)\iota(T)$。由于 $E/L, N \in \mathrm{OFIN}$，我们知道 $\nu(T) \le \nu(S) = \iota(S)$，这意味着 $\nu(T) \le \iota(T)$。由于另一个不等式总是成立，我们得到等距同构 $\mathcal{N}(E, N) = \mathcal{I}(E, N)$。根据 [ER00, 命题 14.3.1]，这个等距同构对每个 $N \in \mathrm{OFIN}$ 都成立，当且仅当 E 是局部自反的。因此，映射理想 $\mathcal{I}$ 不可能是左可达的。

据我们所知，尚不清楚是否存在局部右可达但并非右可达的映射理想。若能找到这样的例子，或证明其不存在，将会很有意思。

12. Natural o.s. tensor norms

Grothendieck 的 R´esum´e 列出了所有自然张量范数。这些范数由对投射和内射张量范数应用有限次自然运算得到。它们是按某种顺序取左/右投射包和内射包而得的（见 [DF93] 第 15 节和第 20 节）。Grothendieck 证明，可能的自然范数至多有十四种，但他并不知道它们之间确切的支配关系，也不知道自然范数表是否可以进一步精简（事实上，这正是 R´esum´e 中提出的未解问题之一）。几年后，凭借 Gordon 和 Lewis 的深刻思想，这个问题得到了解决。所有这些

结果如今已成为经典，例如可见于 [DF93、第 27] 节以及 [DFS08，第 4.4.2] 节。

Grothendieck 结果的一项优势在于，他的十四种张量范数中大多数（至少十种）确实是自然范数，因为它们最终都等价于最相关的张量范数：与有界算子、积分算子、绝对 r-可和算子 ($r = 1, 2$)、 r-可分解算子 ($r = 1, 2, \infty$) 以及 2-支配算子的理想相关的张量范数。这些张量范数因其自身的重要性而自然地出现在理论中；而它们能够通过 Grothendieck 引入的自然运算，由投射/内射范数得到，则是一件了不起的事。

在算子空间情形中，Blecher 在 [Ble92b] 中提出了按照 Grothendieck 意义研究自然范数的想法；而在 [Kir95, Pis20] 中，则在 C^*-代数框架下考察了张量范数的完全内射包和完全投射包。不过，迄今只有少数自然的算子空间张量范数被视为与映射理想相关。这包括 $\min /$, $\backslash \min$ 和 $/ \operatorname{proj} \backslash$。根据例 10.20，我们有 $d_\infty = \min /$； [ER94] 中也观察到了这一点（紧接在推论 5.5 之后）。通过转置，$g_\infty = \backslash \min$。算子空间张量范数 $/ \operatorname{proj} \backslash$ 由 [DFU15b] 引入，名称为 η；而 $E \otimes_\eta F$ 的对偶可识别为可延拓元素所构成的算子空间双线性理想（即可以延拓到任意更大空间中的元素）。正如 [DFU15b] 中所示，算子空间张量范数 $/ \operatorname{proj} \backslash$ 与格罗滕迪克不等式的非交换版本的深刻结果相关 [PS02, HM08], ，并且在巴拿赫空间层面上，它实际上等价于 $h \cap h^t$。类似地， $\backslash \min /$ 在巴拿赫空间层面上等价于 $h + h^t$（详见引理 12.16）。

缺乏恰当的格罗滕迪克不等式张量积版本，以及 Haagerup 张量范数的存在（也可能正是受此启发）——该范数既完全内射又完全投射——对 $natural$ 算子空间张量范数的行为产生了重大影响。

本节考察算子空间框架下 Grothendieck 的自然范数。换言之，这些范数是对最小张量范数或投影张量范数施加左侧或右侧内射包／投射包运算有限次后得到的。

我们首先概述这一列表，并证明其中许多支配关系和非等价关系。我们也列出了一系列关于它们的有趣开放问题。积极的一面是，我们完整描述了通过对最小张量范数或投影张量范数施加双侧对称运算（内射包或投射包）得到的所有自然范数。具体而言，该列表包含六种算子空间张量范数。与巴拿赫空间情形不同，后者只有四种。

我们先介绍一些在算子空间中仍然成立的巴拿赫空间理论结果，随后再探讨这两种背景之间的差异。

与巴拿赫空间情形一样，对范数交替取内射包和投射包（在同一侧或两侧同时进行）的过程会在三步后结束。以下引理说明了这一点，它是 [DFS08, 命题 2.6.3] 的算子空间版本（另见 [CG12, 引理 3.3]）。

引理 12.1. 设 α 为一个算子空间张量范数，则
(a) $\backslash(/(\backslash(/\alpha\backslash)/)\backslash)/ = \backslash(/\alpha\backslash)/$ 和 $/(\backslash(/(\backslash\alpha/)\backslash)/)\backslash = /(\backslash\alpha/)\backslash$。 (b) $\alpha\backslash/\backslash/ = \alpha\backslash/$ 和 $\alpha/\backslash/\backslash = \alpha/\backslash$。 (c) $\backslash/\backslash/\alpha = \backslash/\alpha$ 和 $/\backslash/\backslash\alpha = /\backslash\alpha$。

证明。我们只证明 (a) 中的第一个等式，因为所有论证都类似。显然，$/(\backslash(/\alpha\backslash)/)\backslash \leq \backslash(/\alpha\backslash)/$，因此我们可以对两边取完全投射包，得到 $\backslash(/(\backslash(/\alpha\backslash)/)\backslash)/ \leq \backslash(/\alpha\backslash)/$。另一个不等式的证明类似：从 $/\alpha\backslash \leq \backslash(/\alpha\backslash)/$ 出发，对两边取完全内射包，然后再取完全投射包，得到 $\backslash(/\alpha\backslash)/ \leq \backslash(/(\backslash(/\alpha\backslash)/)\backslash)/$。

□

正如我们在定义 10.7 和 10.17 中所见，对一个范数的两边取完全内射包（或完全投射包）时，可以交换取包的顺序。如果一边取完全内射包，另一边取完全投射包，情况则有所不同。下面的引理（在巴拿赫空间情形下也有类似的陈述）通过一个范数等式说明了这一点，而该等式对于后续描述自然范数至关重要。

引理 12.2。下列算子空间张量范数相等：

$$(/\operatorname{proj})/ = \operatorname{proj} = \backslash(\operatorname{proj}\backslash).$$

证明。由引理 10.6 和引理 10.14，(/投影张量范数)/ 是有限生成的。因此，要证明第一个等式（另一个可通过转置得到），只需考虑$E \in$ ONORM 和 $F \in$OBAN。设 $q_F\colon Z_F \twoheadrightarrow F$ 是一个完全商映射。那么，以下两个映射也是完全商映射：

$$id_E \otimes q_F\colon E \otimes_{/\operatorname{proj}} Z_F \twoheadrightarrow E \otimes_{(/\text{投影张量范数})/} F \text{和} \; id_E \otimes q_F\colon E \otimes_{\operatorname{proj}} Z_F \twoheadrightarrow E \otimes_{\operatorname{proj}} F.$$

由于 $E \otimes_{/\operatorname{proj}} Z_F = E \otimes_{\operatorname{proj}} Z_F$（因为 Z_F' 是完全内射的——参见注 12.11），我们推得 $E \otimes_{(/\operatorname{proj})/} F = E \otimes_{\operatorname{proj}} F$。□

前述引理的最小范数对应项（在巴拿赫空间框架中成立）在算子空间世界中并不成立。为了证明这一点，我们将借助以下结果。该结果也可以（经对偶化后）作为证明 [ER00, 命题 15.4.3] 的副产品得到；此外，*exactly integralmappings* 的集合包含于完全 1-绝对求和映射的集合中。

引理 12.3. 设 $E \in$ OBAN 和 $F \in$ OFIN 满足 $F' \subset E$。若存在 $C > 0$ 使得 $\|id\colon E \otimes_{\min} F \to E \otimes_{\min/} F\| \leq C$，则算子空间 F' 是 C- 正合的。

证明。由于 F 是有限维的，存在一个规范的完全等距同构 $\Phi\colon E \otimes_{\min} F \to \mathrm{CB}(F', E)$。令 $z \in E \otimes_{\min} F$满足 $\Phi(z) = id$，由此得到 $\min(z;\, E, F) = 1$ 以及 $\min\ /(z;\, E, F) \leq C$。给定 $\varepsilon > 0$，根据推论 10.21，

存在 $k \in \mathbb{N}$, $R\colon S_1^k \to F$和 $u \in E \otimes_{\min} S_1^k$，使得$(id \otimes R)(u) = z$, $\|R\|_{cb} \le 1+\varepsilon$并且

$$\min(u; E, S_1^k) \le (1+\varepsilon)\min /(z; E, F) \le C(1+\varepsilon).$$

将其通过 Φ 转换后，我们得到以下交换图 :

$$\begin{array}{ccc} M_k & & \\ {\scriptstyle R'}\uparrow & \searrow^{\Phi(u)} & \\ F' & \xrightarrow[id]{} & E \end{array}$$

其中 $\|R'\|_{cb} \le 1+\varepsilon$ 和 $\|\Phi(u)\|_{cb} \le C(1+\varepsilon)$。因此， F' 是 C-正合的。 □

下一个引理的陈述（也许）比我们先前承诺的稍强一些。我们证明范数 /(最小张量范数 /\) 和 (/\ 最小张量范数)\ 与最小张量范数不同。由于 /(最小张量范数 /\) ≤ /(最小张量范数 /), 且 (/\ 最小张量范数)\ ≤ (\ 最小张量范数)\，结论便随之成立。

引理 12.4. /(最小张量范数 /\) 和 (/\ 最小张量范数)\ 均不等价于最小张量范数。特别地， /(最小张量范数 /) 和 (\ 最小张量范数)\ 均不等价于最小张量范数。

证明。考虑算子空间 S_1^n，其中 $n > 2$ 任意，并取一个希尔伯特空间 H，使得 $S_1^n \subset \mathcal{B}(H)$。回顾一下， $S_1^n = M_n'$。

由于 $\mathcal{B}(H)$ 和 M_n 是完全内射的，我们知道 $\mathcal{B}(H) \otimes_{/(\min /\backslash)} M_n = \mathcal{B}(H) \otimes_{\min /} M_n$。因此，要证明 /(最小张量范数 /\) 与最小张量范数不等价，只需证明 $\mathcal{B}(H) \otimes_{\min /} M_n$ 和 $\mathcal{B}(H) \otimes_{\min} M_n$ 不一致完全同构。由引理 12.3 可知这成立，因为不存在 C 使得对所有 n [ER00, S_1^n 都是 C-正合的，定理 14.5.4]。

□

注 12.5. 由引理 12.2 和 12.4，我们可得出以下几个推论：

(a) 算子空间张量范数 min / 不是左可达的（而算子空间张量范数 \ min 不是右可达的）。

事实上，由于我们从例 11.3 知道 $(\min /)' = \text{proj}\ \backslash$，若 min / 是左可达的，那么根据命题 11.1，我们将有 /(min /) =(\(proj \))′ = proj′ = min，而这并不成立。

(b) 若 $\alpha = \min\ /$ 和 $\beta = \backslash\min$ 均为有限生成，则前一项表明

$$(/\alpha)' \ne \backslash\alpha' \quad \text{and} \quad (\beta\backslash)' \ne \beta'/.$$

另外，注意到 /(min /\) = /(min /)\ 且 (/\ min)\ = /(\ min)\。于是，根据引理 12.4，并注意到 \(proj \)/ = \(/ proj)/ = proj，我们得到

$$(/\alpha\backslash)' \ne \backslash\alpha'/ \quad \text{and} \quad (/\beta\backslash)' \ne \backslash\beta'/.$$

（c）算子空间张量范数 $\gamma = /(\min /)$ 是完全左内射的，但其对偶 γ' 不是完全左投射的。类似地，算子空间张量范数 (\min)\ 是完全右内射的，但其对偶不是完全右投射的。此外，

算子空间张量范数 $/(\min)\backslash$ 和 $/(\min/)\backslash$ 均为（双侧）完全内射的，但它们的对偶并非（双侧）完全投射的。

事实上，由于 $\min \leq \gamma \leq \min$ / 我们有 $\mathrm{proj} \geq \gamma' \geq \mathrm{proj}\backslash$。如果 γ' 是完全左投射的，那么我们将有 $\mathrm{proj} \geq \gamma' \geq \backslash(\mathrm{proj}\backslash) = \mathrm{proj}$，但这并不成立。

前面的注记表明，完全内射的算子空间张量范数的对偶未必是完全投射的，这说明 [Ble92b] 中给出的投射包定义（即内射包的对偶）并不恰当。

如同在巴拿赫空间情形中一样，如果先在一侧应用完全投射包，再在另一侧应用完全内射包，我们得到的范数会小于按相反顺序进行时得到的范数。

引理 12.6。设 α 为一个算子空间张量范数。则：

$$/(\alpha/) \leq (/\alpha)/ \quad and \quad (\backslash\alpha)\backslash \leq \backslash(\alpha\backslash).$$

证明。我们只需证明第一个不等式，因为另一个可通过转置得到。根据注记 10.12以及对引理 10.6的一个轻微改进，两个范数 $/(\alpha/)$ 和 $(/\alpha)/$ 都是右有限生成的。因此，只需对 $E \otimes F$ 满足 $E \in \mathrm{ONORM}$ 且 $F \in \mathrm{OBAN}$ 的情形验证该不等式。考虑一个完全等距同构 $i_E\colon\ E \hookrightarrow \mathcal{B}(H_E)$以及一个完全商映射 $q_F\colon\ Z_F \twoheadrightarrow F$。

根据 Z_F 的投射性，映射 $id_{\mathcal{B}(H_E)} \otimes q_F\colon\ \mathcal{B}(H_E) \otimes_\alpha Z_F \to \mathcal{B}(H_E) \otimes_{\alpha/} F$是一个完全商映射；因此也是一个完全压缩。这意味着（根据 $\mathcal{B}(H_E)$ 的内射性），$id_E \otimes q_F\colon\ E \otimes_{/\alpha} Z_F \to E \otimes_{/(\alpha/)} F$ 是一个完全压缩。

现在，结论由下列交换图得出：

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_{(/\alpha)/} F & \longrightarrow & E \otimes_{/(\alpha/)} F \\ \uparrow & \nearrow & \\ E \otimes_{/\alpha} Z_F & & \end{array}$$

□

注意，前述引理中的不等式通常并非等式。事实上，$/(\mathrm{proj}/) = /\,\mathrm{proj}$ 不等价于 proj。因此，由引理 12.2 可得$/(\mathrm{proj}\ /) \neq (/\,\mathrm{proj})/$ 以及 $(\backslash\,\mathrm{proj})\backslash \neq \backslash(\mathrm{proj}\backslash)$。

在巴拿赫空间情形中也是如此：$/(\pi/) \neq (/\pi)/$ 以及 $(\backslash\pi)\backslash \neq \backslash(\pi\backslash)$。请注意，[DFS08，推论 2.4 中关于这一主题的论断是错误的。17]（该论断是从 [DFS08，命题 2.4 的错误陈述16]推导出来的。）

我们用 “$\mathrm{proj}\ family$”（分别用 “$\min\ family$”）表示通过对投射范数（分别对最小张量范数）任意次应用单侧完全内射和/或完全投射包络所得到的所有算子空间张量范数的集合。注意，若将其转换到巴拿赫空间的语境中，则两族的并集就是格罗滕迪克自然张量范数的集合。

显然，$/\operatorname{proj}\backslash$ 是最大的完全内射算子空间张量范数，而 $\backslash\min/$ 是最小的完全投射算子空间张量范数。下面这个简单的引理表明，它们也分别是各自族中最小和最大的成员。

引理 12.7. (a) proj 族中最小的范数是 $/\operatorname{proj}\backslash$。(b) min 族中最大的范数是 $\backslash\min/$。

证明. (a) 的证明可由以下显而易见的事实轻易推出：若对于某个算子空间张量范数 α，有 $/\operatorname{proj}\backslash \leq \alpha$，则

$$/\operatorname{proj}\backslash \leq \alpha\backslash, \quad /\operatorname{proj}\backslash \leq /\alpha, \quad /\operatorname{proj}\backslash \leq \alpha/, \quad /\operatorname{proj}\backslash \leq \backslash\alpha.$$

(b) 的证明类似。 □

备注 12.8. 格罗滕迪克不等式的一些张量范数推论在算子空间框架下不再成立。

(a) 由格罗滕迪克不等式可知，$/\pi\backslash$ 被 $\backslash\varepsilon/$ 支配（即存在常数 $C>0$，使得 $/\pi\backslash \leq C\backslash\varepsilon/$）。

在算子空间情形下，min 族中的元素不可能支配 proj 族中的元素。事实上，由于 Haagerup 张量范数 h 既是完全内射的，也是完全投射的，因此我们有

$$\backslash\min/ \leq h \leq /\operatorname{proj}\backslash.$$

h缺乏对称性，因此它不可能等价于任何对称张量范数（例如 $\backslash$ 最小张量范数 / 或 $/$ 投影张量范数 $\backslash$）。为验证这一点，回顾一下 [ER00，命题 9.3：4] 对于任意希尔伯特空间 H，若我们将其关联的列空间记为 H_c，则有 $H_c \otimes_h H_c' = \mathcal{K}(H)$，而 $H_c' \otimes_h H_c = \mathcal{B}(H)$。

借助前述引理，我们得到，min 族中的任意一个元素都小于 proj 族中的任意一个元素（注意二者不等价）。

(b) 作为 (a) 中所述不等式的推论，可以得到范数$(/\pi\backslash)/$ 与 $\backslash\varepsilon/$ 等价；$/(\backslash\varepsilon/)\backslash$与 $/\pi\backslash$也同样如此。

由于前一项中解释的论证，显然这些等价关系的算子空间版本并不成立。这一事实无疑会影响 $natural$ 算子空间张量范数的数量。

(c) 在巴拿赫空间领域，前一项中所述的等价关系显然意味着：如果 α 是内射张量范数，那么 $\backslash\alpha/$ 与 $\backslash\varepsilon/$ 等价；如果 α 是投射张量范数，那么 $/\alpha\backslash$ 与 $/\pi\backslash$ 等价。

在算子空间领域，这些等价关系显然并不成立。根据我们在 (a) 中的说明，很明显，$\backslash$ 最小张量范数 $/ \leq h \leq \backslash(/$ 投影张量范数 $\backslash)/$ 是三个互不等价的完全内射范数的完全投射包，而$/(\backslash$ 最小张量范数 $/)\backslash \leq h \leq /$ 投影张量范数 $\backslash$ 则是三个互不等价的完全投射范数的完全内射包。

注 12.9. 开放问题。

在巴拿赫空间情形中，格罗滕迪克不等式对自然张量范数刻画的影响至关重要。我们在上一条注释中指出，若干关系在算子空间框架下已不再成立。

还有一个巴拿赫空间张量范数之间的等价关系（同样由格罗滕迪克不等式推出），对于由此得到的 14 个自然张量范数至关重要，即：

$$\text{The norms } /((/\pi\backslash)/) \text{ and } (/\pi\backslash)/ \text{ are equivalent.}$$

回顾证明思路时，我们用符号 $\sim$ 表示等价的张量范数，用 w_2 表示希尔伯特型张量范数，用 d_2 表示 Chevet-Saphar 张量范数。由格罗滕迪克不等式，$/\pi\backslash \sim w_2$ 且 $w_2/ \sim d_2$。由于 d_2 是完全左内射的，所需的等价关系得证。

在算子空间情形中，我们无法沿用同样的思路，但仍然可以提出以下问题：

$$\text{Are the norms } /((/\,\mathrm{proj}\,\backslash)/) \text{ and } (/\,\mathrm{proj}\,\backslash)/ \text{ equivalent?}$$

显然，$/((/\,\text{投影张量范数}\,\backslash)/) \le (/\,\text{投影张量范数}\,\backslash)/$，因此这个问题也可以等价地表述如下：

$$\text{Is the norm } (/\,\mathrm{proj}\,\backslash)/ \text{ completely left-injective?}$$

如果这个开放问题的答案是肯定的，那么 proj 族中的成员之间就会出现大量重合。事实上，肯定的答案将使下面这些由引理 12.6 推出的不等式成为等式：

(a) $/(\mathrm{proj}\,\backslash/) \le (/\,\mathrm{proj}\,\backslash)/$ and $(\backslash/\,\mathrm{proj})\backslash \le \backslash(/\,\mathrm{proj}\,\backslash)$.
(b) $\backslash/(\mathrm{proj}\,\backslash/) \le \backslash(/\,\mathrm{proj}\,\backslash)/$ and $(\backslash/\,\mathrm{proj})\backslash/ \le \backslash(/\,\mathrm{proj}\,\backslash)/$.

此外，如果 (a) 中存在恒等式，那么以下不等式也会成为恒等式：

(c) $/\,\mathrm{proj}\,\backslash \le (/\,\mathrm{proj}\,\backslash)/\backslash$ and $/\,\mathrm{proj}\,\backslash \le /\backslash(/\,\mathrm{proj}\,\backslash)$.

12.1. proj 族。尽管我们无法完整描述 proj 族，但本小节将概述我们目前所了解的情况。

proj 族当然始于 proj 范数。接着，我们根据为得到这些范数而对 proj 应用了多少次（完全左内射、完全右内射或投射包）过程，将这些范数逐一列出。列表 *up to four procedures* 如下：

(0) 投影张量范数。(1) $/\,$投影张量范数 $\bullet$ 投影张量范数$\,\backslash$。(2) $/\,$投影张量范数 $\backslash \bullet \backslash/$ 投影张量范数 $\bullet$ 投影张量范数$\,\backslash/$。(3) $\backslash(/\,$投影张量范数 $\backslash) \bullet (/\,$投影张量范数$\,\backslash)/ \bullet (\backslash/\,$投影张量范数$)\backslash \bullet /($投影张量范数 $\backslash/)$。(4) $\backslash(/\,$投影张量范数 $\backslash)/ \bullet /\backslash(/\,$投影张量范数$\,\backslash) \bullet (/\,$投影张量范数 $\backslash)/\backslash \bullet (\backslash/\,$投影张量范数$)\backslash/ \bullet \backslash/($投影张量范数 $\backslash/)$。

由 proj 经至多四次操作得到、但未出现在前面列表中的范数，与列表中出现的某个范数相同。事实上，由

引理 12.2、引理 12.6、引理 12.7 以及完全内射包和完全投射包的定义，我们有：

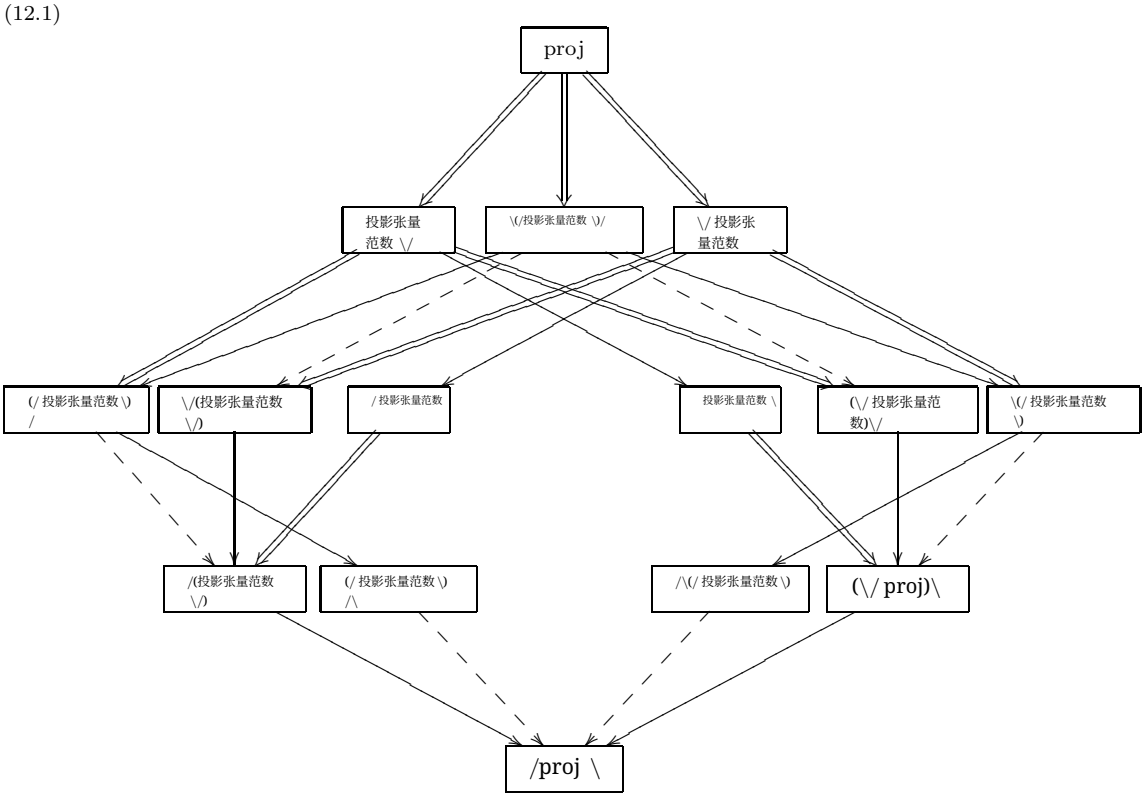
(2) (/ 投影张量范数)/ = \(投影张量范数 \) = 投影张量范数 . (3) (\/ 投影张量范数) / = \(投影张量范数 \/)) = 投影张量范数. (4) /((/ 投影张量范数 \)/) = /(投影张量范数 \/) • (\(/ 投影张量范数 \))\ = (\/ 投影张量范数)\. (4) (/(投影张量范数 \/)) / = (/ 投影张量范数 \)/ • \((\/ 投影张量范数)\) = \(/ 投影张量范数 \). (4) /(\/ 投影张量范数)\ = /(投影张量范数 \/)\ = / 投影张量范数 \.

因此，proj 族 $up\ to\ four\ procedures$ 共有 15 个成员。我们不知道它们是否全都互不等价。事实上，如上文所述，如果开放问题的答案是肯定的，我们就可以推出 proj 族成员之间的六个恒等式，从而将列表中的成员数从 15 个减少到 9 个。

此外，如果开放问题的答案是肯定的，还意味着 proj 族不存在更多成员：第五种步骤不会产生新的元素。实际上，在这种情况下，第四种步骤只生成一个元素：\(/ proj \)/ = (\/ proj)\/ = \/(proj \/)。而且很容易看出，在开放问题答案为肯定这一当前假设下，对该元素取完全左内射包或完全右内射包，会得到范数 / proj \。

现在，我们列出清单中 15 种范数之间成立的支配关系，之后将给出示例，说明其中许多范数并不等价。下一个交换图中的每个箭头 $\alpha \to \beta$ 都表示 $\beta \leq \alpha$。双箭头表示我们将在下文证明支配关系是严格的情形。若开放问题 12.9 有肯定答案，则由点线箭头连接的张量范数等价。我们不知道由普通箭头连接的支配关系是否实际上是严格的。

(12.1)



上一个交换图中所述的支配关系很容易从完全内射包和完全投射包的定义，以及引理 12.2、12.6 和 12.7 中已经证明的结果推导出来。

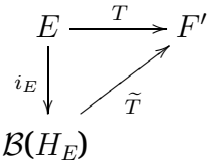
以下两条注记探讨了具有特定张量范数的张量积对偶中的元素表示。它们有助于说明，先前的一些支配关系无法转化为等价关系。

注 12.10. 若 $T \in \mathrm{CB}(E, F')$ 属于 $(E \otimes_{/\text{投影张量范数}\backslash} F)'$，且 $i_E\colon E \to \mathcal{B}(H_E)$ 和 $i_F\colon F \to \mathcal{B}(H_F)$ 是完全等距映射，则存在一个完全有界~映射 $T\colon \mathcal{B}(H_E) \to \mathcal{B}(H_F)'$，使得下列交换图成立：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F' \\ {\scriptstyle i_E}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i'_F} \\ \mathcal{B}(H_E) & \xrightarrow[\widetilde{T}]{} & \mathcal{B}(H_F)' \end{array}$$

~根据 [Pis12 定理 18.1]，我们知道 T（因此 T）是弱紧的。注 12.11. 若 F' 是完全内射算子空间，则 $E \otimes_{/\,\mathrm{proj}} F = E \otimes_{\mathrm{proj}} F$。

事实上，对于 $T \in \mathrm{CB}(E, F')$，我们有 $T \in (E \otimes_{/\,\mathrm{proj}} F)'$，当且仅当对任意完全等距同构 $i_E : E \to \mathcal{B}(H_E)$，都存在完全有界映射 $\widetilde{T} : \mathcal{B}(H_E) \to F'$，使得下图交换：



F'的内射性意味着，对于任意映射 $T \in \mathrm{CB}(E, F')$，这一点都成立（且范数保持不变）。

当然，对于完全右内射包也有类似的结果：如果 E' 是完全内射算子空间，那么 $E \otimes_{\mathrm{proj}\,\backslash} F = E \otimes_{\mathrm{proj}} F$。

例 12.12。以下范数对并不等价：proj 与 $\backslash/$proj；proj 与 proj $\backslash/$；proj $\backslash$ 与 ($\backslash/$ proj)$\backslash$；$/$ proj 与 $/$(proj $\backslash/$)。

我们将对第一对和第三对范数进行论证。其他两对可通过转置得到。

考虑完全投射空间 $Z = \ell_1(\{S_1^n : n \in \mathbb{N}\})$，并回顾其对偶 $Z' = \ell_\infty(\{M_n : n \in \mathbb{N}\})$ 是一个内射空间。于是我们有以下恒等式：

$$Z \otimes_{\mathrm{proj}} Z' = Z \otimes_{\mathrm{proj}\,\backslash} Z' \quad \text{and} \quad Z \otimes_{(\backslash/\,\mathrm{proj})\backslash} Z' = Z \otimes_{\backslash/\,\mathrm{proj}} Z' = Z \otimes_{/\,\mathrm{proj}} Z' = Z \otimes_{/\,\mathrm{proj}\,\backslash} Z'.$$

因此，只要证明 $Z \otimes_{\mathrm{proj}} Z' \neq Z \otimes_{/\,\mathrm{proj}\,\backslash} Z'$，所需结果便得证。

设 $\kappa_Z \in \mathrm{CB}(Z, Z'')$ 是典范嵌入。于是，$\kappa_Z \in (Z \otimes_{\mathrm{proj}} Z')'$。现在，注 12.10 指出，若 $\kappa_Z \in (Z \otimes_{/\,\text{投影张量范数}\,\backslash} Z')'$，那么 κ_Z 就是弱紧的。由于 Z 不是自反的，这不可能，因此我们推得

$$\kappa_Z \in (Z \otimes_{\mathrm{proj}} Z')' \setminus (Z \otimes_{/\,\mathrm{proj}\,\backslash} Z')'$$

从而 $Z \otimes_{\mathrm{proj}} Z' \neq Z \otimes_{/\,\text{投影张量范数}\,\backslash} Z'$。

例 12.13。以下范数对并不等价：$\backslash/$投影张量范数和$\backslash$(/ 投影张量范数 $\backslash$)；投影张量范数 $\backslash/$ 和 (/ 投影张量范数 $\backslash$)/。

我们再次考虑完全投射空间 $Z = \ell_1(\{S_1^n : n \in \mathbb{N}\})$，并设 $i_Z : Z \hookrightarrow \mathcal{B}(H)$ 是一个完全等距映射，其中希尔伯特空间 H 适当选取。回顾一下，$S_1(H)$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的算子空间预对偶，而后者是完全内射空间。根据注 12.11，我们有

$$Z \otimes_{\mathrm{proj}} S_1(H) = Z \otimes_{/\,\mathrm{proj}} S_1(H) = Z \otimes_{\backslash/\,\mathrm{proj}} S_1(H) \quad \text{and}$$
$$Z \otimes_{/\,\mathrm{proj}\,\backslash} S_1(H) = Z \otimes_{\backslash(/\,\mathrm{proj}\,\backslash)} S_1(H).$$

显然，$i_Z \in (Z \otimes_{\mathrm{proj}} S_1(H))'$但它不可能属于 $(Z \otimes_{/\,\text{投影张量范数}\,\backslash} S_1(H))'$，因为它不是弱紧的（因为它是从一个非自反空间到自身的等距同构）。

例 12.14。以下范数对并不等价：投影张量范数和 \(/ 投影张量范数 \)/；\/ 投影张量范数和 \/(投影张量范数 \/)；投影张量范数 \/ 和 (\/ 投影张量范数)\/。

我们考虑赋予极大算子空间结构的巴拿赫空间 $\ell_1(\mathbb{Z})$。这是一个完全投射空间（它是投射空间 $\mathbb{C}$ 的 ℓ_1-和），因此其对偶是完全内射的 [Pis03, Cor. 24.6]。于是,

$$\ell_1(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathrm{proj}} \ell_1(\mathbb{Z}) = \ell_1(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathrm{proj}\setminus} \ell_1(\mathbb{Z}) = \ell_1(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathrm{proj}\setminus/} \ell_1(\mathbb{Z}).$$

此外，我们有

$$\ell_1(\mathbb{Z}) \otimes_{\setminus(/\,\mathrm{proj}\,\setminus)/} \ell_1(\mathbb{Z}) = \ell_1(\mathbb{Z}) \otimes_{/\,\mathrm{proj}\,\setminus} \ell_1(\mathbb{Z}).$$

现在我们可以借用巴拿赫空间理论中的一个例子 [Zal05, Ex. 1.1]。设T： $\ell_1(\mathbb{Z}) \to \ell_\infty(\mathbb{Z})$ 定义为

$$T(x) = \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{sgn}(m) x_{m-n} \right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

于是 $T \in (\ell_1(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathrm{proj}} \ell_1(\mathbb{Z}))'$（因为在赋予极大算子空间结构的 $\ell_1(\mathbb{Z})$ 中，投影张量积与巴拿赫 π 张量积一致）。

再次可得 $T \notin (\ell_1(\mathbb{Z}) \otimes_{/\,\text{投影张量范数}\,\setminus} \ell_1(\mathbb{Z}))'$，因为 T不是弱紧的[Zal05, page 50]。

12.2. 最小张量范数族。令人惊讶的是，最小张量范数族并不是投影张量范数族的 *mirror reflection*，而在巴拿赫空间情形中则是如此。当然，原因在于引理 12.2 和 12.4。

由于这一事实，min 族中的成员可能比 proj 族中的更多。因此，为了使集合便于处理，我们选择仅展示 min 族的一个交换图 *up to three procedures*。

列表如下：

(0) 最小张量范数。(1) \ 最小张量范数 • 最小张量范数 /。(2) \ 最小张量范数 / • /\ 最小张量范数 • 最小张量范数 /\ • (\ 最小张量范数)\ • /(最小张量范数 /)。(3) /(\ 最小张量范数 /) • (\ 最小张量范数 /)\ • (/\ 最小张量范数)/ • \(最小张量范数 /\) • \/(最小张量范数 /) • (\ 最小张量范数)\/ •(/\ 最小张量范数)\ • /(最小张量范数 /\)。

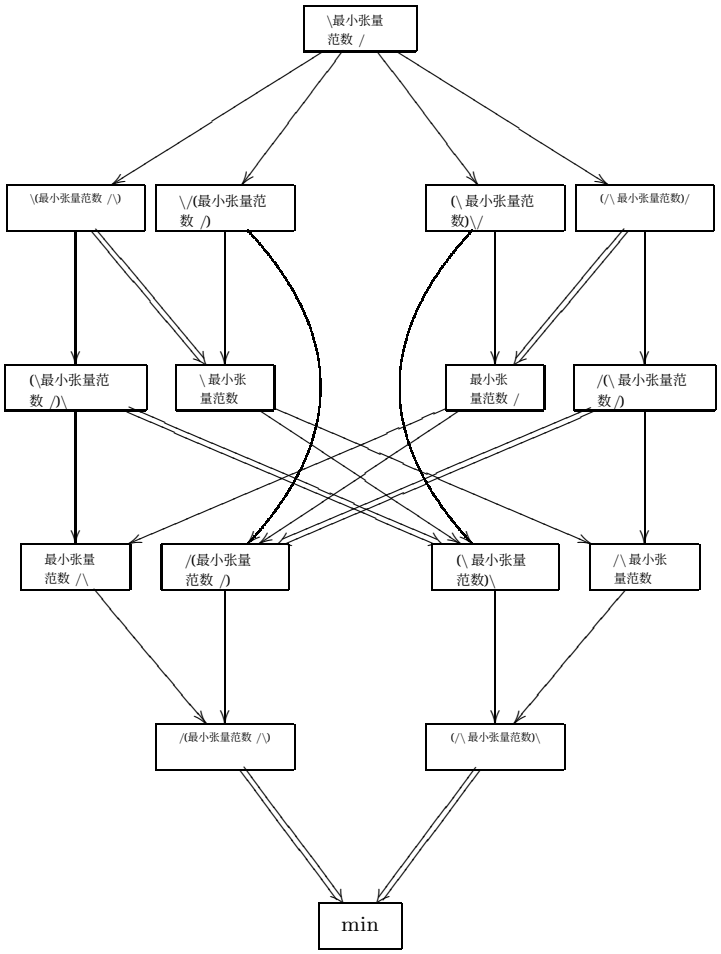
（从 min 经至多三次操作导出的）不在前述列表中的范数，与列表中出现的某个范数相同。事实上，根据引理 12.2 以及完全内射包和完全投射包的定义，我们有：

(3) $(/(\min /))/ = \min /$ • $\setminus((\setminus \min)\setminus) = \setminus \min$.
(3) $(/(\min /))\setminus = /(\min /\setminus)$ • $/((\setminus \min)\setminus) = (/\setminus \min)\setminus$.

因此，min 族的成员 *up to three procedures* 有 16 个。我们不知道它们是否彼此都不等价。与 proj 族的交换图一样,

每个箭头 $\alpha \to \beta$ 都表示 $\beta \le \alpha$；双箭头是我们唯一能证明支配关系严格的情形。

(12.2)



例 12.15。下面的范数对并不等价：$\backslash$ 最小张量范数和 $\backslash$(最小张量范数 /)$\backslash$；($\backslash$ 最小张量范数)$\backslash$ 和 ($\backslash$ 最小张量范数 /)$\backslash$；最小张量范数 / 和 (/$\backslash$ 最小张量范数)/；/(最小张量范数 /) 和 /($\backslash$ 最小张量范数 /)。

照例，我们只讨论前两个非等价关系。后两个可由转置得到。由引理 12.3 可知，如果 $\|id : S_1^n \otimes_{\min} M_n \to S_1^n \otimes_{\min /} M_n\| \le C$，那么 S_1^n 是 C-正合的。由于不存在这样的 C，使得对于每个 n，S_1^n 都是 C-正合的，我们得出 $S_1^n \otimes_{\min} M_n$ 和 $S_1^n \otimes_{\min /} M_n$ 并不一致完全同构。由于 S_1^n 是完全投射的，而 M_n 是完全内射的，我们有$S_1^n \otimes_{\min} M_n = S_1^n \otimes_{\backslash \text{最小张量范数}} M_n = S_1^n \otimes_{(\backslash \text{最小张量范数})\backslash} M_n$ 以及 $S_1^n \otimes_{\min /} M_n = S_1^n \otimes_{\backslash(\min /\backslash)} M_n = S_1^n \otimes_{(\backslash \min /)\backslash} M_n$，由此即可得到结论。

12.3. 双侧自然算子空间张量范数。本节将证明，对 min 或 proj 应用双侧包运算（内射 $/\cdot\backslash$ 或投射 $\backslash\cdot/$ 包）所得的自然算子空间张量范数恰好有六种。这多少有些出人意料：

正如 [Ble92b], 所述，“没有理由认为这一 [过程] 不会产生大量不等价范数”（这是由于算子空间情形下缺乏格罗滕迪克不等式的直接类比）。现在，引理 12.1（a）表明，双侧族中只有 6 个可能的成员，它们之间的支配关系很容易看出：

$$\min \leq \ /(\setminus \min /)\setminus \leq \setminus \min / \leq / \operatorname{proj} \setminus \leq \setminus(/ \operatorname{proj} \setminus)/ \leq \operatorname{proj}$$

此外，在备注 12.8 中，我们注意到 $\setminus$最小张量范数 $/$ 和 $/$投影张量范数 $\setminus$ 并不等价。由例 12.14（另见图示 (12.1)）可知，$\setminus(/$ 投影张量范数 $\setminus)/$ 与投影张量范数并不等价。我们在引理 12.4 中证明，最小张量范数与 (/\最小张量范数)\ 并不等价。由于 (/\ 最小张量范数)\ = /(\ 最小张量范数) \ ≤ /(\ 最小张量范数 /)\，我们得到，最小张量范数与 /(\ 最小张量范数 /)\ 也不可能等价。

要得出共有六种双侧自然范数，我们只需证明以下两对范数不等价： /(\ 最小张量范数 /)\ 与 \ 最小张量范数 /；$\setminus(/$ 投影张量范数 $\setminus)/$ 与 / 投影张量范数 \。在巴拿赫空间情形下，这类结论显而易见，因为投射范数不可能与内射范数等价。在算子空间框架中，这个论证行不通，因此我们需要另作证明。

引理 12.16. 范数 / 投影张量范数 \ 与 \ 最小张量范数 / 在巴拿赫空间层面上分别等价于 $h \cap h^t$ 和 $h + h^t$。

证明。在 [DFU15b] 中，作为 [PS02] 和 [HM08], 研究结果的推论，已证明对于任意算子空间 E 和 F，空间 $E \otimes_{/ \operatorname{proj} \setminus} F$ 和 $E \otimes_{h \cap h^t} F$ 同构。通过追踪证明中的常数可以看出，这些常数是普适的，因此我们得出，在巴拿赫空间层面，$/ \operatorname{proj} \setminus$ 与 $h \cap h^t$ 等价。此外，[PS02, Cor. 0.8 (iii)] 表明，对于任意 C^*- 代数 A 和 B，$A' \otimes_{\min} B'$ 与 $A' \otimes_{h+h^t} B'$ 之间存在一个同构，且常数与所涉及的空间无关。现在，若 E 和 F 是算子空间，则完全投射空间 Z_E 和 Z_F 是 C^*-代数的对偶空间（回忆一下，它们被定义为 S_1^n 空间的 ℓ_1-和，因此是相应的 M_n 空间的 c_0-和的对偶空间 [Pis03, Sec. 2.6]）。因此，我们有 $E \otimes_{\setminus \min /} F$ 和 $E \otimes_{h+h^t} F$ 同构，且常数与 E 和 F 无关。这意味着，在巴拿赫空间层面，算子空间张量范数 $\setminus \min /$ 和 $h + h^t$ 等价。□

注 12.17。仔细考察对偶张量范数的定义可知，如果两个算子空间张量范数在巴拿赫空间层面上等价，那么它们的对偶算子空间张量范数也等价（因为算子空间的对偶上的范数只取决于该算子空间的范数，而不取决于更高矩阵层级上的范数）。因此，回顾 $(h \cap h^t)' = h + h^t$（见命题 5.3），由前述引理可得，(\ 最小张量范数 /)′ 在巴拿赫空间层面上等价于 / 投影张量范数 \。

引理 12.18. 范数 /(\ 最小张量范数 /)\ 和 \ 最小张量范数 / 并不等价。范数 $\setminus(/$ 投影张量范数 $\setminus)/$ 和 / 投影张量范数 \ 并不等价。

证明. 在 [OP99 的注记 13] 中，证明了 $h + h^t$ 不是完全内射。事实上，他们的证明还表明：存在一列完全等距映射对$\sim$ $\sim T_n$：$E_n \to E_n$ 和 $R_n : F_n \to F_n$，使得它们的逆映射

$$T_n \otimes R_n : E_n \otimes_{h+h^t} F_n \to (T_n \otimes R_n)(E_n \otimes F_n) \subset \widetilde{E}_n \otimes_{h+h^t} \widetilde{F}_n$$

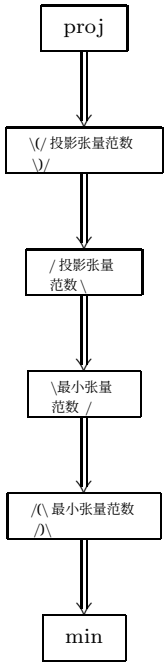
其范数趋于无穷，因此在巴拿赫空间层面，$h + h^t$ 不可能等价于某个完全内射的算子空间张量范数。由引理 12.16可知，$\backslash \min /$也不可能，因此 $\backslash \min /$ 和 $/(\backslash \min /)\backslash$ 不可能等价。

此外，由推论 10.4可知，完全投射张量范数的对偶是完全内射的。因此，若 $h \cap h^t$在巴拿赫空间层面等价于某个完全投射张量范数，根据前面的注释，我们便可得出$(h \cap h^t)' = h + h^t$在巴拿赫空间层面等价于某个完全内射张量范数。前一段已经说明这不成立，因此 $/ \operatorname{proj} \backslash$ 不可能在巴拿赫空间层面等价于某个完全投射张量范数。最后，这意味着 $/ \operatorname{proj} \backslash$ 和 $\backslash(/ \operatorname{proj} \backslash)/$ 并不等价。

□

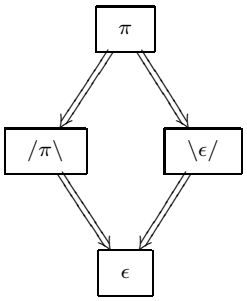
因此，我们可以用以下交换图表示这个双侧族：

(12.3)



这不同于巴拿赫空间情形：通过对 ε 或 π 双侧包进行运算而得到的那些自然范数，恰好有四种。经典情形中的双侧自然范数排列如下：

(12.4)



在交换图 (12.3) 和 (12.4) 中，每个箭头 $\alpha \Rightarrow \beta$ 都表示 $\beta \leq \alpha$，并且这些范数并不等价。范数 $/\pi\backslash$ 和 $\backslash\epsilon/$ 并不等价，且二者之间不存在支配关系。

显然，这些框架之间存在这种差异是意料之中的：在算子空间的背景下，我们没有格罗滕迪克型不等式来像经典的巴拿赫空间背景中那样关联这些范数（例如，$/\pi\backslash$ 和 $/(\backslash\epsilon/)\backslash$ 等价，它们的对偶空间 $\backslash\epsilon/$和 $\backslash(/\pi\backslash)/$也等价）。

注 12.19. 人们可能会认为，交换图（12.3）展示了所有对称自然算子空间张量范数的完整图景。显然，我们只能从最小张量范数和投影张量范数出发，有限次应用双侧包来得到对称算子空间张量范数，但我们并不知道这些是否涵盖了所有对称自然算子空间张量范数。例如，回想一下，(/投影张量范数)/ =\(投影张量范数 \) = 投影张量范数，因此，以非对称方式取包仍然可以得到对称算子空间张量范数。

13. Conclusions and some open questions

本工作的主要目标是为算子空间范畴中的张量积与张量范数理论开启一项研究计划。我们尤其关注这些理论与映射理想理论之间的相互作用。当然，这一框架中的许多定义和结果都很自然，因为它们在巴拿赫空间背景下有对应的概念。但并非所有内容都是如此！正如我们多次指出的那样，这一理论并非只是对经典情形中已知内容的直接翻译，自然也会产生新的、富有挑战性的问题。首先，为了说明一种典型的差异，我们强调局部自反性的作用；众所周知，这一性质在许多地方似乎都至关重要。不过，有时可以避免这一假设：例如，在处理 λ-算子空间张量范数时。这个范畴中出现了一个出乎意料的问题：映射理想的左可达性与相关张量范数之间的关系。二者之间的关系弱于其右侧对应物中的关系，这一点确实令人费解。

我们在这项研究中意识到的最令人惊讶的事实是，min 族无法通过对 proj 族取对偶而得到。当然，这非常违反直觉，

再次揭示了经典理论与非交换理论之间的差异。从某种意义上说，这一切都与可达性在给定算子空间张量范数的内射包与投射包之间的对偶性中发挥重要作用这一事实有关。在巴拿赫空间理论中，并没有这一假设。此外，这两个族完全分离：一个族支配另一个族。这是因为 Haagerup 算子空间张量范数同时具有完全内射性和投射性（这一性质在经典领域中不可能出现）。

总而言之，我们开始从算子空间的视角审视经典理论中的一些相关性质和结果，并发现，要全面发展这一理论，重要的是采用一种不同而新颖的视角，其中应包含新颖的洞见、思想、技术或假设。显然，未来研究仍有许多尚待探索的方向。本工作旨在为一个我们认为规模宏大的研究计划贡献力量。最后，我们想在此明确重提本专著中出现的一些未解决问题。

问题 1：在本专著中，有不少结果表明，对于 λ-算子空间张量范数，某些关于局部自反性的假设并非必要。除了典型的几种（投影张量范数、 h和 h^t）以及第 2.6 节中构造的 $\odot^\theta$ 之外，若能找到更多 λ-算子空间张量范数的例子，将十分有益。

问题 2：我们在第 5 节引入了局部右可达张量范数和局部左可达张量范数的概念，但目前没有任何例子能够说明这些概念比相应的非局部概念更弱。

问题 3：我们在第6节讨论了完全有界逼近性质的一个弱版本，即 W*完全有界逼近性质。我们不知道是否存在不具有完全有界逼近性质却满足 W*完全有界逼近性质的空间。根据命题 6.10，这样的空间不可能是局部自反的。

问题 4：备注 6.9 中提出的 α-W*完全有界逼近性质理论，似乎是一个值得进一步发展的有趣课题。

问题 5：在第 11 节中，若能找到一个局部右可达但不右可达的映射理想的例子，将会很有意义。请注意，我们在例 11.14 中证明， $\mathcal{I}$ 是这个问题左侧版本的一个例子。

问题 6：在命题 11.12 中，我们看到映射理想的右可达性与其关联张量范数的右可达性等价。对于左可达性，结论要弱得多，并且只在一个方向成立。值得进一步探究反方向的结论是否成立：如果映射理想是左可达的，那么其关联张量范数是否也（局部）左可达?

问题 7：关于自然张量范数，我们才刚刚开始对其进行分类，前方还有一段艰难的道路。图 12.1 和 12.2 中的大多数支配关系是否为严格支配关系，仍有待解决。

问题 8：解决开放问题 12.9 将有助于我们了解 proj 族在经过 4 次以上运算后的结构。

问题 9：我们对 min 族的了解非常有限，几乎整个图景仍有待完成。

问题 10：proj 族与 min 族并非彼此的镜像副本，而且要确保某个范数的投射包的对偶是其对偶范数的内射包，还需要附加条件；因此，我们不知道大多数自然范数的对偶空间是什么。本组的主要探究问题是以下恒等式是否成立：$(\setminus \min /)' = / \operatorname{proj} \setminus$（参见例 11.3 之后的注释）。另外，回想注 12.17，$(\setminus \min /)'$和 $/ \operatorname{proj} \setminus$ 在巴拿赫空间层面是等价的。因此，我们预计它们作为算子空间张量范数也等价，甚至相等。

问题 11：既然 min 族显然大于 proj 族，那么应该存在一些属于 min 族、但其对偶空间不属于 proj 族的范数。找出这些范数将很有意思。

问题 12：正如备注 12.19 所述，若能知道所有对称自然张量范数是否都是双侧自然张量范数（即出现在交换图（12.3）中的那些范数），将会很有帮助。

References

[AK21] Janson Antony 和 Ajay Kumar，《C*-代数算子空间张量积中元素的谱》，Positivity 25 (2021)，第 5 期，1973–1987。[AKL19] Janson Antony、Ajay Kumar 和 Preeti Luthra，《算子空间张量积与归纳极限》，J. Math. Anal. Appl. 470 (2019)，第 1 期，235–250。[Ble92a] David P. Blecher，《算子空间的标准对偶》，Pacific J. Math. 153 (1992)，第 1 期，15–30。[Ble92b] ———，《算子空间的张量积 II》，Canad. J. Math. 44 (1992)，第 1 期，75–90。[BLM04] David P. Blecher 和 Christian Le Merdy，《算子代数及其模——算子空间方法》，伦敦数学会专著（新系列），第 30 卷，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，牛津，2004，牛津科学出版物。[BP91] David P. Blecher 和 Vern I. Paulsen，《算子空间的张量积》，J. Funct. Anal. 99 (1991)，第 2 期，262–292。[CD12] Javier Alejandro Ch´avez-Dom´ınguez，《完全 (q,p)-混合映射》，Illinois J. Math. 56 (2012)，第 4 期，1169–1183。[CD16] Javier Alejandro Ch´avez-Dom´ınguez，《算子空间的 Chevet-Saphar 张量范数》，Houston J. Math. 42 (2016)，第 2 期，577–596。[CDDG19] Javier Alejandro Ch´avez-Dom´ınguez 、 Ver´onica Dimant 和 Daniel Galicer，《算子p-紧映射》，J. Funct. Anal. 277 (2019)，第 8 期，2865–2891。[CG12] Daniel Carando 和 Daniel Galicer，《自然对称张量范数》，J. Math. Anal. Appl. 387 (2012)，第 2 期，568–581。[DF93] Andreas Defant 和 Klaus Floret，《张量范数与算子理想》，North-Holland Mathematics Studies，第 176 卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1993。[DFS08] Joe Diestel、Jan H. Fourie 和 Johan Swart，《张量积的度量理论》，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2008，Grothendieck 对´esum´erevisited。[DFU15a] Ver´onica Dimant 和 Maite Fern´andez-Unzueta，《算子空间中张量积的双对偶》，Studia Math. 230 (2015)，第 2 期，167–187。[DFU15b] ———，《算子空间中的双线性理想》，J. Math. Anal. Appl. 429 (2015)，第 1 期，57–80。

[DPnS10] Juan M. Delgado、C´andido Pi˜neiro 和 Enrique Serrano，《其伴随为准核的算子》，Studia Math. 197 (2010)，第 3 期，291–304。[DW14] Andreas Defant 和 Dirk Wiesner，《算子空间理论中的多项式》，J. Funct. Anal. 266 (2014)，第 9 期，5493–5525。[EJR00] Edward G. Effros、Marius Junge 和 Zhong-Jin Ruan，《非交换 L^1-空间中的积分映射与局部自反性原理》，Ann. of Math. (2) 151 (2000)，第 1 期，59–92。[EK87] Edward G. Effros 和 Akitaka Kishimoto，《模映射与 Hochschild-Johnson 上同调》，Indiana Univ. Math. J. 36 (1987)，第 2 期，257–276。[ER90] Edward G. Effros 和 Zhong-Jin Ruan，《算子空间的逼近性质》，Internat. J. Math. 1 (1990)，第 2 期，163–187。[ER94] ———，《算子空间的 Grothendieck-Pietsch 定理与 Dvoretzky-Rogers 定理》，J. Funct. Anal. 122 (1994)，第 2 期，428–450。[ER00] ———，《算子空间》，伦敦数学会专著（新系列），第 23 卷，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000。[ER03] ———，《算子空间张量积与 Hopf 卷积代数》，J. Operator Theory 50 (2003)，第 1 期，131–156。[Gro53] Alexander Grothendieck，《拓扑张量积度量理论概述》，Bol. Soc. Mat. S˜ao Paulo 8 (1953)，1–79。[HM08] Uffe Haagerup 和 Magdalena Musat，《算子C^*-代数上双线性形式的 Effros-Ruan 猜想》，Invent. Math. 174 (2008)，第 1 期，139–163。[JNRX04] Marius Junge、Niels J. Nielsen、Zhong-Jin Ruan 和 Quanhua Xu，《 $\mathcal{COL}_p$ 空间——非交换 L_p 空间的局部结构》，Adv. Math. 187 (2004)，第 2 期，257–319。[JP10] Marius Junge 和 JavierParcet，《算子空间的 Maurey 分解理论》，Math. Ann. 347 (2010)，第 2 期，299–338。[Jun96] Marius Junge，《算子空间的分解理论》，教授资格论文，基尔，1996。[Kir95] Eberhard Kirchberg，《正合 C*-代数、张量积与纯无限代数的分类》，《国际数学家大会论文集》，第 1、2 卷（苏黎世，1994），Birkhäuser，巴塞尔，1995，第 943–954 页。[LP68] Joram Lindenstrauss 和 Aleksander Pe lczy´nski，《 L_p-空间中的绝对可和算子及其应用》，Studia Math. 29 (1968)，275–326。[OP99] Timur Oikhberg 和 Gilles Pisier，《算子空间的“极大”张量积》，Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 42 (1999)，第 2 期，267–284。[Pie67] Albrecht Pietsch，《赋范 p空间中的绝对 ¨可和映射》，Studia Math. 28 (1966/1967)，333–353。[Pie78] ———，《算子理想》，Mathematische Monographien [数学专著],第 16 卷，VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften，柏林，1978。[Pie80] ———，《算子理想》，North-Holland Mathematical Library，第 20 卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1980，作者由德文译出。[Pis83] Gilles Pisier，《Grothendieck 猜想的反例》，Acta Math. 151 (1983)，第 3–4 期，181–208。[Pis86] ———，《线性算子分解与 Banach 空间几何》，数学科学会议委员会区域会议系列，第 60 卷，由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学会发行，罗德岛州普罗维登斯，1986。[Pis95] ———，《正合算子空间》，Ast´erisque (1995)，第 232 期，159–186，算子代数最新进展（奥尔良，1992）。

[Pis98] ———, 非交换向量值 L_p-空间与完全 p-可和映射，Ast´erisque (1998)，第 247 期，vi+131.[Pis03] ———, 算子空间理论导论，伦敦数学会讲义系列，第 294 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2003 年。[Pis12] ———, 格罗滕迪克定理：过去与现在，Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 49 (2012)，第 2 期，237–323。[Pis20] ———, C^*-代数与算子空间的张量积——Connes-Kirchberg 问题，伦敦数学会学生文本系列，第 96 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2020年。[PP69] Arne Persson 和 Albrecht Pietsch, p-核与 p-积分映射，Studia Math. 33 (1969)，19–62。[PS02] Gilles Pisier 和 Dimitri Shlyakhtenko，算子空间的格罗滕迪克定理，Invent. Math. 150 (2002)，第 1 期，185–217。[Re˘ı82] Oleg I. Re˘ınov，序 p 的逼近性质，以及具有 p-核二重伴随的非 p-核算子的存在性，Math. Nachr. 109 (1982)，125–134。[Rya02] Raymond A. Ryan，巴拿赫空间张量积导论，数学 Springer 专著，Springer-Verlag London Ltd.，伦敦，2002。[WBF$^+$] Gerd Wittstock、Benedikt Betz、Hans-J¨org Fischer、Anselm Lambert、Kim Louis、Matthias Neufang 和 Ina Zimmermann，什么是算子空间？，https://www.math.uni-sb.de/ag/wittstock/OperatorSpace.pdf，访问日期：2019-10-19。[Wie09] Dirk Wiesner，算子空间理论中的多项式，博士论文，Carl von Ossietzky Universit¨at Oldenburg，2009。[Yew08] Khye Loong Yew，算子希尔伯特空间 OH 上的完全 p-可和映射，J. Funct. Anal. 255 (2008)，第 6 期，1362–1402。[Zal05] Ignacio Zalduendo，巴拿赫空间上的多项式延拓——综述，Rev. Un. Mat. Argentina 46 (2005)，第 2 期，45–72（2006）。

Department of Mathematics, University of Oklahoma, Norman, OK 73019-3103, USA电子邮箱：jachavezd@ou.eduDepartamento de Matemática y Ciencias, Universidad de San Andrés, Vito Dumas284, (B1644BID) Victoria, Buenos Aires, Argentina and CONICET电子邮箱：vero@udesa.edu.arDepartamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Univer-sidad de Buenos Aires, (1428) Buenos Aires, Argentina and CONICET电子邮箱：dgalicer@dm.uba.ar