arXiv:2302.03760v2 [math.OA] 9 Apr 2023

具有希尔伯特对偶和 C^*-Fredholm 算子的希尔伯特 C^*-模

VLADIMIR MANUILOV 和 EVGENIJ TROITSKY

Abstract. 我们研究 C^*-代数 A 上的希尔伯特 C^*-模，其中 Banach A-对偶模具有自然的希尔伯特 A-模结构。为此，我们证明：若 A 单调完备， M 和 N 是希尔伯特 A-模， M 是自对偶的，且T: $M \to N$及其 Banach A-对偶 T': $N' \to M'$的核与余核均为平凡的，则$M \cong N'$。借助这一结果，对于单调完备的 C^*-代数 A，我们证明，任意 A-Fredholm 算子的指标都可以像希尔伯特空间情形那样，计算为其核与余核之差。

1. Introduction

希尔伯特 C^*-模由 W. Paschke 于 [14] 引入，作为将希尔伯特空间推广到模上的概念，其中的内积取值于 C^*-代数 A ，也取值于 A。

本文讨论右希尔伯特 C^*-模，即 A从右侧作用于模 M ，且内积满足 $\langle m, na\rangle = \langle m, n\rangle a$, $\langle ma, n\rangle = a^*\langle m, n\rangle$, $m, n \in M$,$a \in A$。对偶模 M' 由所有有界的反-A-线性映射 f: $M \to A$ （称为泛函）组成，即满足 $f(ma) = a^* f(m)$ 的映射。对偶模是一个巴拿赫 A-模，其乘法定义为 $(fa)(m) = f(m)a$，但不一定是希尔伯特 C^*-模；映射 $m \mapsto \widehat{m} = \langle \cdot, m\rangle$ 是等距嵌入 $M \subset M'$。若模 M中的这一包含映射是同构，则称其为自对偶模。自对偶模具有许多良好性质，例如 [14, 1]（以及 [12]），但并不常见。与第一对偶模不同，第二对偶模 M''具有自然的希尔伯特 C^*-模结构，并且存在等距嵌入 $M \subset M'' \subset M'$。至此问题便告一段落，因为 M'''与M' [15,定理 2.4]典范同构（见下文定理 2）。若模 M满足 $M = M''$，则称其为自反模。自反模不如自对偶模那样具有良好的性质，但仍具有后者的一些优良性质，例如 [1, 5, 4] （以及 [12]）。剩下的等式 $M' = M''$曾在[10],中讨论，当时这类模被称为具有希尔伯特对偶的模。

代数上的希尔伯特 C^*-模具有一些特殊性质，使其更接近希尔伯特空间。特别是，尽管它们不一定是自对偶的，内积仍可扩张到对偶模上，使其也成为希尔伯特 W^*-模。单调完备的 C^*-代数 [3], 也具有相同性质，因此，任何以此类代数为底的希尔伯特 C^*-模都有希尔伯特对偶。

众所周知，若两个希尔伯特空间之间存在一个有界算子 T: $H_1 \to H_2$ ，其核和平凡余核均为平凡的，则 H_1 和 H_2 同构。希尔伯特空间之间的差异仅在于基数，但构造同构时需要对 T作极分解，而它未必可逆。

2000年数学主题分类：46L08；58B34。关键词和短语：希尔伯特 C^*-模、单调完备的 C^*-代数、 A-Fredholm 算子、对偶模、自对偶模、正交补、极分解。本文得到俄罗斯科学基金会项目 21-11-00080 的资助。

将希尔伯特空间换成希尔伯特 C^*-模后，问题就变得更加复杂，而且一般情况下显然不成立。我们的目的是阐明在什么条件下，才能证明两个希尔伯特 C^*-模 M 和 N（它们定义在一个 C^*-代数 A 上）若由有界算子 $T\colon M \to N$连接，则彼此同构。我们的主要结果表明，若 A 单调完备， M自对偶，且 T及其对偶 $T'\colon N' \to M'$的核与余核均为平凡的，则 $M \cong N'$（定理 9）。作为应用，我们将一个关于 A-Fredholm 算子分解的结果从 [2] 推广到 A 单调完备的情形（定理 15），并修正了 W^* 情形下的证明。

致谢：作者感谢 Michael Frank 和斯特凡·伊夫科维奇所进行的宝贵讨论，也感谢一位匿名审稿人认真审阅论文的第一版，并提出非常有帮助且友善的批评意见。

2. Preliminaries

Hilbert C^*-模、可伴算子与不可伴随算子的定义及其基本性质，可参见教科书，例如 [14, 12, 7, 11]。

回顾一下，对偶模和二重对偶模的典范嵌入 [15]。对于 $m \in M$，定义 $\dot{m} \in M''$ 如下：

$$\dot{m}(f) = (f(m))^*, \quad f \in M'. \tag{1}$$

$\widetilde{\ }$映射 $m \mapsto \dot{m}$是从 M到 M''的等距模映射。对于 $X \in M''$，定义 $X \in M'$如下：$\sim X(m) = X(\widehat{m})$，其中 $m \mapsto \widehat{m}$, $M \to M'$已在上文定义。因此，若将 M与其在 $m \mapsto \widehat{m}$下的像 $\widetilde{\ }$视为同一对象，则 X 是 X 在 M上的限制。注意，

$$(\dot{m})\widetilde{\ } = \widehat{m} \quad \text{for all } m \in M. \tag{2}$$

$\widetilde{\ }$显然，映射 $X \mapsto X$是从 M''到 M'的模映射，并且对于 $X \in M''$，有 $\|X\|_{M'} \le \|X\|_{M''}$。此外，由下述命题可知，该映射是一个等距映射。

$\widehat{\ }$命题 1（ [15]中的命题 2.1）。设 N是 M'的一个包含 M的子模。对于任意 $f \in N'$，有 $\|f\|_{N'} = \|f|_{\widehat{M}}\|$，其中

$$\|f\|_{N'} = \sup_{m \in N, \|m\| \le 1} \|f(m)\|. \tag{3}$$

作出所有允许的识别后，我们便可将这些模 M、 M' 和 M'' 排列如下

$$M \overset{D}{\subseteq} M'' \overset{I}{\subseteq} M', \qquad D(m) = \dot{m}, \quad I(X) = \widetilde{X}, \qquad I \circ D(m) = \widehat{m} \tag{4}$$

由 (2) 得。

在 [15] 中引入内积

$$\langle \cdot, \cdot \rangle'' : M'' \times M'' \to A, \qquad \langle X, Y \rangle'' = Y(I(X)), \tag{5}$$

并证明以下命题。

定理 2（ [15]中的定理 2.4）。映射 (5) 是 M'' 上取值于 A 的内积。由此内积得到的范数与 M'' 上的初始（算子）范数一致。映射I由 (4) 给出，是从 M'' 到 M' 的等距映射。

3. Hilbert C^*-modules with Hilbert dual

定义 3（[10]）。若希尔伯特 C^*-模 M 上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 可扩张为 M' 上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$，且满足

- $f(m) = \langle\widehat{m}, f\rangle'$对任意 $m \in M$ 和任意 $f \in M'$（特别地，$\langle\widehat{m},\widehat{n}\rangle' = \widehat{n}(m) = \langle m, n\rangle$ 对任意 $m, n \in M$）；
- M' 关于由内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ 确定的范数是完备的。

命题 4. M 是具有希尔伯特对偶的希尔伯特 C^*-模，当且仅当 $I(M'') = M'$。

证明。若 $I(M'') = M'$，则可在 M' 上考虑诱导内积：$\langle f, g\rangle' := \langle I^{-1}(f)\ I^{-1}(g)\rangle''$，其中 f, $g \in M'$。令 $X = I^{-1}(f)$。于是，由 (2) 和 (5),

$$\begin{aligned}\langle\widehat{m}, f\rangle' &= \langle I^{-1}(\widehat{m}), X\rangle'' = \langle I^{-1}I(\dot{m}), X\rangle'' \\ &= (\langle X, \dot{m}\rangle'')^* = (\dot{m}(I(X)))^* = (\dot{m}(f))^* \\ &= f(m).\end{aligned}$$

反过来，设 M 是一个具有希尔伯特对偶的希尔伯特 C^*-模，且 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ 是 M 上内积到 M' 的扩张。那么，除了 M' 上的标准（算子）范数 $\|f\|_{M'}$（见（3））之外，还有范数 $\|f\|' = \|\langle f, f\rangle'\|^{1/2}$, $f \in M'$。由于 M' 关于这两种范数都是完备的，并且我们有如下估计：根据定义 $3\ \langle f, \widehat{m}\rangle'\langle\widehat{m}, f\rangle' \leq (\|\widehat{m}\|')^2\langle f, f\rangle' = (\|m\|)^2\langle f, f\rangle'$（例如参见 [12, 命题 1.2.4]）以及

$$\begin{aligned}(\|f\|')^2 &= \|\langle f, f\rangle'\| \geq \Big(\sup_{m\in M,\ \|m\|\leq 1}\|\langle f, m\rangle'\|\Big)^2 \\ &= \Big(\sup_{m\in M,\ \|m\|\leq 1}\|f(m)\|\Big)^2 = (\|f\|_{M'})^2.\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{Id} : (M', \|.\|') \to (M', \|.\|_{M'})$ 是一个单射有界满同态，且这两种范数等价，即存在 $c > 0$，使得对任意 $f \in M'$ 都有 $\|f\|_{M'} \leq \|f\|' \leq c\|f\|_{M'}$。给定 $f \in M'$，考虑映射 $g \mapsto \langle g, f\rangle'$, $M' \to A$。显然它是反-A-线性的。由于这两种范数等价，该映射由 $c\|f\|_{M'}$ 有界。因此，该映射是 M' 上的一个泛函，即属于 M''。这给出了一个有界映射 $\Phi\colon M' \to M''$, $\|\Phi\| \leq c^2$，因为

$$\|\Phi(f)(g)\| = \|\langle g, f\rangle'\| \leq \|g\|'\|f\|' \leq c^2\|g\|_{M'}\|f\|_{M'}.$$

考虑复合映射 $I \circ \Phi\colon M' \to M'$。那么，对任意 $f \in M'$, $m \in M$,

$$I \circ \Phi(f)(m) = \Phi(f)(\widehat{m}) = \langle\widehat{m}, f\rangle' = f(m).$$

因此，映射 $I \circ \Phi$ 是恒等映射。所以，I 是满态射，且 $I(M'') = M'$。此外，由于 I 是等距映射，Φ 是等距同构，因此事后可以取 $c = 1$。□

证明的最后部分表明，对于具有希尔伯特对偶的希尔伯特模，M' 上的所有内积都生成相同的范数，因此与 M' 上的算子范数一致（另见[10,命题 3]）。

还可推出，若 M 具有希尔伯特对偶，则 M'（此时是一个希尔伯特 C^*-模）是自对偶的。

任何自对偶希尔伯特 C^*-模显然都是具有希尔伯特对偶的模。[14] 证明了，任意 W^*-代数上的希尔伯特 C^*-模都是具有希尔伯特对偶的模；[6, 9, 3] 还证明了，对于一个稍大的 C^*-代数类，同样的结论也成立，即

对于单调完备的代数也是如此。此外， [3] 中的定理 4.7（由[6]直接推出）指出， C^*-代数 A 上的任意希尔伯特 C^*-模具有希尔伯特对偶，当且仅当A 是单调完备的。

单调完备代数这一类之外，也存在具有希尔伯特对偶的希尔伯特 C^*-模（定义在 C^*-代数上）的例子。

例 5. 设 X 是一个局部紧豪斯多夫空间， $M = C_0(X)$ 是 X 上在无穷远处消失的连续函数代数，并设 $A = C_b(X)$ 是它的乘子代数，即 X 上所有有界连续函数构成的代数。于是，我们可以将 M 看作定义在 A 上的希尔伯特 C^*-模。

我们来验证 $M' = C_b(X)$。包含映射 $C_b(X) \subseteq M'$ 显然成立。现在设 $\varphi \in M'$。考虑 X 上由实值紧支撑函数组成的一个可数单位分解 $\{f_i\}$ 。那么，对任意 $a \in M$，都有 $a = \sum_i af_i$ 一致成立。于是， $\varphi(a) = \sum_i \varphi(af_i) = \sum_i \varphi(f_ia) = \sum_i a^*\varphi(f_i)$ 一致成立。因此，$\sum_i \varphi(f_i)$ 是 $C_0(X)$ 的一个乘子，对应于 φ。

因此， $M' = A$是一个 A 上的希尔伯特模。显然， $M'' = M'$，因为每个定义在含幺 A 上的 A-泛函都由其在 1_A 处的取值决定。

回想一下，交换代数单调完备，当且仅当它是 AW*-代数，当且仅当其谱极端不连通。因此，如果 X 不是极端不连通的（例如 $X = (0, 1)$），那么 $C_0(X)$ 给出了一个具有希尔伯特对偶的希尔伯特 C^*-模的例子，尽管其底层的 C^*-代数 $C_b(X)$ 并非单调完备。

4. Around polar decomposition in Hilbert C^*-modules

[2] 的命题 2 声称：若 $T : M \to N$ 是定义在某个 W^*-代数上的希尔伯特 C^*-模之间的单射有界模态射， $T(M)^{\perp\perp} = N$，且若 M 是自对偶的，则 $T(T^*T)^{-1/2}$ 是一个有界模同构 $M \cong N$ （尽管 $(T^*T)^{-1/2}$ 可能无界）。S. Ivkovic 告知我们，该证明存在问题，因此促使我们修正这一说法。下面给出一个反例。

例 6. 设 $A = l_\infty$ 为有界数列的 W^*-代数， $M = A$。我们将使用记号 $\delta_n \in A$ 表示第 n个位置上唯一一个单位元、其余位置为零的数列，$\delta_n = (0, ..., 0, 1, 0,...)$。考虑所有形如 $x = (a_1, a_2,...)$ 且每个 $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$ 满足 $a_n = \delta_n a_n$ 的数列所构成的闭子模 $N \subset l_2(A)$。如果该集合不是闭集，则取其闭包。

固定 $\lambda_n = n^{-1}$，并令 $T(a) = (\lambda_1\delta_1 a, \lambda_2\delta_2 a, ...) \in N, a \in A$。则 T： $M \to N$是单射，且 $T(M)^\perp = 0$属于 N。令 $f = T(T^*T)^{-1/2}$，则 $f(a) = (\delta_1 a, \delta_2 a, ...)$。 f的值域大于 N（例如，它包含 $f(1) = (\delta_1, \delta_2, ...)$，而这不属于 N）。此外， $M = A$与 N不等距同构。

[2] 中命题 2的证明出现错误，是因为 f 将 M 映射到的并非 N，而是对偶模 N'。Lin 关于极分解 [8]的证明也有类似问题：他使用了包络 W^*-代数上算子的极分解，但该分解中的酉算子映射到了对偶模中。

修正 [2] 中命题 2最简单的方法，是要求 N具有自对偶性（见下文推论10）。

我们想要 pu 进一步探讨这个问题，并去除对 N自对偶性的要求 .

设 $T\colon K\to M$ 是两个希尔伯特 C^*模之间的算子。定义 $T^{\#}\colon M\to K'$，使得 $(T_{\#}m)(k)=\langle Tk,m\rangle$, $m\in M$, $k\in K$。若 $K\subset M$，则我们将相应的包含映射记为 J，$J\colon K\to M$。

引理 7. 假设 $K\subset M$, $K^{\perp}=0$, M 是自对偶的，且 K 有希尔伯特对偶。那么$\|\langle J_{\#}m,J_{\#}m\rangle'\|=\|\langle m,m\rangle\|$对任意 $m\in M$均成立。此外，$J^{\#}\colon M\to K'$是一个同构。

证明。映射 $J_{\#}$由 $(J_{\#}m)(k)=\langle J(k)\ m\rangle$给出。注意，$J^{\#}$是一个压缩映射。事实上，

$$\begin{aligned}\|J^{\#}(m)\| &= \sup_{k\in K,\|k\|\le 1}\|J^{\#}(m)(k)\|\\ &= \sup_{k\in K,\|k\|\le 1}\|\langle J(k),m\rangle\|\le\|m\|.\end{aligned}$$

因此，

$$\|\langle J^{\#}m,J^{\#}m\rangle'\|\le\|\langle m,m\rangle\| \tag{6}$$

对任意 $m\in M$均成立。

For $k,k'\in K$, we have $J^{\#}(J(k))(k')=\langle J(k'),J(k)\rangle=\langle k',k\rangle$, i.e., $J^{\#}(J(k))=\widehat{k}$.

定义映射 $Q\colon K\to M$。设 $\tau\in K$。那么映射

$$m\mapsto\bar{\tau}(m)=\langle J^{\#}m,\tau\rangle'$$

是定义在 M 上的一个泛函（代数性质显然，有界性则由 $J^{\#}$ 的有界性得出）。由 M 的自对偶性可知，存在唯一的 $m_\tau\in M$ 使得对任意 $m\in M$，$\bar{\tau}(m)=\langle m,m_\tau\rangle$。令 $Q(\tau)=m_\tau$。

于是 $\bar{\tau}(m_\tau)=\langle m_\tau,m_\tau\rangle$，由 (6) 可得

$$\begin{aligned}\|m_\tau\|^2 &= \|\langle m_\tau,m_\tau\rangle\|=\|\langle\tau,J^{\#}(m_\tau)\rangle'\|\\ &\le \|\tau\|\cdot\|\langle J^{\#}(m_\tau),J^{\#}(m_\tau)\rangle'\|^{1/2}\\ &\le \|\tau\|\cdot\|\langle m_\tau,m_\tau\rangle\|^{1/2}\\ &= \|\tau\|\cdot\|m_\tau\|,\end{aligned}$$

由此得 $\|m_\tau\|\le\|\tau\|$，且 $\|Q\|\le 1$。

考虑复合映射 $Q\circ J_{\#}\colon M\to M$。令 $\tau=J^{\#}(m)$，$n=m_\tau$。于是 $Q\circ J_{\#}(m)=n$，并且

$$\langle k,n\rangle=\bar{\tau}(k)=\tau(k)=\langle k,m\rangle$$

对任意 $k\in K$。由于 $K^{\perp}=0$，我们有 $n=m$，即 $Q\circ J^{\#}=\mathrm{id}_M$。由于 Q 和 $J_{\#}$ 都是压缩映射，$J^{\#}$ 是一个等距嵌入。

按相反顺序取复合映射，对任意 $\tau\in K'$ 和 $k\in K$，有

$$\begin{aligned}(J^{\#}\circ Q(\tau))(k) &= (J^{\#}(m_\tau))(k)=\langle J(k),m_\tau\rangle\\ &= \overline{\tau}(J(k))=\langle J^{\#}J(k),\tau\rangle'\\ &= \langle\widehat{k},\tau\rangle'=\tau(k)\end{aligned}$$

以及 $J^{\#}\circ Q=\mathrm{id}_{K'}$。因此，如上所述，$Q$是等距嵌入。由此，$Q$和 $J_{\#}$都是等距同构。□

C推论 8。映射 $J^{\#}$满足 $\langle J_{\#}m,J_{\#}m\rangle'=\langle m,m\rangle$对于任意 $m\in M$.

证明。根据引理 引理 7 及其证明表明， $J^{\#}$ 是一个等距映射，其逆等距映射为 Q。因此，

$$\begin{aligned}\langle m,m\rangle &= \langle QJ^{\#}m, QJ^{\#}m\rangle \leq \|Q\|^2\langle J^{\#}m, J^{\#}m\rangle' \\ &= \langle J^{\#}m, J^{\#}m\rangle' \leq \|J^{\#}\|^2\langle m,m\rangle \\ &= \langle m,m\rangle.\end{aligned}$$

□

定理 9. 设 A 是单调完备的 C^*-代数， M、 N 是定义在 A 上的 Hilbert C^*-模，且 M自对偶；设 $T\colon M\to N$是一个满足 $(T(M))^{\perp\perp}=N$、$\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$且 $\mathrm{Ker}(T')=\{0\}$的算子，其中 $T'\colon N'\to M'$是伴随算子。则 $M\cong N'$。

证明。我们有 $T'\colon N'\to M'$是自对偶模之间的态射（见定理 2），且 $\mathrm{Ker}(T')=\{0\}$。由于 M是自对偶的， T是可伴随的 [14]。有 $0=\langle T^*(n)\ m\rangle=\langle n,\ T(m)\rangle$，并且 $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$ 蕴含 $(T^*(N))^{\perp}=\{0\}$。

记 $\Lambda_M\colon\ M\to M', m\mapsto\widehat{m}$，以及 $\Lambda_N\colon\ N\to N', n\mapsto\widehat{n}$。那么 T^*和 T'由以下交换图连接：

(7)
$$\begin{array}{ccc} M' & \xleftarrow{T'} & N' \\ {\scriptstyle\cong}\uparrow{\scriptstyle\Lambda_M} & & \uparrow{\scriptstyle\Lambda_N} \\ M & \xleftarrow[T^*]{} & N. \end{array}$$

因此 $(T^*(N))^{\perp}=\{0\}$ 蕴含 $(T'(N'))^{\perp}=\{0\}$。

由于 N'是自对偶的， T'是可伴随的 [14]。令 $S=((T')^*T')^{1/2}\colon\ N'\to N'$。那么$S(N')^{\perp}=\{0\}$。事实上，若 $f\in S(N')^{\perp}_{N'}$，则对于 $f'=S(f)$，有

$$0=\langle S(f'),f\rangle=\langle (T')^*T'f,f\rangle=\langle T'f,T'f\rangle$$

且 $f=0$。记 $S(N')$的范数闭包为 K。若 J表示 K到 N'中的包含映射，则 $J^{\#}\colon N'\to K'$是上述等距同构（由于 A是单调完备的，所有模都带有希尔伯特对偶）。我们可以应用引理 7 和 8，因为 N' 是自对偶的，且 $K^{\perp}\subseteq S(N')^{\perp}=\{0\}$。

由于 $\langle T'f,T'f\rangle=\langle Sf,Sf\rangle$，由 $U_0(Sf):=T'f$定义的映射 $U_0\colon\ S(N')\to M'$是等距嵌入，并且可通过连续性延拓为等距嵌入 $U:\ K\to M'$（因为 M' 是完备的）。注意

$$U(K)^{\perp}\subseteq(U_0(S(N')))^{\perp}=(T'(N'))^{\perp}=\{0\}.$$

因此，由于 M' 是自对偶的，我们可以应用引理 7 和 8。由此得到一个等距同构 $U_{\#}\colon M'\to K'$。于是 $(J^{\#})^{-1}\circ U_{\#}\colon M'\cong K'\cong N'$是所需的等距同构。□

推论 10. 设 A 是单调完备的 C^*-代数， M, N 是 A 上的自对偶 HilbertC^*-模，且 $T:\ M\to N$ 是一个满足 $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$的算子。假设 $(T(M))^{\perp\perp}=N$。则 $M\cong N$。

证明。在自对偶情形下， Λ_N是一个同构，且 $T'=\Lambda_M\circ T^*\circ(\Lambda_N)^{-1}$（见（7））。若$T(M)^{\perp}=\{0\}$，则核$(T^*)=\{0\}$。事实上，假设 $T^*(n)=0$，那么对于任意 $m\in M$，都有 $\langle T^*n,m\rangle=0$，因此对于任意 $m\in M$，都有 $\langle n,Tm\rangle=0$，即 $n\perp T(M)$。因此， $n=0$且核$(T^*)=\{0\}$。由此可知，在此情形下，核$(T')=\{0\}$ 这一性质可由其他条件推出。□

5. Decompositions into direct sums

这里我们说明，[2], 中的推论 3 尽管基于一个错误的陈述，却仍然成立。此外，我们将其从关于 W^*代数上的希尔伯特 C^*-模的情形推广到关于单调完备 C^*代数的情形。

以下命题对于 W^*-代数上的希尔伯特 C^*-模是已知的（[2], [12, 引理 3.6.1]）。

引理 11. 设 L 是自对偶希尔伯特 C^*-模，且 $K \subseteq L$ 是具有希尔伯特对偶的希尔伯特 C^*-子模。则有正交分解： $L = K^{\perp\perp} \oplus K^{\perp}$.

证明。对于包含映射 $i : K \subseteq L$，考虑自对偶希尔伯特模的巴拿赫伴随映射 $R = i' : L' \to K'$。映射 R 由 $R(f)(k) = f(i(k)), \quad f \in L', k \in K$ 给出，并满足公式

$$R(\widehat{l})(k) = \widehat{l}(i(k)) = \langle i(k), l\rangle_L = \langle \widehat{i(k)}, \widehat{l}\rangle_{L'}, \quad l \in L, k \in K. \tag{8}$$

由于 K' 和 L 都是自对偶的， R 存在希尔伯特 C^*-模伴随态射 $R^* : K' \to L' \cong L$。

我们声称， R^*R 是一个投影，并且 $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Ker}(R^*R)$。

若能证明 $RR^* = \mathrm{id}_{K'}$，第一个断言便可得出。注意到 R^* 满足 $\langle f, R(l)\rangle_{K'} = \langle R^*(f)\ l\rangle_{L'}$, $f \in K'$, $l \in L$。在此取 $f = k$，得到 $\langle k, R(l)\rangle_{K'} = \langle R^*(k)\ l\rangle_{L'}$。将此与 (8) 比较，我们看到，对于任意 $k \in K$，都有 $R^*(k) = i(k)$。接下来，

$$\begin{aligned} \langle RR^*(\widehat{k}), \widehat{r}\rangle_{K'} &= \langle R^*(\widehat{k}), R^*(\widehat{r})\rangle_{L'} \\ &= \langle \widehat{i(k)}, \widehat{i(r)}\rangle_{L'} = \langle i(k), i(r)\rangle_L \\ &= \langle k, r\rangle_K = \langle \widehat{k}, \widehat{r}\rangle_{K'} \end{aligned}$$

对于任意 $k, r \in K$，因此 $\langle RR^*(k) - k, \widehat{r}\rangle_{K'} = 0$，这意味着对于任意$k \in K$，都有 $RR^*(k) = k$。现在令 $f \in K'$。于是

$$\langle RR^*(f), \widehat{k}\rangle_{K'} = \langle f, RR^*(\widehat{k})\rangle_{K'} = \langle f, \widehat{k}\rangle_{K'},$$

或者，等价地，对于任意 $k \in K$， $RR^*(f)(k) = f(k)$，因此 $RR^* = \mathrm{id}_{K'}$。

对于第二个断言，显然 $\mathrm{Ker}\ R \subset \mathrm{Ker}\ R^*R$。为证明反向包含，设对某个 $x \in L' = L$, $R(x) \neq 0$。那么 $\langle R(x)\ R(x)\rangle = \langle R^*R(x)\ x\rangle \neq 0$，因此， $R^*Rx \neq 0$。

只需注意到 $K^{\perp} = \mathrm{Ker}(R)$，因此它是正交补的。 □

推论 12. 设 M 和 L 是单调完备代数上的自对偶模， $T\colon M \to L$ 是一个（可伴随）态射，且 $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$。那么 $M \cong (T(M))^{\perp\perp}$。

证明。回顾一下，单调完备的 C^*-代数上的所有希尔伯特 C^*-模都有希尔伯特对偶。由引理 11，得 $L = (T(M))^{\perp\perp} \oplus (T(M))^{\perp}$。令 $N := (T(M))^{\perp\perp} \supseteq T(M)$。于是 $N = (T(M))^{\perp\perp}$ 是一个自对偶模的正交直和项，因此它本身也是自对偶模。将 T 视为从 M 到 N 的映射（我们对这个态射沿用相同的记号）。那么 $T\colon M \to N$ 满足推论 10 的假设，由此得到 $M \cong N'$。 N 的自对偶性证毕。□

注意，对于可伴算子 $F\colon M\to N$，我们有

$$\begin{aligned}(\operatorname{Im}F)^{\perp} &= \{y\in N\colon \langle Fx,y\rangle=0 \text{ for all } x\in M\}\\ &= \{y\in N\colon \langle x,F^*y\rangle=0 \text{ for all } x\in M\}\\ &= \{y\in N\colon F^*y=0\}\\ &= \operatorname{Ker}F^*.\end{aligned}$$

因此，

$$(\overline{\operatorname{Im}F})^{\perp}=(\operatorname{Im}F)^{\perp}=\operatorname{Ker}F^* \qquad \text{for an adjointable } F. \tag{9}$$

由此观察和引理 11，我们得到如下结论。

推论 13. 设 L 是一个自对偶希尔伯特 C^*-模，并设 $K\subseteq L$ 是一个希尔伯特C^*-子模，其希尔伯特对偶是态射 $F\colon L\to M$, $K=$核 F 的核。由于 L是自对偶的， F是可伴随的，并且我们要求 $R:=\operatorname{Im}\ F^*$是一个具有希尔伯特对偶的模。那么 $K=K^{\perp\perp}$，且我们有正交分解： $L=K^{\perp\perp}\oplus K^{\perp}=K\oplus K^{\perp}$.

证明。由 (9)， $K=$核 $F=(\operatorname{Im}\overline{F^*})^{\perp}=R^{\perp}$。由引理 11，我们有正交分解 $L=R^{\perp\perp}\oplus R^{\perp}$ 和 $L=K^{\perp\perp}\oplus K^{\perp}$。由第一个分解可得$L=K\oplus K^{\perp}$。接着由第二个分解可得 $K=K^{\perp\perp}$。□

6. Application to Fredholm operators

到目前为止，所有子模的直和都是正交的，但现在我们必须注意 Banach 直和与 Hilbert 直和之间的区别。记号 $\oplus$ 表示 Banach 直和；从上下文中应当可以看出各加项是否正交。

下面对 Mishchenko-Fomenko C^*-Fredholm 算子的定义在非交换几何中起着重要作用。

定义 14. 称单位 C^*-代数 A 上可数生成 HilbertC^*-模之间的可伴算子 $F\colon M\to N$ 为 A-Fredholm 算子，若存在直和分解 $M=M_0\oplus M_1$ 和 $N=N_0\oplus N_1$ 使得

$$F=\begin{pmatrix}F_0 & 0\\ 0 & F_1\end{pmatrix}\colon M_0\oplus M_1\to N_0\oplus N_1, \tag{10}$$

$F_0\colon M_0\cong N_0$, $F_1\colon M_1\to N_1$，其中 M_1 和 N_1 是有限生成投射模，且 M_0与 M_1正交。其指标为 index(F) $=[M_1]-[N_1]\in K_0(A)$，其中 $[L]$表示 A上有限生成投射模 L的 K-理论类。

指标在 A-紧扰动下保持稳定（[13], 另见 [12]），尤其是，

$$\operatorname{index}\begin{pmatrix}F_0 & 0\\ 0 & F_1\end{pmatrix}=\operatorname{index}\begin{pmatrix}F_0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

对于后一个算子，指标可以像经典的（希尔伯特空间）情形那样计算：[核] − [余核]。但要在这种情况下发展霍奇理论的相关内容（例如参见 [2]），就必须确实拥有类似这样的结果（即不是在经过 A-紧扰动之后）。下面的陈述解决了这个问题。

定理 15. 设 M 和 N 是可数生成的 A-模，且 $F\colon M \to N$是一个 A-Fredholm 算子，其中 A 是单调完备的 C^*-代数。那么，核 F 和 (Im F)$^\perp$ 是有限生成的投射 A-模，并且

$$\operatorname{index}(F) = [\operatorname{Ker} F] - [(\operatorname{Im} F)^\perp] \in K_0(A).$$

证明。对于上述定义中的分解，我们可以假设 (10) 右侧的和也是正交的。事实上，由于 $F_0 : M_0 \cong N_0$ 是一个可伴随同构， N_0 有正交补： $N = N_0 \oplus (N_0)^\perp$ （例如参见 [12, 定理 2.3.3],可以明确写出相应的正交投影： $P = F(F^*F)^{-1}F^*$）。于是，对于

$$\widetilde{F} = \begin{pmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & (1-P)F_1 \end{pmatrix} : M_0 \oplus M_1 \to N_0 \oplus (N_0)^\perp,$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，我们有 $(N_0)^\perp \cong N_1$，因此 index(F) $= [M_1] - [N_1] = [M_1] - [(N_0)^\perp] =$ index(F)，核 $F =$核 F，$\widetilde{\ }$Im $F =$ Im F。所以，我们假设 $N = N_0 \oplus N_1$ 满足 $N_0 \perp N_1$。

令 $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in M_0$, $x_1 \in M_1$ 和 $F(x) = 0$，于是 $0 = F_0(x_0) + F_1(x_1) \in N_0 \oplus N_1$。因此 $F_0(x_0) = 0$, $F_1(x_1) = 0$，所以 $x_0 = 0$ 和 $x \in M_1$。因此 Ker $F =$ Ker $F_1 \subseteq M_1$。

考虑 $F_1 : M_1 \to N_1$。那么 M_1 是自对偶的，因为它是有限生成投射模。由于 A 是单调完备的，所有模都有希尔伯特对偶，特别是 Ker F_1也有。因此，推论 13 得出 $M_1 =$ Ker $F_1 \oplus$ (Ker F_1)$^\perp$。记 $M_2 =$ (Ker F_1)$^\perp$。此外，我们有 Im $F = N_0 \oplus F(M_2)$。

注意，(Im F)$^\perp \subseteq N_1$是伴随算子的核：(Im F)$^\perp =$ Ker F^*（见（9））。因此，(Im F)$^\perp$是N_1的一个可正交补的有限生成投射子模。显然， $F(M_2) \subseteq$ ((Im F)$^\perp$)$^\perp_{N_1}$，由此得到 F 的如下形式：

$$\begin{pmatrix} F_0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : M_0 \oplus (M_2 \oplus \operatorname{Ker} F) \to N_0 \oplus ((\operatorname{Im} F)^\perp)^\perp_{N_1} \oplus (\operatorname{Im} F)^\perp,$$

其中， $F_2 = F_1|_{M_2}$，且等式两边的所有加项彼此正交。由推论 12， $M_2 \cong$ ((Im F)$^\perp$)$^\perp_{N_1}$，并且

$$\begin{aligned} \operatorname{index}(F) &= [M_1] - [N_1] \\ &= [M_2] + [\operatorname{Ker} F] - [((\operatorname{Im} F)^\perp)^\perp_{N_1}] - [(\operatorname{Im} F)^\perp] \\ &= [\operatorname{Ker} F] - [(\operatorname{Im} F)^\perp] \end{aligned}$$

如所求。 □

References

[1] M. Frank。Hilbert C^*-模的自对偶性与 C^*-自反性判据。《Zeitschr. Anal. Anwendungen》9, 165–176，1990。[2] M. Frank and E. V. Troitsky。W*-模中的 Lefschetz 数与算子的几何。Func. Anal. i Pril. 30，第4期，45–57，1996。（俄文，英文译本：Funct. Anal. Appl.，30（1996），257–266。）[3] Michael Frank。单调完备 C^*-代数上的 Hilbert C^*-模。Math. Nachr. 175，61–83，1995。[4] Michael Frank、 Vladimir Manuilov、 and Evgenij Troitsky。群作用产生的 Hilbert C^*-模：超越有限轨道情形。Studia Math. 200，第2期，131–148，2010。[5] Michael Frank、 Vladimir Manuilov、 and Evgenij Troitsky。交换 C^*-代数上 HilbertC^*-模的自反性判据。New York J. Math. 16，399–408，2010。[6] Masamichi Hamana。单调完备C^*-代数上的模。Internat. J. Math. 3，第2期，185–204，1992。

[7] E. C. Lance。Hilbert C*-模——算子代数学家的工具箱，伦敦数学学会讲义系列第210卷。剑桥大学出版社，英国，1995。[8] H. Lin。有界模映射与纯完全正映射。J. Operator Theory 26，121–138，1991。[9] Hua Xin Lin。单射 Hilbert C^*-模。Pacific J. Math. 154，第1期，131–164，1992。
[10] V. Manuilov。关于 Hilbert C^*-模上泛函的可延拓性。电子预印本，2022。
https://arxiv.org/abs/2205.07089。[11] V. M. Manuilov and E. V. Troitsky。Hilbert C^*-模与 W^*-模及其态射。《数学科学杂志》98，第2期，137–201，2000。
[12] V.M. Manuilov and E.V. Troitsky。Hilbert C^*-模。美国数学学会，美国罗得岛州普罗维登斯，2005。[13] A. S. Mishchenko and A. T. Fomenko。C*-代数上的椭圆算子指标。《苏联科学院学报·数学辑》43，831–859，1979。（俄文，英文译本：《苏联数学学报》15（1980），87–112。）
[14] W. L. Paschke。B*-代数上的内积模。《美国数学会汇刊》182，443–468，1973。
[15] W. L. Paschke。关于 C^*-代数上内积模的双 B-对偶。《加拿大数学杂志》26，1272–1280，1974。

Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics,
Lomonosov Moscow StateUniversity, 119991 Moscow, Russia电子邮箱：
manuilov@mech.math.msu.su 电子邮箱：troitsky@mech.math.msu.su