arXiv:2302.03718v1 [math.FA] 6 Feb 2023

希尔伯特 C*-模之间的绝对可和态射及模 Pietsch 分解问题

K. MAHESH KRISHNA
博士后研究员
统计与数学部
印度统计研究所班加罗尔中心
卡纳塔克邦 560 059 ，印度
电子邮件：kmaheshak@gmail.com

日期：2023年2月9日

摘要：受 Stern 和 van Suijlekom 关于交换 C*-代数上希尔伯特 C*-模之间希尔伯特–施密特态射的理论启发 *[J. Funct. Anal., 2021]*, ，我们引入交换 C*-代数上希尔伯特 C*-模之间 p-绝对可和态射的概念。我们证明，单调闭交换 C*-代数上希尔伯特 C*-模之间的可伴随态射是 2-绝对可和的，当且仅当它是希尔伯特–施密特态射。我们针对 p-绝对可和态射提出 Pietsch 分解问题的一个版本，并部分解决了该问题。

关键词：绝对可和算子、交换 C*-代数、希尔伯特 C*-模、希尔伯特–施密特算子。

数学主题分类（2020）：47B10、47L20、46L08、46L05、42C15。

1. Introduction

在其《简历》中，A. Grothendieck 研究了巴拿赫空间之间的 1-绝对可和算子和 2-绝对可和算子 [22]（另见 [8]）。1967年，针对每个 $1 \leq p < \infty$，A. Pietsch 引入了 p-绝对可和算子的概念，这一领域于20世纪末形成 [7, 9, 18, 24, 26, 28–30, 38–41, 48, 50–52, 64, 65]。1979年，Tomczak-Jaegermann 通过固定点的数量研究了 p-可和算子 [63]。1970年，Kwapien 定义了 0-可和算子的概念 [36]。2003年，Farmer 和 Johnson 引入了度量空间之间 Lipschitz p-可和算子的概念 [11]（另见 [4–6, 49]）。

定义 1.1. *[1, 50]* 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为巴拿赫空间，$\mathcal{X}^*$ 为 $\mathcal{X}$ 和 $1 \leq p < \infty$的对偶空间。若有一个实常数 $C > 0$满足以下条件：对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有 $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$，有一个有界线性算子 $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 称为 p-绝对可和算子。

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{f \in \mathcal{X}^*, \|f\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} |f(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

在这种情况下，T 的 p-绝对可和范数定义为

$$\pi_p(T) := \inf\{C : C \text{ satisfies Inequality } (1)\}.$$

从 $\mathcal{X}$到 $\mathcal{Y}$的所有 p-绝对可和算子的集合记为 $\Pi_p(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$。

F以下是 p-绝对可和算子理论中最重要的结果。

定理 1.2. *[50, 51]*设 $1 \leq p < \infty$ 和 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是巴拿赫空间。那么 $(\Pi_p(\mathcal{X},\mathcal{Y})\ \pi_p(\cdot))$ 是一个算子理想。

定理 1.3. *[1, 50]* 设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 为希尔伯特空间。那么，有界线性算子 $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ 是 2-绝对可和的，当且仅当它是希尔伯特-施密特算子。此外，$\|T\|_{HS} = \pi_2(T)$。

定理 1.4. *[1, 50]*（Pietsch 分解定理）设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为巴拿赫空间。有界线性算子 $T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是 p-绝对可和的，当且仅当存在一个实常数 $C > 0$ 和定义在 $B_{\mathcal{X}^*}$ 上的正则博雷尔概率测度 $= \{f\colon f \in \mathcal{X}^*,$ 其中 $\|f\| \leq 1\}$ 取弱*拓扑，使得

$$\|Tx\| \leq C \left(\int_{B_{\mathcal{X}^*}} |f(x)|^p \, d\mu_{B_{\mathcal{X}^*}}(f) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \tag{2}$$

此外，$\pi_p(T) = \inf\{C\colon C$ 满足不等式（2）$\}$。

本文定义交换 C*-代数上希尔伯特 C*-模之间的 p-绝对可和态射这一概念（定义 2.1）。我们在定理 2.5 中推导出，单调闭 C*-代数上希尔伯特 C*-模之间的可伴随态射是 2-可和的，当且仅当它是模希尔伯特-施密特的。随后，我们为 p-绝对可和态射提出 Pietsch 分解问题的一个版本，并部分解决了该问题。

2. p-absolutely summing morphisms

我们将定义 1.1 的模版本定义如下。关于希尔伯特 C*-模的理论，请参阅[32, 47, 56]。

定义 2.1. 设 $1 \leq p < \infty$。设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是交换 C*-代数 $\mathcal{A}$ 上的希尔伯特 C*-模。可伴随态射 $T\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 称为模 p-绝对可和的，若存在实常数 $C > 0$ 满足以下条件：对每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有 $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{M}$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \langle Tx_j, Tx_j \rangle^{\frac{p}{2}} \right\|^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x \in \mathcal{M}, \|x\| \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} (\langle x, x_j \rangle \langle x_j, x \rangle)^{\frac{p}{2}} \right\|^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

在此情形下，T 的 p-绝对可和范数定义为

$$\pi_p(T) \coloneqq \inf\{C : C \ \textit{satisfies Inequality (3)}\}.$$

从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的所有 p-绝对可和态射的集合记作 $\Pi_p(\mathcal{M},\mathcal{N})$。

2021年，Stern 和 van Suijlekom 引入了模 Schatten 类态射的概念 [59]。

定义 2.2. *[59]* 设 $1 \leq p < \infty$。设 $\mathcal{A}$ 为一个 C*-代数，$\mathcal{A}$ 为其盖尔范德谱。设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的希尔伯特 C*-模。设 $T\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 为可伴随态射。若函数

$$\operatorname{Tr}|T|^p : \widehat{\mathcal{A}} \ni \chi \mapsto \operatorname{Tr}|\chi_* T|^p \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

属于 $\mathcal{A}$。T 的模 p-薛滕范数定义为

$$\|T\|_p \coloneqq \| \operatorname{Tr}|T|^p \|_{\mathcal{A}}^{\frac{1}{p}}.$$

模 2-Schatten（分别地，模 1-Schatten）类态射称为模希尔伯特-施密特（分别地，模迹类）。我们用 $\|T\|_2$ 表示 $\|T\|_{HS}$。

利用希尔伯特 C*-模的模框架理论（见 [16]），Stern 和 van Suijlekom 得出了以下结果。

定理 2.3. *[59]* 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是定义在 $\mathcal{A}$上的希尔伯特 C*-模。设 $T\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$ 是一个可伴随态射。那么，对于每个 $\mathcal{M}$的模帕塞瓦尔框架 $\{\tau_n\}_n$， T 是模希尔伯特–施密特的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\langle|T|^p\tau_n,\tau_n\rangle$ 在 $\mathcal{A}$ 中按范数收敛，并且

$$\operatorname{Tr}|T|^p=\sum_{n=1}^{\infty}\langle|T|^p\tau_n,\tau_n\rangle.$$

现在，我们引入以下概念，进而推出定理 1.3 的模版本。

定义 2.4. *[62]* 若 C*-代数 $\mathcal{A}$ 中的每个有界递增网在 $\mathcal{A}$ 中都有最小上界，且该最小上界属于 $\mathcal{A}$，则称 $\mathcal{A}$ 为单调闭的。

定理 2.5. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是定义在交换 C*-代数 $\mathcal{A}$上的希尔伯特 C*-模。假设 $\mathcal{A}$ 是单调闭的。设 $T\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$是一个可伴随态射。那么， $T\in\Pi_2(\mathcal{M},\mathcal{N})$成立当且仅当 T是模希尔伯特–施密特的。此外，$\|T\|_{HS}=\pi_2(T)$。

证明。($\Rightarrow$) 令 $T\in\Pi_2(\mathcal{M},\mathcal{N})$。设 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{M}$ 的模帕塞瓦尔框架。则

$$\langle x,x\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,\tau_n\rangle\langle\tau_n,x\rangle,\quad\forall x\in\mathcal{M},\tag{4}$$

其中级数在 $\mathcal{A}$ 的范数下收敛。为证明 T 是模希尔伯特–施密特，利用定理 2.3，只需证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\langle T\tau_n,T\tau_n\rangle$ 在 $\mathcal{A}$ 中按范数收敛。注意，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\langle T\tau_n,T\tau_n\rangle$ 单调递增。由于 C*-代数是单调闭的，只需证明序列 $\{\sum_{j=1}^{n}\langle T\tau_j,T\tau_j\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ 有界即可。令 $n\in\mathbb{N}$。由于 T 是 2-可和的，利用公式 (4)，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle T\tau_j,T\tau_j\rangle\right\|&\le\pi_2(T)^2\sup_{x\in\mathcal{M},\|x\|\le1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle x,\tau_j\rangle\langle\tau_j,x\rangle\right\|\le\pi_2(T)^2\sup_{x\in\mathcal{M},\|x\|\le1}\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,\tau_j\rangle\langle\tau_j,x\rangle\right\|\\&=\pi_2(T)^2\sup_{x\in\mathcal{M},\|x\|\le1}\|x\|^2=\pi_2(T)^2.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) 令 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x_1,\dots,x_n\in\mathcal{M}$。设 $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{M}$ 的正交归一基。定义

$$S:\mathcal{M}\ni x\mapsto\sum_{j=1}^{n}\langle x,\omega_j\rangle x_j\in\mathcal{M}.$$

Then

$$\begin{aligned}\|S\|^2=\|S^*\|^2&=\sup_{x\in\mathcal{M},\|x\|\le1}\|S^*x\|^2=\sup_{x\in\mathcal{M},\|x\|\le1}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\langle S^*x,\omega_n\rangle\omega_n\right\|^2=\sup_{x\in\mathcal{M},\|x\|\le1}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,S\omega_n\rangle\omega_n\right\|^2\\&=\sup_{x\in\mathcal{M},\|x\|\le1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle x,x_j\rangle\omega_j\right\|^2=\sup_{x\in\mathcal{M},\|x\|\le1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x\rangle\right\|.\end{aligned}$$

因此

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle Tx_j,Tx_j\rangle\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle TS\omega_j,TS\omega_j\rangle\right\|=\|TS\|_{\mathrm{HS}}^2\le\|T\|_{\mathrm{HS}}^2\|S\|=\|T\|_{\mathrm{HS}}^2\sup_{x\in\mathcal{M},\|x\|\le1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x\rangle\right\|.$$

□

注意，在“若”部分中我们并未用到 C*-代数的单调闭性。鉴于定理 1.4，我们提出以下问题。

问题 2.6. 是否存在模 Pietsch 因子分解定理?

我们在以下定理中部分解决问题（2.6）。以下定理中的积分取 Kasparov 意义 [33]。

定理 2.7. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是交换 C*-代数 $\mathcal{A}$上的希尔伯特 C*-模。设 $T\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$是一个可伴随态射。假设存在一个李群 $G\subseteq B_{\mathcal{M}}:=\{x:\ x\in\mathcal{M},\|x\|\leq 1\}$，满足以下条件。

(i) $\mu_G(G)=1$。(ii) 对每个 $x\in\mathcal{M}$，映射 $G\ni y\mapsto\langle x.y\rangle\langle y, x\rangle$ 连续。(iii) 存在一个实数 $C>0$，使得

$$\langle Tx,Tx\rangle^{\frac{p}{2}}\leq C^p\int_G(\langle x.y\rangle\langle y,x\rangle)^{\frac{p}{2}}\,d\mu_G(y),\quad \forall x\in\mathcal{M}.$$

那么，T是模 p-绝对可和的，且 $\pi_p(T)=C$。

证明。设 $n\in\mathbb{N}$和 $x_1,\ldots,x_n\in\mathcal{M}$。那么

$$\left\|\sum_{j=1}^n\langle Tx_j,Tx_j\rangle^{\frac{p}{2}}\right\|\leq C^p\left\|\sum_{j=1}^n\int_G(\langle x_j,y\rangle\langle y,x_j\rangle)^{\frac{p}{2}}\,d\mu_G(y)\right\|=C^p\left\|\int_G\sum_{j=1}^n(\langle x_j,y\rangle\langle y,x_j\rangle)^{\frac{p}{2}}\,d\mu_G(y)\right\|$$

$$\leq C^p\int_G\left\|\sum_{j=1}^n(\langle x_j,y\rangle\langle y,x_j\rangle)^{\frac{p}{2}}\right\|\,d\mu_G(y)\leq C^p\int_G\sup_{y\in\mathcal{M},\|y\|\leq 1}\left\|\sum_{j=1}^n(\langle x_j,y\rangle\langle y,x_j\rangle)^{\frac{p}{2}}\right\|\,d\mu_G(y)$$

$$=C^p\sup_{y\in\mathcal{M},\|y\|\leq 1}\left\|\sum_{j=1}^n(\langle x_j,y\rangle\langle y,x_j\rangle)^{\frac{p}{2}}\right\|\mu_G(G)=C^p\sup_{y\in\mathcal{M},\|y\|\leq 1}\left\|\sum_{j=1}^n(\langle x_j,y\rangle\langle y,x_j\rangle)^{\frac{p}{2}}\right\|.$$

□

3. Appendix

在本附录中，我们根据巴拿赫空间中的相关结果，提出一些关于 C*代数上巴拿赫模的问题。这些结果对泛函分析的现代发展产生了重要影响。第一类问题源自德沃雷茨基定理 [12–15, 20, 21,42–46, 53, 54, 58, 60]。设 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$是有限维 Banach 空间，且 $\dim(\mathcal{X})=\dim(\mathcal{Y})$。请记住，$\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 之间的 Banach-Mazur 距离定义为

$$d_{BM}(\mathcal{X},\mathcal{Y}):=\inf\{\|T\|\|T^{-1}\|:T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}\text{ is invertible linear operator}\}.$$

对于 $n\in\mathbb{N}$，令 $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为标准欧几里得 Hilbert 空间。

定理 3.1。 *[1, 27]* (John 定理) 如果 $\mathcal{X}$ 是任意一个 n维实 Banach 空间，那么

$$d_{BM}(\mathcal{Y},(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle))\leq\sqrt{n}.$$

定理 3.2。*[1, 10]* （德沃雷茨基定理）存在一个普适常数 $C>0$，满足以下性质：若 $\mathcal{X}$ 是任意一个 n维实巴拿赫空间，且 $0<\varepsilon<\frac{1}{3}$，则

对于每个自然数

$$k \leq C \log n \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|},$$

存在一个 k 维巴拿赫子空间 $\mathcal{Y}$，它是 $\mathcal{X}$ 的子空间，使得

$$d_{BM}(\mathcal{Y}, (\mathbb{R}^k, \langle \cdot, \cdot \rangle)) < 1 + \varepsilon.$$

设 $\mathcal{A}$ 是具有不变基数性质的含幺 C*-代数（关于此类 C*-代数的研究，参见 [19] ），且 $\mathcal{E}$、 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的有限秩巴拿赫模，并满足 rank($\mathcal{E}$) = rank($\mathcal{F}$)。$\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{F}$ 之间的模 Banach-Mazur 距离定义为

$$d_{MBM}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \coloneqq \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| : T : \mathcal{E} \to \mathcal{F} \text{ is invertible module homomorphism}\}.$$

给定含幺 C*-代数 $\mathcal{A}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，记 $\mathcal{A}^n$ 为 $\mathcal{A}$ 上的标准（左）模。我们在 $\mathcal{A}^n$ 上赋予 C*值内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A}^n \times \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$，其定义为

$$\langle (a_j)_{j=1}^n, (b_j)_{j=1}^n \rangle \coloneqq \sum_{j=1}^n a_j b_j^*, \quad \forall (a_j)_{j=1}^n, (b_j)_{j=1}^n \in \mathcal{A}^n.$$

因此， $\mathcal{A}^n$ 上的范数由下式给出

$$\|(a_j)_{j=1}^n\| \coloneqq \left\| \sum_{j=1}^n a_j a_j^* \right\|^{\frac{1}{2}}, \quad \forall (a_j)_{j=1}^n \in \mathcal{A}^n.$$

众所周知 知 $\mathcal{A}^n$ 是希尔伯特 C*-模。我们将这个希尔伯特 C*-模记作 $(\mathcal{A}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$。

问题 3.3。（模化 Dvoretzky 问题）设 $\mathcal{A}$ 为所有具有不变基数性质的含幺 C*-代数构成的集合。满足以下性质的最佳函数 Ψ：$\mathcal{A} \times \left(0, \frac{1}{3}\right) \times \mathbb{N} \to (0, \infty)$ 是什么：若 $\mathcal{E}$ 是一个在具有不变基数性质的含幺 C*- 代数 $\mathcal{A}$ 上的任意 n- 秩巴拿赫模，且 $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$，那么对于每个自然数

$$k \leq \Psi(\mathcal{A}, \varepsilon, n),$$

存在 k-秩巴拿赫子模 $\mathcal{F}$，它是 $\mathcal{E}$ 的子模，并且

$$d_{MBM}(\mathcal{F}, (\mathcal{A}^k, \langle \cdot, \cdot \rangle)) < 1 + \varepsilon.$$

问题 3.3 的一个特例是下面的猜想。

猜想 3.4。（模化 Dvoretzky 猜想）设 $\mathcal{A}$ 是一个具有不变基数性质的含幺 C*-代数。存在一个普适常数 $C > 0$ （可能依赖于 $\mathcal{A}$），满足以下性质：若 $\mathcal{E}$ 是任意 n-秩巴拿赫模，且 $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$，那么对于每个自然数

$$k \leq C \log n \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|},$$

存在一个 k 阶的巴拿赫子模 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{E}$

$$d_{MBM}(\mathcal{F}, (\mathcal{A}^k, \langle \cdot, \cdot \rangle)) < 1 + \varepsilon.$$

我们的第二类问题源自巴拿赫空间的型与余型理论 [1, 9, 28, 29, 37–39, 61]。设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，$n \in \mathbb{N}$。回顾一下，对于任意 n 个点 x_1、.....、$x_n \in \mathcal{H}$，我们有

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{-1,1\}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2. \tag{5}$$

It 正是等式（5）启发了巴拿赫空间中型与余型的定义。

定义 3.5. *[1]* 设 $1 \leq p \leq 2$。若存在 $T_p(\mathcal{X}) > 0$ 使得，巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 称为具有（拉德马赫）型 p

$$\left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{-1,1\}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq T_p(\mathcal{X}) \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

定义 3.6. *[1]* 设 $2 \leq q < \infty$。若存在 $C_q(\mathcal{X}) > 0$ 使得，巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 称为具有（拉德马赫）余型 q

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q(\mathcal{X}) \left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{-1,1\}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

设 $\mathcal{E}$ 是定义在含幺 C*-代数 $\mathcal{A}$ 上的（左）希尔伯特 C*-模，$n \in \mathbb{N}$。可见，对于任意 n 个点x_1，.....，$x_n \in \mathcal{E}$，有

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{-1,1\}} \left\langle \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j, \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, x_j \rangle. \tag{6}$$

问题 3.7.（模型与余型问题）对于 C*-代数上的巴拿赫模，是否存在一种定义型（称为模型）和余型（称为模余型）的方法，使其在希尔伯特 C*-模的情形下化为等式（6）？

问题 3.8. 是否存在适用于 C*代数上的巴拿赫模的型和余型概念，使得卡普兰定理成立？换言之，以下陈述是否成立?

(i) 对于单位 C*-代数 $\mathcal{A}$ 上的巴拿赫模 $\mathcal{M}$，它具有模型 2 和模余型 2，当且仅当 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{A}$ 上的希尔伯特 C*-模同构。(ii) 如果 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 分别是单位 C*-代数 $\mathcal{A}$ 上具有模型 2 和模余型 2 的巴拿赫模，那么有界模态射 $T \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 可经由 $\mathcal{A}$ 上的希尔伯特 C*-模分解。

问题 3.9.（模化辛钦–卡哈内不等式问题）是否存在适用于 C*代数上的巴拿赫模的辛钦–卡哈内不等式，并且对于希尔伯特 C*-模，该不等式可化为等式（6）？

我们的第三类问题源于格罗滕迪克不等式 [1–3, 8, 17, 22, 23, 25, 31, 55, 57]。

定理 3.10。*[1, 3, 8, 17, 22, 57]*（格罗滕迪克不等式）存在一个普适常数K_G，满足以下性质：对于任意希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 以及任意 m、$n \in \mathbb{N}$，如果一个标量矩阵

$[a_{j,k}]_{1\leq j\leq m,\ 1\leq k\leq n}$ 满足

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}s_jt_k\right|\leq 1,\quad \forall s_j,t_k\in\mathbb{K},|s_j|\leq 1,|t_k|\leq 1,$$

then

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}\langle u_j,v_k\rangle\right|\leq K_G,\quad \forall u_j,v_k\in\mathcal{H},\|u_j\|\leq 1,\|v_k\|\leq 1.$$

问题 3.11。（模 Grothendieck 不等式问题 - 1）设 $\mathcal{A}$ 为所有含幺 C*-代数的集合。设 $\mathcal{E}$ 为含幺 C*-代数 $\mathcal{A}$ 上的希尔伯特 C*-模。设 $\mathcal{A}^+$ 为 $\mathcal{A}$ 中所有正元素的集合。满足以下性质的最佳函数 $\Psi:\mathcal{A}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathcal{A}^+$ 是什么：若 $[a_{j,k}]_{1\leq j\leq m,\ 1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathcal{A})$ 满足

$$\left\langle\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}s_jt_k,\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}a_{p,q}s_pt_q\right\rangle\leq 1,\quad \forall s_j,t_k\in\mathcal{A},$$
$$s_js_j^*=s_j^*s_j=1,\forall 1\leq j\leq m,t_kt_k^*=t_k^*t_k=1,\forall 1\leq k\leq n,$$

then

$$\left\langle\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}\langle u_j,v_k\rangle,\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}a_{p,q}\langle u_p,v_q\rangle\right\rangle\leq\Psi(\mathcal{A},m,n),\quad \forall u_j,v_k\in\mathcal{E},$$
$$\langle u_j,u_j\rangle=1,\forall 1\leq j\leq m,\langle v_k,v_k\rangle=1,\forall 1\leq k\leq n.$$

特别是，Ψ 是否取决于 m 和 n?

问题 3.12。（模 Grothendieck 不等式问题 - 2）设 $\mathcal{A}$ 为所有含幺 C*-代数的集合。设 $\mathcal{E}$ 为含幺 C*-代数 $\mathcal{A}$ 上的希尔伯特 C*-模。设 $\mathcal{A}^+$ 为 $\mathcal{A}$ 中所有正元素的集合。满足以下性质的最佳函数 $\Psi:\mathcal{A}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathcal{A}^+$ 是什么：若 $[a_{j,k}]_{1\leq j\leq m,\ 1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathcal{A})$ 满足

$$\left\langle\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}s_jt_k,\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}a_{p,q}s_pt_q\right\rangle\leq 1,\quad \forall s_j,t_k\in\mathcal{A},\|s_j\|\leq 1,\forall 1\leq j\leq m,\|t_k\|\leq 1,\forall 1\leq k\leq n,$$

then

$$\left\langle\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}\langle u_j,v_k\rangle,\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}a_{p,q}\langle u_p,v_q\rangle\right\rangle\leq\Psi(\mathcal{A},m,n),\quad \forall u_j,v_k\in\mathcal{E},$$
$$\|u_j\|\leq 1,\forall 1\leq j\leq m,\|v_k\|\leq 1,\forall 1\leq k\leq n.$$

特别是，Ψ 是否取决于 m 和 n?

我们坚信，Ψ 取决于 $\mathcal{A}$。

注 3.13。模 Bourgain-Tzafriri 限制可逆性猜想和模 Johnson-Lindenstrauss 扁平化猜想已在 *[34, 35]* 中提出。

References

[1] Fernando Albiac 和 Nigel J. Kalton。 *Topics in Banach space theory*， *Graduate Texts in Mathematics*第 233 卷。 Springer， [Cham], 2016。[2] Ron Blei。重新探讨 Grothendieck 不等式。 *Mem. Amer. Math. Soc.*， 232(1093):vi+90, 2014。

[3] Ron C. Blei。Grothendieck 不等式的一个初等证明。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，100(1):58–60，1987。[4] Geraldo Botelho、Mariana Maia、Daniel Pellegrino 和 Joedson Santos。利普希茨可和算子的统一分解定理。 *Q. J. Math.*，70(4):1521–1533，2019。[5] Geraldo Botelho、Daniel Pellegrino 和 Pilar Rueda。统一的 Pietsch 支配定理。 *J. Math. Anal. Appl.*，365(1):269–276，2010。[6] Dongyang Chen 和 Bentuo Zheng。关于利普希茨 p-可和算子的几点说明。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，139(8):2891– 2898，2011。[7] Andreas Defant 和 Klaus Floret。 *Tensor norms and operator ideals*， *North-Holland MathematicsStudies*第 176 卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1993。[8] Joe Diestel、Jan H. Fourie 和 Johan Swart。 *The metric theory of tensor products: Grothendieck's resume revisited*。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008。[9] Joe Diestel、Hans Jarchow 和 Andrew Tonge。 *Absolutely summing operators*， *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*第 43 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995。[10]Aryeh Dvoretzky。关于凸体和巴拿赫空间的一些结果。载于 *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces(Jerusalem, 1960)*，第 123–160 页。耶路撒冷学术出版社，耶路撒冷；培格曼，牛津，1961。[11] Jeffrey D. Farmer 和 William B. Johnson。利普希茨 p-可和算子。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，137(9):2989–2995，2009。[12] T. Figiel。关于凸体近似球形截面的 Dvoretsky 定理的几点说明。 *Colloq. Math.*，24:241– 252，1971/72。[13] T. Figiel。Dvoretsky 定理的一个简短证明。载于 *Séminaire Maurey-Schwartz 1974–1975: Espaces L^p， applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach*， *Exp. No. XXIII*，第 6 页（勘误见第 3 页）。1975。[14] T. Figiel。关于凸体近似球形截面的 Dvoretsky 定理的一个简短证明。 *Compositio Math.*，33(3):297–301，1976。[15] T. Figiel、J. Lindenstrauss 和 V. D. Milman。凸体近似球形截面的维数。 *ActaMath.*，139(1-2):53–94，1977。[16] Michael Frank 和 David R. Larson。希尔伯特 C^*-模与 C^*-代数中的框架。 *J. Operator Theory*，48(2):273– 314，2002。[17] Shmuel Friedland、Lek-Heng Lim 和 Jinjie Zhang。Grothendieck 不等式的一个初等统一证明。*Enseign. Math.*，64(3-4):327–351，2018。[18] D. J. H. Garling。 *Inequalities: a journey into linear analysis*。剑桥大学出版社，剑桥，2007。[19] Philip M. Gipson。 C^*-代数的不变基数。 *Illinois J. Math.*，59(1):85–98，2015。[20] Y. Gordon、O. Guedon 和 M. Meyer。凸体的同构 Dvoretsky 定理。 *Studia Math.*，127(2):191– 200，1998。[21] Yehoram Gordon。高斯过程与凸体的近似球形截面。 *Ann. Probab.*，16(1):180–188，1988。[22] Alexandre Grothendieck。拓扑张量积与核′空间。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，16，1955。[23] Uffe Haagerup。复格罗滕迪克常数的一个新上界。 *Israel J. Math.*，60(2):199–224，1987。[24] Tuomas Hytonen、Jan van Neerven、Mark Veraar 和 Lutz Weis。 *Analysis in Banach spaces. Vol. II: Probabilistic methods and operator theory*， *A Series of Modern Surveys in Mathematics*第 67 卷。Springer，2017。[25] G. J. O. Jameson。Grothendieck 不等式的插值证明。 *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*，28(2):217–223，1985。[26] G. J. O. Jameson。 *Summing and nuclear norms in Banach space theory*， *London Mathematical SocietyStudent Texts*第 8 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1987。[27] Fritz John。以不等式为附加条件的极值问题。载于 *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday*， *January 8*，1948，第 187–204 页。Interscience 出版公司，纽约，纽约州，1948。[28] W. B. Johnson 和 J. Lindenstrauss，编。 *Handbook of the geometry of Banach spaces. Vol. I*。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，2001。[29] W. B. Johnson 和 J. Lindenstrauss，编。 *Handbook of the geometry of Banach spaces. Vol. 2*。北荷兰，阿姆斯特丹，2003。[30] William B. Johnson 和 Gideon Schechtman。用少量向量计算 p-可和范数。 *Israel J. Math.*，87(1- 3):19–31，1994。

[31] Sten Kaijser。Pisier-Grothendieck不等式的一个简单证明。载于 *Banach spaces harmonic analysis and probability theory (Storrs, Conn., 1980/1981)*, *Lecture Notes in Math.*第995卷，33–44页。Springer，柏林，1983年。[32] Irving Kaplansky。算子代数上的模。 *Amer. J. Math.*，75：839–858，1953年。[33] G. G. Kasparov。椭圆算子的拓扑不变量。I. K-同调。 *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*，39(4)：796–838，1975年。[34] K. MAHESH KRISHNA。模 Bourgain-Tzafriri限制可逆性猜想与 Johnson-Lindenstrauss 展平猜想。 *arXiv:2208.05223v1 [math.FA] 10 August*，2022年。[35] K. MAHESH KRISHNA。模Paulsen问题与模投影问题。 *arXiv:2207.12799.v1 [math.FA]*，26*July*，2022年。[36] S. Kwapien。关于 L. Schwartz 的一个定理及其在绝对可和算子中的应用。 *Studia Math.*，38：193–201，1970年。[37] Rafal Latala 和 Krzysztof Oleszkiewicz。关于 Khinchin-Kahane不等式的最佳常数。 *Studia Math.*，109(1)：101–104，1994年。[38] Daniel Li 和 Herve Queffelec。 *Introduction to Banach spaces: analysis and probability. Vol. 1*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*第166卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018年。[39] Daniel Li 和 Herve Queffelec。 *Introduction to Banach spaces: analysis and probability. Vol. 2*, *Cam-bridge Studies in Advanced Mathematics*第167卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018年。[40] J. Lindenstrauss 和 A. Pelczynski。 L_p空间中的绝对可和算子及其应用。 *Studia Math.*，29：275–326，1968年。[41] Joram Lindenstrauss 和 Lior Tzafriri。 *Classical Banach spaces. I: Sequence spaces*。数学及其边缘领域成果丛书，第92卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1977年。[42] J. Matousek。 *Lectures on discrete geometry*, *Graduate Texts in Mathematics*第212卷。施普林格出版社，纽约，2002年。[43] Ivan Matsak 和 Anatolij Plichko。用高斯方法证明 Dvoretsky 定理。载于 *Functional analysis and its applica-tions*, *North-Holland Math. Stud.*第197卷，171–184页。Elsevier Sci. B. V.，阿姆斯特丹，2004年。[44] V. Milman。Dvoretsky 定理——三十年后。 *Geom. Funct. Anal.*，2(4)：455–479，1992年。[45] V. D. Milman。A. Dvoretzky 关于凸体截面的定理的新证明。 *Funkcional. Anal. i Priložen.*，5(4)：28–37，1971年。[46] Vitali D. Milman 和 Gideon Schechtman。 *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, *Lecture Notes in Mathematics*第1200卷。施普林格出版社，柏林，1986年。[47] William L. Paschke。 B^*代数上的内积模。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，182：443–468，1973年。[48] A. Pelczynski。希尔伯特–施密特算子的刻画。 *Studia Math.*，28：355–360，1966/67年。[49] Daniel Pellegrino 和 Joedson Santos。一般的 Pietsch支配定理。 *J. Math. Anal. Appl.*，375(1)：371–374，2011年。[50] A. Pietsch。赋范空间中的绝对 p-可和映射。 *Studia Math.*，28：333–353，1966/67年。[51] Albrecht Pietsch。 *Operator ideals*, *North-Holland Mathematical Library*第20卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹-纽约，1980年。[52] Albrecht Pietsch。 *History of Banach spaces and linear operators*。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2007年。[53] Gilles Pisier。Banach空间几何中的概率方法。载于 *Probability and analysis (Varenna, 1985)*, *Lecture Notes in Math.*第1206卷，167–241页。Springer，柏林，1986年。[54] Gilles Pisier。 *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, *Cambridge Tracts in Mathematics*第94卷。剑桥大学出版社，剑桥，1989年。[55] Gilles Pisier。Grothendieck定理的过去与现在。 *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 49(2)：237–323，2012年。[56] Marc A. Rieffel。 C^*代数的诱导表示。 *Advances in Math.*，13：176–257，1974年。[57] Ronald E. Rietz。Grothendieck不等式的一个证明。 *Israel J. Math.*，19：271–276，1974年。[58] Gideon Schechtman。关于 Dvoretzky 定理中对 ϵ 依赖性的一个说明。载于 *Geometric aspects offunctional analysis (1987–88)*, *Lecture Notes in Math.*第1376卷，274–277页。Springer，柏林，1989年。[59] Abel B. Stern 和 Walter D. van Suijlekom。交换 C^*代数上 Hilbert 模的 Schatten类。 *J.Funct. Anal.*，281(4)：论文编号109042，35页，2021年。[60] Andrzej Szankowski。关于凸体近似球形截面的 Dvoretzky 定理。 *Israel J. Math.*，17：325–338，1974年。

[61] S. J. Szarek。关于欣钦不等式的最佳常数。 *Studia Math.*，58(2)：197–208，1976年。[62] M. Takesaki。 *Theory of operator algebras. I*， *Operator Algebras and Non-commutative Geometry: Encyclopaedia of Mathematical Sciences*第124卷。施普林格出版社，柏林，2002年。[63] Nicole Tomczak-Jaegermann。用少量向量计算2-可和范数。 *Ark. Mat.*，17(2)：273–277，1979年。[64] Nicole Tomczak-Jaegermann。 *Banach-Mazur distances and finite-dimensional operator ideals*， *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*第38卷。朗文科学与技术出版社，哈洛，1989年。[65] P. Wojtaszczyk。 *Banach spaces for analysts*， *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*第25卷。剑桥大学出版社，剑桥，1991年。