arXiv:2302.03722v1 [math.AG] 7 Feb 2023

全纯叶层剩余理论简介

FERNANDO LOURENC.O 和 FERNANDO REIS

Abstract. 本文是一篇综述，探讨全纯叶状结构，重点介绍留数理论及其应用。我们首先回顾全纯叶状结构的定义：它是流形切丛层的一个子层。我们从这一视角探讨向量丛的特征类理论。我们利用陈-韦伊理论定义全纯叶状结构的陈类，并指出鲍姆-博特留数是分类某些叶状结构的重要工具。综述全文介绍了留数理论中的若干最新成果与进展。最后，我们介绍留数在解决例如庞加莱问题以及叶状结构极小集存在性问题中的一些应用。

关键词：全纯叶状结构、旗标、留数、特征类。
数学主题分类：32S65、58K45、57R30、53C12。

1. Introduction

全纯叶状结构的留数理论始于 P. Baum 和 R. Bott 于 1972年开展的工作。在他们的论文中，作者基于博特消失定理，运用微分几何构造了一个与叶状结构奇异集相关的类。然而，这个称为留数的类仅作为同调群中的一个元素出现。由此产生的问题是：如何计算留数？我们考虑复流形 M 上一个维数为 q 的全纯叶状结构 $\mathcal{F}$，其中 M 的维数为 n。若取一个次数为 d 的齐次对称多项式 φ，那么对于叶状结构 $\mathcal{F}$ 的奇异集 $\mathcal{F}\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ 中的每个紧连通分支 $Z \in$，都存在同调类 $\mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F}; Z)$，属于群 $H_{2(n-d)}(Z;\mathbb{C})$，使得在满足关于 M 的某些条件时，有

$$\varphi(\mathcal{N}_\mathcal{F}) \frown [M] = \sum \mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F}; Z),$$

其中 $\mathcal{N}_\mathcal{F}$ 表示叶状结构 $\mathcal{F}$ 的法层。

本综述探讨在某些情况下如何计算这个留数 $\mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F}; Z)$。在一个复变量的情形下，我们有全纯函数的柯西剩余，以及有助于计算它的柯西积分公式。另一方面，在多个复变量的情形下，作为柯西剩余的推广，我们有与亚纯形式相关联的格罗滕迪克留数。设 $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 是一个有限全纯映射，且满足 $f(0) = 0$，并设 g 是 U 上的全纯函数。我们将格罗滕迪克留数定义为

$$\mathrm{Res}_0(g, f) = \Big(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Big)^n \int_\gamma \frac{g(z)dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1 \ldots f_n}$$

其中 γ 是一个 n-循环，其定向由 n-形式 $d(\arg(f_1)) \wedge \cdots \wedge d(\arg(f_n)) \geq 0$ 规定。若将亚纯 n-形式 $\frac{g(z)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_1 \ldots f_n}$ 记为 ω，则可以使用如下记号 [1]

$$\mathrm{Res}_0(g,f)=\mathrm{Res}_0\left[\begin{array}{c}\omega\\ f_1,\ldots,f_n\end{array}\right]. \tag{1}$$

我们注意到，对于 $n=1$，这个留数就是柯西剩余。Baum 和 Bott [4] 还说明了如何计算高维叶状结构的留数，因为叶状结构奇异集的每个不可约分支都需要满足某些假设。取 Z 为 Sing($\mathcal{F}$) 的一个不可约分支，满足 dim$Z$ = dim($\mathcal{F}$) -1 以及其他一般性假设，则有

$$\mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F};Z)=\mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F}|_{B_p};p)[Z],$$

其中，Res$_\varphi(\mathcal{F}|_{B_p};\ p)$ 是一种格罗滕迪克留数。

此外，在同一篇著作中，[4] Baum-Bott 证明，对于维数为一的叶状结构，在孤立奇点处的留数也可以用式（1）中的格罗滕迪克留数表示，其中 f_1、……、f_n 是局部诱导 $\mathcal{F}$ 的向量场的分量。

1984 年，T. Suwa 在 [54] 中考察了完全交型叶状结构，并用层$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_M}(\Omega_{\mathcal{F}},\mathcal{O}_M)$ 的陈类和局部陈类来表示某一类留数。作为应用，他在（[54], 3.8 Corollary, p.41）中对有理性猜想给出了部分回答，参见（[4], p.287）。作为另一项推论，他展示了在叶状结构余维一的情况下，如何计算孤立奇点处的留数。

T. Suwa 在 [55] 中发展了一种针对分布的留数理论，其中所考虑的局部化源于一个相当基本的事实，即次数大于向量丛秩的陈形式会消失。因此，对合性与此无关。基于这个原因，可以根据秩来定义分布的法层的某些特征类及其相应留数的局部化。此外，在（[55], 命题 4.4，第 15 页）中，作者特别证明了：当分布是对合的（即分布可积，因而定义了一个叶状结构）时，分布的留数与叶状结构的 Baum-Bott 留数相一致。

几年后，也就是 2005 年，基于经典的 Camacho-Sad 留数（或指标）定理，T. Suwa 和 F. Bracci 在 [8], 中为适当奇异对发展了一种留数理论，从某种意义上说，这一理论推广了经典的 Camacho-Sad 留数。作者通过调整切赫－德拉姆理论以及针对适当奇异对的局部化，证明了一个博特消失定理，并证明在这种情形下留数确实存在。

最近，2015 年，F. Bracci 和 T. Suwa 在 [9] 提出了另一种计算˜留数的方法。作者考虑复流形 M 的一个变形，记为 $M=\{M_t\}_{t\in\hat{}P}$，其中参数空间 $\hat{}P$ 是一个 $\mathcal{C}^\infty$ 流形，而 M 上的全纯叶状结构 $\mathcal{F}$ 的一个变形记为 $\tilde{\mathcal{F}}=\{\mathcal{F}_t\}$。对于每个参数 $t\in\hat{}P$，他们假设奇异集 S_t 是紧的。设 φ 是一个次数为 d 的齐次对称多项式，且 Res$_\varphi(\mathcal{F}_t;S^\lambda_t)$ 表示 $\mathcal{F}_t$ 在紧连通集 S^λ_t 处的鲍姆-博特留数。文中证明，鲍姆-博特留数在这一光滑变形中连续变化，即

$$\lim_{t\to t_0}\sum_\lambda \mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F}_t;S^\lambda_t)=\mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F}_{t_0};S^\lambda_{t_0}).$$

随后，作者将 $\mathcal{F}$ 视为 $0\in\mathbb{C}^n$ 处的一个余维一简单几乎李乌维尔叶状结构的芽，并将 V 视为极点除子。接着证明，留数

$\mathcal{F}$ 在 Z处的留数（其中 Z是 $\mathcal{F}$ 的奇异集的一个余维为 2 的不可约分支）可以用 Lehmann-Suwa 留数 [44]表示为一个和（对包含 Z的 V 的不可约分支求和）。这提供了一种有效计算留数的方法:

$$BB(\mathcal{F};Z)=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}(\gamma_0,V_j)Var(\mathcal{F},V_j;Z).$$

在论文 [57] 中，作者证明了 Bott 留数定理对于一维全纯叶状结构的一个更弱的推广。该证明基于 Duistermaat 和 Heckman 型局部化公式，这种公式最早在 [7]中得到讨论。

最近，2016 年，见 [27], Corrˆea、Penˆa 和 Soares 研究了紧复轨形上具有孤立奇点的向量场的若干留数公式，而紧复轨形是一种特殊类型的奇异簇。

值得指出的是，还有其他类型的留数以及与叶状结构和分布相关的不变量。例如， [31], 中的对数向量场留数、 [20], 中的 Camacho-Sad 指数、 [28, 39]中的叶状结构和 Pfaff 系统的 GSV 指数。近年来受到研究的另一个有趣课题，是叶状结构和分布之旗的留数理论。在文献 [11, 36], 中，研究者建立了关于 2-旗的一般留数理论。许多课题都与 2-旗密切相关，并自然地出现在叶状结构理论中。例如，Marco Brunella 提出的一个猜想（见 [22], 第 443 页）指出， $\mathcal{F}$ 上的二维全纯叶状结构 $\mathbb{P}^3$ 要么有一个不变代数曲面，要么构成一个全纯叶状结构旗标。

最后，我们以一些应用作为本综述的结尾。我们讨论留数理论如何被用于研究两个经典的开放问题：庞加莱问题，以及叶状结构是否存在极小集的问题。

需要指出的是，本文始终保留原文中的所有记号和符号，遵循各参考文献作者的选择。

2. Chern-Weil Theory of Characteristic classes of holomorphic foliations

2.1. 全纯叶状结构。我们先回顾奇异全纯叶状结构和分布的基本定义。设 M 是一个维数为 n 的复流形，并分别以 Θ_M 和 Ω_M 表示 M 上全纯向量场芽层和全纯 1- 形式芽层。奇异叶状结构有两种定义；只要我们仅考虑约化的叶状结构，这两种定义便是等价的。本节讨论叶状结构理论，相关内容可参见 [4, 11, 46, 53, 55]。

q 上的奇异全纯分布是 Θ_M的一个秩为 q 的凝聚子层 $\mathcal{F}$。此外，如果 $\mathcal{F}$ 满足以下可积性条件

$$[\mathcal{F}_x,\mathcal{F}_x]\subset\mathcal{F}_x \quad \text{for all } x\in M,$$

我们称 $\mathcal{F}$ 为全纯叶状结构。 $\mathcal{F}$ 的法层定义为商层 $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}:=\Theta_M/\mathcal{F}$，且该商层无挠（这意味着 $\mathcal{F}$ 是饱和的）。根据此定义，我们有以下正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\Theta_M\longrightarrow\mathcal{N}_{\mathcal{F}}\longrightarrow 0.$$

我们将分布 $\mathcal{F}$ 的奇异集定义为

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) := \mathrm{Sing}(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}) = \{p \in M; \mathcal{N}_{\mathcal{F},p} \text{ is not locally free}\}.$$

我们假设 $\mathrm{codim}(\mathrm{Sing}(\mathcal{F})) \geq 2$.

对于第二种定义，奇异分布 $\mathcal{G}$ 可以通过微分形式以对偶的方式定义，即定义为 Ω_M 的一个凝聚子层。如果 $\mathcal{G}$ 满足可积性条件，即，

$$d\mathcal{G}_x \subset (\Omega_M \wedge \mathcal{G})_x \quad \text{for all } x \in M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{G}),$$

我们称 $\mathcal{G}$ 为叶状结构，其中 $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) := \mathrm{Sing}(\Omega_M/\mathcal{G})$。

这两种叶状结构的定义是等价的，并且彼此通过取湮灭子相关联。若 $\mathcal{F}$ 是 M 上维数为 q 的叶状结构，则其湮灭子定义为

$$\mathcal{F}^a = \{v \in \Omega_M; < v, \omega >= 0 \quad \text{for all} \quad \omega \in \mathcal{F}\}.$$

若对任意开集 U in M，我们称 $\mathcal{F}$ 是约化的，

$$\Gamma(U, \Theta_M) \cap \Gamma(U \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}), \mathcal{F}) = \Gamma(U, \mathcal{F}).$$

如果我们只考虑约化的叶状结构，那么 $\mathcal{G} = \mathcal{F}^a$，反之亦然（见 [53]）。最后，我们给出本小节的如下定义。

定义 2.1. 设 V 是复流形 X中的一个解析子空间。若

$$T\mathcal{F}|_V \subset (\Omega^1_V)^*.$$

在一些特殊情形下，

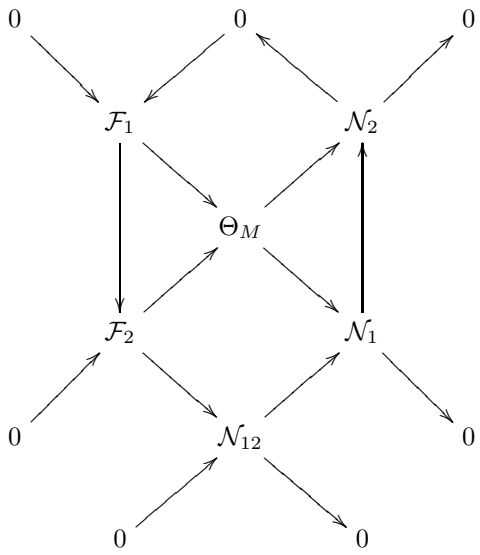
- 若 V 是一个超曲面，我们称 $\mathcal{F}$ 沿 $\mathcal{F}$对数型；
- 若 V是维数为 $n-k$、由 k个超曲面的交定义的约化完全交，我们称 $\mathcal{F}$ 沿 $\mathcal{F}$多重对数型。

2.1.1. 全纯叶状结构旗标。本小节中，我们定义叶状结构旗标，并说明其主要性质。更多细节请参阅 [11, 24, 36, 46]。

复流形 M（维数为 n）上的奇异全纯叶状结构旗标，可由一列有限个 k叶状结构 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k)$定义，使得在奇异集之外，每个叶状结构 $\mathcal{F}_{i+1}$ 都是 $\mathcal{F}_i$ 的子叶状结构；对于每个 $i = 1, \ldots, k-1$，记为 $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$。更形式地，对于 $k = 2$，有如下结论。

定义 2.2。设 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$ 是 M 上维数为 $q =$（q_1、q_2）的两个全纯叶状结构。若 $\mathcal{F} :=$（$\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$）是全纯叶状结构的 2-旗，则称之为 $\mathcal{F}_1$ 是 $\mathcal{F}_2$. 的一个相干子$\mathcal{O}_M$-模

我们注意到，对于 $x \in M \setminus \cup_{i=1}^{2} \mathrm{Sing}(\mathcal{F}_i)$，包含关系 $T_x\mathcal{F}_1 \subset T_x\mathcal{F}_2$ 成立，即 $\mathcal{F}_1$ 的叶包含于 $\mathcal{F}_2$的叶中。这里，$T\mathcal{F}_i$ 表示叶状结构 $\mathcal{F}_i$的切丛层，但在全文中我们将简化记号，直接记作 $\mathcal{F}_i$。现在，我们想强调一个由层的短正合列构成的图，称为“海龟图”。



下面给出一些定义和记号。我们将 $\mathcal{N}_j$ 记作商层 $\mathcal{N}_{\mathcal{F}_j}$。此外，我们用 Sing($\mathcal{F}$)表示旗 $\mathcal{F}$ 的奇异集，它是解析集 Sing($\mathcal{F}_1$)∪Sing($\mathcal{F}_2$)；而 $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} := \mathcal{N}_{12} \oplus \mathcal{N}_2$ 是该旗的法层，其中 $\mathcal{N}_{12}$ 是相对商层$\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1$。

2.2. 通过陈-韦伊理论研究特征类。本节回顾陈-韦伊理论的基本工具，用于研究向量丛和层的留数与特征类。叶状结构的留数理论最初由 Baum 和 Bott 运用微分几何提出，见一系列论文（[4, 5, 6]）。随后，在 20 世纪 80 年代和 90 年代，Lehman 和 Suwa 提出了一种运用陈-韦伊理论研究留数理论的新方法（见 [44]）。

定义 2.3. 复向量丛 E 在 M 上的秩为 r 的联络是一个 $\mathbb{C}$-线性映射

$$\nabla : A^0(M, E) \longrightarrow A^1(M, E)$$

满足

$$\nabla(f.s) = df \otimes s + f.\nabla(s) \quad for \quad f \in A^0(M) \quad and \quad s \in A^0(M, E).$$

若 ∇ 是 E上的一个联络，则它诱导出一个 $\mathbb{C}$-线性映射

$$\nabla := \nabla^2 : A^1(M, E) \longrightarrow A^2(M, E)$$

满足

$$\nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla(s), \quad \omega \in A^1(M), \quad s \in A^0(M, E).$$

我们将复合映射 $K := \nabla \circ \nabla$ 从 $A^0(M, E)$ 到 $A^2(M, E)$ 定义为联络 ∇的曲率。若 $s = (s_1, \ldots, s_n)$ 是开集 U 上的 E 的一个标架，则 $\theta = (\theta_{ij})$ 是 E 关于标架 s 的联络矩阵（其中 θ_{ij} 是 U 上的 1-形式）。同理，我们可以得到 $K = (k_{ij})$，即 E 关于 s的曲率矩阵。若考虑 $\sigma_i, i = 1, \ldots, r$，即矩阵 K的特征值的 i阶初等对称函数

$$\det(It + K) = 1 + \sigma_1(K)t + \sigma_2(K)t^2 + \cdots + \sigma_r(K)t^r,$$

我们可以在 U 上定义一个 Chern c_i 的 $2i$-形式:

$$c_i(K) := \sigma_i(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}K).$$

一般而言，若 φ 是关于 r 个变量的 d 次齐次对称多项式，我们可以将其写作 $\varphi = P(c_1, \ldots, c_r)$，其中 P 是某个多项式。于是我们可以定义

$$\varphi(K) := \tilde{P}(c_1(K), \ldots, c_r(K))$$

这是 M 上的闭形式。因此，我们在 M 上有一个关于 E 的上同调类， $\varphi(E) :=\varphi(K)$ $\in H^{2d}(M; \mathbb{C})$。

设 $\mathcal{G}$ 是 M 上的层， S 是 M 的一个紧连通集， U 是 M 中 S 的一个相对紧开邻域。我们可以考虑 U 的一个覆盖 $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$，其中 $U_1 = U$ 和 $U_0 = U \setminus S$，并且由于存在 [2]，有如下 $\mathcal{G}$ 的解消

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_U(E_r) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{A}_U(E_0) \longrightarrow \mathcal{A}_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{G} \longrightarrow 0,$$

我们可以利用虚拟丛 $\xi := \sum_{i=0}^{r}(-1)^i E_i$ 在 U 上定义特征类 $\varphi(\mathcal{G})$，即 $\varphi(\mathcal{G}) := \varphi(\xi)$。

给定 $\mathcal{F}$ 上的一个全纯叶状结构和 M，以及 φ 次的齐次对称多项式 d，有如下短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \Theta_M \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0.$$

那么 $\varphi(\mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ 表示 $\mathcal{F}$ 的特征类，它是上同调群 $H^{2d}(M; \mathbb{C})$ 的一个元素。我们用 P表示从 $H^{2d}(M; \mathbb{C})$ 到 $H_{2(n-d)}(M; \mathbb{C})$ 的庞加莱同态（若 M非奇异，则为同构），用 A表示亚历山大同态（若 S非奇异，则为同构） $A\colon H^{2d}(M, M\setminus S; \mathbb{C}) \longrightarrow H_{2(n-d)}(S; \mathbb{C})$。我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} H^{2d}(M, M\setminus S; \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^{2d}(M; \mathbb{C}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle A} & & \Big\uparrow{\scriptstyle P} \\ H_{2(n-d)}(S; \mathbb{C}) & \xrightarrow{i^*} & H_{2(n-d)}(M; \mathbb{C}) \end{array}$$

其中，该映射 $H^{2d}(M, M\setminus S; \mathbb{C}) \longrightarrow H^{2d}(M; \mathbb{C})$ 表示一个提升，从叶状结构理论的角度可由博特消失定理解释（见 [53], 定理 9.11）。因此，我们得到叶状结构的留数 $\mathcal{F}$，记作 $\mathrm{Res}^{\varphi}(\mathcal{F}, \mathcal{N}_{\mathcal{F}}; S)$，它是 $H_{2(n-d)}(S; \mathbb{C})$ 中的一个元素，由 $\varphi_S(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}; \mathbb{C}) \in H^{2d}(M, M\setminus S; \mathbb{C})$ 经亚历山大对偶映射得到，且与所涉及的所有选择无关。

一般而言，无法直接根据上述定义计算这类留数。因此，如何借助微分几何、叶状结构理论、复分析或奇点理论等工具计算这类元素，就显得尤为重要。本综述旨在介绍这一方向的一些研究成果。

2.3. 关于全纯叶状结构留数的一些结果。近年来，许多作者发展了全纯叶状结构的留数理论。例如，我们可以引用 Baum 和 Bott 的 [4, 6], 、Brasselet 和 Suwa 的 [10]，以及 Bracci 和 Suwa 的 [8] 和 [9]。我们还可以参考 [12] 一书，该书专门研究一维全纯叶状结构在具有孤立奇点时的指标，讨论了底空间

为光滑簇或奇异簇的情形。作者定义了若干种指标概念，包括：Poincar´e-Hopt 指数、施瓦茨指数、GSV 指数、虚拟指数、同调指数等。

我们从经典的格罗滕迪克留数开始，更多细节请参见（[41, 52, 53]）。设 ω 为 0 点处的一个全纯 n-形式芽， U 为 $\mathbb{C}^n$ 中 0 点的一个邻域，且 $a_1, \ldots, a_n$ 为满足 $V(a_1, \ldots, a_n) = \{0\}$ 的全纯函数芽。 ω 在 0 点处的格罗滕迪克留数定义为

$$\mathrm{Res}_0 \left[\begin{array}{c} \omega \\ a_1, \ldots, a_n \end{array} \right] = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_\gamma \frac{\omega}{a_1 \cdots a_n},$$

其中 γ 是 U 中由下式定义的一个 n-循环:

$$\gamma = \{z \in U; |a_1(z)| = \cdots = |a_n(z)| = \epsilon\}$$

并由 $d(\arg(a_1)) \wedge \cdots \wedge d(\arg(a_n)) \geq 0$. 定向。我们指出，当 $n = 1$ 时，上述留数就是亚纯 1-形式 ω/a_1 在 0 点处通常意义下的柯西留数。

接下来，我们给出叶状结构理论中关于留数的第一个重要结果。该定理将某些叶状结构的鲍姆-博特留数与格罗滕迪克留数联系起来。为此，设 $\mathcal{F}$ 是复紧流形 M 上的一个一维全纯叶状结构，其中 M 的维数为 n。我们假设 $\mathcal{F}$ 只有孤立奇点。设 φ 是一个次数为 n 的齐次对称多项式，且 $p \in$ 是 Sing($\mathcal{F}$) 中的一个孤立点。那么

定理 2.4. ([4],定理 1)

$$\mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F}; p) = \mathrm{Res}_p \left[\begin{array}{c} \varphi(JX) \\ X_1, \ldots, X_n \end{array} \right],$$

其中， $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 是 p 处全纯向量场的一个芽，是 $\mathcal{F}$ 的局部代表。

在 [54], (3.12) 命题中，T. Suwa 考虑一个余维一全纯分布（不一定可积），并将 0（也可以是另一个点 p）视为该分布的孤立奇点，由此展示了如何计算留数。

定理 2.5. 设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 中原点 0 附近的一个多圆盘，且 $\mathcal{F} =< \omega >$ 是 U 上的余维一全纯叶状结构，在 0 处有一个孤立奇点。那么我们有

$$\mathrm{Res}_{c_n}(\mathcal{F}; 0) = (-1)^n(n-1)!\dim_{\mathbb{C}} Ext^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}) \quad in \quad H_0(0; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}.$$

对分布的留数感兴趣的读者也可参阅综述 [55]。

出于同一目的，F. Bracci 和 T. Suwa 在 [9] 中研究了全纯叶状结构的光滑变形，并证实这是一种有效的留数计算方法。

定理 2.6. 设 $(\tilde{M}, \hat{P}, \pi)$ 是流形的变形， $\tilde{\mathcal{F}}$ 是 $\tilde{M}$ 上秩为 p 的叶状结构的变形。假设 $\mathcal{N}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ 存在一个 $\mathcal{C}^\infty$ 局部自由解消。设 $S'(\tilde{\mathcal{F}}) \subset S(\tilde{\mathcal{F}})$ 是 $\tilde{\mathcal{F}}$ 的奇异集的一个连通分支，并设 $S_t := M_t \cap S'(\tilde{\mathcal{F}})$。假设 $\hat{}$ 对所有 $t \in P$，集合 S_t 都是紧的，且 $S_t \neq M_t$。设 φ 是次数为 $d > n-p$ 的齐次对称多项式。在这些假设下，鲍姆-博特留数 $BB_\varphi(\mathcal{F}_t; S_t)\hat{}$ 关于 $t \in P$ 连续。也就是说，对于 M 上任意的 $\mathcal{C}^\infty(2n-2d)$- 形式 $\tilde{\tau}$，只要对所有 $t \in P$， $i_t^*(\tilde{\tau})$ 是闭的，

$$\lim_{t\to t_0} BB_\varphi(\mathcal{F}_t; S_t)(i_t^*(\tilde{\tau})) = BB_\varphi(\mathcal{F}_{t_0}; S_{t_0})(i_{t_0}^*(\tilde{\tau})).$$

对于高维叶状结构，也可以将鲍姆-博特留数与格罗滕迪克留数联系起来。Vishik 在 [56], 中，在叶状结构具有局部自由切丛的假设下，发现了这种联系。在 [4] 中，Baum 和 Bott 早于 Vishik 且独立于他，利用叶状结构奇异集上的一般性假设证明了一个类似的结果。

设 $\mathcal{F}$ 是复流形 M 上余维数为 k 的全纯叶状结构，且 φ 是次数为 $k+1$ 的齐次对称多项式。注意，deg $\varphi > n-$dim($\mathcal{F}$)，这是博特消失定理的条件。我们假设 $\mathcal{F}$ 的奇异集具有预期的纯余维，即 dim(Sing($\mathcal{F}$)) $= k+1$。在这种情况下，通常用记号 Sing$^{k+1}(\mathcal{F})$ 表示 $\mathcal{F}$ 的奇异集中纯余维为 $k+1$ 的不可约分支之并。

若 $Z \subset$Sing$^{k+1}(\mathcal{F})$ 是一个纯余维的不可约分支，我们取以 p 为中心、充分小且与 Z 在 p 处横截的 $(k+1)$ 维球 B_p。值得注意的是，限制叶状结构 $\mathcal{F}|_{B_p}$ 是一个一维叶状结构，在p 处有一个孤立奇点。在 [26] （定理 1.2）中，M. Corrˆea 和 F. Louren¸co 将 $\mathcal{F}$ 在Z 中的鲍姆-博特留数与 $\mathcal{F}|_{B_p}$ 在 p 处的 Grothendieck 留数联系起来。

定理 2.7. 设 $\mathcal{F}$ 是紧复流形 M 上余维数为 k 的奇异全纯叶状结构，且 cod(Sing($\mathcal{F}$)) $\geq k+1$. 则,

$$\mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F}; Z) = \mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F}|_{B_p}; p)[Z],$$

其中，Res$_\varphi(\mathcal{F}|_{B_p}; p)$ 表示在 p 处，$(k+1)$ 维横截球 B_p. 上一维叶状结构 $\mathcal{F}|_{B_p}$ 的格罗滕迪克留数

下一个结果归功于 Fernandez-Perez 和 Tamara，见 [35] （定理 6.2），它提供了另一种有效计算余维一全纯叶状结构的鲍姆-博特留数的方法。首先，我们需要一个定义。考虑在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 处的全纯叶状结构芽 $\mathcal{F}$。

定义 2.8. 若存在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 处的闭亚纯 1-形式芽 γ_0 和全纯 1-形式芽 γ_1，使得 $\mathcal{F}$ 在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 处是几乎李乌维尔叶状结构

$$d\omega = (\gamma_0 + \gamma_1) \wedge \omega.$$

我们称 $\mathcal{F}$ 在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 处是简单几乎李乌维尔叶状结构，如果可以选取仅具有一阶极点的 γ_0。

定理 2.9. 设 $\mathcal{F}$ 是由 $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ 定义的简单几乎李乌维尔叶状结构在 $0 \in \mathbb{C}^n, n \geq 3$处的一个芽，使得

$$d\omega = (\gamma_0 + \gamma_1) \wedge \omega.$$

设 V 为 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_1$ 和 V_1 的极点除子，V_l，.....为 V 的不可约分支。设 Z 为 Sing$_2$($\mathcal{F}$) 的一个不可约分支。则

$$BB(\mathcal{F};Z)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}(\gamma_0,V_j)Var(\mathcal{F},V_j;Z),$$

其中 V_1, ..., V_k 是包含 Z 的不可约分支，而Var(F， V_j； Z) 表示 Khanedani 和 Suwa 在 [42] 中定义的变分指标。

在 [10, 50] 中，叶状结构的 Nash留数 概念得到了发展，这立即为 Baum 和 Bott 的有理性猜想提供了部分答案（见 [4], 第287页）。设M 是维数为 n的复流形，且 $\mathcal{F}$ 是 M 上的一个维数为 q 的奇异全纯叶状结构。对于 M 中的每个点 x ，考虑如下集合

$$F(x):=\{v(x);v\in\mathcal{F}_x\},\tag{2}$$

其中， $\mathcal{F}_x$ 表示 $\mathcal{F}$ 在 x处的茎。我们注意到，当且仅当 $x\in M\setminus$ 属于奇异集 Sing($\mathcal{F}$)时，$F(x)$ 是T_xM 的一个维数为 q 的切空间子空间。一般而言，dim($F(x)$) $\leq q$。下文中， $G(q,n)$ 表示 TM中由 q维子空间构成的Grassmann丛。

利用表达式 (2)，我们可以在 $\mathcal{F}$的奇异集之外定义 $G(q,n)$的一个截面，如下所示

$$s:M\setminus\mathrm{Sing}(\mathcal{F})\longrightarrow G(q,n)$$

由 $s(x)$ 给出: $=F(x)$。

我们在 $G(q,n)$ 中定义 $M^\nu:=Im(s)$，并称之为关于叶状结构 $\mathcal{F}$ 的 M 的 Nash修正。我们考虑 Sing($\mathcal{F}$)$^\nu:=\pi^{-1}$Sing($\mathcal{F}$)，其中 π 是丛 $G(q,n)$ 的投影到 M^ν 的限制映射，该投影是一个双有理映射

$$\pi:M^\nu\longrightarrow M.$$

此外，它给出了从 $M^\nu\setminus$ Sing($\mathcal{F}$)$^\nu$ 到 $M\setminus$ Sing($\mathcal{F}$) 的双全纯映射。在某些情况下，我们可以˜ ˜假设 M^ν 是一个光滑流形（见 [50]）。我们分别用 T^ν 和 N^ν 表示 $G(q,n)$ 上的典范丛和典范商丛。因此，有一个短正合列

$$0\longrightarrow T^\nu\longrightarrow\pi^*TM\longrightarrow N^\nu\longrightarrow 0,$$

其中 T^ν 和 N^ν 本质上是对 M^ν 的限制。

可以证明，对于次数为 $d>n-$dim($\mathcal{F}$) 的齐次对称多项式 φ，特征类 $\varphi(N^\nu)$ 局部化在 Sing($\mathcal{F}$)$^\nu$，从而给出以下留数

$$\mathrm{Res}_\varphi(N^\nu,\mathcal{F};\mathrm{Sing}(\mathcal{F})^\nu)\in H_{2(n-d)}(\mathrm{Sing}(\mathcal{F})^\nu;\mathbb{C})$$

我们称其为 $\mathcal{F}$ 相对于 φ 在 $\mathcal{F}$的奇异集处的 Nash留数$^\nu$。

1989年，Sert¨oz 在 [50] （定理 IV.4，第 238 页）证明，在假设 M^ν 光滑的条件下，鲍姆-博特留数与 Nash留数之差为一个整数。

定理 2.10. 设 S 是 $\mathcal{F}$ 的一个连通奇异集分支， φ 是次数为 $d>n-$ dim($\mathcal{F}$) 的齐次对称多项式，则

$$\mathrm{Res}_\varphi(N_\mathcal{F},\mathcal{F};S)=\mathrm{Res}_\varphi(N^\nu,\mathcal{F};S^\nu)+k,$$

其中 k 是 S 中的一个同调循环，并通过 Grassmann 图构造计算得出。

2000年，Brasselet 和 Suwa 在 [10]（定理 4.1，第 44 页）给出了 Sert¨oz 的一个类似结果，并去掉了 M^ν 光滑这一假设。

定理 2.11。设 φ 是次数为 $d>n-\dim(\mathcal{F})$ 的齐次对称多项式。若 φ 具有整数系数，则其差

$$\mathrm{Res}_\varphi(N_\mathcal{F},\mathcal{F};S)-\mathrm{Res}_\varphi(N^\nu,\mathcal{F};S^\nu)$$

属于典范同态的像

$$H_{2(n-p)}(S;\mathbb{Z})\longrightarrow H_{2(n-p)}(S;\mathbb{C}).$$

在下述结果中，F. Bracci 和 T. Suwa 将留数理论推广到具有适当奇异对的叶状结构（见 [8]）。简言之，设 M 是维数为 m 的复流形， $P\subset M$ 是维数为 r的复子流形，则有短正合列

$$0\longrightarrow TP\longrightarrow TM|_P\longrightarrow N_{P,M}\longrightarrow 0,$$

其中 $N_{P,M}$ 表示 P 在 M中的法丛。取 X 为 M中另一个维数为 n 的子流形，它与 P相交于一个维数为 $n+r-m$ 的子流形 $Y\subset M$，且该交集处处横截。若 $r=m+l-n$，并且这些数据满足以下条件，则称 (X,Y) 为 M 中的适当奇异对

1) $Y=X\cap P$; 2) $\dim(\mathrm{Sing}(X)\cap P)<l$;
3) X_{reg} 与 P 一般位置横截相交。

定理 2.12。（[8], 定理 2.1，第 7 页）设（X,Y）是 M中的一个适当奇异对，且 $\mathcal{F}$ 是 X 中一个维数为 $d\le l$ 的全纯叶状结构，其叶使 Y 保持不变。设 $\Sigma=(\mathrm{Sing}(\mathcal{F})\cup\mathrm{Sing}(Y))\cap Y$，并假设 $\dim(\Sigma)<l$。令 $\Sigma=\sum_\gamma\Sigma_\gamma$ 为按连通分支进行的分解，且令 $i_\gamma:\Sigma_\gamma\hookrightarrow Y$ 表示包含映射。设 φ为一个次数为 $t>l-d$的对称齐次多项式。那么

i) 对于每个紧连通分支 Σ_γ，都存在一个类 $\mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F},Y;\Sigma_\gamma)\in H_{2l-2t}(\Sigma_\gamma;\mathbb{C})$，称为“留数”，它仅取决于 $\mathcal{F}$ 在 Σ_γ附近的局部行为；ii) 若 Y 是紧的，则有

$$\sum_\gamma(i_\gamma)_*\mathrm{Res}_\varphi(\mathcal{F},Y;\Sigma_\gamma)=\varphi(N_{P,M})\cap[Y]\quad in\quad H_{2l-2t}(Y;\mathbb{C}).$$

我们注意到，这个关于叶状结构的“新概念”留数可以理解为经典 Camacho-Sadre 留数定理（见 [20]）的推广。

Corrˆea 等人在 [27] 中给出了轨形的如下留数公式。设 X 是一个维数为 n 的复轨形， L 是 X 上的线 V 丛，并考虑丛 $TX - L^{\vee}$ 的某些陈类；此外，对于每个使 ξ 为零的点 p，令

$$\pi_p : (\tilde{U}, \tilde{p}) \to (U, p),$$

˜是 X 在 p 处的平滑覆盖，记作 $\xi = \pi_p^* \xi$，则有

定理 2.13。（[27], 定理 3.1，第 2897 页）设 X 是一个维数为 n且仅具有孤立奇点的紧轨形，设 L 是 X 上的局部 V-自由秩 1 层，且 L 是其关联的线 V丛。假设 ξ是 $TX \otimes L$的一个具有孤立零点的全纯截面。若 P 是次数为 n的不变多项式，则

$$\int_X P(TX - L^{\vee}) = \sum_{p|\xi(p)=0} \frac{1}{\#G_p} \mathrm{Res}_{\tilde{p}} \Big[P(J\tilde{\xi}) \frac{d\tilde{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1 \ldots \tilde{\xi}_n} \Big],$$

其中， $G_p \subset Gl(n, \mathbb{C})$表示一个小有限群。

留数理论中所有广为人知的结果都假设奇异集的分支是非退化的，例如参见 [4]。文献 [32] 通过在一定限制下考虑退化情形，对 Baum-Bott 给出的结果进行了略微改进。设 v 是 V 上的一个全纯向量场， W 是 v 的一个奇异集分支，并且该向量场沿 W退化。M. Dia 在满足以下条件时证明了 v 在 W 处的留数结果： W 的一个邻域与 W的法丛的零截面邻域之间存在双全纯映射。参见 [32]中的定理´、`A、B、C 和 D。

2.4. 一维对数叶状结构的留数。本节旨在介绍一些关于一维对数全纯叶状结构相关留数的结果。关于这方面的内容，我们请读者参阅 [1, 25, 31, 38, 40] 及其中的参考文献。

X. Gomez-Mont、L. Giraldo 和 P. Mardesi´c 根据微分形式复形的同调定义并研究了与超曲面相切的向量场的一般指标，参见 [38, 40]。本节的第一个结果涉及对数指标，由 A. G. Aleksandrov 在 [1]中给出。作者利用带对数极点的微分形式定义了对数指标，并证明同调指数可以通过对数指标表示。

设 M是一个维数为 n的复流形，且 $\Omega^q_M, q \geq 0$ 和 $Der(M)$ 分别是 M上全纯 q-形式与向量场的芽层。设$D \subset M$ 是一个除子，其所有不可约分支的重数均为一。给定一个向量场 $V \in Der(M)$，它在点 $x \in D$ 处有一个孤立奇点，则复形 $(\Omega^{\bullet}_{D,\ x}, \iota_V)$ 的ι_V-同调群是有限维向量空间，其中ι_V: $\Omega^q_M \to \Omega^{q-1}_M$ 是内乘（缩并）。我们可以定义向量场 V在点 $x \in D$ 处的同调指数为

$$Ind_{hom,D,x}(V) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H_i(\Omega_{D,x}, \iota_V).$$

给定一个除子 D，我们可以考虑凝聚解析层 $\Omega^q_M(\log\ D)$、 $q > 0$ 以及$Der_M(\log\ D)$ $= T_M(-\log\ D)$，如 [1] 中所述。取一个向量场 $V \in Der_M(\log\ D)$。如上所述，内乘 ι_V 在 $\Omega^{\bullet}_M(\log\ D)$ 上定义了复形结构。

引理 2.14。（[1], 引理 1，第 247 页）若 V 的所有奇点都是孤立的，则复形 $\Omega^{\bullet}_{M}(\log\ D)$ 的 ι_V-同调群是有限维向量空间。

由引理 2.14 可知，向量场 V 在点 x处的对数指标定义良好，

$$Ind_{\log D,x}(V) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim H_i(\Omega_{D,x}(\log D), \iota_V).$$

这些指标的关系如下。

命题 2.15。（[1], 命题 1，第 248 页）设点 $x \in D$ 是向量场 $V \in Der(\log D)$ 的一个孤立奇点，芽 $V_i \in \mathcal{O}_{M,\ x}$ 由展开式 $V = \sum_i V_i \frac{\partial}{\partial z_i}$和 $J_x V = (V_0, \ldots, V_n)\mathcal{O}_{M,\ x}$确定。则

$$Ind_{hom,D,x}(V) = \dim \mathcal{O}_{M,x}/J_x V - Ind_{\log D,x}(V).$$

在 [31] 中，作者研究了沿 D 的对数叶状结构，并证明了留数公式，即针对非紧复流形的 Baum-Bott 型公式，同时仍考虑对数向量场。

˜定理 2.16。（[31], 定理 1，第 6403 页）设 X 是一个 n维复流形˜，满足 $X = X - D$，其中 X 是一个 n维复紧流形， D是 X上的一个光滑超曲面。设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个一维叶状结构，具有孤立奇点并且沿 D为对数型。假设对于所有 $p \in$Sing($\mathcal{F}$) $\cap D$，都有 $Ind_{\log D,\ p}(\mathcal{F}) = 0$ 。则

$$\int_X c_n(T_X(-\log D) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap (X \setminus D)} \mu_p(\mathcal{F}).$$

在同一篇著作中，作者认为除子 D 是一个正规交叉超曲面，并且有

˜定理 2.17。（[31], 定理 2，第 6404 页）设 X 是一个 n 维复流形，满足 $X = X - D$，其中 X 是一个 n 维复紧流形， D 是 X 上的正规交叉超曲面。设 $\mathcal{F}$ 是 X 上一个一维叶状结构，具有孤立奇点（非退化），并且沿 D 对数型。则，

$$\int_X c_n(T_X(-\log D) - T_{\mathcal{F}}) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap (\tilde{X})} \mu_p(\mathcal{F}).$$

在 [25] 中，作者为形如 $X = X - D$ 的复 ∂ 维流形证明了高斯–博内定理和庞加莱–霍普夫定理的新版本，其中 dim$X = n \geq 3$ ，且 D 是一个约化除子。更确切地说，

˜ ˜定理 2.18。（[25], 定理 1.1，第 495 页）设 X 是一个复流形，满足 $X = X - D$，其中 X 是一个 n 维的（$n \geq 3$）复紧流形， D 是 X 上的约化除子。给定任意一个（不一定不可约的）分解 $D = D_1 \cup D_2$，其中 D_1、 D_2 具有孤立奇点，而 $C = D_1 \cap D_2$ 是一个余维 2 代数簇，并且具有孤立奇点，

（i）（高斯–博内型公式）以下公式成立

$$\int_X c_n(\Omega^1_X(\log\ D)) = (-1)^n\chi(\tilde{X}) + \mu(D_1, S(D_1)) + \mu(D_2, S(D_2)) - \mu(C, S(C)).$$

(ii)（庞加莱-霍普夫型公式）若 v 是定义在 X 上的全纯向量场，具有孤立奇点且沿 D 为对数型，则有

$$\chi(\tilde{X}) = PH(v, \mathrm{Sing}(v)) - GSV(v, D_1, S(v, D_1)) - GSV(v, D_2, S(v, D_2)) +$$
$$+GSV(v, C, S(v, C)) + (-1)^{n-1}\left[\mu(D_1, S(D_1)) + \mu(D_2, S(D_2)) - \mu(C, S(C))\right].$$

2.5. 旗标的留数。下文回顾近年来出现的一些关于叶状结构旗标留数的结果。关于旗标的背景知识，请参见[11, 24, 36, 46] 及其中的参考文献。

下一个结果（[11], 定理 2）有两个目的。首先，它说明若$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ 是定义在 M 上的全纯叶状结构旗标，则我们可以将 $\mathcal{F}$ 的留数定义为一个同调群中的元素。其次，它展示了旗标 $\mathcal{F}$的 Baum-Bott 型定理。

定理 2.19. 设 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ 是定义在维数为 n 的紧复流形 M 上的全纯叶状结构 2-旗。设 φ_1, φ_2 分别为次数为 d_1 和 d_2 的齐次对称多项式，并满足适用于旗标的博特消失定理。那么，对 Sing($\mathcal{F}$) 的每个紧连通分支 S，都存在一个类 $\mathrm{Res}_{\varphi_1,\ \varphi_2}(\mathcal{F}, \mathcal{N}_{\mathcal{F}};\ S) \in H^{2n-2(d_1+d_2)}(S; \mathbb{C})$，我们称之为旗标的 Baum-Bott 留数，使得

$$\sum_{\lambda}(\iota_\lambda)_*\mathrm{Res}_{\varphi_1,\varphi_2}(\mathcal{F}, \mathcal{N}_{\mathcal{F}}; S_\lambda) = (\varphi_1(\mathcal{N}_{12}).\varphi_2(\mathcal{N}_2)) \frown [M] \tag{3}$$

在 $H_{2n-2(d_1+d_2)}(M;\ \mathbb{C})$ 中，其中 ι_λ表示 S_λ在 M中的嵌入。

非常有趣的是，我们有一种有效计算留数的方法。本节其余部分将探讨这一主题。首先，我们指出旗中的两个叶状结构的留数之间的关系（见 [11], 命题 3，第 1169 页）。

定理 2.20. 对于 M 上的旗 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$，若 dim($\mathcal{F}_1$) = 余维数($\mathcal{F}_2$) = 1 且 Sing($\mathcal{F}_1$) ∩Sing($\mathcal{F}_2$) 仅有孤立奇点，则有

$$\mathrm{Res}_{c_n}(\mathcal{F}_2, \mathcal{N}_2; p) = (-1)^n(n-1)!\mathrm{Res}_{c_n}(\mathcal{F}_1, \mathcal{N}_1; p),$$

其中涉及的留数属于叶状结构 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$。

我们先引入一些记号。给定 M 上的旗 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$，满足 codim($\mathcal{F}_i$) = k_i且 $i = 1$, 2，我们用 $\mathrm{Sing}_{k_i+1}\mathcal{F}_i$ 表示 Sing($\mathcal{F}_i$) 中纯余维数为 $k_i + 1$的不可约分支之并。取一个不可约分支 $Z \subset \mathrm{Sing}_{k_1+1}(\mathcal{F}_1)$ 和一个一般点 $p \in Z$。记 B_p 为以 p 为中心的小球，使得 $S(B_p)$ $\subset B_p$ 是一个维数为 $n - k_1 - 1$ 的子球（即与 Z 维数相同）。

在上述设定下（见 [12, 53]），德拉姆类可以在定向的 $(2k_1 + 1)$-球面 $L_p \subset B^*_p$ 上积分，并定义了 $\mathcal{F}$ 在 Z 处的鲍姆-博特留数

$$BB^j(\mathcal{F};Z) := (2\pi i)^{-k_1-1}\int_{L_p}\theta^{12}\wedge(d\theta^2)^j\wedge(d\theta^{12})^{k_1-j} \quad \text{for each} \quad 0\leq j\leq k_2.$$

特别地，当 codim(Sing($\mathcal{F}$)) $\geq k_1+1$ 时，我们得到留数公式和 Baum-Bott 定理，见（[11], 定理 4，第 1173 页）。

定理 2.21。设 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ 是紧复流形 M 上余维数为 (k_1,k_2) 的 2-旗。若 codim(Sing($\mathcal{F}$)) $\geq k_1+1$，则对于每个 $0\leq j\leq k_2$，我们有

$$c_1^{k_1-j+1}(\mathcal{N}_{12})\smile c_1^j(\mathcal{N}_2)=\sum_{Z\,\in\,\mathrm{Sing}_{k_1+1}(\mathcal{F}_1)\cup\mathrm{Sing}_{k_1+1}(\mathcal{F}_2)}\lambda_Z^j(\mathcal{F})[Z],$$

其中 $\lambda_Z^j(\mathcal{F}) = BB^j(\mathcal{F},Z)$。

2020 年，Ferreira 和 Louren,co 在 [36] 中将留数理论扩展到了全纯分布的旗标。下一个结果讨论孤立奇点。

定理 2.22。（[36], 定理 1.2）设 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ 是紧复流形 M 上的全纯分布 2-旗，流形维数为 n； $\varphi_1\ and\ \varphi_2$ 分别为次数为 $d_1>0$ 和 $d_2>0$ 的齐次对称多项式，且 p 是 Sing($\mathcal{F}$) 的一个孤立点。则

$$\mathrm{Res}_{\varphi_1,\varphi_2}(\mathcal{F},\mathcal{N}_{\mathcal{F}};p)=0.$$

在 $\mathbb{P}^3$ 为射影空间这一特殊情形下，我们在计算旗标的留数方面取得了一些进展。此外，如果旗标的奇异概形只有一个不可约分支，以下结果便为我们提供了一种有效计算留数的方法，见（[36], 定理 1.3）。

定理 2.23. 设 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ 是 $\mathbb{P}^3$ 上的一个全纯叶状结构 2-旗，且 deg($\mathcal{F}_i$) $=d_i$，则

$$(4)\qquad (1+d_1-d_2)\sum_{Z\in S_1(\mathcal{F}_2)}\deg(Z)\mathrm{Res}_{\varphi_2}(\mathcal{F}_2|_{B_p};p)=\sum_{Z\in S_1(\mathcal{F})}\mathrm{Res}_{c_1\varphi_2}(\mathcal{F},\mathcal{N}_{\mathcal{F}};Z),$$

其中，deg(Z) 是不可约分支 Z 的次数，Res$_{\varphi_2}$($\mathcal{F}_2|_{B_p}$;p) 表示全纯叶状结构 $\mathcal{F}_2|_{B_p}$ 在 $\{p\}=Z\cap B_p$ 处的格罗滕迪克留数，其中 B_p 是一个横截球，并且满足 $\varphi_2=c_1^2$ 或 $\varphi_2=c_2$.

我们认为，如果采用留数流理论，见 [48], ，便可以给出一个更一般的留数计算表达式，尤其适用于退化情形。

3. Some applications

3.1. 留数与庞加莱问题。受 Darboux 的研究以及微分方程代数可积性问题的启发，H. 庞加莱于1891年提出了以下问题，参见 [47]

“是否可以根据叶状结构的次数来界定一条被叶状结构不变的不可约曲线的次数？”

这个问题等价于询问 $\mathbb{P}^2$ 上的全纯叶状结构何时具有有理第一积分。这个问题被称为 Poincar´é 问题。众所周知，一般情况下不存在这样的界，参见 [21]。然而，在某些假设下，即使对于旗和 Pfaff 系统，也已有若干部分答案和推广；例如参见 [15, 19, 21, 23, 24, 28, 33, 36, 37, 49, 51]。留数理论，尤其是 Baum-Bott 定理，是研究若干与具有奇点的叶状结构相关问题的有力工具，也可用于构造障碍。

一百年后，在（[21], 定理 1，第 891 页）中，Cerveau 和 Lins Neto 对庞加莱´问题给出了第一个部分答案。为此，考虑 S 一条射影节点曲线，即其所有奇点均为正规交叉型，并具有次数为 m的既约齐次方程 $f = 0$。

定理 3.1. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{CP}(2)$中的一个次数为 n的叶状结构，且 S 是其分离子。则$m \leq n + 2$。此外，若 $m = n + 2$，则 f 是可约的，且 $\mathcal{F}$ 为对数型，即由有理闭形式 $\sum \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$给出，其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}$，并且 f_i是齐次多项式。

几年后，Carnicer 在（[19], 定理，第 289 页）中以其他假设对庞加莱´问题给出了相同的界，即叶状结构在曲线上没有非判别性奇点。粗略地说，叶状结构 $\mathcal{F}$ 是非判别性的，当且仅当存在一个不可约曲面 Z，使得将 $\mathcal{F}$ 限制到 Z 后包含无穷多个不同的分离子。

定理 3.2. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的叶状结构， C 是 $\mathbb{P}^2$中的一条代数曲线。假设 C 被 $\mathcal{F}$ 所不变，且 $\mathcal{F}$ 在 C中没有双射奇点。那么

$$\deg C \leq \deg \mathcal{F} + 2.$$

M. Soares 在（[51], 定理 B，第 496 页）中将 Poincar´e 问题从 $\mathbb{P}^2$ 推广到 $\mathbb{P}^n$。利用 Baum-Bott 定理，Soares 改进了上述界限。事实上，设 $V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$、$n \geq 2$是次数为 d_0 且被 $\mathcal{F}^d$所不变的不可约非奇异代数超曲面，其中 $\mathcal{F}^d$是次数为 $d \geq 2$的非退化一维全纯叶状结构。那么我们有。

定理 3.3。

$$d_0 \leq d + 1.$$

在 [13] 中，Brunella 指出 GSV 指数是 Poincar´e 问题存在正解的障碍，并给出了一个可推出该指数具有非负性的简单条件。受 Brunella 工作的启发，Corrˆea 和 Machado 在 [28] 中为射影流形上由全纯 Pfaff 系统所不变的簇引入了一种 GSV 型指数。在一定假设下，作者证明了该指数具有非负性。因此，我们得到以下结果。

定理 3.4. 设 $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^k_{\mathbb{P}^n}(d + k + 1))$ 是一个秩为 k、次数为 d 的全纯 Pfaff 系统。设 $V \subset \mathbb{P}^n$ 是一个余维数为 k 、多次数为 $(d_1, \ldots, d_k)$ 且被 ω 不变的约化完全交簇。若 $\mathrm{Sing}(\omega, V)$ 在 V 中的余维为一，则

$$\sum_i GSV(\omega, V, S_i)\deg(S_i) = [d+k+1-(d_1+\cdots+d_k)](d_1\ldots d_k),$$

其中， S_i 表示 Sing(ω, V) 的一个不可约分支。特别地，如果对于所有 i， $GSV(\omega, V, S_i)$ $\geq$0，则有

$$d_1+\cdots+d_k \leq d+k+1.$$

3.2. 留数与极小集的不存在性。设 $\mathcal{F}$ 是紧流形 X. 上的全纯叶状结构。若非空紧子集 $\mathcal{M} \subset X$ 满足以下性质，则称其为 $\mathcal{F}$ 的非平凡极小集

a) $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{F}$下不变；b) $\mathcal{M}\cap$Sing($\mathcal{F}$) $=\emptyset$；c) 关于
性质 a) 和 b)， $\mathcal{M}$ 是极小的。

接下来，我们将探讨如何利用留数理论研究叶状结构是否存在非平凡极小集这一问题。

Camacho、Lins Neto 和 Sad 在 [17]中研究了复射影空间上余维一全纯叶状结构的上述问题。作者在 $\mathbb{P}^2$上探讨了这一问题。更确切地说，他们证明了极小集具有一项几何性质：通过对调和函数应用极大值原理，他们证明 $\mathcal{F}$ 至多有一个非平凡极小集。此外，在对叶状结构的奇点施加一般性条件时，所有叶都会聚集到该集合上。不过，一般而言，关于 $\mathbb{P}^2$ 的问题仍是一个开放问题。

在复射影空间具有更高维数的情况下，Lins Neto（[45],定理 1，第 1370 页）扩展了上述讨论，并证明了以下结果。

定理 3.5。在 $\mathbb{P}^n$ 上的余维一叶状结构 $n \geq 3$ 没有非平凡极小集。

我们想强调的是，留数理论对于证明定理 3.5 至关重要。事实上，证明中的一个主要论证是以下命题（[45], 命题 1，第 1372 页），它是 Baum-Bott 定理的推论。

命题 3.6。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{CP}^2$ 上次数为 k 的叶状结构，其奇异集 Sing($\mathcal{F}$) 的复余维数为 2。则

$$\sum_{p\in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p) = (k+2)^2.$$

特别地 $\sum_{p\in\text{Sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p)$ 对于任意 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{CP}^2$上的叶状结构均为正。

在（[16], 定理 1.2，第 296] 页）中，作者利用 Baum-Bott 定理，将 Lins Neto 关于复射影流形上的余维一全纯叶状结构且 Picard 群为循环群的结果进行了推广。

定理 3.7. 设 X 是一个维数至少为 3 且 Pic(X) $=\mathbb{Z}$ 的复射影流形，并设 $\mathcal{F}$ 是 X上的余维一叶状结构。那么，每个叶状结构 $\mathcal{F}$的叶 L 都累积到奇异集 Sing($\mathcal{F}$)：

$$\overline{L}\cap \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset.$$

定理 3.7 是对 Brunella 猜想的部分回答，参见（[14], 猜想 1.1，第 3102 页），适用于 Pic(X) $= \mathbb{Z}$ 的特殊情形。最近，在 2021年，M. Adachi 和 J. Brinkschulte 已经证明了 Brunella 猜想，且不对流形 X作任何假设，参见（[3], 主要定理，第 1 页）。

定理 3.8。设 X 是一个维数为 ≥ 3的紧复流形。设 $\mathcal{F}$ 是 X 上具有丰沛法丛 $N_{\mathcal{F}}$的余维一全纯叶状结构。那么， $\mathcal{F}$ 的每个叶都累积到 Sing($\mathcal{F}$)。

Brunella 猜想已推广到高余维叶状结构（[29], 猜想 1.2，第 1236 页），但仍然是一个开放问题。然而，在 [30] 中，作者利用全纯叶状结构的不变流的 Brunella-Khanedani-Suwa 变分型留数定理，给出了叶累积到全纯叶状结构的奇异集与不变流支集之交集的条件。

References

[1] A. G. Aleksandrov, 《向量场的指标与对数微分形式》 *Funct. Anal. Appl.* 39(4) (2005) 245-255。[2] M. Atiyah 和 F. Hirzebruch, 《复流形上的解析循环》 *J. Topology* 1 (1961), 25-45。[3]M. Adachi 和 J. Brinkschulte, 《具有丰沛法丛的叶状结构的动力学方面》*https://arxiv.org/abs/2105.10226v2*[4] P. Baum 和 R. Bott, 《全纯叶状结构的奇点》 *J. Differential Geom.* 7 (1972) 279-342。[5] P. Baum 和 R. Bott, 《关于亚纯向量场的零点》 *Essays on Topology and RelatedTopics. Mémoires dédiés à Georges de Rham* 施普林格, 柏林, 1970, 29-47。[6] P. Baum, 《叶状结构奇点的结构》 *Adv. Math.* 15 (1975) 361-374。[7] J.-M. Bismut, 《局部化公式、超联络与族的指标定理》 *Comm. Math.Phys.* 103 (1986), 第1期, 127-166。[8] F. Bracci 和 T. Suwa, 《奇异对的全纯叶状结构的留数》 *Adv. Geom.* 5, 1, (2005), 81-95。[9] F. Bracci 和 T. Suwa, 《鲍姆-博特留数的扰动》 *Asian Journal of Mathematics* 第19卷（2015）第5期, 页码：871-886。[10] J.-P. Brasselet 和 T. Suwa, 《奇异全纯叶状结构的 Nash 留数》 *Asian J. Math.* 4 (2000), 37-50。[11] J.-P. Brasselet、M. Corrˆea 和 F. Louren.co, 《全纯叶状结构旗的留数》 *Adv. Math.*320, 第7期（2017）, 1158-1184。[12] J.-P. Brasselet、J. Seade 和 T. Suwa, *Vector Fields on Singular Varieties*。《数学讲义》, Spring, 2009。[13] M. Brunella, 《关于全纯向量场指标的一些注记》 *Publ. Mat.* 41(2):527-544。[14] M. Brunella, 《具有丰沛法丛的余维一全纯叶状结构的动力学》*Indiana Univ. Math. J.* 57(7) (2008), 3101-3113。[15] M. Brunella 和 L. G. Mendes, 《界定 Pfaff 方程解的次数》 *Publ. Mat.* 44(2), 593-604 (2000)。[16] M. Brunella 和 C. Perrone, 《余维一全纯叶状结构的例外奇点》 *Publ.Mat.* 55 (2011), 295-312。[17] C. Camacho、A. Lins Neto 和 P. Sad, 《复射影空间上叶状结构的极小集》 *Publications Mathematiques de l'IHES* 68(1988), 187-203。[18] C. Camacho 和 A. Lins Neto, *Geometric theory of foliations*。《Birkh¨auser Boston Inc.》, 1985。[19] M. Carnicer, 《非非临界情形下的 Poincar´e 问题。 *Ann. Math.* 140(2), 289-294 (1994)。[20] C. Camacho 和 P. Sad, 《穿过全纯向量场奇点的不变簇》 *Ann. ofMath.* 115 (1982), 579-595。[21] D. Cerveau 和 A. Lins Neto, 《具有 $\mathbb{P}^2$ 不变代数曲线的 *Ann.*全纯叶状结构》*Inst. Fourier* (格勒诺布尔) 41 (1991), 883-903。

[22] D. Cerveau, 《关于叶状结构的线性铅笔、´以及 Brunella 猜想》 $\mathbb{CP}^3$ ，第2期。441-451 (2002)。 *Publ. Mat.* 46M. Corrˆea 和 M. G. Soares, 《关于拟齐次叶状结构的 Poincar[23] é 问题的一则注记》´ *Proceedings*第140卷，第9期，2012年9月，3145-3150页。*of the American Mathematical Society*M. Corrˆ eaand M. G. Soares, 《关于分布旗和叶状结构旗的示性数不等式》[24] 第24卷，第11期（2013）1350093（ 12页）。*International Journal of Mathematics*M. Corrˆea、A. M. F. Silva、D. S. Machado 和 F. Louren[25] co, 《关于复¸流形上的高斯–博内型与 Poincar´é-Hopf 型定理》 *∂*，第21卷，493-506页，2021年。 *Moscow Mathematical Journal (ONLINE)*M. Corrˆea 和 F. Louren[26] co, 《高维叶状结构的鲍姆-博特留数 的确定》¸(23)，527-538，2019年。*Asian Journal of Mathematics* M. Corrˆea、A. M. Rodriguez Pe[27] na 和 M.G. Soares, 《复轨形上的 Bott 型留数公式》˜，第10期，2889-2911。*Int. Math. Res. Not. IMRN* 2016 M. Corrˆea 和 D. S. Machado, 《全纯 Pfaff 系统的 GSV 指数》[28] *Documenta Mathematica*，第25卷， 1011-1027页，2020年。*(PRINT)*M. Corrˆea 和 A. Fern[29] andez-P´erez, 《绝对 k-凸域与齐性流形上的全纯 叶状结构》´第69卷，第3期（2017），1235-1246页。 *Journal of the Mathematical Society of Japan* M. Corrˆea、A. Fern[30] andez-P´erez 和 M. G. Soares, 《不变流的 Brunella-Khanedani-Suwa 变分留数》´第 23卷（2021），107-115。 *Journal of Singularities*M. Corrˆea 和 D. S. Machado, 《对数叶状结构的留数公式 及其应用》[31] *Trans.*(2019)，6403-6420。*Amer. Math. Soc.* 371M. Dia, 《关于鲍姆-博特留数》[32] 第 XIX卷，第2期，2010年，第363-403页。´E. Esteves 和 S. L. Kleiman, 《界定 Pfaff 方程的解》 *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (8)，3771-3793 (2003)。[33] B. L. Feigin, 《叶状结构旗的 特征类》 *Commun. Algebra* 31第9卷，第4期，1975年10月，第312-317页。[34] A. Fernandez-Perez 和 J. Tamara, 《余维一全纯叶状结构的 Lehmann-Suwa 留数及其应用》 *Functional Analysis and Its Applications* 第24卷，第4期，第653-670页，2020年8月。[35] A. M. Ferreira 和 F. Louren *Asian J. Math.* co, 《全纯分布 旗的鲍姆-博特留数》[36] .，第33卷，第13期，2250087（2022）。 *International*C. Galindo 和 F. Monserrat, 《Poincar*Journal of Mathematics* é 问题、代数可积性与非临界除子》[37] ´，256，3614-3633 (2014)。 *J.*X. G*Differ. Equ.*omez-Mont, 《具有孤立奇点的超曲面上向量场指标的代数公式》[38] ，7 (1998)， 第4期，731-752。´X. G *J. Algebraic Geom.* omez-Mont、J. Seade 和 A. Verjovsky, 《具有孤立奇点的全纯流 的指标》[39] ，291 (1991)，737-751。´L. Giraldo、X. G*Math. Ann.* omez-Mont 和 P. Mardesi[40] c, 《关于 与具有非孤立奇点的超曲面相切的向量场的指标》´，第2期，第65卷（2002），第2期，418-438。´P. Griffiths 和 J. Harris， *J. London Math. Soc.* BJohn Wiley & Sons，纽约，1978。[41] B. Khanedani B. 和 T. Suwa, 《全纯形式的一阶变分及其若干应用》 *Principles of algebraic geometry* [42] ： 2 (1997)，323-335页。 *Hokkaido*D. Lehmann, 《奇异叶状结构的不变子簇的留数》*Math. J.* 26(1991)，211-258。[43] D. Lehmann 和 T. Suwa, 《奇异簇上全纯叶状结构的变分推广与鲍姆-博特留数》´第10卷（3），367-384页（ 1999）。´A. Lins Neto, 《关于射影 Levi 平坦结构和代数叶状结构极小集的一则注记》´，格勒诺布尔49，4 （1999），1369-1385。 *Ann. Inst. Fourier* 41R. S. Mol, 《全纯叶状结构旗》[44] 第83卷，第3期，里约热内 卢，2011年9月。 *International Journal of Mathematics* M. H. Poincar[45] é, 《一阶一次数微分方程的代数 积分》 *Ann. Inst. Fourier*巴勒莫5，161-191（1891年）。[46] M. Passare、A. Tsikh 和 A. Yger, 《 Bochner-Martinelli 型留数流》 *An. Acad. Bras. Ciênc.* [47] 《数学出版物》，第44卷（2000），85-117。´ J.V. Pereira, 《关于一般型叶状结构的 Poincar´é 问题》´(2)，217-226 (2002)。

[50] S. Sertoz，全纯叶状结构的留数 *Proc. Compositio Math.* 70 （1989年），第227-243页。[51] M. G. Soares，关于一维叶状结构不变超曲面的庞加莱问题 *Invent.Math.* 128，495-500（1997年）。[52] M. G. Soares，点留数讲义 *Monografias del IMCA* N28 ISBN 9972-899-090-8，IMCA，秘鲁´（2002年）。[53] T. Suwa，数学新论丛书，巴黎，1998年。ISBN 2 7056 6361 4。向量场的指标与奇异全纯叶状结构的留数。[54] T. Suwa，复解析叶状结构奇点的留数 *J. Math. Soc. Japan* 36 （1984年），37-45。[55] T. Suwa, *Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 20 (eds V. Blanloeil and T. Ohmoto; European Mathematical Society, Zurich, 2012) 207-247.*《几何与拓扑中的奇点》，斯特拉斯堡，2009年，IRMA，奇异全纯分布的留数。[56] M. S. Vishik，解析叶状结构的奇点与特征类 *Functional Anal. Appl.* 7 （1973年）1-15。[57] W. P. Zhang，关于Bott留数公式的一点说明 *Acta Math. Sinica (N.S.)* 6 （1990年），第4期，306-314。Fernando Lourenço, DMM - UFLA , Campus Universitário, Lavras MG, Brazil, CEP 37200-000*Email address*: fernando.lourenco@ufla.brFernando Reis, DMA - UFES, Rodovia BR-101, Km 60, Bairro Litorâneo, São Mateus-ES, Brazil, CEP 29932-540 *Email address*: fernando.reis@ufes.br