arXiv:2302.03769v1 [cond-mat.mes-hall] 7 Feb 2023

使用具有两个自由层的自旋转矩振荡器进行物理储备池计算的计算能力

Terufumi Yamaguchi[1]、* Sumito Tsunegi[2,3], Kohei Nakajima[4], 和 Tomohiro Taniguchi[2†]
[1]*RIKEN, Wako, Saitama 351-0198, Japan,*
[2]*National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST), Research Center for Emerging Computing Technologies, Tsukuba 305-8568, Japan,*
[3]*PRESTO, Japan Science and Technology Agency (JST), Saitama 332-0012, Japan,*
[4]*Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo, Bunkyo-ku, 113-8656 Tokyo, Japan.*（日期：2023年2月9日）

本文报告了利用具有两个自由层的自旋转矩振荡器对物理储备池计算的计算能力进行的数值分析。传统的自旋电子器件通常由两个铁磁体组成，其中一个被称为自由层，其磁化方向可以移动，而另一个被称为参考层，其磁化方向固定。然而，近年来，人们开发出了具有两个自由层的器件，即用另一个自由层替代参考层，以满足各种实际应用的需求。增加另一个自由层会通过自旋转移效应和偶极磁场产生的耦合，彻底改变器件的动态响应。对朗道-利夫希茨-吉尔伯特方程进行数值模拟，并对李雅普诺夫指数和同步指数进行统计分析，结果表明，具有两个自由层的振荡器中会出现调幅振荡和混沌。由于物理系统的动力学是物理储备池计算的计算资源，这种复杂的动力学会从定性上改变物理储备池计算的计算能力。对短期记忆容量的评估表明，具有两个自由层的振荡器比传统振荡器具有更大的容量。在回声状态性质边缘附近，即同步指数从零到有限值的边界处，还发现了容量增强现象。

I. 引言

自旋电子学应用（例如类脑计算） [1], 的最新发展推动了各种器件结构和材料的出现 [2]。例如，包含铁磁体（称为自由层和参考层）的巨磁阻（GMR） [3–5] 和隧道磁电阻（TMR） [6–12]结构已应用于磁传感器和存储器 [13]。施加磁场和/或电流时，自由层中的磁化方向会发生变化[14, 15]。另一方面，参考层通常由两块铁磁体组成，中间以一层薄的非磁性间隔层隔开；它们之间的反铁磁层间交换耦合会牢牢固定其磁化方向。此外，近期研究人员还探索了具有两个自由层的GMR和TMR器件的新应用，例如高密度磁记录 [16], 、概率计算 [17], 和毫米波发生器 [18]。在这类器件中，两个自由层的磁化强度通过自旋转移效应和磁偶极场相互耦合，由此产生的动力学带来了新的功能。

单个自由层GMR/TMR器件与双自由层器件在磁化动力学方面的一个关键区别是，后者因动力学自由度增加而会出现混沌 [19–22]。尤其是，双自由层器件或可用于物理储备池计算 [23–27], ，这是自旋电子学技术的另一项新应用。物理储备池计算是一种循环神经网络，其中储备池这一物理非线性系统执行计算任务；例如，自旋转矩振荡器（STO）已应用于人声识别任务[28]。由于物理储备池计算利用物理系统的动力学输出信号作为计算资源，近期研究认为，计算能力与物理系统动力学状态之间的关系至关重要 [27]。自旋电子学领域的此类研究 [29, 30]近期聚焦于混沌状态附近的计算，因为混沌边缘有时能够提供计算能力较高的边界 [31, 32]。因此，由于混沌的出现，使用双自由层STO进行物理储备池计算的性能也可能不同于使用单个自由层STO时的性能。

本文通过对 Landau-Lifshitz-Gilbert（LLG）方程进行数值模拟，评估具有两个自由层的自旋转矩振荡器的计算性能。我们考虑图示的三种结构，

* terufumi.yamaguchi@riken.jp
† tomohiro-taniguchi@aist.go.jp

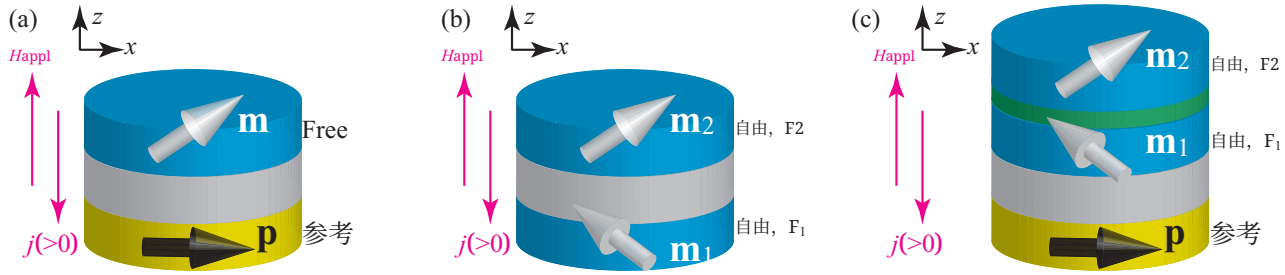


图1. 本文研究的器件结构示意图。表示自由层和参考层磁化方向的单位矢量分别记为$\mathbf{m}$ 和$\mathbf{p}$。当器件包含两个自由层时，在$\mathbf{m}$ 后添加后缀 $i = 1,2$。(a) 由一个自由层和一个参考层构成的常规 GMR/TMR 结构。通过 GMR/TMR 效应产生的输出信号与$\mathbf{m} \cdot \mathbf{p} = m_x$成正比。(b) 由两个自由层 F_1 和 F_2构成的器件。输出信号与$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2$成正比。(c) 由两个自由层 F_1 和 F_2, 以及一个参考层构成的器件。假设 F_1 与参考层之间的 GMR/TMR 效应占主导地位，则输出信号与$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{p}$成正比。箭头表示正电流密度和外磁场的方向。

如图1所示。第一种结构见图1(a)，是传统的巨磁电阻或隧道磁电阻系统，由一个自由层和一个参考层组成。第二种结构见图1(b)，由两个自由层组成，两个层的磁化方向均可通过自旋转移效应和偶极耦合发生变化。第三种结构见图1(c)，包含三个铁磁体，其中两个是自由层，一个是参考层。我们发现，第一种结构会饱和并趋于一个不动点，而第二种和第三种结构则呈现多种多样的动力学行为，例如振幅调制振荡和混沌。我们通过测量李雅普诺夫指数和同步指数，对这些动力学状态进行系统分类；这两个指标可用于识别混沌动力学和回声状态性质。此外，我们将短期记忆容量作为计算能力的品质因数进行评估。结果发现，具有两个自由层的自旋转矩振荡器的记忆容量大于具有单个自由层的自旋转矩振荡器。我们还观察到，具有两个自由层的自旋转矩振荡器在回声状态性质边界附近（即同步指数从零变为有限值的边界处），其记忆容量有所提升。

本文的组织结构如下。第二节考察单个自由层自旋转矩振荡器的磁化动力学状态、短期记忆容量、李雅普诺夫指数和同步指数；第III节和第IV节则考察由两个自由层构成的自旋转矩振荡器，以及由两个自由层和一个参考层构成的自旋转矩振荡器的这些特性。第五节为结论。

II. 采用单个自由层的自旋转矩振荡器

在此，我们通过LLG方程分析由一个自由层和一个参考层组成的传统自旋转矩振荡器的动力学，并概述评估短期记忆容量、李雅普诺夫指数和同步指标的方法。我们采用基于参考文献 [20], 中模型的宏自旋LLG方程，该模型的准确性已通过与实验结果 [16] 的比较得到验证。我们将在第III节和第IV节中将结果与具有两个自由层的自旋转矩振荡器进行比较。

A. 采用单个自由层的自旋转矩振荡器的 LLG 方程

图1(a)示意性地展示了自旋转矩振荡器。这些层的磁化方向对应的单位矢量分别记为$\mathbf{m}$ 和$\mathbf{p}$。自由层中的磁化动力学由 LLG 方程描述,

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = -\gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H} + \gamma H_s \mathbf{m} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{m}) + \alpha \mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{m}}{dt} \quad (1)$$

其中，磁场$\mathbf{H}$ 由形状磁各向异性场和沿垂直（z）方向施加的外磁场 $H_{\rm appl}$ ap- 组成,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -4\pi M N_x m_x \\ -4\pi M N_y m_y \\ H_{\rm appl} - 4\pi M N_z m_z \end{pmatrix}. \quad (2)$$

退磁系数记为 N_ℓ (N_x+$N_y + N_z = 1$)。自旋转移力矩强度为

$$H_s = \frac{\hbar \eta j}{2e(1 + \lambda \mathbf{m} \cdot \mathbf{p}) M d}, \quad (3)$$

其中， M 和 d 分别为自由层的饱和磁化强度和厚度。电流密度 j 的自旋极化率为 η，而 λ 给出自旋转移力矩非对称性 [14]。正电流对应于电子从参考层流向自由层。各参数的数值分别为 $M = 1300$ emu/cm^3,$\eta = 0.30$、$\lambda = \eta^2$、 $d = 2$ nm、 $\gamma = 1.764 \times 10^7$ rad/(Oe s)、$\alpha = 0.010$和 $H_{\rm appl} = 1.0$ kOe。退磁系数为 [33, 34]

$$N_z = \frac{1}{\tau}\left\{\frac{3}{4\pi} - \frac{3}{4\pi}\sqrt{1+\tau^2}\left[\tau^2 \mathsf{K}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\right) + \left(1-\tau^2\right)\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)\right] + \tau\right\}, \tag{4}$$

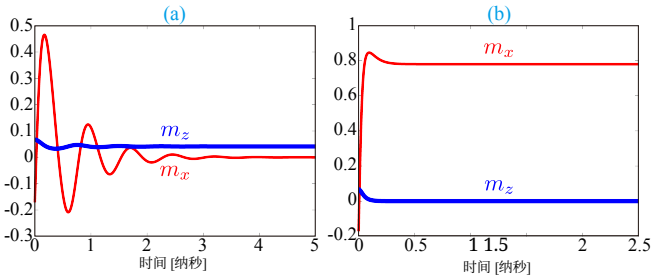


图 2. 自旋转矩振荡器中单个自由层的磁化面内（m_x）和面外（m_z）分量在电流密度分别为 (a) 100 和 (b) 450 MA/cm^2 时的动力学示例。

以及 $N_x = N_y = (1 - N_z)/2$，其中 $\tau = d/(2r)$，$r = 50$ nm为自由层的半径。在此，我们假设该层呈圆柱形。模数为 k 的第一类和第二类完全椭圆积分分别为 $\mathsf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} d\phi/\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$和$\mathsf{E}(k) = \int_0^{\pi/2} d\phi\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$。此外，我们假设参考层中的磁化指向面内（$x$）方向，即$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{e}}_x$，其中$\hat{\mathbf{e}}_\ell$ 是 ℓ（$\ell = x, y, z$）方向上的单位向量。

图 2(a) 和图 2(b) 展示了低电流密度（$j_0 = 100$ MA/cm^2）和高电流密度（j_0 =450 MA/cm^2）下典型的磁化动力学。初始状态为无电流时的稳态，此时 $m_z = H_{\rm appl}/(4\pi M N_z)$，磁化最终会饱和至不动点。当电流幅值较小时，磁化指向与 x 轴正交的方向，即 m_x 变为零，原因如下。稳态点由条件 $d\mathbf{m}/dt = \mathbf{0}$ 决定，在本例中，这意味着$\mathbf{H} - H_{\rm s}\mathbf{p} \times \mathbf{m} = \mathbf{0}$。由于 $N_z \simeq 1$，N_x，$N_y \ll 1$ 且$4\pi M N_z \gg H_{\rm appl}$，磁场$\mathbf{H}$主要指向 z 方向。接着，由于$\mathbf{p}$ 指向 x 方向，磁化$\mathbf{m}$应指向 y 方向，以满足$\mathbf{H} - H_{\rm s}\mathbf{p} \times \mathbf{m} = \mathbf{0}$。因此，如图 2(a) 所示，磁化饱和至 $|m_y| \simeq 1$的不动点。当电流幅值增大时，磁化会移动至不同的不动点。此时，由于自旋转移力矩较强，磁化会趋于与参考层中的磁化平行或反平行，具体取决于电流的符号。在本系统中，正电流倾向于使$\mathbf{m}$ 和$\mathbf{p}$平行排列，因此，对于图 2(b) 所示的情况，磁化饱和至满足 $m_x > 0$ 的不动点。

在下一节中，我们将研究一系列随机输入信号作用下的磁化动力学。这类输入信号产生的动态响应曾用于物理储备池计算中的识别任务 [35, 36]。在该任务中，需要指定用作输出信号的量。由于 GMR/TMR 效应，当前 STO 的输出信号取决于自由层的磁化方向与参考层磁化方向之间的关系，即 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}$。因此，我们将选择使用 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{p} = m_x$ 作为计算所用的输出信号。

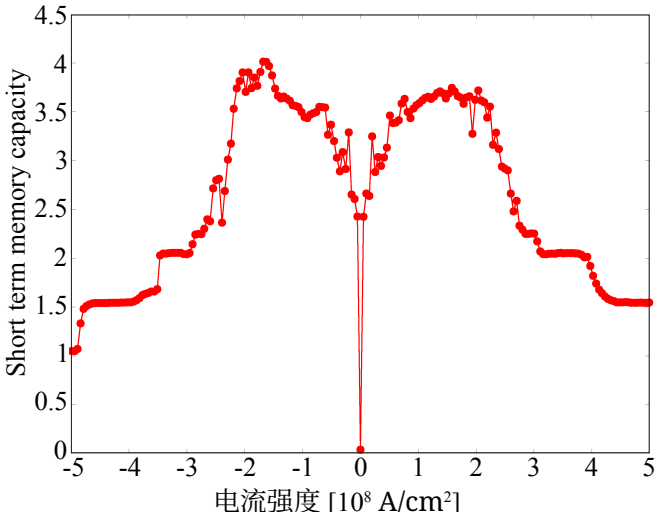


图 3. 单个自由层的自旋转矩振荡器的短期记忆容量随电流密度的变化。

B. 短期记忆容量

我们将用短期记忆容量来量化自旋转矩振荡器的计算能力。粗略地说，短期记忆容量对应于物理储备池能够识别的输入数据数量。因此，短期记忆容量越大，计算性能越高；另请参见第 V 节，其中简要说明了短期记忆容量与总计算能力之间的关系。本文中，我们假设输入一个二进制脉冲输入信号 $b_k = 0$，1（$k = 1$，2，$\cdots$）[35–37]，脉冲宽度为 $t_{\rm p}$，并将其叠加到电流密度上，表示为

$$j = j_0\left(1 + \nu b_k\right), \tag{5}$$

其中，无量纲参数 ν 量化了输入信号的强度，而 j_0 是 $b_k = 0$的电流密度。为简便起见，下文将 j_0 称为电流密度，而将 j 称为总电流密度。后缀 k 用于区分输入数据的顺序。假设 ν 和 $t_{\rm p}$ 的值分别为 0.2 和 1.0 纳秒。输入信号通过调制自旋转移力矩，改变

磁化动力学。评估方法的详细信息总结于附录 A（另见例如参考文献[36]）。

图 3 总结了短期记忆容量对电流的依赖关系。当电流幅值相对较小且磁化方向与 x 轴正交时，性能较高；另见图 2。短期记忆容量的最大值为 4.02，出现在 $j_0 = -168\text{MA/cm}^2$ 处。大电流区域中的阶梯状行为与另一种自旋转矩振荡器 [38]中观察到的现象相似。当电流密度 j_0 为零时，短期记忆容量为零，因为根据方程 (5)，即使 b_k 有限，总电流仍为零，因此输入信号不会引起磁化状态的任何变化。接下来，我们将评估自旋转矩振荡器的李雅普诺夫指数，并说明短期记忆容量对电流的这种依赖关系与磁化弛豫至不动点所需的时间有关。

C. 混沌边缘与回声状态性质

由于我们的目标是揭示计算能力与动力学状态之间的关系，并通过短期记忆容量量化这种能力，因此有必要引入能够区分动力学状态的量。为此，我们将使用李雅普诺夫指数 [21, 39, 40] 和同步指数 [29] 。虽然它们的评估方法分别在第 II D 节和第 II E 节中进行了描述，但在这里，我们先简要说明它们的作用和区别。

李雅普诺夫指数是这样一个时间尺度的倒数：该时间尺度描述了具有略微不同初始条件的 LLG 方程的两个解之间距离的扩张[41]。虽然李雅普诺夫指数的数量与动力学自由度的数量相同，但本文关注的李雅普诺夫指数对应于最大的李雅普诺夫指数；另请参见附录 B。当李雅普诺夫指数为负（正）时，随着时间增加，状态之间的差异相对于初始状态的差异会减小（增大）。因此，具有正李雅普诺夫指数的系统对其初始状态具有很高的敏感性。负、零和正李雅普诺夫指数所对应的典型动力学分别是不动点的饱和、极限环振荡和混沌 [41]。

当系统参数发生变化时，李雅普诺夫指数通常会改变数值，甚至改变符号 [41]。零李雅普诺夫指数与正李雅普诺夫指数之间的边界称为混沌边缘。有些方法可以通过对运动方程的数值模拟来评估李雅普诺夫指数 [42–46]。此外，还有一些统计方法可以根据时间序列数据评估李雅普诺夫指数 [47–50]。尽管统计分析经常用于分析实验数据，但它们存在一定局限；例如，有些 [49, 50] 方法只能评估正李雅普诺夫指数，也就是说，只能确定混沌边缘，而无法估计负李雅普诺夫指数与零李雅普诺夫指数之间的边界。本文通过数值模拟对李雅普诺夫指数进行量化；因此，可以识别指数的所有可能取值，即负值、零和正值。

同步指数 [29] 是两个相互独立的磁化样本之间距离的长时间平均值；这两个样本遵循相同的 LLG 方程，但初始条件略有不同。随着时间推移，当动力学状态变得独立于初始状态时，同步指数会变为零。在自治系统中，当动力学趋于不动点并达到饱和时，同步指数趋近于零。例如磁化翻转时，磁化最终会指向某个特定方向。另一方面，例如当磁化处于自振荡态时，由于两种磁化强度以相同频率振荡，振荡相位上的状态差异永远不会小于初始差异。在这种情况下，同步指数保持有限值。

注入时变信号后，情况便会改变。例如，在周期输入信号的情况下，如受迫同步 [51], ，磁化的相位会相对于周期输入信号的相位固定下来。在这种情况下，即使磁化强度处于振荡状态，同步指数也会变为零。随机信号是另一种时变输入信号，正如第 II B 节所述，它被用于物理储备池计算。在这种情况下，非线性振荡器通常会表现出噪声诱导同步 [52–57], ，磁化的振荡状态最终也会变得独立于初始状态。于是，同步指数变为零。特别是，噪声诱导同步对于物理储备池计算很重要，因为物理系统中的这种同步行为能够保证回声状态性质 [58]。回声状态性质是保证计算可复现性的必要条件：通过注入随机输入信号进行洗出（另见附录 A），物理储备池的动力学状态会变得独立于初始状态；因此，对于同一任务，物理储备池始终会给出相同的答案。同步指数从零变为有限值的边界称为回声状态性质的边缘。

人们可能会认为，可以通过李雅普诺夫指数从负值转为零的边界来确定回声状态性质的边界。在这里，趋于不动点的饱和是对应于负李雅普诺夫指数的磁化动力学示例，而自振荡对应于零李雅普诺夫指数；根据上述讨论，趋于不动点的饱和应导致同步指数为零，而自振荡则应导致同步指数非零。因此，人们可能会认为没有必要评估同步指数。

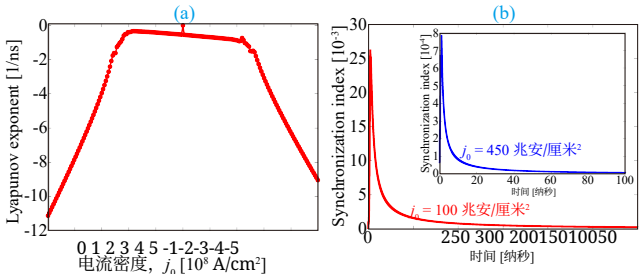


图 4。（a）单个自由层 STO 的李雅普诺夫指数随电流密度的变化。（b）电流密度为 100 MA/cm^2 时同步指数的时间演化。插图显示了电流密度为 450 MA/cm^2 时的情况。

然而，在其他情况下，了解李雅普诺夫指数不足以确定回声状态性质的边界，原因如下。首先，严格来说，本研究中的李雅普诺夫指数是最大Lyapunov指数，它对应于初始态之间的差异增长最快的方向上的扩张率。其次，在许多情况下，计算时只使用部分动力学变量。例如，有时用于计算的动力学变量具有回声状态性质，即使最大Lyapunov指数为零。下文第III节将展示这样一个示例。

由上述内容可知，李雅普诺夫指数和同步指数是相似但略有不同的量。前者决定混沌边缘，而后者决定回声状态性质的边缘。周期振荡态就是一种分隔这两个边缘的动力学状态示例，它不具备回声状态性质，且并非混沌态。Ref. [32] 中所介绍的光学物理储备池计算的计算能力在混沌边缘处达到最大，而 Ref. [27] 认为，增强计算能力并不需要混沌；相反，回声状态性质的边缘通常对应于一种优化条件。此外，尽管这两个边缘在某些情况下可能重合[29], ，但并不能保证它们在所有情况下都重合。因此，在本文中，我们根据李雅普诺夫指数和同步指数估计了这两个边缘，并研究了它们与计算能力之间的关系。

D. 李雅普诺夫指数

下面研究当前自旋转矩振荡器的李雅普诺夫指数（另见附录 B）。李雅普诺夫指数定义为

$$\Lambda = \lim_{N_\Lambda \to \infty} \frac{1}{N_\Lambda} \sum_{i=1}^{N_\Lambda} \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\mathscr{D}(t_i)}{\epsilon}, \tag{6}$$

其中，Δt 是 LLG 方程的时间增量。这里，ϵ 是 LLG 方程两个解之间的距离在每个时间步长，而 $\mathscr{D}$ 是经过时间增量（Δt）后的距离。我们将使用两个解的相对角度作为距离 $\mathscr{D}(t)$；参见附录 B。请注意，$\mathscr{D}/\epsilon$ 是距离 ϵ的扩张率，而李雅普诺夫指数描述了两个解之间距离的指数演化，即 $\mathscr{D} \sim \epsilon e^{\Lambda t}$。

图 4(a) 总结了李雅普诺夫指数随电流的变化关系。在整个电流区域内，该指数均为负值，因为磁化会趋向一个不动点。请注意，只有当系统的输出随输入信号变化时，才能识别过去信息；如果物理系统不响应输入信号，因而输出信号保持恒定，我们就无法根据输出信号识别输入信号。因此，李雅普诺夫指数的绝对值较小时，短期记忆容量通常较大。这是因为较小的李雅普诺夫指数对应着缓慢趋向不动点的饱和过程，在此过程中，输入信号的历史信息会充分反映在动力学中。当李雅普诺夫指数为较大的负值时，磁化会立即饱和到不动点，输出信号也会立即饱和为常量。因此，指数为较大的负值时，短期记忆容量较小。当电流密度j_0 为零时，李雅普诺夫指数为零，因为如上所述，此时输入信号不会驱动任何动力学过程，磁化因而保持在不动点。

如上文所示，由短期记忆容量量化的计算能力与由李雅普诺夫指数表征的动力学状态之间存在对应关系。然而，由于本例中的李雅普诺夫指数仅为负值，上述结果只能揭示这种对应关系的一部分。请注意，根据一个数学原理，即 Poincar´e-Bendixon 定理，具有单个自由层的 STO 的李雅普诺夫指数为负值或零 [59]。增加另一个自由层会打破这一数学限制，并导致混沌的出现。这样，计算能力与磁化的动力学状态之间将呈现对应关系。

E. 同步指数

在此，我们研究具有单个自由层的 STO 的同步指数（另见附录 C）。同步指数定义为

$$\mathcal{S} = \lim_{N_s \to \infty} \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mathcal{D}(t_i), \tag{7}$$

其中，N_s 是用于计算两个具有略微不同初始条件的式 (1) 解之间距离 $\mathcal{D}(t)$ 长时间平均值的样本数。

请注意，此处的距离 $\mathcal{D}$ 与第 IID 节中使用的 $\mathscr{D}$ 有所不同，具体如下。在计算李雅普诺夫指数时，每个时间步长都会将幅度为 ϵ 的扰动增加 Δt；见附录 B。另一方面，在计算同步指数时，扰动仅添加到初始状态；见附录 C。

还应注意，此处的距离 $\mathcal{D}$ 是根据用作输出信号的动力学变量来定义的；即 $\mathcal{D}=|m_x^{(1)}-m_x^{(2)}|$，其中 $m_x^{(1)}$ 和 $m_x^{(2)}$是通过 LLG 方程（式 (1)）在略有不同的初始条件下得到的 m_x 的解。在第 III B 和 IV B 节中，由于不同自旋转矩振荡器的输出信号取决于不同变量，$\mathcal{D}$ 将以不同方式定义。同步指数的定义与前一篇论文 [29]中的定义不同。例如，在参考文献 [29], 中，距离 $\mathcal{D}$ 是在整个相空间中测量的，而不是仅根据 m_x 计算得出的。我们之所以采用不同于先前工作的同步定义，是因为如第 II C 节所述，并非所有变量都会对用于计算的输出信号产生贡献。本节中，$\mathcal{D}$ 定义的差异并不重要；但在第 III B 节中，这一差异将变得重要；另请参见附录 C。

图 4(b) 展示了低电流密度 $j_0=100\,\mathrm{MA/cm^2}$，下时间同步指数 $\mathcal{S}_{N_\mathrm{s}}=(1/N_\mathrm{s})\sum_{i=1}^{N_\mathrm{s}}\mathcal{D}(t_i)$ 随时间的演化，其中公式（7）中的 $\mathcal{S}$ 对应于 $\lim_{N_\mathrm{s}\to\infty}\mathcal{S}_{N_\mathrm{s}}$。正如图 2 所示的动力学所预期的那样，随着时间增加，同步指数趋于零；在图 2 中，磁化饱和到一个不动点。如图 4(b) 的插图所示，在较大的电流密度 450 $\mathrm{MA/cm^2}$，下也观察到了趋于零的饱和现象。我们在其他电流密度下也观察到了类似行为，并发现同步指数在很宽的电流密度范围内均为零（未显示）。这些结果表明，输出信号（$\propto m_x$）最终变得与其初始状态无关，并且自旋转矩振荡器具有回声状态性质。

III. 由两个自由层构成的自旋转矩振荡器

现在我们来考察图1(b)所示的自旋转矩振荡器。我们将说明，与第 II 节的结果不同，混沌会出现在某些参数区域。

A. 含两个自由层的自旋转矩振荡器的 LLG 方程

该自旋转矩振荡器由两个铁磁体 F_1 和 F_2, 组成，它们之间由非磁性间隔层隔开。F_i 层中磁化$\mathbf{m}_i$ ($i=1$,2) 的 LLG 方程为

$$\frac{d\mathbf{m}_i}{dt}=-\gamma\mathbf{m}_i\times\mathbf{H}_i-\gamma H_{\mathrm{s}i}\mathbf{m}_i\times(\mathbf{m}_2\times\mathbf{m}_1)+\alpha_i\mathbf{m}_i\times\frac{d\mathbf{m}_i}{dt}, \tag{8}$$

其中 $H_{\mathrm{s}i}$ 为

$$H_{\mathrm{s}i}=\frac{\hbar\eta_i j}{2e(1+\lambda_i\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2)M_i d_i}, \tag{9}$$

磁场 [20, 34]

$$\mathbf{H}_i=\begin{pmatrix}-4\pi MN_{ix}m_{ix}-H_{\mathrm{d}i}m_{jx}\\-4\pi MN_{iy}m_{iy}-H_{\mathrm{d}i}m_{jy}\\H_{\mathrm{appl}}-4\pi MN_{iz}m_{iz}+2H_{\mathrm{d}i}m_{jz}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

包含来自另一个（$j=1$，2 和 $j\neq i$）层的偶极场（$\propto H_{\mathrm{d}i}$），其中

$$H_{\mathrm{d}i}=\pi M_j\left[\frac{\frac{d_i}{2}+d_\mathrm{N}+d_j}{\sqrt{r^2+\left(\frac{d_i}{2}+d_\mathrm{N}+d_j\right)^2}}-\frac{\frac{d_i}{2}+d_\mathrm{N}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{d_i}{2}+d_\mathrm{N}\right)^2}}\right]. \tag{11}$$

这里，d_N 是两个铁磁体之间间隔层的厚度，假设为 $d_\mathrm{N}=3$纳米。两个磁化强度的动力学通过自旋转移力矩和偶极场耦合。该自旋转矩振荡器的输出信号源自两个自由层之间的磁阻效应，并与$\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2$成正比。先前研究报告的模拟假设两个自由层具有相同的材料参数[17] ，而一项实验研究则使用了参数不同的材料 [16]。在本研究中，我们改变磁化强度 M_i 和吉尔伯特阻尼常数 α_i。

图5展示了该自旋转矩振荡器的典型磁化动力学，其中两个铁磁体具有相同的参数：$M_1=M_2=1300$ $\mathrm{emu/cm^3}$和 $\alpha_1=\alpha_2=0.01$。当电流密度较小（$j_0=100\mathrm{MA/cm^2}$）时，磁化强度会趋于一个不动点；图5(a)展示了其中一个（F_1）层的磁化方向。另一方面，当电流密度较大（$j_0=450\ \mathrm{MA/cm^2}$）时，磁化振荡会发生振幅调制；见图5(b)。为便于后续讨论，我们引入分岔图，用以概括时间 m_{1z} 的局部最大值随电流密度的变化；见图5(c)。还请记住，物理储备池计算中用作输出信号的变量是$\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2$。小电流和大电流下$\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2$ 的时间演化以及分岔图分别如图5(d)–5(f)所示。结果表明，电流较小时，两个磁化强度近似反平行，这是因为当磁化强度指向面内方向时，偶极相互作用倾向于形成反平行排列。作用于一个铁磁体的自旋转移力矩也倾向于形成反平行排列，而作用于另一个铁磁体的自旋转移力矩则倾向于形成平行排列。因此，磁化强度的排列接近但略微偏离反平行，即$\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2\simeq-1$。电流较大时，自旋转移力矩克服阻尼力矩，驱动磁化振荡，其中$\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2$ 呈现两个局部最大值。需要强调的是，这些动力学并非混沌。

当两个铁磁体的参数不同时，动力学会变得复杂 [20, 21]。例如

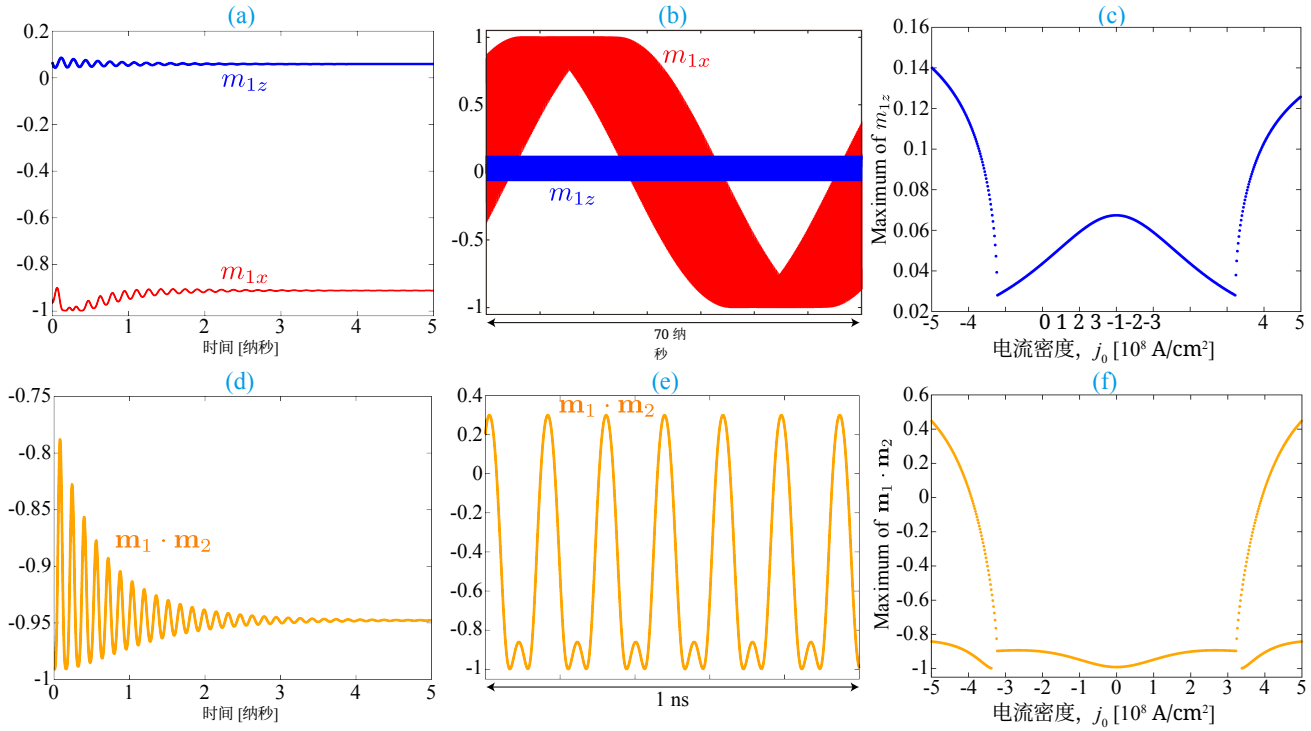


图5. 自旋转矩振荡器中两个自由层的面内（m_{1x}）和面外（m_{1z}）磁化分量在（a）100 和（b）450 MA/cm^2 电流密度下的动力学示例。（c）时间 m_{1z} 局部最大值随电流密度变化的分岔图。$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2$ 的类似数据见（d）、（e）和（f）。两个铁磁体中的参数值相同。

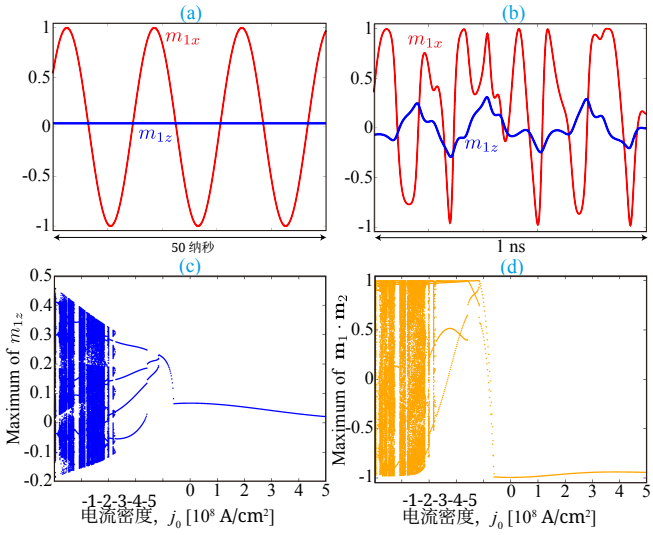


图6. 双自由层自旋转矩振荡器中，电流密度为 (a) 100 和 (b) 450 MA/cm^2 时，磁化面内分量 (m_{1x}) 和面外分量 (m_{1z}) 动力学的示例。 (c) 时间 m_{1z} 的局部最大值和 (d) $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2$ 随电流密度变化的分岔图。磁化值分别为 $M_1 = 1300$ emu/cm^3 和 $M_2 = 2200$ emu/cm^3。

假设 $M_1 = 1300$ emu/cm^3,$M_2 = 2200$ emu/cm^3, , 且 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.01$，并研究由此产生的动力学。在这种情况下，对于正电流，

如图 6(a) 所示，当电流密度为 100 MA/cm^{2}时，会激发出简单的磁化振荡。另一方面，当电流为负时，动力学会变得复杂，如图 6(b) 所示，此时电流密度为 450 MA/cm^2。动力学关于电流方向的不对称性源于以下原因。如前所述，偶极相互作用倾向于使磁化强度呈反平行排列。当电流为正时，作用于 F_1 层的自旋转移力矩也倾向于反平行排列，而作用于 F_2 层的自旋转移力矩则倾向于平行排列。请注意，作用于 F_2 层的自旋转移力矩相对较弱，因为它与饱和磁化强度成反比；在本例中，F_2 中的饱和磁化强度 M_2 较大。因此，偶极相互作用和自旋转移力矩都主要倾向于反平行排列，动力学也就相对简单。另一方面，当电流为负时，作用于 F_1 层的自旋转移力矩倾向于平行排列，而作用于 F_2 层的自旋转移力矩则倾向于反平行排列，但由于 M_2较大，该力矩较弱。因此，偶极相互作用倾向于反平行排列，而自旋转移力矩则主要倾向于平行排列。二者相互竞争，使得动力学变得复杂；事实上，从下文所示的李雅普诺夫指数可以明确看出，图 6(b) 中的动力学可归类为混沌。动力学的复杂性可以从

m_{1z} 的分岔图以及图 6(c) 和 6(d)]中看出。分布范围较广，同时存在窗口结构，这表明负电流区域 [41]出现了混沌。

B. 具有两个自由层的自旋转矩振荡器的短期记忆容量、李雅普诺夫指数和同步指数

图 7(a)–7(c) 展示了自旋转矩振荡器的短期记忆容量、李雅普诺夫指数和同步指数，其中 F_2层中的磁化强度 M_2 绘制在纵轴上。在同步指数的情况下，距离 $\mathcal{D}$ 的定义为在略有不同的初始条件下计算得到的$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2$ 值之差。图中结果表明如下几点。首先，当系统处于混沌状态，即李雅普诺夫指数为正时，短期记忆容量几乎为零。其次，除了短期记忆容量在零值与有限值之间的边界外，还存在一些边界，沿这些边界可以观察到容量增强现象。我们认为，这种增强出现在回声状态性质的边缘，具体如下所述。第三，短期记忆容量大于具有单个自由层的自旋转矩振荡器；例如，当 $j_0 = 344$ MA/cm^2 和 $M_2 = 1380$ emu/cm^{3}时，该容量为 4.60。

需要指出的是，当前自旋转矩振荡器的李雅普诺夫指数至少为零，也可能为正（另见附录 B）。这是由于绕 z 轴的轴对称性：两个磁化强度绕 z 轴旋转相同角度时，系统能量不会改变。因此，对 xy 平面内磁化强度的相位施加的扰动会保持有限。这意味着最大李雅普诺夫指数至少为零。因此，人们可能会认为当前自旋转矩振荡器不具有回声状态性质。然而，$\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 绕 z 轴旋转相同角度时，自旋转矩振荡器的输出信号 $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2$ 不会改变。从这个意义上说，即使在（最大）李雅普诺夫指数为零的某些参数区域内，输出信号仍具有回声状态性质。因此，为了揭示输出信号的回声状态性质，我们除了评估李雅普诺夫指数外，还评估了$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2$,的同步指数。在这里，我们发现短期记忆容量是有限的，并且在回声状态性质的边缘处可能较大；参见图 7(a) 和 7(c)。

现在，我们来考察在饱和磁化强度为 $M_1 = M_2 = 1300$emu/cm^3 时，改变 F_2 层中的阻尼常数 α_2 对短期记忆容量的影响；见图 7(d)。在这种情况下，电流较小时，短期记忆容量较大。此外，该参数区域内不存在混沌；见图 7(e)，其中电流密度较小时和较大时的时间李雅普诺夫指数都趋近于零。短期记忆容量保持有限这一事实也意味着回声状态性质的存在；另见图7(f)，其中时间同步指数也趋于饱和至零。

IV. 由两个自由层和一个参考层组成的自旋转矩振荡器

本节讨论图1(c)所示的自旋转矩振荡器。来自参考层的自旋转移力矩提供了额外力矩，使其动力学状态和计算能力不同于第III节研究的自旋转矩振荡器。

A. 由两个自由层和一个参考层组成的自旋转矩振荡器的 LLG 方程

F_1层和F_2 层中磁化强度的LLG方程为

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{m}_1}{dt} =& -\gamma \mathbf{m}_1 \times \mathbf{H}_1 - \gamma H_{s1} \mathbf{m}_1 \times (\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1) \\ &+ \gamma H_s \mathbf{m}_1 \times (\mathbf{p} \times \mathbf{m}_1) + \alpha_1 \mathbf{m}_1 \times \frac{d\mathbf{m}_1}{dt},\end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{d\mathbf{m}_2}{dt} = -\gamma \mathbf{m}_2 \times \mathbf{H}_2 - \gamma H_{s2} \mathbf{m}_2 \times (\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1) + \alpha_2 \mathbf{m}_2 \times \frac{d\mathbf{m}_2}{dt}. \tag{13}$$

假设总输出信号主要由参考层与F_1 层之间的磁阻效应决定，则输出信号与$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{p} = m_{1x}$成正比。

图8(a)和图8(b)展示了自旋转矩振荡器在小电流（100 MA/cm^2）和大电流（450 MA/cm^2）下激发的典型动力学。两个铁磁体具有相同的参数：$M_1 = M_2 = 1300$ emu/cm^3 和$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.01$。电流较小时，磁化强度趋于一个不动点。与第III节研究的自旋转矩振荡器不同，即使两个铁磁体的参数相同，在大电流下也会出现复杂动力学，这是由于参考层产生的自旋转移力矩仅作用于F_1 层。 m_{1x} 和 m_{1z} [的分岔图（图8(c)和图8(d)）]显示，正电流区域出现了复杂结构。这些结果表明正电流区域存在混沌。

动力学随电流方向而呈现不对称的原因如下。首先，考虑负电流的情况。参考层作用于 F_1 层的自旋转移力矩使 $\mathbf{m}_1$ 沿 $-x$ 方向移动。随后，$\mathbf{m}_2$ 沿$+x$ 方向移动，以使偶极相互作用能最小化。F_2 作用于 F_1层的自旋转移力矩倾向于使磁化强度平行排列，因此试图使 $\mathbf{m}_1$ 沿 $+x$ 方向移动。然而，这种运动受到参考层所产生的自旋转移力矩的抵消，因此 $\mathbf{m}_1$ 保持在

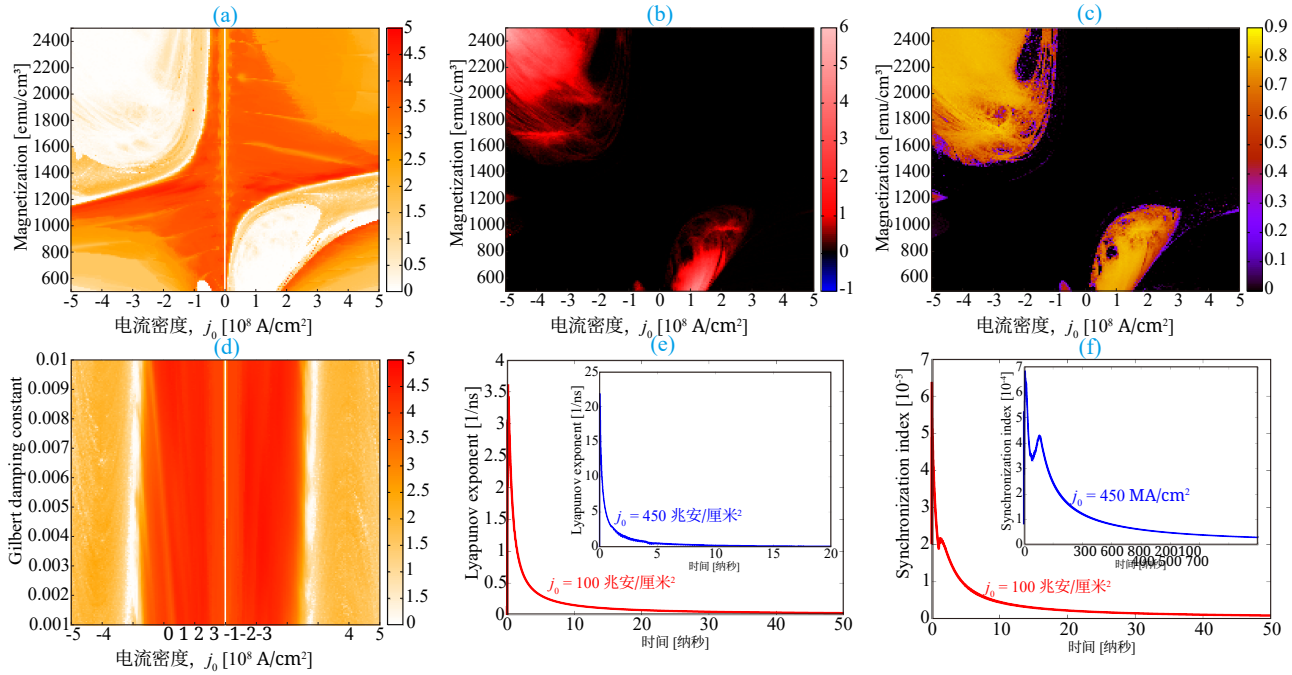


图 7。（a）短期记忆容量、（b）李雅普诺夫指数，以及（c）具有两个自由层的自旋转矩振荡器的同步指数，其中横轴为电流密度，纵轴为 F_2 层中的饱和磁化强度。（d）短期记忆容量，其中纵轴为 F_2 层的吉尔伯特阻尼常数。电流密度为 100 MA/cm^{2}时，时间（e）李雅普诺夫指数和（f）同步指数的时间演化示例。插图显示了电流密度为 450 MA/cm^{2}时的结果。F_2 层的吉尔伯特阻尼常数为 0。01。

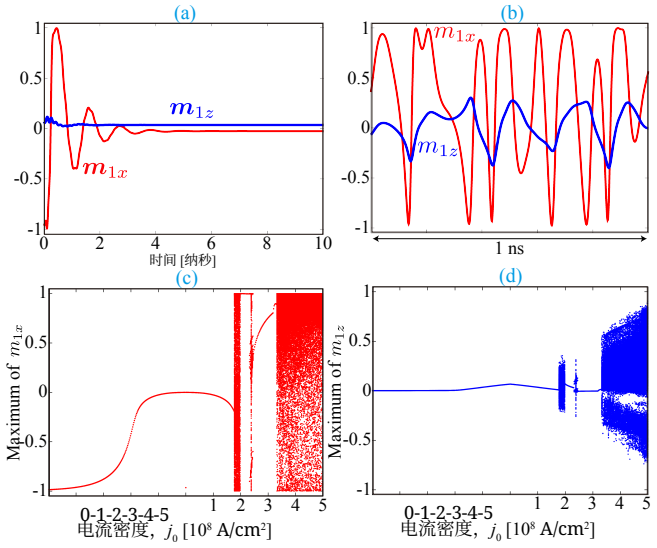


图 8。具有两个自由层和一个参考层的自旋转矩振荡器中，电流密度分别为（a）100 和（b）450 MA/cm^2 时，磁化的面内（m_{1x}）和面外（m_{1z}）分量的动力学示例。时间（c） m_{1x} 和（d） m_{1z} 的局部最大值随电流密度变化的分岔图。

$-x$ 方向。F_1 作用于 F_2 层的自旋转移力矩倾向于使磁化反平行排列，因此$\mathbf{m}_2$ 也保持在 $+x$方向。因此，两个磁化强度保持不动点。

接下来，考虑正电流的情况。参考层作用于 F_1 层的自旋转移力矩会使$\mathbf{m}_1$ 沿着 $+x$ 方向移动。因此，$\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 分别趋向于指向 $+x$ 和 $-x$ 方向。然而，在这种情况下，F_1 作用于 F_2 层的自旋转移力矩倾向于使磁化强度平行排列，因此$\mathbf{m}_2$ 无法保持在 $-x$ 方向。结果，当电流大小较大时，磁化强度不会饱和到不动点。

B. 含两个自由层和一个参考层的自旋转矩振荡器的短期记忆容量、李雅普诺夫指数和同步指标

图 9(a)-9(c)总结了本研究中 STO 的短期记忆容量、李雅普诺夫指数和同步指数，其中纵轴绘制的是 F_2 层中的饱和磁化强度 M_2 。同步指数所用的距离 $\mathcal{D}$ 根据 m_{1x} 进行评估。当 $j_0 = 127\text{MA/cm}^2$ 和 $M_2 = 1320$ emu/cm^3, 时，短期记忆容量的最大值为 5.72，高于具有一个自由层和两个自由层的 STO 的相应值。本节及其他章节中的这些结果表明，增加另一个自由层会使磁化动力学变得复杂，并有助于增强基于 STO 的物理储备池计算能力。短期

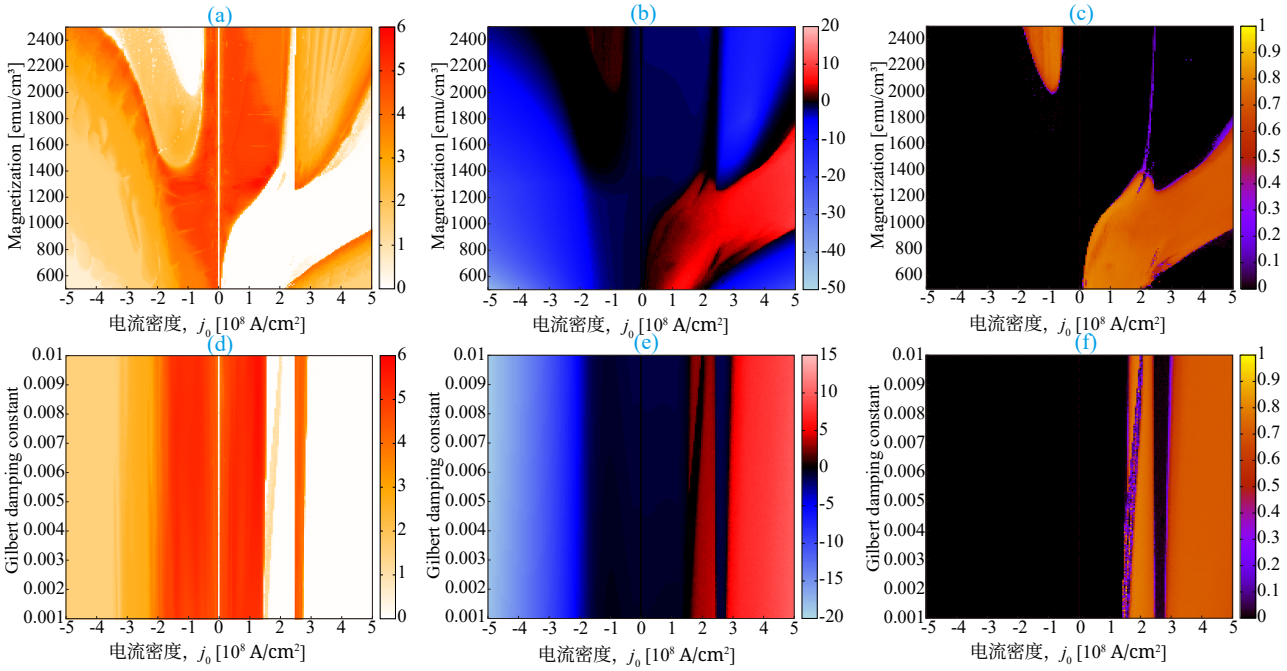


图 9. （a）短期记忆容量、（b）李雅普诺夫指数，以及（c）具有两个自由层和一个参考层的自旋转矩振荡器的同步指数，其中横轴为电流密度，纵轴为 F_2 层的饱和磁化强度。（d）、（e）和（f）与（a）、（b）和（c）相同，但表示为 F_2层吉尔伯特阻尼常数的函数。

记忆容量在系统处于混沌状态时又会变为零，此时李雅普诺夫指数为正；参见图 9(a)和 9(b)。短期记忆容量的最大值出现在回声状态性质边缘附近。这里，与李雅普诺夫指数为零相对应的参数区域相对有限，尤其是在正电流区域，因此在本研究的 STO 中，混沌边缘与回声状态性质的边缘几乎重合。这可能是由于来自参考层的自旋转移力矩打破了系统绕z轴的轴对称性，并使李雅普诺夫指数为零所对应的参数区域缩小；与第 III B 节中的情况相比，情况如此。改变 F_2 层中的阻尼常数 α_2 时也发现了类似行为，如图 9(d)-9(f)中短期记忆容量、李雅普诺夫指数和同步指数的曲线所示。当$j_0 = 127$ MA/cm^2 和 $\alpha_2 = 0.00847$时，短期记忆容量的最大值为 5.76。如图 9(a) 和 9(d) 所示，短期记忆容量最大值出现在电流相对较低的区域，而在相对较高的电流区域，由于出现混沌，计算能力较低。这一事实可能使低电流区域更适用于物理储备池计算。

此处，我们展示了短期记忆容量对 F_2 层参数的依赖关系。即使改变 F_1 层的参数，也会出现类似的行为，例如短期记忆容量在回波状态性质边界附近达到最大值；参见附录 D。

V. 结论

总之，我们研究了具有两个自由层的自旋转矩振荡器中的磁化动力学。研究表明，增加另一个自由层后，磁化强度通过自旋转移力矩和偶极场耦合运动，使动力学输出信号变得复杂。例如，除在具有单个自由层的自旋转矩振荡器中发现的磁化饱和至不动点现象外，在由两个自由层组成的自旋转矩振荡器中还发现了振幅调制振荡。具有两个自由层的自旋转矩振荡器还表现出混沌动力学，尤其是在大电流区域。这些复杂动力学主要出现在存在结构不对称性的情况下，例如参数差异和／或参考层的存在。我们通过评估短期记忆容量，研究了这些自旋转矩振荡器用于物理储备池计算的计算能力。具有两个自由层的自旋转矩振荡器的最大值高于具有单个自由层的自旋转矩振荡器。通过评估李雅普诺夫指数和同步指数，研究表明，短期记忆容量在回声状态性质的边缘附近达到最大值。我们注意到，短期记忆容量是信息处理容量的线性部分 [60, 61], ，而总信息处理容量受系统线性独立输出的限制。因此，短期记忆容量增加并不直接保证总信息处理容量增加；信息处理容量的非线性部分

在具有两个自由层的自旋转矩振荡器中可能受到抑制。未来应分析总信息处理容量。

致谢

部分研究成果来自 NEDO 委托项目“创新型 AI 芯片与下一代计算技术开发／（2）下一代计算技术开发／面向未来共生社会的神经形态动力学探索”。T.Y. 受到 JSPS KAKENHI 项目编号 21K14526 的资助。T.T. 受到 JSPS KAKENHI 项目编号 20H05655 的资助。

附录 A：评估短期记忆容量的方法

这里，我们总结短期记忆容量的评估方法细节。短期记忆容量是一种信息处理容量 [60, 61] ，用于量化与任务无关的计算能力。我们假设一系列脉冲输入信号 r_k ($k = 1,\ 2,\ \cdots,\ N_{\mathrm{L}}$) 被注入物理储备池，其中后缀 k 用于区分输入信号的顺序。在正文中，我们使用二进制输入信号 $b_k = 0,\ 1$ 作为输入信号 r_{k}。另一种输入信号的例子可见参考文献 [61], ，其中使用均匀分布随机数（$0 \le r_k \le 1$ 或$-1 \le r_k \le 1$）。我们根据输入信号 r_k 定义目标数据 $z_{k,\ D}$。这里， D 是一个称为延迟的整数（$D = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）。物理储备池计算的一个目标是从当前输出信号中识别过去的输入数据，因此有必要引入延迟来区分过去的输入数据。例如，在评估短期记忆容量时，$z_{k,\ D}$ 为 b_{k-D} [35, 36]（或 r_{k-D} [61]）；也就是说，目标数据是当前输入信号之前 D 次注入的输入数据。另一个例子是，在评估奇偶校验容量 [35, 36]时，目标数据为 [60, 61] 信息处理容量通常是 r_{k-D}的非线性组合。定义目标数据后，我们引入权重 $w_{D,\ i}$ 以使其最小化

$$\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{L}}} \left(\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{node}}+1} u_{k,i} w_{D,i} - z_{k,D} \right)^2 , \tag{A1}$$

其中，第 k 个输入存在时，第 i 个（虚拟）节点的输出数据记为 $u_{k,\ i}$。当物理储层为多体系统时，下标 i 用于区分各个主体。另一方面，本文使用单个自旋转移振荡器。在这种情况下，采用时间复用方法 [35] 来引入虚拟神经元，$u_{k,\ i} = u[t_0 + (k - 1 + i/N_{\mathrm{node}})t_{\mathrm{p}}]$，其中 t_0 是注入输入信号的初始时间，而N_{node} 是虚拟神经元的数量。函数$u(t)$表示自旋转移振荡器的输出信号；例如，对于第 II 节研究的具有单个自由层的自旋转移振荡器，实验测量的量为 m_x，因此， $u(t) = m_x(t)$。确定权重的过程称为学习。用于学习的输入信号数量为 N_{L}。请注意，每个目标数据都应引入一个权重。

接下来，我们注入另一组脉冲 r'_n (n =1、2、$\cdots$、N'_{L})，其中在量的符号上加上撇号，以区别于学习时使用的量。输入数据的数量 N'_{L} 不一定与学习时使用的数量相同，即 $N_{\mathrm{L}} \neq N'_{\mathrm{L}}$。然后，根据输出数据 $u'_{n,\ i}$（即物理储备池对注入 r'_n 的响应），并使用通过学习确定的权重 $w_{D,\ i}$ ，将系统输出定义为

$$y'_{n,D} = \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{node}}+1} u_{n,i} w_{D,i}. \tag{A2}$$

如果学习效果良好，$y'_{n,\ D}$ 将重现根据 r'_n 定义的目标数据 $z'_{k,\ D}$ 。为了量化这种可重现性，我们可以使用相关系数，

$$\mathrm{Cor}(D) = \frac{\sum_{n=1}^{N'_{\mathrm{L}}} \left(z'_{n,D} - \langle z'_{n,D} \rangle \right) \left(y'_{n,D} - \langle y'_{n,D} \rangle \right)}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N'_{\mathrm{L}}} \left(z'_{n,D} - \langle z'_{n,D} \rangle \right)^2 \sum_{n=1}^{N'_{\mathrm{L}}} \left(y'_{n,D} - \langle y'_{n,D} \rangle \right)^2}}. \tag{A3}$$

分量信息处理容量定义为

$$C(z'_{n,D}) = \left[\mathrm{Cor}(D) \right]^2 . \tag{A4}$$

当系统输出 $y'_{n,\ D}$ 完全重现目标数据 $z'_{n,\ D}$ 时，相关系数的绝对值为 1。另一方面，相关系数当输入信号无法再现输入数据时，该值为零。因此，分量信息处理容量量化了目标数据的可再现性。请注意，分量信息处理容量是针对每个目标数据$z'_{n,\ D}$引入的，并且独立于后缀 n ，因为在式中计算了相对于输入脉冲的平均值。

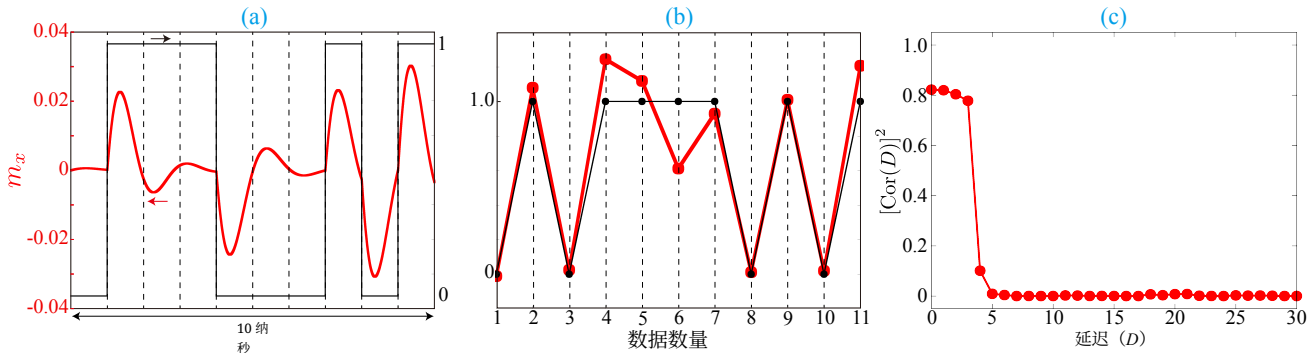


图10。（a）电流密度为 10 MA/cm^2 时，m_x（红色）与随机二进制输入（黑色）的时间动力学。脉冲宽度为 $t_\mathrm{p} = 1$ 纳秒。（b） $D = 1$ 的目标数据（黑色）和系统输出（红色）示例。（c） $[\mathrm{Cor}(D)]^2$ 对 D 的依赖关系。

（A3）。例如，文献 [61] 评估了若干物理储备池的分量信息处理容量，其中各容量根据目标数据的非线性和延迟 D加以区分。在评估短期记忆容量时，我们将目标数据限制为输入数据的线性组合，即$z_{k,\ D} = b_{k-D}$，并将短期记忆容量定义为关于延迟D的分量信息处理容量之和，即

$$C_\mathrm{STM} = \sum_{D=1}^{D_\mathrm{max}} C(b'_{n-D}); \qquad \text{(A5)}$$

例如，参见文献 [36, 62] 对短期记忆容量的定义。在许多情况下， [36], 当物理储备池具有回声状态性质时，对于较大的延迟，相关系数 Cor(D) 会变得小到可以忽略，因此过去信息会随时间逐渐消退。在这种情况下，信息处理容量的值与最大延迟 D_max 无关。正如前文所述，分量容量量化了目标数据的可再现性，而用于评估短期记忆容量的目标数据就是输入数据本身。因此，粗略而言，短期记忆容量可以视为从当前输出中再现出的过去输入数据的数量，正如正文中所述。请注意，在某些情况下， [29](${z_{n,D}}$) for $D = 0$ 会纳入容量的定义中。本研究使用$N_\mathrm{L} = N'_\mathrm{L} = 1000$ 随机二进制数据、$N_\mathrm{node} = 250$节点和 $D_\mathrm{max} = 30$。

图10总结了电流密度为 10 MA/cm^{2}的单个自由层自旋转矩振荡器（STO）的这些过程示例。图10(a)展示了一系列随机二进制输入信号以及 m_x的动力学示例。 m_x 的值会随输入信号变化；通过这一动态响应，可以识别输入信号。图10(b)展示了延迟为 D =1时再现输入数据的示例。可以看出，随着延迟增加，可再现性会降低。图10(c)展示了 $[\mathrm{Cor}(D)]^2$ 对延迟 D的依赖关系。短期记忆容量是这些 $[\mathrm{Cor}(D)]^2$的总和。

在确定权重时，输出 $u_{k,\ i}$应独立于初始状态。这是因为物理系统的初始状态通常无法控制，而计算能力不应取决于这类不可控变量。此外，用于评估容量的输出 $u'_{n,\ i}$ 应独立于用于确定权重的输入数据 $r_{k,\ i}$。这是因为学习与容量评估之间不应存在相关性。如正文所述，如果物理储备池具有回声状态性质，注入随机输入信号后，动力学状态将独立于过去的状态。因此，在确定权重之前，我们向 STO 注入 300 个随机二进制输入信号。同样，在确定权重之后、评估容量之前，我们也注入另外 300 个随机二进制输入信号，以消除学习与评估之间的相关性。这些过程称为洗出。从这些例子可以看出，回声状态性质是物理储备池计算的一项必要条件。

附录 B：李雅普诺夫指数的评估方法

这里，我们总结一下李雅普诺夫指数的评估方法。为简单起见，暂时以具有单个自由层的自旋转矩振荡器为例。

我们将具有某个初始条件的 LLG 方程的解记为 $\mathbf{m}(t)$。在某个时间 t_0，我们引入$\mathbf{m}^{(1)}(t_0)$，其方向与$\mathbf{m}(t_0)$略有不同，两者之间的距离为 ϵ。我们强调，$\mathbf{m}(t)$ 与 $\mathbf{m}^{(1)}(t_0)$ 之间没有相关性。该距离是两个磁化强度的相对角，即 $\epsilon = \cos^{-1}\left[\mathbf{m}(t_0) \cdot \mathbf{m}^{(1)}(t_0)\right]$。求解$\mathbf{m}(t_0)$ 和$\mathbf{m}^{(1)}(t_0)$的 LLG 方程后，我们得到 $\mathbf{m}(t_0 + \Delta t)$ 和 $\mathbf{m}^{(1)}(t_0 + \Delta t)$。然后，我们定义时间Lyapunov指数

在时间 $t_1 = t_0 + \Delta t$ 的指数为

$$\Lambda(t_1) = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\mathscr{D}(t_1)}{\epsilon}, \tag{B1}$$

其中，$\mathscr{D}(t_1) = \cos^{-1}[\mathbf{m}(t_0 + \Delta t) \cdot \mathbf{m}^{(1)}(t_0 + \Delta t)]$ 表示 $\mathbf{m}(t_0 + \Delta t)$ 与 $\mathbf{m}^{(1)}(t_0 + \Delta t)$ 之间的距离。接下来，我们将 $\mathbf{m}(t_0 + \Delta t)$ 沿 $\mathbf{m}^{(1)}(t_0 + \Delta t)$ 的方向移动距离 ϵ，得到 $\mathbf{m}^{(2)}(t_0 + \Delta t)$。求解 $\mathbf{m}(t_0 + \Delta t)$ 和 $\mathbf{m}^{(2)}(t_0 + \Delta t)$ 的 LLG方程，可得 $\mathbf{m}(t_0 + 2\Delta t)$ 和 $\mathbf{m}^{(2)}(t_0 + 2\Delta t)$。然后，时间 $t_2 = t_0 + 2\Delta t$ 处的时间 Lyapunov指数定义为$\Lambda(t_2) = (1/\Delta t) \ln[\mathscr{D}(t_2)/\epsilon]$，其中 $\mathscr{D}(t_2)$ 表示 $\mathbf{m}(t_2)$ 与 $\mathbf{m}^{(2)}(t_2)$ 之间的距离。

现在让我们将上述过程推广。在$t_n = t_0 + n\Delta t$，我们通过将$\mathbf{m}(t_n)$沿$\mathbf{m}^{(n)}(t_n)$的方向移动固定距离 ϵ，引入 $\mathbf{m}^{(n+1)}(t_n)$。求解 LLG 方程，得到$\mathbf{m}(t_{n+1})$和$\mathbf{m}^{(n+1)}(t_{n+1})$。根据$\mathbf{m}(t_{n+1})$与$\mathbf{m}^{(n+1)}(t_{n+1})$之间的距离 $\mathscr{D}(t_{n+1}) = \cos^{-1}[\mathbf{m}(t_{n+1}) \cdot \mathbf{m}^{(n+1)}(t_{n+1})]$，将 $t = t_{n+1}$ 处的时间 Lyapunov指数定义为 $\Lambda(t_{n+1}) = (1/\Delta t) \ln[\mathscr{D}(t_{n+1})/\epsilon]$。于是，李雅普诺夫指数定义为

$$\Lambda = \lim_{N_\Lambda \to \infty} \frac{1}{N_\Lambda} \sum_{i=1}^{N_\Lambda} \Lambda(t_i). \tag{B2}$$

对于包含两个自由层的自旋转矩振荡器，我们应定义 $\mathbf{m}_i^{(n+1)}(t_n)$，使总距离（即$\mathbf{m}_i(t_n)$与$\mathbf{m}_i^{(n+1)}(t_n)$之间距离之和）等于$\epsilon$；另请参见参考文献 [40], ，其中提出了一种类似的方法，用于带有反馈电路的自旋转矩振荡器。

如上述说明所示，每个时间步 t_n 都会给出两个样本之间的距离；这与下文附录 C 中所述的同步指数评估方法不同，后者仅在初始时刻施加扰动。

请注意，$\mathbf{m}^{(n+1)}(t_n) - \mathbf{m}(t_n)$ 与 $\mathbf{m}(t_n)$ 和 $\mathbf{m}^{(n+1)}(t_n)$ 之间的差异，表示差异扩张最显著的方向。因此，上文估算的李雅普诺夫指数是最大（或最大的）李雅普诺夫指数，它量化了初始差异的最大扩张率。对于具有 n 个维度的系统，还存在n 李雅普诺夫指数，$\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_n$ ($\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \cdots \geq \Lambda_n$)，而上文的 Λ 对应于 Λ_1。其他李雅普诺夫指数 $\Lambda_2, \cdots, \Lambda_n$ 也可以用类似方法估算，不过，为了明确动力学状态，通常只需估算最大李雅普诺夫指数。此外，此处估算的李雅普诺夫指数对应于条件李雅普诺夫指数 [29]。

这里的李雅普诺夫指数是时间Lyapunov指数的长时间平均值。虽然初始时刻（$t = t_0$）附近的时间 Lyapunov指数值取决于初始扰动 $[\mathbf{m}^{(1)}(t_0)]$, 的选择（该值是任意的），但长时间平均值趋于某个确定值，且与初始值无关；例如，参见文献 [40]。然而，由于计算时间有限，时间Lyapunov指数的初始值可能会造成一些混淆。例如，在图 7(b) 中，标注包含一个负值，而我们认为该指数为零或正值。这是因为初始时刻附近时间Lyapunov指数中的一个负值（源自初始扰动的任意选择）仍然存在。不过，如上所述，该值会变得足够小，长时间平均值也会接近零。我们已仔细检查这些值，并得出结论：图 7(b) 中的李雅普诺夫指数为零或正值。

附录 C：同步指数的评估方法

这里，我们总结一下同步指数的评估方法。为简便起见，暂时以具有单个自由层的自旋转矩振荡器为例。

我们将具有两个不同初始条件的 LLG 方程的解表示为 $\mathbf{m}^{(1)}$ 和 $\mathbf{m}^{(2)}$。我们再次强调，$\mathbf{m}^{(1)}$ 和 $\mathbf{m}^{(2)}$ 之间不存在任何相关性。然后，我们评估它们差值的演化过程。这里，差值仅针对初始状态给出，而附录 B 中的差值则在每个时间步 t_n给出。因此，这里引入的 $\mathbf{m}^{(a)}$ ($a = 1$, 2) 与附录 B 中的量具有不同含义。对于具有两个自由层的自旋转矩振荡器，我们求解两个磁化强度 $\mathbf{m}_i^{(1)}$ 和 $\mathbf{m}_i^{(2)}$ ($i = 1$,2) 的 LLG方程，其中不同样品的初始态之间存在微小差异。

假设向自旋转矩振荡器中注入随机二进制输入信号。因此，如果$\mathbf{m}_i^{(1)}$ 和$\mathbf{m}_i^{(2)}$ 对应的自旋转矩振荡器表现出噪声诱导同步 [57], ，则差异将为零，同步指数也将为零。然而，噪声诱导同步并不是非线性振荡器中出现的唯一状态。例如，如果自旋转矩振荡器最初表现出混沌行为，则很难实现噪声诱导同步。另一种可能性是输入驱动混沌 [29], ，即使自旋转矩振荡器最初并未表现出混沌行为，输入信号也会导致其产生混沌。在这些情况下，即使经过很长时间，同步指数仍将保持有限值。因此，只有当初始态之间的距离为零时，同步指数才会变为零，这表明存在回声状态性质，正如第 II C 节所述。

现在简要讨论一下初始态之间距离 $\mathcal{D}$ 的定义；另请参见第 II C 节和第 II E 节。两个解样本之间的一种可能的“距离”是两个解$\mathbf{m}^{(1)} \cdot \mathbf{m}^{(2)}]$之间的相对角 $\cos^{-1}[$，即 $\mathbf{m}^{(1)}$ 和$\mathbf{m}^{(2)}$。这一定义基于 LLG 方程守恒解$\mathbf{m}$的范数这一事实，因此，由$\mathbf{m}$ 描述且归一化为 $|\mathbf{m}| = 1$的磁化动力学，可以视为一个点粒子在单位球面上的运动。于是 <style id='$\mathbf{m}^{(1)}$ 与

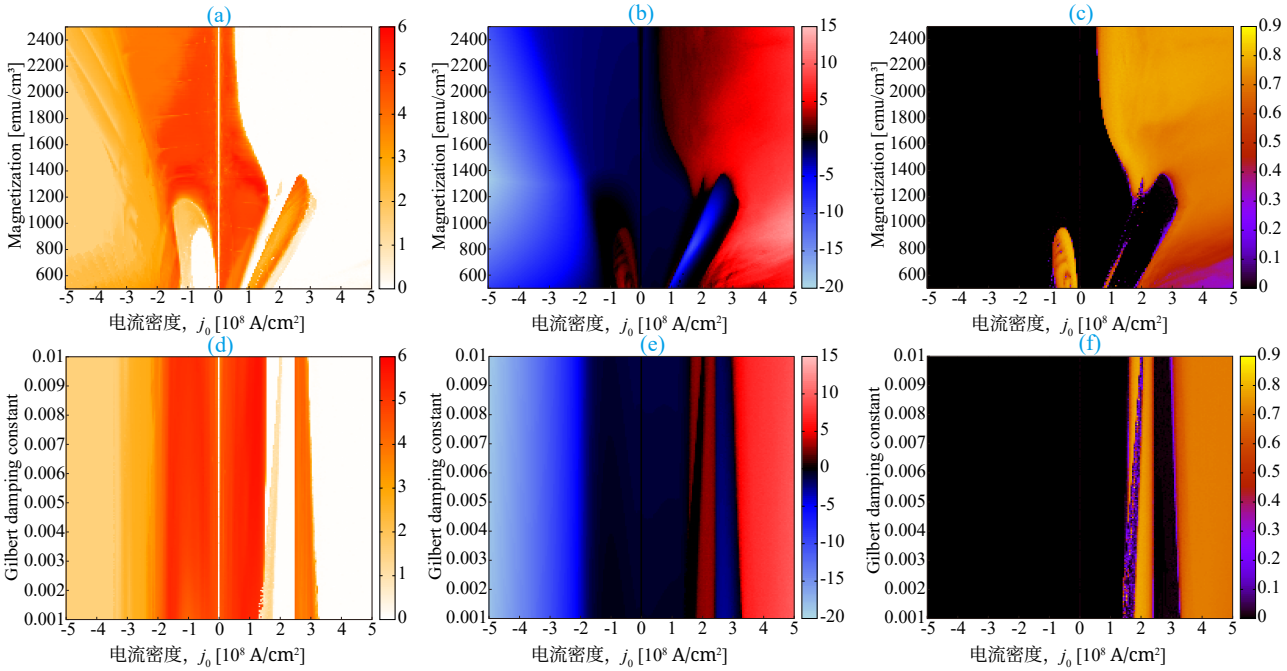


图11. (a) 短期记忆容量、(b) 李雅普诺夫指数和 (c) 具有两个自由层和一个参考层的自旋转矩振荡器的同步指数，其中横轴为电流密度，纵轴为 F_1 层的饱和磁化强度。(d)、(e) 和 () 分别与 (a)、(b) 和 (c) 相同，但为 F_1 层吉尔伯特阻尼常数的函数。

$\mathbf{m}^{(2)}$ 之间的夹角表示它们在球面上测得的距离。例如，文献 [40]中就采用了这种距离定义。对于第 IIIB 节和第 IV B 节研究的具有两个自由层的自旋转矩振荡器，距离定义为$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{2}\cos^{-1}\left[\mathbf{m}_i^{(1)}(t)\cdot\mathbf{m}_i^{(2)}(t)\right]$，其中下标 i 用于区分铁磁层。

例如，参考文献 [21, 63, 64] 中采用了另一种距离定义。其中，天顶角和方位角 $\theta_i^{(a)}$ 和 $\varphi_i^{(a)}$ 为 $\mathbf{m}_i^{(a)} = [m_{ix}^{(a)}, m_{iy}^{(a)}, m_{iz}^{(a)}] = [\sin\theta_i^{(a)}\cos\varphi_i^{(a)}, \sin\theta_i^{(a)}\sin\varphi_i^{(a)}, \cos\theta_i^{(a)}]$，距离定义为 $\mathcal{D} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left[|\theta_i^{(1)}-\theta_i^{(2)}|^2+|\varphi_i^{(1)}-\varphi_i^{(2)}|^2\right]}$。根据此定义，$\mathcal{D}$ 是由 θ_1、φ_1、θ_2 和 φ_2 构成的四维相空间中的距离。

我们按照第 II E 节中的说明，以不同方式定义了距离 $\mathcal{D}$。第 II E、III B 和 IV B 节中的距离分别基于 m_x、$\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2$, 和 m_{1x}，即 $\mathcal{D} = |m_x^{(1)} - m_x^{(2)}|$、$\mathcal{D} = |\mathbf{m}_1^{(1)}\cdot\mathbf{m}_2^{(1)} - \mathbf{m}_1^{(2)}\cdot\mathbf{m}_2^{(2)}|$以及 $\mathcal{D} = |m_{1x}^{(1)} - m_{1x}^{(2)}|$。这是因为，当这些距离趋近于零时，用于物理储备池计算的输出信号将与初始状态无关；因此，这些距离为研究计算中的回声状态性质提供了一个自然标准。$\mathbf{m}^{(1)}$ 和$\mathbf{m}^{(2)}$ 无需变得相同；只有用于计算的动力学变量需要相同。同时，我们注意到，前一篇论文与本文中 $\mathcal{D}$ 的定义差异主要在第 III B 节中十分重要，即使在由于轴对称性而使 $\mathbf{m}^{(1)} \neq \mathbf{m}^{(2)}$、$\mathcal{D} = |\mathbf{m}_1^{(1)}\cdot\mathbf{m}_2^{(1)} - \mathbf{m}_1^{(2)}\cdot\mathbf{m}_2^{(2)}|$ 可能为零的参数区域也是如此。另一方面，在第 II E 节和第 IV B 节中，当 $\mathcal{D} = 0$ 时，在相应的参数区域内，$\mathbf{m}^{(1)}$ 与$\mathbf{m}^{(2)}$ [或$\mathbf{m}_i^{(1)}$ 与$\mathbf{m}_i^{(2)}$] 会变得相同。这是因为参考层的存在打破了系统的轴对称性，并缩小了李雅普诺夫指数为零的参数区域。总之，主要在第 III B 节中应谨慎选择距离 $\mathcal{D}$ 的定义，因为系统具有轴对称性，正因如此，即使$\mathbf{m}_i^{(1)} \neq \mathbf{m}_i^{(2)}$，输出信号仍表现出回声状态性质。

附录 D：短期记忆容量对 F_1 层参数的依赖关系

在第 IV B 节中，研究了短期记忆容量对 F_2 层中各参数的依赖关系。饱和磁化强度 M_2 和阻尼常数 α_2等参数可以通过改变铁磁材料来调节。因此，我们通过改变这些参数研究了短期记忆容量。另一方面，改变 F_1层的材料可能并不可取，因为这也会改变通过 GMR/TMR 效应产生的输出信号的幅度。通常，STO 使用基于 CoFeB/MgO 的磁性隧道结，其可发射相对较大的功率 [28, 36]。然而，为了进行全面研究，人们可能会关注短期记忆容量对

F_1 层中各参数的依赖关系。图11(a)-11(c)总结了具有两个自由层和一个参考层的 STO 的短期记忆容量、李雅普诺夫指数和同步指数，其中纵轴表示 F_1 层中的饱和磁化强度 M_1。其他参数为 $M_2 = 1300$ emu/cm^3 和 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.01$。

另一方面，图11(d)–11(f)显示了相同的结果，其中纵轴表示F_1 层中的阻尼常数α_1 ，而 $M_1 = M_2 = 1300$ emu/cm^3 和$\alpha_2 = 0.01$。这些结果表明，最大短期记忆容量出现在回声状态性质的边缘附近，这与正文中的结论一致。

[1] J. Grollier、D. Querlioz、K. Y. Camsari、K. Everschor-Sitte、S. Fukami和M. D. Stiles，《神经形态自旋电子学》，Nature Electronics **3**，360（2020年）。[2] N. Locatelli、V. Cros和J. Grollier，《自旋转矩构建模块》，Nature Materials **13**，11（2014年）。[3] M. N. Baibich、J. M. Broto、A. Fert、F. N. V. Dau、F. Petroff、P. Eitenne、G. Creuzet、A. Friederich和J. Chazelas，《（001）Fe/（001）Cr磁性超晶格中的巨磁阻效应》，Physical Review Letters **61**，2472（1988年）。[4] G. Binasch、P. Gr¨unberg、F. Saurenbach和W. Zinn，《具有反铁磁层间交换的层状磁性结构中的增强磁阻》，Physical Review B **39**，4828（1989年）。[5] W. P. Pratt、S.-F. Lee、J. M. Slaughter、R. Loloee、P. A. Schroeder和J. Bass，《Ag/Co多层膜的垂直巨磁阻效应》，Physical Review Letters **66**，3060（1991年）。[6] M. Julliere，《铁磁薄膜之间的隧穿》，Physics Letters A **54**，225（1975年）。[7] S. Maekawa和U. G¨afvert，《铁磁薄膜之间的电子隧穿》，IEEE Transactions on Magnetics **18**，707（1982年）。[8] T. Miyazaki和N. Tezuka，《Fe/Al_2O_3/Fe结中的巨磁隧道效应》，《磁学与磁性材料杂志》**139**，L231（1995年）。[9] J. S. Moodera、L. R. Kinder、T. M. Wong和R. Meservey，《铁磁薄膜隧道结在室温下的巨大磁阻》，Physical Review Letters **74**，3273（1995年）。[10] S. Yuasa、A. Fukushima、T. Nagahama、K. Ando和Y. Suzuki，《相干自旋极化隧穿导致的全外延Fe/MgO/Fe隧道结室温高隧道磁阻》，《日本应用物理学杂志》**43**，L588（2004年）。[11] S. S. P. Parkin、C. Kaiser、A. Panchula、P. M. Rice、B. Hughes、M. Samant和S.-H. Yang，《采用MgO（100）隧道势垒的室温巨型隧道磁阻》，Nature Materials **3**，862（2004年）。[12] S. Yuasa、T. Nagahama、A. Fukushima、Y. Suzuki和K. Ando，《单晶Fe/MgO/Fe磁隧道结中的室温巨磁阻效应》，Nature Materials **3**，868（2004年）。[13] B. Dieny、R. B. Goldfarb和K.-J. Lee编，《 *Introduction to Magnetic Random-Access Memory* 》（Wiley-IEEE Press，霍博肯，2016年）。[14] J. C. Slonczewski，《磁性多层膜中的电流驱动激发》，《磁学与磁性材料杂志》**159**，L1（1996年）。[15] L. Berger，《电流穿过磁性多层膜时产生的自旋波发射》，Physical Review B **54**，9353（1996年）。[16] W. Zhou、H. Sepehri-Amin、T. Taniguchi、S. Tamaru、Y. Sakuraba、S. Kasai、H. Kubota和K. Hono，《诱导磁化的面外进动以实现采用自旋转矩振荡器中的振荡极化器进行微波辅助磁记录，《应用物理快报》**114**，172403（2019）。[17] K. Y. Camsari、M. M. Torunbalci、W. A. Borders、H. Ohno 和 S. Fukami，概率比特用双自由层磁隧道结，Physical Review Applied **15**，044049（2021）。[18] Y. Kurokawa、K. Yamada、T. Taniguchi、S. Horiike、T. Tanaka 和 H. Yuasa，采用强层间交换耦合自旋转矩振荡器的超宽带毫米波发生器，《科学报告》**12**，10849（2022）。[19] K. Kudo、R. Sato 和 K. Mizushima，F/N/F纳米柱中的同步磁化振荡，《日本应用物理学杂志》**45**，3869（2006）。[20] T. Taniguchi，双自由层自旋转矩振荡器中的同步、周期性与混沌动力学，《磁学与磁性材料杂志》**483**，281（2019）。[21] T. Taniguchi，双自由层自旋转矩振荡器中的同步与混沌，《AIP进展》**10**，015112（2020）。[22] R. Matsumoto、S. Lequeux、H. Imamura 和 J. Grollier，自旋转矩风车脉冲振荡器中的混沌与弛豫振荡，Physical Review Applied **11**，044093（2019）。[23] W. Maas、T. Natschl¨ager 和 H. Markram，无稳定态的实时计算：一种基于扰动的神经计算新框架，《神经计算》**14**，2531（2002）。[24] H. Jaeger 和 H. Haas，利用非线性：预测混沌系统并在无线通信中节能，《科学》**304**，78（2004）。[25] D. Verstraeten、B. Schrauwen、M. D'Haene 和 D. Stroobandt，储备池计算方法的实验性统一，《神经网络》**20**，391（2007）。[26] K. Nakajima，物理储备池计算——入门视角，《日本应用物理学杂志》**59**，060501（2020）。[27] K. Nakajima 和 I. Fischer 编，*Reservoir Comput-ing: Theory, Physical Implementations, and Applications*（施普林格，新加坡，2021）。[28] J. Torrejon、M. Riou、F. A. Araujo、S. Tsunegi、G. Khalsa、D. Querlioz、P. Bortolotti、V. Cros、K. Yakushiji、A. Fukushima、H. Kubota、S. Yuasa、M. D. Stiles 和 J. Grollier，利用纳米尺度自旋电子振荡器进行神经形态计算，《自然》**547**，428（2017）。[29] N. Akashi、T. Yamaguchi、S. Tsunegi、T. Taniguchi、M. Nishida、R. Sakurai、Y. Wakao 和 K. Nakajima，自旋电子储备池中的输入驱动分岔与信息处理能力，《物理评论研究》**2**，043303（2020）。[30] N. Akashi、Y. Kuniyoshi、S. Tsunegi、T. Taniguchi、M. Nishida、R. Sakurai、Y. Wakao、K. Kawashima 和 K. Nakajima，一种用于高性能储备池计算的耦合自旋电子神经形态方

法，《先进智能系统》**4**，2200123（2022）。[31] N. Bertschinger 和 T. Natschl¨ager，循环神经网络中混沌边缘处的实时计算，《神经计算》**16**，1413（2004）。[32] J. Nakayama、K. Kanno 和 A. Uchida，具有一致性的激光动力学储备池计算：一种混沌掩码信号方法，《光学快报》**24**，8679（2016）。[33] S. Tandon、B. Beleggia、Y. Zhu 和 M. D. Graef，任意形状均匀磁化粒子的退磁张量计算（一）：解析方法，《磁学与磁性材料杂志》**271**，9（2003）。[34] T. Taniguchi，圆柱铁磁体产生磁场的解析计算，《磁学与磁性材料杂志》**452**，464（2018）。[35] K. Fujii 和 K. Nakajima，利用无序系综量子动力学进行机器学习，Physical Review Applied **8**，024030（2017）。[36] S. Tsunegi、T. Taniguchi、S. Miwa、K. Nakajima、K. Yakusjiji、A. Fukushima、S. Yuasa 和 H. Kubota，面向循环神经网络的自旋转矩振荡器记忆容量评估，《日本应用物理学杂志》**57**，120307（2018）。[37] T. Yamaguchi、N. Akashi、S. Tsunegi、H. Kubota、K. Nakajima 和 T. Taniguchi，具有反馈电流的自旋电子储备池中记忆函数的周期结构，《物理评论研究》**2**，023389（2020）。[38] T. Yamaguchi、N. Akashi、K. Nakajima、H. Kubota、S. Tsunegi 和 T. Taniguchi，自旋电子学储备池计算中记忆函数对脉冲宽度的阶梯式依赖关系，《科学报告》**10**，19536（2020）。[39] T. Yamaguchi、N. Akashi、K. Nakajima、S. Tsunegi、H. Kubota 和 T. Taniguchi，具有垂直磁化自由层的自旋转矩振荡器中的同步与混沌，Physical Review B **100**，224422（2019）。[40] T. Taniguchi、N. Akashi、H. Notsu、M. Kimura、H. Tsukahara 和 K. Nakajima，纳米磁体中的反馈电流诱发混沌，Physical Review B **100**，174425（2019）。[41] S. H. Strogatz，*Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics Biology Chemistry and Engineering* 第 st 版（Westview出版社，博尔德，，，，2001）。[42] I. Shimada 和 T. Nagashima，耗散动力系统遍历问题的数值方法，《理论物理进展》**61**，1605（1979）。[43] P. C. M¨uller，具有不连续性的动力系统的李雅普诺夫指数计算，《混沌、孤子与分形》**5**，1671（1995）。[44] K. T. Alligood、T. D. Sauer 和 J. A. Yorke，*Chaos. AnIntroduction to Dynamical Systems*（Spinger（纽约），1997）。[45] E. Ott，*Chaos in Dynamical Systems*，第2版（剑桥大学出版社（剑桥），2002）。[46] K. Kanno 和 A. Uchida，时滞非线性动力系统中的有限时间李雅普诺夫指数，Physical Review E **89**，032918（2014）。[47] J. D. Farmer，Physica D《无限维动力系统的混沌吸引子》**4**，366（1982年）。[48] A. Wolf、J. B. Swift、L. Swinney 和 J. A. Vastano，Physica D《从时间序列确定李雅普诺夫指数》**16**，285（1985）。[49] M. T. Rosenstein、J. J. Collins 和 C. J. D. Luca，Physica D《从小数据集计算最大李雅普诺夫指数的实用方法》**65**，117（1993）。[50] H. Kantz，Physics Letters A《估计时间序列最大李雅普诺夫指数的稳健方法》**185**，77（1994）。[51] M. Quinsat、J. F. Sierra、I. Firastrau、V. Tiberkevich、A. Slavin、D. Gusakova、L. D. Buda-Prejbeanu、M. Zarudniev、J.-P. Michel、U. Ebels、B. Dieny、M.-C. Cyrille、J. A. Katine、D. Mauri 和 A. Zeltser，《隧道结振荡器对微波电流的注入锁定》，Applied Physics Letters **98**，182503（2011）。[52] Z. F. Mainen 和 T. J. Sejnowski，《新皮层神经元的尖峰时序可靠性》，Science **268**，1503（1995年）。[53] R. Toral、C. R. Mirasso、E. Hern´andez-Garc´ıa 和 O. Piro，《混沌系统噪声诱导同步的解析与数值研究》，Chaos **11**，655 2001( )。[54] J. N. Teramae 和 D. Tanaka，《一般极限环振荡器中噪声诱导相位同步的稳健性》，Physical Review Letters **93**，204103（2004年）。[55]D. S. Goldobin 和 A. Pikovsky，《共同噪声导致的自激振荡器同步与去同步》，Phys. Rev. E**71**，045201(R)（2005）。[56] H. Nakao、K. Arai 和 Y. Kawamura，《无耦合极限环振荡器集合中的噪声诱导同步与聚类》，Physical Review Letters **98**，184101（2007）。[57] Y. Imai、S. Tsunegi、K. Nakajima 和 T. Taniguchi，《自旋转矩振荡器的噪声诱导同步》，Physical Review B **105**，224407（2022）。[58] I. B. Yildiz、H. Jaeger 和 S. J. Kiebel，《重新审视回声状态性质》，《神经网络》**35**，1（2012）。[59] G. Bertotti、I. Mayergoyz 和 C. Serpico，*Nonlinearmagnetization Dynamics in Nanosystems*（Elsevier，牛津，2009）。[60] J. Dambre、D. Verstraeten、B. Schrauwen 和 S. Massar，《动力系统的信息处理容量》，《科学报告》**2**，514（2012）。[61] T. Kubota、H. Takahashi 和 K. Nakajima，《随机驱动动力系统的信息处理统一框架》，《物理评论研究》**3**，043135（2021）。[62] H. Jaeger，《回声状态网络中的短期记忆》，GMD Report **152**，60（2002）。[63] T. Taniguchi、A. Ogihara、Y. Utsumi 和 S. Tsunegi，《无需驱动电流或磁场的自旋电子储备池计算》，《科学报告》**12**，10627（2022）。[64] T. Taniguchi，《电压控制参量振荡器中的非周期输入驱动磁化动力学》，《磁学与磁性材料杂志》**563**，170009（2022 年）。