环面弧方案与q-格点计数

DAVID ANDERSON 和 ANIKET SHAH

摘要。我们引入一种对多面体中格点进行自然加权计数的方法，并给出相应生成函数的 Brion 型公式。这种加权具有组合学意义，其生成函数可视为 Rogers-Szeg˝o 多项式的一种推广。它也源自与该多面体法扇相关联的环面弧概形的几何。我们证明，当$q = 1$ 时，系数的渐近行为呈高斯分布。

1. 引言

对于每个格多面体P，都存在射影环面簇上的一个除子D，使得P 中的格点与线丛 $\mathscr{O}(D)$的整体截面的一组基之间存在自然的一一对应。这种对应构成了一座连接代数几何与组合学的桥梁，其基础在过去几十年里已在许多领域得到广泛应用。Brion 公式是一个引人注目的例子：它将P 中格点的生成函数（一个 Laurent 多项式）表示为由P各顶点处的切锥所确定的有理函数之和。最简单的情形是P 为从 0 到m的区间，此时 Brion 公式就是初等恒等式

$$(*) \qquad 1 + x + x^2 + \cdots + x^m = \frac{1}{1-x} + \frac{x^m}{1-x^{-1}}.$$

在本文中，我们建立了 Brion 公式的q-类比。为陈述该公式，我们需要 *q-Pochhammer* 符号

$$(x;q)_d = \prod_{i=1}^{d} (1 - xq^{i-1}),$$

日期：2023年2月7日。作者的部分研究经费由 NSF CAREER DMS-1945212 支撑。第二位作者还获得了查理大学项目 PRIMUS/21/SCI/014 的支撑。

以及它的无穷极限（$x;q)_\infty$，当 $|q|<1$ 时，它是一个解析函数。q-多项式系数是以 q 定义的多项式

$$\left[\begin{array}{c} m \\ k_1,\ldots,k_r \end{array}\right]_q = \frac{(q;q)_m}{(q;q)_{k_1}\cdots(q;q)_{k_r}},$$

其中 $m = k_1 + \cdots + k_r$。当 $q = 0$ 时，它们取值为 1；当 $q = 1$ 时，则得到通常的多项式系数。当 $r = 2$ 时，这些就是 q-二项式系数，通常用 $\left[\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right]_q$ 代替 $\left[\begin{array}{c} m \\ k, m-k \end{array}\right]_q$。

下面给出我们对 $(*)$ 的 q 类比：

$(*_q)$

$$\left[\begin{array}{c} m \\ 0 \end{array}\right]_q + \left[\begin{array}{c} m \\ 1 \end{array}\right]_q x + \left[\begin{array}{c} m \\ 2 \end{array}\right]_q x^2 + \cdots + \left[\begin{array}{c} m \\ m \end{array}\right]_q x^m$$

$$= \frac{(q;q)_m}{(q;q)_\infty}\left(\frac{1}{(x;q)_\infty}\sum_{d\geq 0}\frac{q^{md}}{(q^{-1};q^{-1})_d(xq^{-1};q^{-1})_d} + \frac{x^m}{(x^{-1};q)_\infty}\sum_{d\geq 0}\frac{q^{md}}{(q^{-1};q^{-1})_d(x^{-1}q^{-1};q^{-1})_d}\right).$$

经过一些代数运算，可以从 $m = 0$ 的情形推导出雅可比三重乘积恒等式。

我们的主定理将 $(*_q)$ 推广到了更高维的多胞体。设 M 是一个秩为 n 的格，因此 $M \cong \mathbf{Z}^n$，并设 $N = \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z})$ 为其对偶格。相应的实向量空间为 $M_{\mathbb{R}}$ 和 $N_{\mathbb{R}}$。我们将多面体 $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ 写成半空间的交集，因此

$$P = \bigcap_{i=1}^{r}\{u \mid \langle u, v_i\rangle \geq -a_i\}$$

其中 $v_i \in N$ 是定义 i^{th} 面的原始内法向量，且 a_i 是一个整数。

内法向量 $v_1, \ldots, v_r$ 确定了一个同态 $\mathbf{Z}^r \to N$。我们将其核记作 A，并写作 β: $A \to \mathbf{Z}^r$ 表示包含映射，$A_+ = \beta^{-1}(\mathbf{Z}^r_{\geq 0})$ 表示与正正交象限的交。

在对多面体 P 作出若干假设时，结论最为简洁。我们假设 P 是光滑的：每个顶点恰好位于 n 个面上，且相应的本原法向量构成 N 的一组基。我们还假设该多面体是径向对称的，也就是说 $\sum^r{}_{i=1} v_i = 0$。这些条件可以去除，

代价是需要添加额外的不等式 $\langle u、v\rangle \geq -a$；参见备注 4.5。另一方面，已有一些众所周知的多胞体族满足上述假设——例如，（广义）置换多胞体是光滑且径向对称的。

对于P的每个顶点p，令$I(p) \subseteq \{1, \ldots, r\}$为指标$i$的集合，使得$v_i$是包含$p$的某个面的内法向量，因此$\{v_i \,|\, i \in I(p)\}$是$N$的一组基。令$\{u_i(p) \,|\, i \in I(p)\}$为$M$的对偶基。向量$u_i(p)$是$P$ 沿着不包含在由v_i定义的面中的棱的本原向量。对于每个$d \in A_+$以及P的顶点p，我们定义

$$\mathsf{J}_{d,p} = \left(\prod_{i\in I(p)} \frac{1}{(x^{u_i(p)}q^{-1};q^{-1})_{\beta(d)_i}}\right)\left(\prod_{j\notin I(p)} \frac{1}{(q^{-1};q^{-1})_{\beta(d)_j}}\right).$$

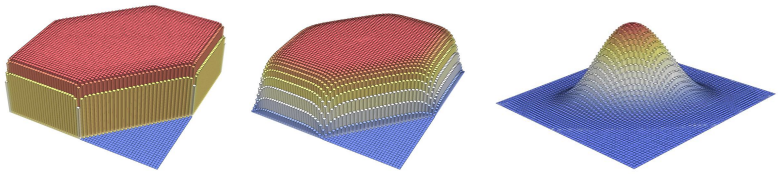
定理 1. 设P是一个光滑径向对称多面体，表示为r个半空间$\{u \,|\, \langle u, v_i\rangle \geq -a_i\}$的交集，符号如上所述。则

$$\sum_{u\in P\cap M} \left[\begin{array}{c} |a| \\ \langle u, v_1\rangle + a_1, \ldots, \langle u, v_r\rangle + a_r \end{array}\right]_q x^u = \frac{(q;q)_{|a|}}{(q;q)_\infty^{r-n}} \sum_{p\in V(P)} \sum_{d\in A_+} \frac{x^p\, q^{\sum a_i\beta(d)_i} \cdot \mathsf{J}_{d,p}}{\prod_{i\in I(p)}(x^{u_i(p)};q)_\infty},$$

其中 $|a| = a_1 + \cdots + a_r$，且$V(P)$是P的顶点集合。

左侧属于 $\mathbb{Z}[q][M]$；也就是说，它是关于x 的 Laurent 多项式，并且是关于q的多项式。右侧是关于x 和q的形式幂级数；我们认为，存在一个$q \to 1$ 极限似乎令人惊讶，因为每一项在$q = 1$处都有无穷阶极点。另一方面，$q \to 0$ 极限在光滑的径向对称情形下恢复了 Brion 公式。（要看出这一点，请注意，$\mathsf{J}_{d,p}$ 在$q = 0$ 处为 0，除非$d = 0$，在这种情况下它为 1。）

该定理由定理 4.4 推出。定理 4.4 放宽了径向对称性的要求，并给出了适用于任意光滑多胞形 P 的类似公式。如 [Br88], 所示，基本证明技巧是在环面簇的等变 K 理论中进行局部化。我们的主要观察是，典范的q枚举由环面拟映射空间给出；Morrison-Plesser 和 Givental 在 Gromov-Witten 理论的背景下引入了这些空间 [MP95, G98]。这些空间组合在一起，构成一个包含于 Arkhipov-Kapranov [AK06] 所研究的环面弧概形 中的归纳簇。这个无限维概形为定理中出现的无穷乘积提供了几何背景。



F图 1. 环杜斯特迈特-海克曼测度的近似。多面体P 是一个格点六边形，即由 (0, 0)、(1, 0)、(0, 1)、(2, 1)、(1, 2) 和 (2, 2) 的凸包构成。三幅图展示了定理 1 中公式左侧的整数点变换，对膨胀后的kP （其中$k = 30$）在$q = 0.2$、$q = 0.6$ 和$q = 0.9$ 处的取值。（纵轴比例尺各不相同。）图像由 Mathematica 生成。

Chapoton 研究了另一种格点q枚举，并引入了埃尔哈特多项式的q类比 [Ch16]。他的q枚举是通过将每个 Laurent 单项式x^u 特化为$q^{l(u)}$ 的幂得到的，其中幂次由格上的某个线性函数l 给出。

(*$_q$) 的左侧是n^{th} 罗杰斯-塞格″ő 多项式。这是一类经典多项式，Szeg″o 在 1926 [Sz26] 中证明了它们关于圆上的某个测度正交。它们的多变量版本在表示论和组合学中发挥作用 [H97, V12, CV14]。在第 5 节中，我们将说明与更一般多胞体相关的广义罗杰斯-塞格″o 多项式，如何通过q-差分算子相互关联。

我们还考虑拟映射归纳簇上杜斯特迈特-海克曼（DH）测度的一种自然类比。经典的 DH 测度是辛流形上沿着环面作用的矩映射推前的刘维尔测度，但在无限维空间中需要对其作出修改。我们将 [BP90] 中 DH 测度的构造改编到归纳簇上，通过改变极限过程中所用的重标度，定义了环杜斯特迈特-海克曼概率测度。我们的第二个结果描述广义罗杰斯-塞泽格多项式的系数在$q = 1$ 下的行为：当kP 中的k 趋于无穷时，环 DH 测度是高斯分布。我们用m_D 表示P 内一个特定的特殊点（见定义 6.6）。

定理 2. 设 P 光滑且径向对称，并令 X 为相应的环面簇。多面体 P 确定了 X 上的非常丰沛除子 D，以及拟映射归纳簇 $\mathcal{Q}(X)_\infty$ 上的非常丰沛除子 D^0 。关于 D^0 的 $\mathcal{Q}(X)_\infty$ 环路 DH 概率测度为

高斯 ian，均值为 m_D，协方差矩阵对应于二次型

$$u \mapsto \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\langle m_D, v_i\rangle + a_i}\langle u, v_i\rangle^2.$$

换言之，环杜斯特迈特-海克曼测度的密度函数是以下函数的一个倍数

$$u \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \frac{\langle u - m_D, v_i\rangle^2}{\langle m_D, v_i\rangle + a_i}\right).$$

致谢。 我们感谢曾宪华就拟映射和 J 函数与我们进行了有益的讨论，也感谢 Frédéric Chapoton、ChristianHaase 和 Benjamin Nill 就多胞体中的格点问题与我们通信。

2. 环面簇

为明确记号和约定，我们简要回顾环面簇的基本事实。主要参考文献为 [CLS11]和 [F93]。我们在域 C 上工作（就本文而言，也可以将其替换为任意域）。设T 为一个n维环面，其特征群为$M = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*)$，余特征群为$N = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T)$，因此$N = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$与$M$对偶，并且$N$和$M$都（非典范地）同构于 $\mathbb{Z}^n$。与前文一样，我们将$N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 和$M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 记作相应的实向量空间。

设 Δ 是 $N_{\mathbb{R}}$ 中的一个有理多面锥扇，也就是说，它由一组沿着各自的面拼合在一起的有理多面凸锥组成。我们用 $\Delta^{(k)} \subseteq \Delta$ 表示所有 k 维锥构成的子集。特别重要的是射线 $\Delta^{(1)} = \{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$。每条射线 ρ_i 都有一个本原生成元$v_i \in N$。

我们假设 Δ 是光滑且完备的。因此，存在一个正合列

$$0 \to A \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}^r \to N \to 0,$$

其中，$\mathbb{Z}^r \to N$ 将第i^{th} 个标准基向量映射到第i^{th} 条射线的本原生成元，$e_i \mapsto v_i$。核A 同构于 $\mathbb{Z}^{n-r}$。

对偶化后，可得一个正合列

$$0 \to M \to \mathbb{Z}^r \to B \to 0,$$

其中 $B = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})$。令 $G \subseteq (\mathbb{C}^*)^r$ 为对应于格的满射 $\mathbb{Z}^r \to B$ 的子环面，因此我们有 $G \cong (\mathbb{C}^*)^{n-r}$ 以及 $T = (\mathbb{C}^*)^r/G$。

我们将使用*Cox* 构造，它将环面簇 $X(\Delta)$ 表示为 $\mathbb{C}^r$ 对 G 的 GIT 商。每个子集 $I \subseteq \{1,\dots,r\}$ 都确定一个坐标子空间 $E_I = \{e^*{}_i = 0 \mid i \in I\} \subseteq \mathbb{C}^r$，以及一组射线。令 $Z(\Delta) \subseteq \mathbb{C}^r$为那些对应射线集合 $\{\rho_i \mid i \in I\}$ 未包含于 Δ 的任何锥中的坐标子空间 E_I 的并集。那么

$$X(\Delta) = (\mathbb{C}^r \setminus Z(\Delta))/G.$$

托里克几何的基本事实表明

$$B \cong \mathrm{Pic}(X) \cong H^2(X,\mathbb{Z})$$

且有效除子锥是 $\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ 在B中的像。对偶地，

$$A \cong H_2(X,\mathbb{Z}),$$

且数值有效曲线锥是 $\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ 在嵌入 $\beta\colon A \hookrightarrow \mathbb{Z}^r$下的原像。此锥记作$A_+ \subseteq A$。

当$X(\Delta)$是射影的时，丰线丛 $\mathcal{O}(D)$对应于一个法扇为 Δ 的多面体P。P 的面对应于X的T-不变除子，而P 的顶点对应于不动点。我们有时会滥用记号，将顶点与不动点等同起来，同时记作$p \in P$ 和 $p \in X^T$。

$\mathcal{O}(D)$的截面可用 Cox 构造如下描述。设P 定义为半空间 $\{u \mid \langle u,v_i\rangle \geq -a_i\}$ 的交，其中$i = 1,\dots,r$；则$D = \sum a_i D_i$，其中$D_1,\dots,D_r$是T-不变除子。设$f_1,\dots,f_r$是 $\mathbb{C}^r$ 上的标准坐标，它们生成X的*Cox* 环 。那么，对于非负整数b_i，一个 Laurent 单项式

$$x^u = \prod_{i=1}^{r} f_i^{b_i - a_i}$$

是 $\mathcal{O}(D)$ 的 T-等变截面，当且仅当 $\sum(b_i - a_i)D_i = 0$ 属于 $\mathrm{Pic}(X)$；等价地，$u = \sum(b_i - a_i)e_i$属于 $M \subset \mathbb{Z}^r$，其中 $e_1,\dots,e_r$是标准基。根据构造，对于每个 i，$\langle u,v_i\rangle = b_i - a_i \geq a_i$，因此 $u \in P$。

3. 拟映射空间与弧概形

接下来我们回顾托里克拟映射空间的构造；证明和细节见 [MP95, G98]。我们关注次数为d的映射$f\colon \mathbb{P}^1 \to X(\Delta)$的参数化，也就是说，$f_*[\mathbb{P}^1] = d$ 属于$A = H_2(X)$。令 $\mathrm{Hom}_d(\mathbb{P}^1,X)$ 为这类

映射构成的空间。为描述这个空间，可以将这类映射提升到 $\mathbb{C}^r$，在该处它们可表示为一个由r个单变量多项式组成的元组。我们只考虑次数d属于A_+的情形。一般而言，A_+ 是所有有效曲线构成的半群的真子集。

对于任意由非负整数 $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_r)$ 组成的r元组，令

$$\mathbb{C}^r_\delta=\mathbb{C}[t]_{\le\delta_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}[t]_{\le\delta_r}$$

其中 $\mathbb{C}[t]_{\le k}=\{f(t)=f^{(0)}+f^{(1)}t+\cdots+f_{(k)}t^k\}$ 是次数至多k的多项式构成的 $(k+1)$ 维空间。

向量空间 $\mathbb{C}^r_\delta$ 的维数为 $r+\delta_1+\cdots+\delta_r$，因此环面 $(\mathbb{C}^*)^{r+\sum\delta_i}$ 按坐标作用。环面 $(\mathbb{C}^*)^r$ “对角地”嵌入，因此

$$(z_1,\dots,z_r)\cdot(f_1(t),\dots,f_r(t))=(z_1f_1(t),\dots,z_rf_r(t)).$$

因此，子环面 $G\subseteq(\mathbb{C}^*)^r$ 也嵌入到 $(\mathbb{C}^*)^{r+\sum\delta_i}$中。拟映射空间是通过该$G$作用，将 $\mathbb{C}^r_\delta$ 取某个 GIT 商构造而成的。

对于任意子集$I\subseteq\{1,\dots,r\}$，令$E_{I,\delta}\subseteq\mathbb{C}^r_\delta$为满足$f_i\equiv0$对每个$i\in I$都成立的轨迹。将$E_I=\mathbb{C}^{r-\#I}$视为坐标子空间，并将 $\delta(I)$记为省略$i\in I$所得的子序列，这与 $\mathbb{C}^{r-\#I}_{\delta(I)}$ 相同。

Let

$$Z(\Delta)_\delta=\bigcup_I E_{I,\delta},$$

对满足$\{\rho_i\mid i\in I\}$不包含于 Δ的I 取并集。

（环面）拟映射空间定义为

$$\mathscr{Q}(\Delta)_d=(\mathbb{C}^r_{\beta(d)}\setminus Z(\Delta)_{\beta(d)})/G.$$

根据构造，它包含 $\mathrm{Hom}_d(\mathbb{P}^1,X)$ 作为一个稠密开子集。

命题 3.1。托里克拟映射空间 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 是一个维数为 $n+\sum\beta(d)_i$的环面簇；当 $X(\Delta)$ 为光滑完备簇时，它也是光滑完备的。

我们将作用在 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 上的环面记作 $T_d=(\mathbb{C}^*)^{r+\sum\beta(d)_i}/G$。我们还关注各种子环面的作用。使用上述 $(\mathbb{C}^*)^r\hookrightarrow(\mathbb{C}^*)^{r+\sum\beta(d)_i}$，可得到 $T=(\mathbb{C}^*)^r/G$ 到 T_d 的包含关系，因此作用在 $X(\Delta)$ 上的同一个环面也作用在 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 上。另一方面，$\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^r_{\beta(d)}$ 上具有环旋转作用，

$$\zeta\cdot(f_1(t),\dots,f_r(t))=(f_1(\zeta^{-1}t),\dots,f_r(\zeta^{-1}t)),$$

并且该作用下降为 $\mathbb{C}^*$ 在 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 上的作用。因此，有一个子环面 $\mathbb{T} = T \times \mathbb{C}^* \subseteq T_d$ 作用在 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 上。相对于 $\mathbb{T}$ 的局部化将是证明主要定理的首要工具。

命题 3.2。 由环旋转作用固定的轨迹（$\mathscr{Q}(\Delta)_d$）$^{\mathbb{C}^*}$ 是连通分支的并集 $\mathscr{Q}(\Delta)^{(d')}_d$，对每个分解 $d' \leq d$（即 $d = d' + d''$ 是数值有效类之和的分解）而言。此外，存在一个 T-等变同构 $\mathscr{Q}(\Delta)^{(d')}_d \cong X(\Delta)$ $forall\ d'$。

拟映射空间 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 构成一个闭嵌入系统，其中 d 遍历 $A_+ \subset A = H_2(X,\mathbb{Z})$。具体而言，给定两个这样的曲线类 $d' \leq d$，存在一个闭嵌入 $\mathscr{Q}(\Delta)_{d'} \hookrightarrow \mathscr{Q}(\Delta)_d$，它由包含映射 $\mathbb{C}^r_\beta(d') \hookrightarrow \mathbb{C}^r_\beta(d)$ 诱导。我们将这个极限归纳簇称为环面多项式空间 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$。

归纳簇 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$ 嵌入在一个更大的空间中，即 Arkhipov-Kapranov 的环面弧概形 [AK06]。环面弧概形的构造方式与 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 几乎相同。令

$$\mathbb{C}^r_\infty = \mathbb{C}[[t]] \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[[t]].$$

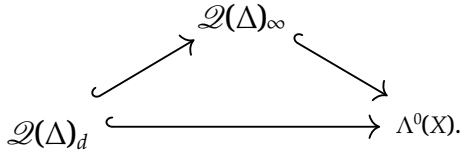
这个空间具有一个无限维环面作用，它通过缩放幂级数元组的坐标来定义。对于 $I \subset \{1, \ldots, r\}$，令轨迹 $E_{I,\infty} \subseteq \mathbb{C}^r_\infty$ 定义为所有 $i \in I$ 对应的 f_i 的所有系数均为零的元组，并且

$$Z(\Delta)_\infty = \bigcup_I E_{I,\infty},$$

其中，并集仍取遍满足 $\{\rho_i | i \in I\}$ 不包含于 Δ 的某个锥中的 I。
Arkhipov-Kapranov 环面弧概形为

$$\Lambda^0 X = (\mathbb{C}^r_\infty \setminus Z(\Delta)_\infty)/G.$$

与拟映射空间的情形一样，环面 $\mathbb{T}$ 作用在 $\Lambda^0 X$ 上。拟映射空间 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 作为有限维不变子簇嵌入 $\Lambda^0 X$ 中，且以下图表交换：



归纳簇 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$ 的闭点（或者等价地，对所有 $d \in A_+$，$\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 的闭点之并）对应于其中的幂级数元组

$\Lambda^0 X$，其中任意给定幂级数中只有有限多个系数非零。换言之，环面多项式空间 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$ 嵌入 $\Lambda^0 X$，其像为由实际上是多项式的幂级数组成的子集。

定义 3.3. 令 D_i 为 X 中与射线 ρ_i 对应的 T-不变除子。对于每个满足 $\beta_i(d) \geq k \geq 0$ 的 k，$\mathscr{Q}(\Delta)_d$, $\Lambda^0 X$ 中存在除子 $D^k i$，且 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$由 $f_i(t)$ 的 k^{th} 次系数为零定义。对于每个 $d \in A_+$ 以及 X 上每个 T-不变除子 $D = \sum i\, a_i D_i$，我们令 D^d 为 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$上由 $\sum i\, a_i D^{\beta_i}(d)$ 定义的除子。在上下文明确基空间的情况下，我们对 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 及 $\Lambda^0 X$ 上类似定义的除子也使用相同记号。

Arkhipov 和 Kapranov 注意到，$\Lambda^0 X$ 存在一族自嵌入。回忆一下，β 是第 2 节中定义的包含映射 $H_2(X, Z) \hookrightarrow Z^r$。半群 A_+ 中的元素 d 对应于 G的一个单参数子群，通过与包含映射 $G \hookrightarrow (C^*)^r$复合，我们可以将 d 在 Z^r 中的像明确写为 $(C^*)^r$ 的余特征 $(t^{\beta(d)_1}, \ldots, t^{\beta(d)_r})$。

定义 3.4. 对于 $d \in A_+$，令 $\epsilon_d : \Lambda^0 X \to \Lambda^0 X$ 为自嵌入

$$(f_1(t), \ldots, f_r(t)) \mapsto (t^{\beta(d)_1} f_1(t), \ldots, t^{\beta(d)_r} f_r(t)).$$

这将限制为多项式空间 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$ 上的一个自嵌入，我们也将其记为 ϵ_d。

这些自嵌入彼此可交换：事实上，$\epsilon_d \circ \epsilon_{d'} = \epsilon_{d+d'}$。显然，它们关于 T-作用是等变的。

引理 3.5. 设 $D = \sum_i a_i D_i$ 在 X 上是数值有效除子。那么 $D^0 = \sum_i a_i D^0{}_i$ 在每个 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$上都限制为数值有效除子。

证明。我们将证明，D^0 与 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 中任意$T \times C^*$-不变的有效不可约曲线C 的交数为正。

作为环面簇，$\mathscr{Q}(\Delta)_d$的 Cox 环变量为 $f^{(j)} i$，其中 $1 \leq i \leq r$ 且 $0 \leq j \leq \beta(d)_i$; 对任意 k，k′，$f^{(k)} i\, f^{(k')} i$ 在 X 上定义一个有理函数，其除子为 $D^k i - D^{k'} i$。因此，对于 A_+ 中任意 $d' \leq d$，D^0 等价于 $D^{d'} = \sum i\, a_i D^{\beta(d')^j} i$。

设 $\epsilon_{d'}(p)$ 是 C 的一个 $T \times C^*$-不动点，其中 $d' \leq d$ 属于 A_+。若 E 是 X 上的丰沛除子，则对于 $s > 0$，$D + sE$ 可以移动为一个有效 Q-除子 $\sum i\, b_i D_i$，其支撑不包含 p。类似地，$^0 + sE^0$ 在 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 上的除子可以移动为 $\sum i b_i D^{\beta(d')^j} i$，其支撑不包含 $\epsilon_{d'}(p)$，因此，其

支撑不包含 C。因此，对于所有 $s > 0$，有 $C \cap (D^0 + sE^0) \geq 0$，从而 $C \cap D^0 \geq 0$ 也成立。□

4. 弧概形上的格点与局部化

现在，我们研究 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$ 上 T-作用的几何性质，由此证明我们关于 q 加权格点计数的 Brion 恒等式类比。为定义权重，设 $\mathscr{A} = \{(H_i, v_i, a_i)\}$ 是 $M_{\mathbb{R}}$ 中的一个定向超平面排列。具体而言，这意味着对每个 i，我们指定一个本原向量 v_i 和整数 a_i，使得超平面 H_i 由下式定义

$$\langle u, v_i \rangle = -a_i. \tag{1}$$

这些选择确定了正、负半空间 $H_{i,+}$ 和 $H_{i,-}$，方法是在 (1) 中将“=”分别替换为“≥”或“≤”。

给定这样的排列 $\mathscr{A}$ 以及任意 $u \in M$，令

$$g_{\mathscr{A},u} = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(q;q)_{\langle u,v_i\rangle + a_i}} = \prod_{i=1}^{r} \prod_{k=1}^{\langle u,v_i\rangle + a_i} \frac{1}{1-q^k}. \tag{2}$$

现在，设 $X = X(\Delta)$ 是一个光滑射影环面簇，因此 Δ 是某个多面体的内法扇；再令 $v_1, \ldots, v_r$ 仍表示 Δ 的各条射线上的本原向量。设 a_i 是一个整数元组，并进一步满足正半空间的交集 $P = \bigcap_i H_{i,+} = \bigcap_i \{u \mid \langle u, v_i \rangle \geq -a_i\}$ 非空，且每个超平面 H_i 都与 P 相切。我们用 $\mathscr{A}_P$ 表示相应的定向超平面排列，并注意到它不仅取决于 P，也取决于 Δ 的射线。这些数据确定了 X 上的 nef 线丛 $\mathscr{O}(D) = \mathscr{O}(\sum_i a_i D_i)$，其整体截面与 P 中的格点自然一一对应。同样的数据还在每个 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 上确定一个线丛 $\mathscr{O}(D^0) = \mathscr{O}(\sum_i a_i D^0_i)$，并且在 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$ 上也如此。

定理 4.1。 等变欧拉示性数由下式给出

$$\chi_{\mathbb{T}}\left(\mathscr{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(D^0)\right) = \sum_{u \in P \cap M} g_{\mathscr{A}_P,u}\, x^u. \tag{3}$$

证明。 由于 $\mathscr{O}(D)$在 X 上是 nef 的，根据引理 3.5，线丛 $\mathscr{O}(D^0)|_{\mathscr{Q}(\Delta)_d}$ 在 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 上也是 nef 的，因此 Demazure 消失定理意味着

$$\chi_{\mathbb{T}}\left(\mathscr{Q}(\Delta)_d, \mathscr{O}(D^0)\right) = H^0\left(\mathscr{Q}(\Delta)_d, \mathscr{O}(D^0)\right)$$

对于每个 d，它们作为 T-模成立。对于 $\mathrm{d} \le \mathrm{d}'$，存在 T-模的包含关系 $\mathrm{H}^0(\mathscr{Q}(\Delta)_d, \mathscr{O}(\mathrm{D}^0)) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\mathscr{Q}(\Delta)_{d'}, \mathscr{O}(\mathrm{D}^0))$，对应于特征嵌入 $\mathscr{Q}(\Delta)_d \hookrightarrow \mathscr{Q}(\Delta)_{d'}$。无限维 T-模 $\mathrm{H}^0(\mathscr{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(\mathrm{D}^0))$按定义是这些模的并集，而 $\chi_{\mathbb{T}}(\mathscr{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(\mathrm{D}^0))$ 是其分次特征。为计算它，我们先确定每个 $\mathrm{H}^0(\mathscr{Q}(\Delta)_d, \mathscr{O}(\mathrm{D}^0))$ 的特征，再取 $\mathrm{d} \to \infty$时的极限。

作为环面簇，$\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 具有 Cox 环变量 $\mathrm{f}^{(j)}\mathrm{i}$，其中 $1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{r}$ 且 $0 \le \mathrm{j} \le \beta(\mathrm{d})_i$。$\mathscr{O}(\mathrm{D}^0)$ 的截面的一组基由单项式 $\left(\prod \mathrm{i}(\mathrm{f}^{(0)}\mathrm{i})^{-a_i}\right)\cdot\left(\prod \mathrm{i} \prod^{\beta(d)_i} \mathrm{j}=0 (\mathrm{f}^{(j)}\mathrm{i})^{b_i}\right.$ 构成，$\left._j\right)$ 其中 $\mathrm{b}_{i,j}$ 均为非负数，且 $\sum \mathrm{i}\left((\sum^{\beta(d)_i} \mathrm{j}=0\, \mathrm{b}_{i,j}) - \mathrm{a}_i\right)\mathrm{D}_i = 0$ 属于 Pic(X)。

我们必须计算这些截面张成空间的 T-特征。在X上，$\mathscr{O}(D)$ 的截面特征基中的一个元素对应于一个T-特征x^u，其中u 是P中的一个格点；等价地，它对应于对$b_i \ge 0$ 的一种选择，使得$\sum_i (b_i - a_i)e_i \in \mathbb{Z}^r$ 是某个$u \in M$的像。这些选择通过恒等式$b_i = \langle u, v_i\rangle + a_i$相关联。

固定这些 b_i 后，考虑截面 $\left(\prod \mathrm{i}(\mathrm{f}(0)\mathrm{i})^{-a_i}\right)\cdot\left(\prod \mathrm{i} \prod^{\beta(d)_i} \mathrm{j}=0 (\mathrm{f}^{(j)}\mathrm{i})^{b_i}\right.$，其中 $\left._j\right)$ 满足 $\sum^{\beta(d)_i} \mathrm{j}=0\, \mathrm{b}_{i,j} = \mathrm{b}_i$。$\prod \mathrm{i}\, \mathrm{f}\, \mathrm{b}_i - \mathrm{a}^i \mathrm{i}$ 的特征为 x^u，$\prod \mathrm{i}(\mathrm{f}^{(0)}\mathrm{i})^{b_i - \mathrm{a}^i}$ 的特征也相同。因此，$\left(\prod \mathrm{i}(\mathrm{f}^{(0)}\mathrm{i})^{-a_i}\right)\cdot\left(\prod \mathrm{i} \prod^{\beta(d)_i} \mathrm{j}=0 (\mathrm{f}(\mathrm{j})\mathrm{i})^{b_i}\right.$ 的特征为 $\mathrm{x}^u \prod \mathrm{i} \prod^{\beta(d)_i} \mathrm{j}=0 (\mathrm{q}^j)^{b_{i_j}}\Big)_{,j}$。所以，$\mathrm{H}^0(\mathscr{Q}(\Delta)_d, \mathscr{O}(\mathrm{D}^0))$ 的分次特征中 x^u 的系数为

$$\sum \prod_i \prod_{j=0}^{\beta(d)_i} (q^j)^{b_{i,j}},$$

对$b_{i,j} \ge 0$ 满足 $\sum^{\beta(d)_i}{}_{j=0}\, b_{i,j} = b_i$的求和。

当 $d \to \infty$趋于无穷时，对$b_{i,j}$的j 指标的上界消失。所得的和遍历所有弱递增序列 $0 \le c_{i,1} \le c_{i,2} \le \cdots \le c_{i,b_i}$ 对每个从 1 到 r的i 而言，其中被加数是统计量

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{b_i} q^{c_{i,j}}.$$

固定除一个以外的所有弱递增序列后，我们可见整个和必定分解为关于i的乘积：

$$\prod_{i=1}^{r} \sum_{0 \le c_{i,1} \le c_{i,2} \le \ldots \le c_{i,b_i}} \prod_{j=1}^{b_i} q^{c_{i,j}}.$$

But

$$\sum_{0\le c_{i,1}\le c_{i,2}\le\ldots\le c_{i,b_i}}\prod_{j=1}^{b_i}q^{c_{i,j}}=\frac{1}{(q;q)_{b_i}}=\frac{1}{(q;q)_{\langle u,v_i\rangle+a_i}}.$$

因此，$H^0(\mathscr{Q}(\Delta)_\infty,\mathscr{O}(D^0)$的特征中$x^u$ 的系数为

$$\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(q;q)_{\langle u,v_i\rangle+a_i}}=g_{\mathscr{A}_P,u}.$$

这就证明了该定理。 □

接下来，我们描述 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$ 的 T-不动点，并将相应的切空间分解为 T 的特征。

命题 4.2. $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$ 的$\mathbb{T}$-不动点与有序对 $(p,\ d)$一一对应，其中 $p\in X^T$ 且 $d\in A_+$。

证明。环旋转不动轨迹很容易确定。根据定义， $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$是 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 的并集，其中 d 遍历 A_+，而子簇 $\mathscr{Q}(\Delta)_0\hookrightarrow\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$显然由 C^*固定。为穷尽 $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 中较高 d 对应的 C^*-固定连通分支，只需取 $\epsilon_d(\mathscr{Q}(\Delta)_0)$对 $\mathrm{d}\in\mathrm{A}_+$的 不交并，因为$\epsilon_d(\mathscr{Q}(\Delta)_0)=\mathscr{Q}(\Delta)^{(d)}\ \mathrm{d}\subset\mathscr{Q}(\Delta)_d\subset\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$。子簇 $\mathscr{Q}(\Delta)_0$ 与 X T-等变同构，因此其 T-不动点与 X 的 T-不动点自然一一对应。对每个 $\epsilon_d(\mathscr{Q}(\Delta)_0)$也同样如此，因此不动点就是 $\epsilon_d(\mathrm{p})$，其中 $\mathrm{d}\in\mathrm{A}_+$ 且 $\mathrm{p}\in\mathrm{X}^T=\mathscr{Q}(\Delta)_0$。 □

回想引言，对于光滑多胞形 P 的每个顶点p，都存在一个子集 $I(p)\subseteq\{1,\ldots,r\}$，使得对于 $i\in I(p)$，v_i 是包含 p 的各面的内法向量，而 $\{u_i(p)\mid i\in I(p)\}$ 是 M 的对偶基，对偶于 $\{v_i\mid i\in I(p)\}$。我们使用以下记号

$$\mathsf{J}_{d,p}=\left(\prod_{i\in I(p)}\frac{1}{(x^{u_i(p)}q^{-1};q^{-1})_{\beta(d)_i}}\right)\left(\prod_{j\notin I(p)}\frac{1}{(q^{-1};q^{-1})_{\beta(d)_j}}\right).\tag{4}$$

命题 4.3. 设 p 是 X 中的一个不动点，对应于 P 的一个顶点。$\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$ 在 $\epsilon_d(p)$ 处的等变重数等于

$$\left(\frac{1}{(q;q)_\infty}\right)^{r-n}\frac{\mathsf{J}_{d,p}}{\prod_{i\in I(p)}(x^{u_i(p)};q)_\infty}.$$

按我们对这个术语的用法，“等变重数”是“Bott 分母”的同义词：它是因子 $(1-\chi)^{-1}$ 的乘积，这些因子是 χ 中出现的特征

在簇的不动点处的余切空间中出现的。在 $\mathsf{J}_{d,p}$ 的分母中出现的特征，是 $\epsilon_d(\Lambda^0 X) \subseteq \Lambda^0 X$ 在不动点 $\epsilon_d(p)$处的余法权重。公式中的其他特征是$p \in X = \mathscr{Q}(\Delta)_0 \subset \mathscr{Q}(\Delta)_\infty$处的余切权重，这一点可由对足够大的 d， $\mathscr{Q}(\Delta)_d$ 的 Cox 描述看出。

现在我们可以陈述并证明主要定理：

定理 4.4. 设 P 是一个光滑多胞形，记号同上。那么

$$\sum_{u\in P\cap M} g_{\mathscr{A}_P,u}\, x^u = \frac{1}{(q;q)_\infty^{r-n}} \sum_{p\in V(P)} x^p \sum_{d\in A_+} \frac{q^{\sum a_i \beta(d)_i} \cdot \mathsf{J}_{d,p}}{\prod_{i\in I(p)} (x^{u_i(p)};q)_\infty}, \tag{5}$$

其中 $g_{\mathscr{A}_P,u}$ 是式(2)中定义的有理函数，而 $V(P)$ 是 P 的顶点集。

在径向对称情形下，即 $\sum v_i = 0$，引言中的定理可通过将等式两边乘以 $(q;q)_{|a|}$ 立即得到，其中 $|a| = a_1 + \cdots + a_r$与前文相同。

证明。 多胞形 P 确定一个环面簇 X、法扇 Δ 和一个线丛$\mathscr{O}(\sum_i a_i D_i)$。左侧即为 $\chi_{\mathbb{T}}(\mathscr{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(\sum_i a_i D^0{}_i))$，由定理 4.1 得出。

右侧是通过应用 Atiyah-Bott 公式计算 $\mathscr{O}(\sum_i a_i D^0{}_i)$ 的欧拉示性数得到的。这是对 T-不动点 $\epsilon_d(p)$ 求和，求和项为线丛 $i^*_{\epsilon_d(p)}\mathscr{O}(\sum_i a_i D^0{}_i)$ 的 T-特征与 $\epsilon_d(p)$ 处的等变重数之积。后者由命题 4.3 计算。前者等于 $x^p \cdot q^{\sum a_i \beta_{(d)^i}}$，这可由针对 $d' \gg d$ 的 $\mathscr{Q}(\Delta)_{d'}$ 的 Cox 构造看出。□

备注 4.5. 若某个扇 Δ 的射线的本原生成元之和为 0，则称其为径向对称。任何多面体 P 的法扇都可以细化为一个光滑的径向对称扇 Δ，方法如下。给定任意多面体 P，令 Δ_0 为其法扇。将 Δ_0 细化，得到一个扇 Δ_1，使得对每个锥 $\sigma \in \Delta_1$，$-\sigma$ 也属于 Δ_1；特别地，其本原射线生成元之和为 0。进一步细化 Δ_1，得到一个具有相同性质的光滑扇Δ。现在可以将 $P = \bigcap\{u\langle u, v_i\rangle \geq -a_i\}$ 表示为带有一些冗余不等式的形式。

这使我们可以去掉对P的径向对称性和光滑性假设。定理 4.4 适用于扇 Δ，定理 1 的公式也同样适用。不过，只有当P 光滑且径向对称时，这些公式才是典范的。

注 4.6。 当X是射影空间的乘积时，有理函数$J_{d,p}$等于量子 K 理论的 J 函数在p处的d^{th}项的限制。更一般地，它是 K 理论 I 函数的局部化；参见 [GT14, G15]。

5. 广义 Rogers-Szeg˝o 多项式与 Jackson 偏导数

本节研究差分算子对定理 4.4 左端出现的q级数的作用。

设 Δ 是一个光滑扇，其本原射线生成元 $v_1, \ldots\ldots v_r$ 的和为 0。设 $D = \sum_i a_i D_i$ 是关联环面簇 X 上的一个有效 T-除子。D 有效这一条件等价于：*Newton* 多面体 $P = \bigcap_i \{u \mid \langle u, v_i\rangle \geq -a_i\}$ 包含 M 中的一个元素。设 $|a| = \sum_i a_i$。我们将 *Rogers-Szeg˝o* 多项式 *of* D定义为

$$RS_D(x;q) = \sum_{u \in P \cap M} \left[\begin{matrix} |a| \\ \langle u, v_1\rangle + a_1, \ldots, \langle u, v_r\rangle + a_r \end{matrix} \right]_q x^u. \tag{6}$$

以下结果来自定理 4.1。

命题 5.1。 设 $D = \sum_i a_i D_i$ 是光滑完备环面簇上的一个 T-不变 *nef* 除子，其扇为 Δ，射线为 $v_1, \ldots\ldots, \ v_r$，且它们的和为 0。则

$$(q;q)_{|a|} \cdot \chi_{\mathbb{T}}\left(\mathscr{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(D^0)\right) = RS_D(x;q).$$

对于一般的c取值，与环面除子D 对应的多面体P 恰好是$RS_D(x;c)$的牛顿多面体。若<style id='a'>a$_i$ 还满足进一步条件，即每个超平面$H_i = \{u \mid \langle u, v_i\rangle = -a_i\}$都与$P$相切，我们便将$RS_D(x;q)$记作$RS_P(x;q)$。（给定$P$后，满足这一进一步条件的<style id='a'>a$_i$ 是唯一的。）尽管记号中没有体现， 多项式$RS_P(x;q)$同时依赖于P 和 Δ的射线。

接下来，我们证明差分算子作用于$RS_D(x;q)$时的一些性质。为明确起见，以下将N 和M 均视为 $\mathbb{Z}^n$。<style id='i'>ith <style id='q'>q-移位算子<style id='T'>T$_i$<style id=', '>, $_q$ 作用于<style id='f'>f(<style id='x'>x$_1$, . . . , <style id='x'>x$_n$)的方式如下

$$T_{i,q} : f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, qx_i, \ldots, x_n),$$

而 i^{th} 阶偏 q-导数（或 *Jackson* 导数）作用于 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 的方式为

$$\left(\frac{d}{dx_i}\right)_q : f \mapsto \frac{f - T_{i,q} f}{(1-q)x_i}.$$

这些算子作用于 Rogers-Szeg˝o 多项式时的表现，最好结合对相关多胞体和扇的一些条件来讨论：

定义 5.2. 给定 R^n 中的一个扇 Δ，固定 R^n 的标准基，并将 Δ 的射线排序，使得 $v_1 = e_1, \ldots, v_n = e_n$。我们称 X 上的有效除子 $D = \sum_i a_i D_i$ 为 X 上的第一象限除子，如果其对应多胞体 P 包含于 $(\mathrm{R}_{\geq 0})^n$，其中 $a_1 = \cdots = a_n = 0$。

对于每个 $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$，我们用 P_i 表示在 $(\mathrm{R}_{\geq 0})^n$ 中得到的（可能为空的）多面体：先将条件 $\{\mathrm{u} \mid \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_i \rangle \geq 0\}$ 替换为 $\{\mathrm{u} \mid \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_i \rangle \geq 1\}$，再将所得结果平移 $-\mathrm{e}_i$。因此，P_i 由 $\left(\bigcap^n \mathrm{j}=1\{\mathrm{u} \mid \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_j \rangle \geq 0\}\right) \cap \left(\bigcap^r \mathrm{j}=\mathrm{n}+1\{\mathrm{u} \mid \langle \mathrm{u} + \mathrm{e}_i, \mathrm{v}_j \rangle \geq -\mathrm{a}j\}\right)$ 定义。

命题 5.3. 当 D 为第一正交卦限除子时，$RS_D(x;q)$ 的偏 q-导数为

$$\left(\frac{d}{dx_i}\right)_q RS_D(x;q) = [|a|]_q \, RS_{D+\sum_{j=n+1}^{r} \langle e_i, v_j \rangle D_j}(x;q), \tag{7}$$

其中 $[b]_q = \frac{1-}{-q1-}{}^{b}{}_q = 1 + \cdots + q^{b-1}$，$b$ 为整数。

证明。 直接计算可得：

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx_i}\right)_q RS_D(x;q) &= \sum_{u \in P \cap M} \left[\begin{array}{c} |a| \\ \langle u, v_1 \rangle + a_1, \ldots, \langle u, v_r \rangle + a_r \end{array} \right]_q \frac{1 - T_{i,q}}{(1-q)x_i} x^u \\ &= \sum_{\substack{u \in P \cap M, \\ \langle u, v_i \rangle \geq 1}} \left[\begin{array}{c} |a| \\ \langle u, v_1 \rangle + a_1, \ldots, \langle u, v_r \rangle + a_r \end{array} \right]_q \frac{(1 - q^{\langle u, v_i \rangle})}{(1-q)} \frac{x^u}{x_i}.\end{aligned}$$

将 u 替换为 $u + e_i$，则得到

$$\begin{aligned}&\sum_{u \in P_i \cap M} \left[\begin{array}{c} |a| \\ \ldots, \langle u, v_i + e_i \rangle, \ldots \end{array} \right]_q \frac{(1 - q^{\langle u + e_i, v_i \rangle})}{(1-q)} x^u, \\ &= \sum_{u \in P_i \cap M} \left[\begin{array}{c} |a| \\ \ldots, \langle u, v_i \rangle + 1, \ldots \end{array} \right]_q \frac{(1 - q^{\langle u, v_i \rangle + 1})}{(1-q)} x^u,\end{aligned}$$

注意到，根据假设，$a_i = 0$。我们有

$$\begin{aligned}&\left[\begin{array}{c}|a|\\ \ldots,\langle u,v_i\rangle+1,\ldots\end{array}\right]_q (1-q^{\langle u,v_i\rangle+1})\\ =&\left[\begin{array}{c}|a|-1\\ \ldots,\langle u,v_i\rangle,\ldots\end{array}\right]_q (1-q^{|a|}).\end{aligned}$$

因此，

$$\left(\frac{d}{dx_i}\right)_q RS_D(x;q) = \sum_{u\in P_i\cap M}\left[\begin{array}{c}|a|-1\\ \langle u,v_1\rangle,\ldots,\langle u,v_n\rangle,\ldots,\langle u+e_i,v_r\rangle+a_r\end{array}\right]_q \frac{(1-q^{|a|})}{(1-q)}x^u,$$

这恰好是 $[|a|]_q RS^{D+\sum_{j=n+1}^{r}\langle e_i,v_j\rangle D_j}(x;q)$。 □

定理5.4。 设 X 是一个光滑完备环面簇。对于 X 上的第一正交卦限除子 D，$RS_D(x;q)$的$\mathbb{Q}(q)$-线性张成空间是由 $\left(\frac{d}{dx_1}\right)_q,\ldots,\left(\frac{d}{dx_n}\right)_q$张成的（交换）代数的一个不可分解表示。

证明。设 D 是任意一个第一正交卦限除子，P 是 D 的牛顿多面体。设 $(i_1,\ldots,i_n)\in P\cap M$ 使 $x_1+\cdots+x_n$ 在 P 上取最大值。那么我们可以计算得到 $\left(d\,dx_1\right)^{i_1}q\cdots\left(d\,d\overline{x}_n\right)^{i_n}q\,RS_D(x;q)$ 是 C(q) 中的非零元素：对于 $P\cap M$ 中的任意其他点 $(j_1,\ldots,j_n)$，存在某个指标 k，使得 $i_k>j_k$，因此 $\left(d\,dx_k\right)^{i_k}q\,x_1^{j_1}\cdots x^{j_n}=0$。另一方面，$\left(d\,dx_1\right)^{i_1}q\cdots\left(d\,d\overline{x}_n\right)^{i_n}q\,x_1^{i_1}\cdots x^{i_n}=[i_1]_q\cdots[i_n]_q$。 □

注记5.5。 设X为 P^n，其扇由$v_i = e_i$给出，其中$i = 1,\ldots,n$，且$v_{n+1} = -e_1-\cdots-e_n$。广义 Rogers-Szeg˝o 多项式$RS^{kD_{n+1}}(x;q)$是经典的多变量 Rogers-Szeg˝o 多项式

$$RS_{k,n} = \sum_{i_0+i_1+\cdots+i_n=k}\left[\begin{array}{c}k\\ i_0,i_1,\ldots,i_n\end{array}\right]_q x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}, \tag{8}$$

它是单行Macdonald多项式 [Sz26, H97] 的一个特化。在由x_i 和 $\left(d\,dx_i\right)_q$生成的代数中，存在一些算子

$$R_i := \sum_{l=0}^{n} e_{l+1}(x)(q-1)^l\left(\frac{d}{dx_i}\right)_q^l.$$

设 $L_i := \left(d\,dx_i\right)_q$，我们得到以下恒等式

$$R_i(RS_{k-1,n}) = RS_{k,n},\quad L_i(RS_{k,n}) = [k]_q RS_{k-1,n},\quad \text{and}\quad [L_i,R_i](RS_{k,n}) = q^k RS_{k,n}.$$

6. 渐近性与杜斯特迈斯特–海克测度的一个类比

现在我们证明一些关于由 $\chi_{\mathbb{T}}(\mathscr{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(D^0))$ 导出的测度的结果。我们先讨论非径向对称情形，之后再将其专门化为径向对称情形。特别是，我们最终将给出一个极限定理，描述当 k 趋于无穷时 $RS_{kD}(x;q)$ 的渐近行为。

我们再次将M 认作 $\mathbf{Z}^n$。对于一个关于x_i 且系数为q级数的 Laurent 多项式 $f(x) = \sum_u a_u(q)x^u$，其傅里叶变换定义如下：

定义 6.1。 设 $\delta_u(y)$ 是位于$u \in \mathbf{R}^n$处的狄拉克测度。令测度$FT(f(x))$ 为

$$FT(f(x)) = \sum_u a_u(q)\delta_u(y).$$

注意，如果$g(x)$ 是函数 $\sum_u a_u(q)e^{-iu\cdot x}$，其中$x \in \mathbf{R}^n$，并且$q$ 的选取使得$a_u(q)$ 为实数，那么$FT(f(x))$ 确实是$g(x)$ 的傅里叶变换。

令 $\tau_c : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 为关于c的膨胀。对于射影T-簇Y上的一个$T = (\mathbf{C}^*)^n$-等变线丛，按照 [BP90]，杜斯特迈斯特–海克（DH）测度可代数地定义为

$$DH(Y,L) := \lim_{k\to\infty} (\tau_k)_* \left(\frac{FT\left(\chi_T(Y, L^{\otimes k})\right)}{k^{\dim X}} \right). \tag{9}$$

如果Y 是归纳射影归纳簇，例如 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$，那么上面定义的测度便不再有意义。因子$k^{\dim X}$ 没有明确定义，而且$FT(\chi_T(Y,L^{\otimes k}))$可能不再能恰当地定义一个分布。

令$Y = \mathscr{Q}(\Delta)_\infty$ 为环面簇$X = X(\Delta)$的拟映射归纳簇，它带有一个额外的 $\mathbf{C}^*$-作用，可用于对 $\chi_T(Y,L^{\otimes k})$进行分级。接下来，我们为X上的数值有效除子D 定义如下测度。

定义 6.2. 设X是光滑完备环面簇，T是不变的数值有效除子D 。与D 的概率测度相关联的测度为

$$\mu_D = \lim_{q\to 1} \frac{FT(\chi_{\mathbb{T}}(\mathscr{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(D^0)))}{\chi_{\mathbb{T}}(\mathscr{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(D^0))|_{x=1}}. \tag{10}$$

在径向对称情形下，这变为

$$\mu_D = \lim_{q\to 1} \frac{FT(RS_D(x;q))}{RS_D(1;q)},$$

由命题 5.1。

容易验证，μ_D 是一个概率测度。下面的命题描述了 μ_D 的支撑。我们使用记号 v_Δ 表示所有本原射线生成元之和：

$$v_\Delta = \sum_i v_i.$$

命题 6.3。 设 $D = \sum_i a_i D_i$，令 F 为对应多胞体 $P = \bigcap_i \{u \mid \langle u, v_i\rangle \geq -a_i\}$ 的面，其中函数 $u \mapsto \langle u, v_\Delta\rangle$ 取得最大值。则测度 μ_D 可表示为公式

$$\mu_D := \frac{\sum_{F\cap M} \binom{\langle u,v_\Delta\rangle + |a|}{\langle u,v_1\rangle + a_1, \ldots, \langle u,v_r\rangle + a_r} \delta_u}{\sum_{F\cap M} \binom{\langle u,v_\Delta\rangle + |a|}{\langle u,v_1\rangle + a_1, \ldots, \langle u,v_r\rangle + a_r}}. \tag{11}$$

特别地，μ_D 支撑在 F 上。

证明。 根据定理 4.1，我们可以将 μ_D 改写为

$$\mu_D = \lim_{q\to 1} \sum_{u\in P\cap M} \frac{g_{\mathscr{A}_{P,u}}}{\sum_{u'\in P\cap M} g_{\mathscr{A}_{P,u'}}} \delta_u.$$

设 u 属于 $P \cap M$。由（2）可得，

$$g_{\mathscr{A}_{P,u}} = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(q;q)_{\langle u,v_i\rangle + a_i}}.$$

若 u_F 是 F 中的任意元素，则有 $c_F := \langle u_F,\ v_\Delta\rangle + |a| \geq \langle u,\ v_\Delta\rangle + |a|$，且当且仅当 $u \in F$ 时取等号。因此，

$$(q;q)_{c_F} \cdot g_{\mathscr{A}_{P,u}} = \left(\prod_{l=1+\langle u,v_\Delta\rangle + |a|}^{c_F} (1 - q^l) \right) \cdot \left(\begin{matrix} \langle u, v_\Delta\rangle + |a| \\ \langle u, v_i\rangle + a_i, \ldots, \langle u, v_r\rangle + a_r \end{matrix} \right)_q.$$

右侧的第一个因子在 $u \in F$ 时为 1，否则在 $q = 1$ 时为 0，因此

$$\lim_{q\to 1} (q;q)_{c_F} \cdot g_{\mathscr{A}_P,u}(q) = \begin{cases} \binom{\langle u,v_\Delta\rangle + |a|}{\langle u,v_i\rangle + a_i, \ldots, \langle u,v_r\rangle + a_r} & u \text{ in } F \cap M, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

So,

$$\mu_D = \lim_{q\to 1} \sum_{u\in P\cap M} \frac{g_{\mathscr{A}_P,u}}{\sum_{u'\in P\cap M} g_{\mathscr{A}_P,u'}} \delta_u = \lim_{q\to 1} \sum_{u\in P\cap M} \frac{(q;q)_{c_F}}{(q;q)_{c_F}} \cdot \frac{g_{\mathscr{A}_P,u}}{\sum_{u'\in P\cap M} g_{\mathscr{A}_P,u'}} \delta_u,$$

由此可简化为该命题。 □

注意，在径向对称情形下，$F = P$。

例 6.4. 设$X = \mathrm{P}^1$, 且$D = [0]$。则$P = \bigcap_i \{u \mid \langle u, v_i\rangle \geq -a_i\}$ 是 R 中的区间$[0,1]$。则

$$\mu_{kD} = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\delta_l.$$

很容易想到用 μ_{kD} 替代$FT(\chi_T(\mathscr{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(kD^0)))\ k^{\dim \mathscr{Q}(\Delta)_\infty}$，并将其用于 DH 测度的定义。这会得到一个支撑必定包含于P中的测度，正如通常的 DH 测度一样。然而，在极限 $\lim_{k\to\infty}(\tau_k)_*\mu_{kD}$中，测度过度集中，无法保留关于$P$的有用信息，如下例所示。

例 6.5. 设D 如例 6.4 中所述。令 $\chi_{(\tau_k)_*\mu_{kD}}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{iyx}(\tau_k)_*\mu_{kD}(y)$ 为测度 $(\tau_k)_*\mu_{kD}$ 的特征函数（参见例如 [D10]）。具体而言，

$$\chi_{(\tau_k)_*\mu_{kD}}(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}e^{ilx/k} = \left(\frac{1+e^{ix/k}}{2}\right)^k = e^{ix/2}\left(\frac{e^{-ix/2k}+e^{ix/2k}}{2}\right)^k = e^{ix/2}\cos^k(x/2k).$$

因此，$\lim_{k\to\infty}\chi_{(\tau_k)_*\mu_{kD}}(x) = e^{ix/2}$，相应地 $\lim_{k\to\infty}(\tau_k)_*\mu_{kD}(y) = \delta_{1/2}(y)$。

这启发了以下定义。再次，$X = X(\Delta)$ 是一个光滑射影托里克簇，D 是 T-不变的数值有效除子，定义在 X 上，而 D^0 是拟映射归纳簇 $\mathscr{Q}(\Delta)_\infty$ 上对应的除子。现在我们假设，Δ 的射线的生成元v_i 之和为 0；换言之，X 有一个丰沛除子，其对应多胞体是径向对称的。对于 $M_{\mathbb{R}} \cong \mathrm{R}^n$ 上的测度 μ，令$E^\mu = (\int_{\mathbb{R}^n} y_i d\mu)$ 表示向量 $(y_1, \ldots, y_n)$ 的相应期望值。

定义 6.6。 与 D 相关联的中心化环路 DH 测度

$$\nu_{D,\mathrm{cent}} = \lim_{k\to\infty}(\tau_{\sqrt{k}})_*\left(\mu_{kD} * \delta_{-E_{\mu_{kD}}}\right).$$

我们将D 的势函数定义为

$$\varphi_D(m) = \prod_{i=1}^{r}\left(\langle m, v_i\rangle + a_i\right)^{(\langle m, v_i\rangle + a_i)}.$$

在D的牛顿多面体上，φ_D 有唯一的最小值，我们将其称为m_D。我们将环杜斯特迈特-海克曼测度 定义为

$$\nu_D = \nu_{D,\mathrm{cent}} * \delta_{m_D}.$$

测度 $\nu_{D,\mathrm{cent}}$ 和 ν_D 是高斯的，可以自然地用X的扇来表示。令L_D 为$M_{\mathbb{R}}$ 中由D的牛顿多面体中向量之差生成的线性子空间。

定理 6.7. 设 X 是一个具有径向对称扇的光滑完备环面簇，且 $D = \sum_i a_i D_i$ a 是一个 T- 不变 nef 除子。$M_{\mathbb{R}}$ 上的概率测度 $\nu_{D,\ cent}(u)$ 由高斯密度函数给出，其均值为 0 ，协方差矩阵对应于二次型

$$u \mapsto \sum_{i \in I_D} \frac{1}{\langle m_D, v_i \rangle + a_i} \langle u, v_i \rangle^2,$$

乘以 L_D 上的狄拉克测度；也就是说，$\nu_{D,\ cent}(u)$ 是以下函数的一个标量倍数

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i \in I_D} \frac{\langle u, v_i \rangle^2}{\langle m_D, v_i \rangle + a_i} \right) \cdot \delta_{L_D}(u). \tag{12}$$

这里，I_D 是指标 i 的集合，满足 $\langle u,\ v_i \rangle + a_i$ 在 P 上并非处处恒为0 。

证明完全是解析性的，详见配套论文 [S23+]。引言中的定理 2 随即得出，因为与 δ_{m_D} 卷积会将u 替换为$u - m_D$；并且当D 是丰沛的时，$L_D = M_{\mathbb{R}}$。

最后，我们考虑一个特殊情形，此时证明 ν_D 是高斯的非常简单。其灵感来自一些结果：这些结果表明，齐性空间在量子K理论中的推前在$q = 1$ [BC18],处变成环同态；不过需要提醒的是，这些作者所考虑的q 与此处出现的q 所起的作用大不相同。

令 $\mathscr{M}$ 表示$M_{\mathbb{R}}$ 上的概率测度集合，它关于卷积构成一个半群。

定理 6.8。 假设 $\mathcal{N} \subset Div_T(X)$ 是一个除子半群，使得对于 $D,\ D' \in \mathcal{N}$,

$$\frac{\chi_{\mathbb{T}}(\mathcal{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(D^0 + D'^0))}{\chi_{\mathbb{T}}(\mathcal{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(D^0 + D'^0))|_{x=1}}|_{q=1} = \frac{\chi_{\mathbb{T}}}{\chi_{\mathbb{T}}(\mathcal{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(D^0))} \frac{(\mathcal{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(D^0))|_{x=1}}{}|_{q=1} \cdot \frac{\chi_{\mathbb{T}}(\mathcal{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(D'^0))}{\chi_{\mathbb{T}}(\mathcal{Q}(\Delta)_\infty, \mathscr{O}(D'^0))|_{x=1}}|_{q=1}$$

，或者等价地，$\mu_{(-)} : \mathcal{N} \to \mathscr{M}$ 是一个同态。那么对于每个 $D \in \mathcal{N}$， ν_D 也为高斯，且

$$\nu_{(-)} : \mathcal{N} \to \mathscr{M},$$

也是一个同态，其像落在高斯测度的子集中。

证明。 我们首先验证$\nu_{D,\mathrm{cent}}$ 是高斯的。根据定义，

$$\nu_{D,\mathrm{cent}} = \lim_{k\to\infty} (\tau_{\sqrt{k}})_* \left(\mu_{kD} * \delta_{-E_{\mu_{kD}}}\right).$$

由于我们假设 μ(−) 是一个同态，因此 $\mu_{kD} = (\mu_D)^{*k}$。如果V_D 是$M_{\mathbb{R}}$ 中由测度 μ_D表示的随机向量，那么上面的等式意味着 μ_{kD} 是与独立随机向量V_i之和 $\sum^k{}_{i=1} V_i$ 相对应的测度，其中每个随机向量的分布都与V_D相同。因此，$E^{\mu_{kD}} = kE(V_D)$，而测度 $\mu_{D,\mathrm{cent}}$ 对应于随机变量

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^k (V_i - E(V_D))}{\sqrt{k}},$$

根据 [D10 第 3.10] 节所述的中心极限定理，该随机变量服从高斯分布，其协方差等于$Cov(V_D)$。

我们还必须验证 $\nu_{D+D'} = \nu_D * \nu_{D'}$。首先检查在关于 D 和 D′ 的假设下，$\mathrm{m}_{D+D'} = \mathrm{m}_D + \mathrm{m}_{D'}$。（一般情况下这并不成立！）在 [S23+] 中，证明了 $\mathrm{E}^{\mu_{kD}}\mathrm{k} \to \mathrm{m}_D$。因此 $\mathrm{E}^{\mu_{k(D+D')}}\mathrm{k} \to \mathrm{m}_{D+D'}$。根据假设 $\mu_{D+D'} = \mu_D * \mu_{D'}$，所以我们还有 $\mathrm{E}^{\mu_{k(D+D')}}\mathrm{k} = \mathrm{E}^{\mu_{kD}*\mu_{kD'}}\mathrm{k} = \mathrm{E}^{\mu_{kD}}\mathrm{E}^{\mu_{kD'}}\mathrm{k} \to \mathrm{m}_D + \mathrm{m}_{D'}$。于是 $\mathrm{m}_{D+D'} = \mathrm{m}_D + \mathrm{m}_{D'}$。

最后，我们计算

$$\begin{aligned}
\nu_{D+D'} &= \lim_{k\to\infty} (\tau_{\sqrt{k}})_* \left(\mu_{k(D+D')} * \delta_{-E_{\mu_{k(D+D')}}}\right) * \delta_{m_{D+D'}} \\
&= \lim_{k\to\infty} (\tau_{\sqrt{k}})_* \left(\mu_{kD} * \delta_{-kE_{\mu_D}} * \mu_{kD'} * \delta_{-kE_{\mu_{D'}}}\right) * \delta_{m_D} * \delta_{m_{D'}} \\
&= \nu_D * \nu_{D'}
\end{aligned}$$

如所需，在第二行使用 $m_{D+D'} = m_D + m_{D'}$。 □

注 6.9. 例如，当 $X = \mathrm{P}^n$ 时，上述定理适用。X的扇的射线中的本原元素为 $v_i = e_i$，其中 $i = 1, \ldots, n$，以及 $v^{n+1} = -\sum_i e_i$。于是

$$\mu_{kD_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^k} \sum_{i_0+\cdots+i_n=k} \binom{k}{i_0, \ldots, i_n} \delta_{(i_1,\ldots,i_n)},$$

所以 $\mu_{kD_{n+1}} * \mu^{lD_{n+1}} = \mu^{(k+l)D_{n+1}}$。

参考文献

[AK06] S. Arkhipov 和 M. Kapranov，《环面弧概形与环面簇的量子上同调》，数学年刊**355** (2006), 953–964。

[Br88] M. Brion, 《凸多面体中的整点》, 高等师范学校科学年刊 21 (1988), 653–663。[BP90] M. Brion, C. Procesi, 《环面在射影簇上的作用》, 《算子代数、酉表示、包络代数与不变量理论》（巴黎，1989）, 509–539, Progr. Math., 92, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990。[BC18] A. S. Buch, S. Chung, 《余极小量子K理论的欧拉示性数》, 伦敦数学会杂志 (2) 97 (2018), no. 2, 145–148。[CV14] S. Cameron and R. C. Vinroot, 《多元 Rogers-Szeg˝o 多项式的乘积公式》, 拉马努金杂志 35 (2014), no. 3, 479–491。[Ch16] F. Chapoton, 《埃尔哈特多项式的 q-类比》, 爱丁堡数学会会刊 (2) 59 (2016), no. 2, 339–358。[CLS11] D. A. Cox, J. B. Little, and H. K. Schenck, 《环面簇》, 数学研究生教材, 124, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2011。[D10] R. Durrett, 《概率论：理论与例子》, 剑桥统计与概率数学丛书, 31, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2010。[F93] W. Fulton, 《环面簇导论》, 普林斯顿, 1993。[G98] A. Givental, 《环面完全交的镜像定理》, 《拓扑场论、原始形式及相关主题》（京都，1996）, 141–175, Progr. Math., 160, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998。[G15] A. Givental, 《置换等变量子K理论 V：环面q-超几何函数》, arXiv:1509.03903 (2015)。[GT14] A. Givental and V. Tonita, 《真正零属量子K理论中的希策布鲁赫-黎曼-罗赫定理》, 《辛几何、泊松几何与非交换几何》, 43–91, MSRI出版物 62, 2014。[H97] K. Hikami, 《杨子不变 motif 与麦克唐纳多项式的表示》, 物理学杂志A辑 30 (1997), 2447–2456。[MP95] D. R. Morrison and M. R. Plesser, 《对瞬子求和：环面簇中的量子上同调与镜像对称》, 核物理B辑 440 (1995), no. 1–2, 279–354。[S23+] A. Shah, 《多项分布的某些条件分布的极限》, 预印本, 2023。[Sz26] G. Szeg˝o, 《关于 theta 函数理论的贡献》, 普鲁士科学院会议录, 物理-数学部, （1926）, 第 242–252 页。[V12] R. C. Vinroot, 《有限维向量空间中旗的计数》, 电子组合学杂志 19 (2012), no. 3, Paper 5, 9 页。电子邮箱：anderson.2804@math.osu.edu 数学系，俄亥俄州立大学，哥伦布，OH 43210，美国 电子邮箱：shah@karlin.mff.cuni.cz 代数系，数学与物理学院，查理大学，布拉格，捷克共和国