arXiv:2302.03798v1 [math.DS] 7 Feb 2023

# 几何有限双曲流形上的标架流的指数混合

JIALUN LI ，WENYU PAN ，以及 PRATYUSH SARKAR

Abstract. 作为证明任意维几何有限双曲流形上的标架流关于 Bowen–Margulis–Sullivan 测度具有指数混合性质的最后一项工作，本文聚焦于 $cusps$的情形。为证明这一点，我们利用 Li–Pan 关于测地流的可数无限符号编码，并按照 Sarkar–Winter 和 Tsujii–Zhang 的方法 `实施标架流版本的 Dolgopyat 方法。这需要局部非可积条件和非集中性质，但在存在尖点的情况下，挑战在于后者仅在极限集的一个大 $proper$子集上成立。为克服这一困难，我们利用符号复返到该大子集的大偏差性质。该性质通过研究尖点游走的组合结构，并采用 Li 的工作中所使用的有效更新定理得以证明；后者利用了 Li–Pan 关于测地流的转移算子的指数衰减。

## Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 7
3. 标架流的符号模型 10
4. 带全纯性的传递算子 16
5. 局部非可积条件 18
6. 非集中性质 22
7. 大偏差性质 24
8. Dolgopyat 方法 38
9. 标架流的指数混合 54
附录A. 复传递算子的解析性 57
参考文献 60

## 1. Introduction

令 $\mathbb{H}^{d+1}$ 为任意 $d \in \mathbb{N}$ 的 $(d+1)$ 维双曲空间。令 $G =$为配备左 $G$-不变且右 $K$-不变黎曼度量的 SO$(d+1,\ 1)^{\circ}$，它可视为 $\mathbb{H}^{d+1}$ 的保向等距变换群。令 $\Gamma < G$ 为一个无挠离散子群。考虑双曲流形 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1} \cong \Gamma\backslash G/K$，其单位切丛为 $\mathrm{T}^1(X) \cong \Gamma\backslash G/M$，其（定向正交）标架丛为 $\mathrm{F}(X) \cong \Gamma\backslash G$，其中 $M < K$ 是 $G$ 的紧子群。令 $A = \{a_t : t \in \mathbb{R}\}$ 为由半单元素构成的单参数子群，其右平移作用给出

*Date*: 2023年2月9日。

$\Gamma\backslash G/M$ 上的测地流以及 $\Gamma\backslash G$ 上的标架流。我们将标架流不变测度 $m^{\mathrm{BMS}}$ 取为 $\Gamma\backslash G$ 上支撑于非游荡集的鲍恩–马古利斯–沙利文概率测度。它是 $\Gamma\backslash G/M$ 上鲍恩–马古利斯–沙利文概率测度的 $M$-不变提升；已知后者是最大熵的唯一概率测度。熵等于 $\Gamma$ 的临界指数 $\delta \in [0,d]$ 。

若 $\Gamma < G$ 是一个格，即 $X$ 具有有限体积，那么 $m^{\mathrm{BMS}}$ 就与 $G$不变概率测度重合。文献中众所周知，标架流是指数混合的 [Rat87、Moo87]。其证明广泛运用了谱隙和表示论。

近年来，关于无限体积双曲流形上相对于 $m^{\mathrm{BMS}}$ 的混合性质，研究取得了显著进展。在自然假设 $\Gamma < G$ 为非初等且 $m^{\mathrm{BMS}}$ 有限的条件下，测地流的混合性由 Rudolph [Rud82] 和 Babillot [Bab02]证明。对于标架流，必须假设 $\Gamma < G$ 扎里斯基稠密，否则它甚至不是遍历的。在自然假设 $\Gamma < G$ 扎里斯基稠密且 $m^{\mathrm{BMS}}$ 有限的条件下，标架流的混合性由 Winter [Win15] 证明（另见 [BP74、FS90]）。现在转而讨论指数混合。若 $\Gamma < G$ 扎里斯基稠密且几何有限，则只要临界指数 $\delta$ 足够大，从而存在某个谱隙，Mohammadi–Oh [MO15], 便将表示论技巧加以拓展，证明了标架流的指数混合（测地流的相关结果另见 [EO21] ）。然而，当临界指数 $\delta$ 较小时，这样的谱隙并不存在。因此，采用更具动力学性质的技巧更为有效。若 $\Gamma < G$非初等且几何有限，那么当 $\Gamma$ 不含抛物元素（即为凸共紧）时，测地流的指数混合由 Stoyanov [Sto11] 证明；当 $\Gamma$ 含有抛物元素时，则由前两位作者 Li–Pan [LP22] 证明（另见 Khalil [Kha21]的工作）。若 $\Gamma < G$ 扎里斯基稠密、几何有限且不含抛物元素，那么标架流的指数混合已由第三位作者与 Winter 合作的工作 Sarkar–Winter [SW21] 证明（另见[CS22]）。

本文旨在补全几何有限双曲流形的标架流指数混合问题中尚未解决的情形，从而证明定理 1.1。也就是说，对于扎里斯基稠密无挠几何有限子群 $\Gamma < G$ ，其中含有抛物元素，我们证明定理1.1 。对于任意 $\alpha \in (0,1]$，我们用 $C^{\alpha}(\Gamma\backslash G,\mathbb{R})$ 表示 $\alpha$-H¨older 连续函数在 $\Gamma\backslash G$ 上构成的空间。

**定理 1.1**。令 $G=\mathrm{SO}(d+1,1)^{\circ}$，其中任意 $d\in\mathbb{N}$ 和 $\Gamma<G$ 是一个扎里斯基稠密无挠几何有限子群。令 $\alpha\in(0,1]$。存在 $\eta_\alpha>0$ 和 $C>0$（与 $\alpha$ 无关），使得对于所有 $\phi$、$\psi\in C^{\alpha}(\Gamma\backslash G、\mathbb{R})$ 以及 $t>0$，都有

$$\left|\int_{\Gamma\backslash G}\phi(x)\psi(xa_t)\,dm^{\mathrm{BMS}}-m^{\mathrm{BMS}}(\phi)\cdot m^{\mathrm{BMS}}(\psi)\right|\leq C\|\phi\|_{C^{\alpha}}\|\psi\|_{C^{\alpha}}e^{-\eta_\alpha t}.$$

如上所述，证明采用动力学方法，基于 Stoyanov [Sto11], 、Sarkar–Winter [SW21], 、Li–Pan [LP22], 以及 Tsuji– Zhang [TZ23] 的工作的结合；这些工作以 Dolgopyat[Dol98], 提出的框架为基础，这一框架如今通常称为 Dolgopyat 方法。我们强调，即使当$\Gamma<G$ 是含有抛物元素的格，例如常见的情形 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ <$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 或 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])<\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$，Li–Pan [LP22] 的工作以及本文的工作也.....

据作者所知，本文分别是关于测地流和标架流的指数混合的首批 动力学证明。

1.1. 联系、应用与进一步方向。在广泛的背景下，标架流受到了广泛关注，因为它们是部分双曲系统的典型例子。设 $(\mathcal{M}, g)$ 是一个维数为 $n \geq 3$ 、具有负截面曲率的光滑闭定向黎曼流形。Brin 猜想，如果 $(\mathcal{M}, g)$ 是严格 $1/4$-针状的，则标架流是遍历的。在 [BG80]，中，布林–格罗莫夫验证了 $n$ 为奇数且 $n \neq 7$ 时的情形。最近，Ceki´c–Lefeuvre–Moroianu–Semmelmann [CLMS21] 在 $n$ 为偶数或 $n = 7$ 时的情形上取得了进展。对于定量理论，Dolgopyat [Dol02] 研究了双曲微分同胚的紧群扩张的混合性质，而后者是标架流的离散时间版本。他证明了一个无穷小非可积条件与闭流形上扩张映射的紧群扩张的指数混合之间的等价性。在 [Sid22]，中，Siddiqi 考察了某类阿诺索夫流的紧扩张，并将扩张的可达性性质转化为 Dolgopyat 的非可积条件。除了动力学方法之外，还有一些工作采用进一步的解析工具来研究标架流。例如，Guillarmou–K¨uster 运用半经典分析或微局部分析，研究了三维闭双曲流形上的标架流的谱 [GK21]。

更具体地说，在齐性动力学的背景下，研究标架流已被证明大有裨益，因为先前的研究从中得出了诸多应用。为方便读者，我们在此列举其中一些：带指数误差项的矩阵系数衰减；全纯单值的指数等分布；horosphere的有效等分布。令 $\Gamma < G$如定理1.1 所述，并在本小节余下部分沿用此设定。

在 $G$上固定一个哈尔测度。它诱导出 $G$-不变的右作用测度于 $\Gamma\backslash G$ 上，并且还在 $\Gamma\backslash G$ 上诱导出不稳定和稳定Burger–Roblin测度，分别记为 $m^{\mathrm{BR}}$ 和$m^{\mathrm{BR}_*}$。采用 [OW16定理5中的Roblin横截交理论证的一个有效版本，8], 定理 1.1 可推出以下定理。原始的（非有效）论证见 [Rob03] （另见 [OS13]）。

**定理1.2**。令 $\alpha \in (0, 1]$。存在 $\eta_\alpha > 0$，使得对所有 $\phi, \psi \in C_c^\alpha(\Gamma\backslash G, \mathbb{R})$，都存在 $C > 0$ （仅取决于 $\mathrm{supp}(\phi)$ 和 $\mathrm{supp}(\psi)$，且与 $\alpha$ 无关），使得对所有 $t > 0$，我们有

$$\left| e^{(d-\delta)t} \int_{\Gamma\backslash G} \phi(x)\psi(xa_t)\, dx - m^{\mathrm{BR}}(\phi) \cdot m^{\mathrm{BR}_*}(\psi) \right| \leq C\|\phi\|_{C^\alpha}\|\psi\|_{C^\alpha} e^{-\eta_\alpha t}.$$

对于所有 $T > 0$，定义

$$\mathcal{G}(T) = \#\{\gamma\colon \ \gamma\text{是 } \Gamma\backslash\mathbb{H}^n \text{ 中长度不超过 } T\}.\text{的本原闭测地线}$$

对于所有属于 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ 的本原闭测地线 $\gamma$，其全纯是由沿着 $\gamma$ 的平行移动诱导的一个共轭类 $h_\gamma$，属于$M$。在 $M$ 上固定哈尔概率测度。回顾函数 $\mathrm{Li} : (2, \infty) \to \mathbb{R}$，其定义为 $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)}\, dt$，对所有 $x \in (2, \infty)$ 均成立。用 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}^k}$ 表示阶数为 $k \in \mathbb{N}$ 的 Sobolev范数。由于 [DFSU21 的引理 3.8] 在我们的情形下成立，结合 [SW21 第 1], 节中的评注，定理 1.1 推出下述由 Margulis–Mohammadi–Oh [MMO14] 的工作得到的定理。

**定理 1.3**。 存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\eta > 0$，使得对于所有类函数$\phi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$，我们有

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{G}(T)} \phi(h_\gamma) = \mathrm{Li}\big(e^{\delta T}\big) \int_M \phi(m)\, dm + O\big(e^{(\delta-\eta)T}\big) \qquad as\ T \to +\infty$$

其中隐含常数仅依赖于 $\|\phi\|_{\mathcal{S}^k}$。

令 $\mathcal{C}_0 \subset \Gamma\backslash G$ 为厚薄分解中的一个固定紧子集。对于所有$\epsilon \in (0, 1)$ 及 $t_0 \geq 1$，若其在 $G$中的任一提升都满足：后向端点属于极限集 $\Lambda_\Gamma$，且对所有 $t \geq t_0$， $d(\mathcal{C}_0, xa_{-t}) < (1-\epsilon)t$，则称 $x \in \Gamma\backslash G$ 是 $(\epsilon, t_0)$-丢番图的。令 $N^+ < G$ 为赋有诱导黎曼度量的不稳定 horosphere 子群。记 $N^+\mathrm{max}_R \subset N^+$为 $\exp : \mathfrak{n}^+ \to N^+$下像，它是关于最大范数、以 0 为中心且半径为 $R > 0$ 的球。固定 $N^+$ 上的哈尔测度，使其与 $G$上的测度相容。对于任意 $x \in \Gamma\backslash G$，记 $m^{\mathrm{Leb}}_{xN^+}$为 $xN^+$ 上的相应勒贝格测度，并记 $\mu^{\mathrm{PS}}_{xN^+}$ 为 $xN^+$上的帕特森–沙利文测度。定理 1.1 推出以下由 Tamam–Warren [TW22]的工作得到的定理。定理 1.4 中的后一个结果此前由 Edwards [Edw22] 在 $d = 2$时证明，即对于曲面成立。

**定理 1.4**。 存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $\epsilon \in (0, 1)$，都存在 $\eta > 0$，使得对于所有 $t_0 \geq 1$，以下结论成立。对于所有 $\phi \in C^\infty_c(\Gamma\backslash G, \mathbb{R})$，都存在$C > 0$ （仅依赖于 $\mathrm{supp}(\phi)$），使得：

*(1)* 对于所有$(\epsilon, t_0)$-丢番图 $x \in \Gamma\backslash G$ 和 $R \gg_\epsilon t_0$，有

$$\left| \frac{1}{\mu^{\mathrm{PS}}_{xN^+}\big(xN^+_{\mathrm{max},R}\big)} \int_{xN^+_{\mathrm{max},R}} \phi\, d\mu^{\mathrm{PS}}_{xN^+} - m^{\mathrm{BMS}}(\phi) \right| \leq C\|\phi\|_{\mathcal{S}^k} R^{-\eta};$$

*(2)* 对于所有$(\epsilon, t_0)$-丢番图 $x \in \Gamma\backslash G$ 和 $R \gg_{\epsilon,\, \mathrm{supp}(\phi)} t_0$，有

$$\left| \frac{1}{\mu^{\mathrm{PS}}_{xN^+}\big(xN^+_{\mathrm{max},R}\big)} \int_{xN^+_{\mathrm{max},R}} \phi\, dm^{\mathrm{Leb}}_{xN^+} - m^{\mathrm{BR}}(\phi) \right| \leq C\|\phi\|_{\mathcal{S}^k} R^{-\eta}.$$

现在我们提及一些超出本文范围的后续研究方向。近期，Chow–Sarkar [CS22] 将 [SW21] 的主定理推广到了凸共紧秩一局部对称空间。自然的后续工作是推广并结合 [LP22], [CS22], 与本文中的技术，将主定理同时推广到几何有限秩一局部对称空间。另一个方向是研究一致指数混合问题。Oh–Winter [OW16], 最初在凸余紧情形下针对双曲曲面研究了这一问题，之后 Sarkar [Sar22a]将其推广到双曲流形。自然的后续工作是处理几何有限情形。在 Avila–Gou¨ezel–Yoccoz [AGY06], 的工作中，他们证明了 Teichm¨uller 测地流具有指数混合性，随后这一结果被证明蕴含 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 在阿贝尔微分模空间上的作用具有谱隙（另见 [AG13]）。受此启发，研究能否由定理 1.1 推导出 $G$ 在 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上的作用具有谱隙，将会很有意思。最后，受有关由测地流的指数混合性推得拉普拉斯算子的预解式存在无共振半平面的结果启发（见 [OW16, Sar22a, LP22]），还可以探索标架流指数混合性的类似结果。

1.2. 证明概要。如前所述，我们使用动力学方法证明带有抛物元素的扎里斯基稠密无挠几何有限子群 $\Gamma < G$ 的定理 1.1，具体而言，采用 Dolgopyat 方法 [Dol98, Dol02]。回顾一下，Dolgopyat 方法最初是为有限符号系统开发的。之后，许多作者将其推广到了可数符号系统，包括 Baladi–Vall´ee [BV05], 、Avila–Gou¨ezel–Yoccoz [AGY06], 以及 Ara´ujo–Melbourne [AM16]。近期，Li–Pan[LP22] 将这些技术用于带尖点的几何有限双曲流形上的测地流。类似地，我们的证明首先利用 [LP22]构造的可数无限编码。该可数无限编码定义在 $\Delta_\sqcup := \bigsqcup_{j\in\mathcal{J}} \Delta_j$ 上，它是某个抛物不动点的基本域 $\Delta_0$ 的一个具有满帕特森–沙利文测度的子集。它还配有相应的（分段）扩张映射 $T : \Delta_\sqcup \to \Delta_0$，并满足一些重要性质。利用这一编码，我们希望仿照 [SW21]，通过使用由全纯扭曲的转移算子，实施标架流版本的 Dolgopyat 方法。

如 [SW21], ，转移算子各项中的抵消是借助局部非可积条件（*LNIC*）和非集中性质（*NCP*）推导出来的。自 Chernov 的研究以来，非可积类型的条件已被广泛使用 [Che98] 以及 Dolgopyat 的研究 [Dol98] ；而 LNIC 是适用于标架丛的恰当推广。我们首先描述*SW21* 中 [SW21命题 6 所述的 NCP6]，针对 $\Gamma$ 不含抛物元素的情形，说明为何需要它；随后描述它在 $\Gamma$ 含抛物元素情形下的推广。在研究标架流时，动力系统的可达性性质在分析中发挥着重要作用，有时不会造成障碍。在我们的设定中，标架流的非游荡集通常具有分形性质，因此会出现障碍。粗略地说，非可积性可以通过某些理想标架来衡量：从参考标架出发，沿标架流的强稳定叶状结构和强不稳定叶状结构可以到达这些理想标架；我们希望它们包含在非游荡集中。理想标架通常不满足后一条件；但至多，我们可以使用接近理想标架的近似标架，其中接近程度由等距球面子群李代数中的角度界精确度量。NCP 是极限集的一种性质$\Lambda_\Gamma$ ，粗略地说，它表示这样的角度界适用于 $\Lambda_\Gamma$中的向量， $\Lambda_\Gamma$ 换言之，$\Gamma$不会集中在任何真仿射子空间附近。这保证了近似标架属于非游荡集。注意，若 $\Gamma\backslash G$ 是一个格，那么可达性不存在障碍——这既可由非游荡集就是整个 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$这一事实看出，也可由 NCP 是平凡的这一事实看出，因为极限集就是整个 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$，因此我们可以直接使用理想标架。

在已有文献中，由于存在非最大秩的抛物元素，在各种情形下都出现了技术困难（参见 [FHP91、Gui06、GM12、DFSU21、TW22]）。类似地，在我们的设定中，含有抛物元素的 $\Gamma$所面临的主要困难在于：如果存在非最大秩的抛物元素，那么 NCP（如 [SW21，命题 66] 所述）并不成立——$\Lambda_\Gamma$ 在非最大秩抛物不动点附近集中于某个真仿射子空间（见例6.2）——这不足以产生前述抵消（见第8节）。尽管如此，NCP 仍有一种适当的推广：只需将范围限制在一个远离抛物不动点的大型真子集 $\Omega_t\cap\Lambda_\Gamma \subset \Delta_0\cap\Lambda_\Gamma$ 上

该集合与高频 $t \gg 1$ 相关。由此，我们只能在 $\Omega_t$ 上获得抵消。为了处理较小的坏集 $\Delta_0$ –$\Omega_t$，我们转而采用 Tsujii–Zhang [TZ23] 最近提出的技术。他们发展了一种要求较宽松的 Dolgopyat 方法，利用随机优势证明：只要在具有大偏差性质（LDP）的集合内发生抵消，就足够了。这里的 LDP 是相对于扩张映射 $T$ 而言的，因此使用 $\Lambda_+ = \{x \in \Lambda_\Gamma$ 更为方便：$T^n$ 对所有属于 $n \in \mathbb{N}\}$ 的点都定义在 $x$ 上，而 $n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\Delta_0$的一个帕特森–沙利文全测度子集。采用这种版本的 Dolgopyat 方法时，我们的设定还需要额外证明 $\Omega_t \cap \Lambda_+$ 关于 $t \gg 1$ 一致满足 LDP。已有技术可以在固定的 $t$ 下推导 $\Omega_t \cap \Lambda_+$ 的 LDP，但难点在于 $t \gg 1$ 的一致性。参数 $t \gg 1$ 越大，集合 $\Omega_t \cap \Lambda_+$ 就越不规则，乍看之下难以为扩张映射推导 LDP。证明基于两种不同动力系统之间的相互作用：对于 $x \in \Lambda_+$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们考察位于 $\Omega_t$ 中的点 $T^n(x)$ 是否大致等价于相应的单位切向量 $u_{T^n}(x)$ 在测地流 $a_t$作用下返回 $\mathrm{T}^1(X)$ 的某个固定紧子集（这些向量位于不稳定 horosphere 的一个固定部分上）。由此，我们研究尖点游走的组合结构。其中一个关键命题是估计 $\mathbb{R}$ 上“随机游走”具有较大剩余等待时间的概率。该结果借助有效更新定理得以证明，方法如 Li [Li22] 的工作所示，并使用了 Li–Pan [LP22] 关于测地流转移算子的指数衰减。我们将其概括为以下有趣的观察：对于含有非最大秩抛物元素的 $\Gamma$，证明测地流的指数混合是证明标架流指数混合之前所需的中间步骤。

1.3. **论文结构**。首先，我们在第 2 节和 3 节介绍必要的背景。随后，我们在第 4 节介绍可数无限符号编码所对应的带全纯性的转移算子。第 5–7 节彼此独立，分别介绍 Dolgopyat 方法在第 8 节所需的三个关键要素：LNIC、NCP 和大偏差原理。最后，我们简要介绍第 9 节，将谱界转化为指数混合。论文结构的完整示意图见图 1 。

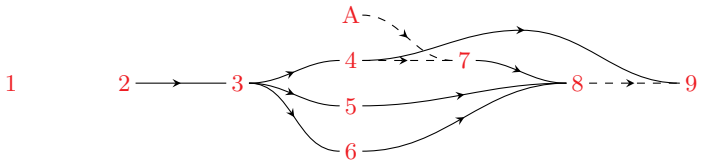



FIGURE 1. 该示意图展示了各节之间的依赖关系。实线（分别地，虚线）表示强（分别地，弱）依赖关系。

**致谢**。我们谨此感谢 Zhiyuan Zhang 向我们讲解论文 [TZ23]。本研究的部分工作是在作者参加 2022年6月举办的“遍历几何、数论与 Margulis 遗产：新一代”会议期间完成的。我们感谢组织者提供了合作的机会。

## 2. Preliminaries

**2.1. 双曲空间。** 对于任意 $d \in \mathbb{N}$，令 $\mathbb{H}^{d+1}$ 表示配备黎曼双曲度量的 $(d+1)$ 维双曲空间。我们常用上半空间模型：

$$\mathbb{H}^{d+1} = \{x = (x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_{d+1} > 0\}.$$

于是，任意完备连通的 $d+1$ 维双曲流形都具有如下形式：$\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}$，其中 $\Gamma <$ 是 $\mathsf{SO}(d+1,\ 1)$ 的某个无挠离散子群，后者可识别为 $\mathbb{H}^{d+1}$ 的保向等距变换群。我们将其单位切丛记作 $\mathsf{T}^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1})$，将其（定向正交）标架丛记作 $\mathsf{F}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1})$。

**2.1.1.** 将 $\mathbb{H}^{d+1}$、$\mathsf{T}^1(\mathbb{H}^{d+1})$ 和 $\mathsf{F}(\mathbb{H}^{d+1})$ 识别为齐性空间。令 $(e_1, \dots, e_{d+1})$ 为 $\mathbb{R}^{d+1}$ 的标准基。固定参考点 $o := e_{d+1} \in \mathbb{H}^{d+1}$、参考向量 $v_o := (e_{d+1}, -e_{d+1}) \in \mathsf{T}^1_o(\mathbb{H}^{d+1})$，以及参考标架 $F_o := ((e_{d+1}, e_1) \dots, (e_{d+1}, e_{d-1}), (e_{d+1}, e_d), (e_{d+1}, -e_{d+1})) \in \mathsf{F}_o(\mathbb{H}^{d+1})$。令 $G = \mathsf{SO}(d+1, 1)^\circ$，并赋予其一个左 $G$-不变且右 $K$-不变的黎曼度量。我们将 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 记作内积，将 $\| \cdot \|$ 记作 $G$ 或其商空间上任意切空间的范数。类似地，将 $d$ 记作 $G$ 或其商空间上诱导的距离函数。令 $K := \mathsf{Stab}_G(o)$，并令 $M := \mathsf{Stab}_G(v_o) < K$。注意，$\mathsf{Stab}_G(F_o)$ 是平凡的。我们可以假设，$G$ 上的黎曼度量经过选取，使得我们可以通过同构 $\mathbb{H}^{d+1} \cong G/K$、$\mathsf{T}^1(\mathbb{H}^{d+1}) \cong G/M$ 和 $\mathsf{F}(\mathbb{H}^{d+1}) \cong G$ 实现这些识别。对于任意无挠离散子群 $\Gamma < G$，我们可以将这些识别扩展到商空间：$\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1} \cong \Gamma\backslash G/K$、$\mathsf{T}^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}) \cong \Gamma\backslash G/M$ 和 $\mathsf{F}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}) \cong \Gamma\backslash G$。特别地，$G$ 上的黎曼度量诱导出 $\mathbb{H}^{d+1}$ 和 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}$ 上的黎曼双曲度量，而 $d$ 表示 $\mathbb{H}^{d+1}$ 和 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}$ 上诱导的双曲距离函数。

令 $A = \{a_t : t \in \mathbb{R}\} < C_G(M)$ 为由半单元素构成的单参数子群，使得对于任意无挠离散子群 $\Gamma < G$，$\mathsf{T}^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1})$ 上的测地流 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 以及 $\mathsf{F}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1})$ 上的标架流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 分别由 $A$ 在 $\Gamma\backslash G/M$ 和 $\Gamma\backslash G$ 上的右平移作用表示。利用上述识别，对于任意 $u \in \mathsf{T}^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1})$ 和 $F \in \mathsf{F}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1})$，我们常将时间 $t \in \mathbb{R}$ 的测地流和标架流分别记为 $ua_t$ 和 $Fa_t$。我们分别将相应的不稳定等距球面子群和稳定等距球面子群记为 $N^+$ 和 $N^-$：

$$N^\pm = \{g \in G : a_t g a_{-t} \to e \text{ as } t \to \pm\infty\}.$$

它们是同构于 $\mathbb{R}^d$ 的阿贝尔群。

**2.1.2.** 视觉边界。令 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 为 $\mathbb{H}^{d+1}$ 的视觉边界。$\mathbb{H}^{d+1}$ 的紧化为 $\mathbb{H}^{d+1} = \mathbb{H}^{d+1} \cup \partial\mathbb{H}^{d+1}$。在 $\partial\mathbb{H}^{d+1} = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^d$ 上，我们取球面度量 $d_{\mathbb{S}^d}$。我们还定义了（扩展的）欧几里得度量 $d_{\mathrm{E}}$，其定义为 $d_{\mathrm{E}}(x,\ x') = \|x - x'\|$，其中任意 $x,\ x' \in \partial\mathbb{H}^{d+1}$。

$G$在 $\mathbb{H}^{d+1}$ 上的作用通过共形映射在 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 上诱导出 $G$作用。对于 $x \in \partial\mathbb{H}^{d+1}$，令 $\|(dg)_x\|$ 表示微分$(dg)_x : \mathsf{T}_x(\partial\mathbb{H}^{d+1}) \to \mathsf{T}_x(\partial\mathbb{H}^{d+1})$相对于欧几里得度量的算子范数。令 $\|(dg)_x\|_{\mathbb{S}^d}$ 表示算子

相对于球面度量的范数。我们有如下关系

$$\|(dg)_x\|_{\mathbb{S}^d} = \frac{1+\|x\|^2}{1+\|gx\|^2}\|(dg)_x\| = e^{-\beta_x(g^{-1}o,o)},$$

其中 $\beta$: $\partial\mathbb{H}^{d+1}\times\mathbb{H}^{d+1}\times\mathbb{H}^{d+1}\to\mathbb{R}$是由 $\beta_x(z,\ z') = \lim_{t\to\infty}(d(z,\ x_t) - d(z',\ x_t))$ 给出的 Busemann函数，且 $\{x_t\in\mathbb{H}^{d+1}:\ t>0\}$ 是任意一条趋向 $x\in\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 的测地射线。

2.1.3. ***T()*** 的霍普夫参数化。对于所有 $v\in \mathrm{T}^1(\mathbb{H}^{d+1}) \cong G/M$ 和$F\in \mathrm{F}(\mathbb{H}^{d+1}) \cong G$，分别用 $v^+,\ F^+\in\partial\mathbb{H}^{d+1}$（ $v^-,\ F^-\in\partial\mathbb{H}^{d+1}$）表示它们的正向端点（反向端点），并用 $v_*,\ F_*\in\mathbb{H}^{d+1}$表示它们的基点。令 $\partial^2(\mathbb{H}^{d+1}) = \partial\mathbb{H}^{d+1}\times\partial\mathbb{H}^{d+1} -$ Diagonal($\partial\mathbb{H}^{d+1}$)。霍普夫参数化是通过微分同胚给出的识别

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^1(\mathbb{H}^{d+1}) &\to \partial^2(\mathbb{H}^{d+1})\times\mathbb{R}\\ v &\mapsto (v^+, v^-, s=\beta_{v^+}(o, v_*)).\end{aligned} \tag{1}$$

霍普夫参数化中的测地流就是在 $\mathbb{R}$ 坐标上的平移作用。

给定一个无挠离散子群 $\Gamma<G$，它作用于 $\mathrm{T}^1(\mathbb{H}^{d+1})$，因此也作用于 $\partial^2(\mathbb{H}^{d+1})\times\mathbb{R}$，其定义如下：

$$\gamma(v^+, v^-, s) = (\gamma v^+, \gamma v^-, s-\beta_{v^+}(o, \gamma^{-1}o)). \tag{2}$$

2.2. **几何有限子群**。现在介绍几何有限子群的一些基础知识。设 $\Gamma<G$ 为一个离散子群。

$\Gamma$ 的极限集是集合 $\Lambda_\Gamma\subset\mathbb{H}^{d+1}$，由$\overline{\text{轨道}}$ $\Gamma o\subset\mathbb{H}^{d+1}$ 的所有极限点组成。它与 $o\in\mathbb{H}^{d+1}$ 无关，而 $\Gamma$ 的离散性蕴含 $\Lambda_\Gamma\subset\partial\mathbb{H}^{d+1}$。

若存在一条趋于 $x$ 的测地射线以及一列元素 $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\Gamma$，使得 $\lim_{n\to\infty}\gamma_n o = x$，且对于所有 $n\in\mathbb{N},\ \gamma_n o$ 与该测地射线之间的距离都有界，则极限点 $x\in\Lambda_\Gamma$ 称为锥形。若子群 $\Gamma'<\Gamma$ 仅固定 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 中的一个点，则称其为抛物。若点 $x\in\Lambda_\Gamma$ 满足 $\mathrm{Stab}_\Gamma(x)$ 是抛物子群，则称其为抛物固定点。若商空间 $\mathrm{Stab}_\Gamma(x)\backslash(\Lambda_\Gamma-\{x\})$ 是紧的，则称其为有界。

子群 $\Gamma<G$ 是非初等的，若 $\#\Lambda_\Gamma\geq 3$，从而 $\#\Lambda_\Gamma=\infty$。此外，这样的子群是几何有限的，若 $\Lambda_\Gamma$ 仅由圆锥极限点和抛物不动点组成，或者等价地，$\Lambda_\Gamma$ 仅由圆锥极限点和有界抛物不动点组成 [Bow93、KL19]。

2.3. **尖点结构**。设 $\Gamma<G$ 是一个含有抛物元素的几何有限子群，并设 $\infty\in\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 是 Γ的一个抛物不动点。令$\Gamma'_\infty = \mathrm{Stab}_\Gamma(\infty) < \Gamma$ 为固定 $\infty$的抛物子群。则 $\Gamma'_\infty$ 作用于$\mathbb{R}^d\subset\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 上，并通过欧几里得等距变换作用。以下比伯巴赫的结果给出了对 $\Gamma'_\infty$-作用于 $\mathbb{R}^d$ 上的更精确刻画（见 [Rat19，第 7 节。5]）。

**引理 2.1** (比伯巴赫)。存在一个极大正规阿贝尔子群 $\Gamma_\infty<\Gamma'_\infty$，其指数有限 $m\in\mathbb{N}$；以及一个 $\Gamma'_\infty$-不变仿射子空间 $Z\subset\mathbb{R}^d$，其维数为$k\in\mathbb{N}$，使得 $\Gamma_\infty$ 在 $Z$ 上的作用是一个秩为 $k$ 的平移群。因此，将 $\mathbb{R}^d = Y\oplus Z$ 分解为正交仿射子空间，并将后者各自视为向量空间，我们可以将 $\Gamma'_\infty$在 $\mathbb{R}^d$ 上的作用写成如下形式：对所有 $\gamma\in\Gamma'_\infty$，均存在

$$A_\gamma\in\mathrm{O}(Y),\qquad R_\gamma\in\mathrm{O}(Z),\qquad b_\gamma\in Z,$$

其中 $R_\gamma^m$ = 恒等映射，而且若 $\gamma \in \Gamma_\infty$，则 $R_\gamma$ = 恒等映射，使得

$$\gamma(y,z) = (A_\gamma y, R_\gamma z + b_\gamma) \qquad for\ all\ (y,z) \in Y \oplus Z.$$

引理 $k$ 2.1 中的维数也称为抛物固定点的秩$\infty$。

考虑引理 $\mathbb{R}^d = Y \oplus Z$ 2.1中的正交分解 $\mathbb{R}^d = Y \oplus Z$。由于 $\Gamma_\infty$作为平移群作用于 $Z$，它存在一个基本域 $\Delta'_\infty \subset Z$，该基本域是一个开 $k$维平行多胞体。由于 $\Gamma$ 是几何有限的， $\infty$是一个有界抛物不动点。根据定义，商空间 $\Gamma'_\infty \backslash (\Lambda_\Gamma - \{\infty\})$是紧的，因此商空间 $\Gamma_\infty \backslash (\Lambda_\Gamma - \{\infty\})$也紧，因为 $\Gamma_\infty < \Gamma'_\infty$具有有限指数。因此，存在一个常数 $C_\infty > 0$ 使得集合$B_Y(C_\infty) = \{y \in Y : \ \|y\| < C_\infty\}$ 具有如下性质

$$\Lambda_\Gamma - \{\infty\} \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_\infty} \gamma\big(\overline{B_Y(C_\infty) \times \Delta'_\infty}\big). \tag{3}$$

我们称开集 $\Delta_\infty := B_Y(C_\infty) \times \Delta'_\infty$ 为抛物固定点 $\infty$ 的基本域。

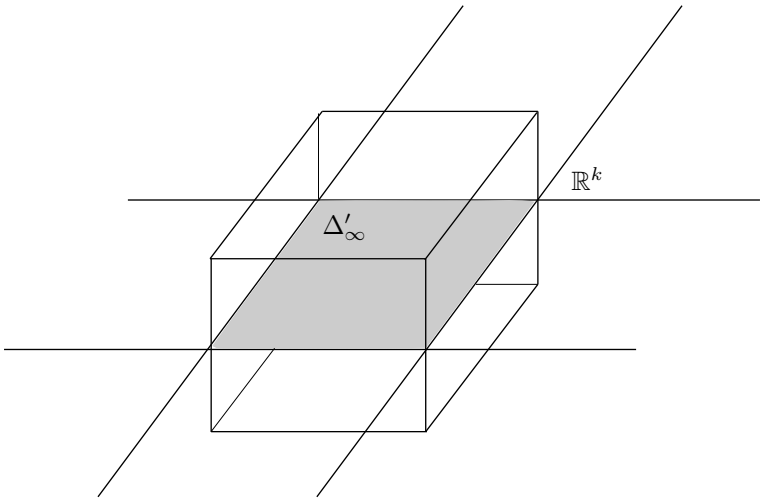



FIGURE 2. 交集 $\Lambda_\Gamma \cap \mathbb{R}^d$ 与 $\mathbb{R}^k$ 的距离有界。

**2.4. PS 测度与 BMS测度。** 设 $\Gamma < G$ 为几何有限子群。记 $\delta \in (0, d]$ 为 $\Gamma$ 的临界指数，即庞加莱级数 $s \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o,\gamma o)}$ 的收敛横坐标。

**2.4.1. 帕特森–沙利文测度。** 帕特森和沙利文构造了一个 $\Gamma$-不变的、维数为 $\delta$ 的共形密度 $\{\mu_y^{\mathrm{PS}}\}_{y \in \mathbb{H}^{d+1}}$，即定义在 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 上的一族有限博雷尔测度，使得对任意 $y$, $z \in \mathbb{H}^{d+1}$、 $x \in \partial\mathbb{H}^{d+1}$和 $\gamma \in \Gamma$，均有

$$\frac{d\mu_y^{\mathrm{PS}}}{d\mu_z^{\mathrm{PS}}}(x) = e^{-\delta\beta_x(y,z)} \qquad \text{and} \qquad \gamma_*\mu_y^{\mathrm{PS}} = \mu_{\gamma y}^{\mathrm{PS}}, \tag{4}$$

其中，对于任意博雷尔子集$E \subset \partial\mathbb{H}^{d+1}$，推前测度定义为 $\gamma_*\mu_y^{\mathrm{PS}}(E) = \mu_y^{\mathrm{PS}}$({v4)。这类测度在位似意义下唯一，且与 $\Gamma$-作用

在 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 上相对于相应的测度类是遍历的；特别是，这些测度的支集包含于 $\Lambda_\Gamma \subset \partial\mathbb{H}^{d+1}$。这些测度称为帕特森–沙利文测度（或 PS 测度）。

由于 PS 测度彼此绝对连续，为便于行文，本文余下部分固定使用 $\mu := \mu_o^{\mathrm{PS}}$。它具有准不变性：对任意博雷尔子集 $E \subset \partial\mathbb{H}^{d+1}$ 及任意 $\gamma \in \Gamma$,

$$\mu(\gamma E) = \int_E \|(d\gamma)_x\|_{\mathbb{S}^d}^{\delta}\, d\mu(x). \tag{5}$$

2.4.2. ***Bowen–Margulis–Sullivan*** 测度。利用霍普夫参数化，$\mathrm{T}^1(\mathbb{H}^{d+1})$ 上的 Bowen–Margulis–Sullivan 测度（或 BMS测度）定义为

$$d\tilde{m}^{\mathrm{BMS}}(v^+, v^-, s) = e^{\delta\beta_{v^+}(o,v_*)} e^{\delta\beta_{v^-}(o,v_*)}\, d\mu(v^+)\, d\mu(v^-)\, ds.$$

它诱导出以下测度，这些测度也称为 BMS测度。注意，由于 PS 测度的保角性（式 (4)）以及 $\Gamma$ 对 $\partial^2(\mathbb{H}^{d+1})\times\mathbb{R}$ 的作用公式（式 (2)），$\tilde{m}^{\mathrm{BMS}}$ 是左 $\Gamma$-不变的。因此，$\tilde{m}^{\mathrm{BMS}}$ 在 $\mathrm{T}^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1})$ 上诱导出测度 $m^{\mathrm{BMS}}$。由于 $\Gamma$ 是几何有限的，$m^{\mathrm{BMS}}(\mathrm{T}^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}))$ 有限，因此我们可以将 $m^{\mathrm{BMS}}$ 归一化为概率测度。利用识别 $\mathrm{T}^1(\mathbb{H}^{d+1}) \cong G/M$ 和 $\mathrm{F}(\mathbb{H}^{d+1}) \cong G$，以及 $M$ 上的哈尔概率测度，我们将测度 $\tilde{m}^{\mathrm{BMS}}$ 提升为 $\mathrm{F}(\mathbb{H}^{d+1})$ 上右 $M$-不变的测度；滥用记号，也将其记为 $\tilde{m}^{\mathrm{BMS}}$。类似地，对于商空间，我们将 $\mathrm{T}^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}) \cong \Gamma\backslash G/M$ 上的测度 $m^{\mathrm{BMS}}$ 提升为 $\mathrm{F}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}) \cong \Gamma\backslash G$ 上右 $M$-不变的测度 $m^{\mathrm{BMS}}$。根据定义，BMS测度在相应的单位切丛上关于测地流 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 不变，并且在相应的标架丛上关于标架流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 不变。

## 3. Symbolic model for the frame flow

在本文余下部分，设 $\Gamma < G$ 是一个含有抛物元素的扎里斯基稠密无挠几何有限子群。此外，如有必要，我们可以用 $G$ 中的一个元素共轭 $\Gamma$，从而假设 $\infty \in \partial\mathbb{H}^{d+1}$ 是 $\Gamma$的一个抛物固定点。记 $X := \Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}$。

3.1. **边界上的扩张映射**。首先回顾 Li–Pan 构造的测地流符号模型 [LP22，命题 4。1]。

在符号动力系统中处理测地流的一种方法是构造一个庞加莱截面 $S \subset \mathrm{T}^1(X)$。它是一个带边界的 $2d$ 维子流形，与测地流横截，并具有良好的回归性质。难点在于寻找一个定义在满测度子集 $S_0 \subset S$上的返回时间映射 $\mathscr{R}$，使得映射 $v \mapsto \mathcal{G}_{\mathscr{R}(v)}(v)$ 在 $S_0$ 上是双曲的，并且可以用一个可数无限字母表的满移位来建模。为克服这一困难，Li– Pan 在配备扩张映射的 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 上构造了可数无限符号编码，并将其与返回时间映射联系起来。

取 $\Delta_0 := \Delta_\infty$ 作为抛物固定点 $\infty$ 的基本域。

**命题 3.1** ([LP22，命题 4。1])。存在 $C_1 > 0$，$\lambda \in (0,\ 1)$，$\epsilon_0 \in (0,\ 1)$，以及一个可数无限集 $\{\Delta_j\}_{j\in\mathcal{J}}$，由两两不相交的开子集构成，且这些开子集属于 $\Delta_0$，并存在一个扩张映射 $T$：$\Delta_\sqcup \to \Delta_0$ 其中 $\Delta_\sqcup := \bigsqcup_{j\in\mathcal{J}} \Delta_j$，满足：

*(1)* $\mu(\Delta_0) = \sum_{j\in\mathcal{J}} \mu(\Delta_j)$; *(2)* 对所有 $j \in \mathcal{J}$，存在 $\gamma_j \in \Gamma$，使得 $\Delta_j = \gamma_j\Delta_0$ 且 $T|_{\Delta_j} = \gamma_j^{-1}$；

*(3)* 对所有 $j \in \mathcal{J}$，$\gamma_j$ 都是一致收缩：对所有$x \in \Delta_0$，有 $\|(d\gamma_j)_x\| \leq \lambda$；*(4)* 对所有 $j \in \mathcal{J}$，对所有 $x \in \Delta_0$，有 $\|(d(\log \|d\gamma_j\|))_x\| \leq C_1$，其中 $(d(\log \|d\gamma_j\|))_x$ 是映射 $z \mapsto \log \|(d\gamma_j)_z\|$ 在 $x$处的导数；*(5)* 由 $\mathcal{R}(x) = \log \|(dT)_x\|$ 定义的回归时间映射 $\mathcal{R}: \Delta_\sqcup \to \mathbb{R}$ 对所有$x \in \Delta_\sqcup$ 都满足指数尾性质：$e^{\epsilon_0 \mathcal{R}} \in L^1(\Delta_\sqcup, \mu)$。

用 $\mathcal{H} = \{\gamma_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ 表示 $T$ 的逆分支集合。令

$$\mathcal{H}^n = \{\gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_n} : j_k \in \mathcal{J} \text{ for all } 1 \leq k \leq n\}$$

令其为长度 $n \in \mathbb{N}$的逆分支集合。对于任意 $\gamma \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n$，设

$$\|d\gamma\| := \sup\{\|(d\gamma)_x\| : x \in \Delta_0\}.$$

定义

$$\Lambda_+ = \Lambda_\Gamma \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^{-n}(\Delta_0) = \{x \in \Lambda_\Gamma : T^n \text{ is defined at } x \text{ for all } n \in \mathbb{N}\}.$$

这是一个具有可数无限编码的空间。

扩张映射 $T$ 在 $\infty$ 的一个邻域内给出一个收缩作用。

**引理 3.2** ([LP22，引理 4.8])。存在 $0 < \lambda < 1$ 以及一个邻域 $\Lambda_-$，它属于 $\infty$ 中的 $\Lambda_\Gamma$，使得 $\Lambda_-$ 与 $\Delta_0$ 不相交，并且对任意 $\overline{\gamma} \in \mathcal{H}$ 以及任意 $y,\ y' \in \Lambda_-$，

$$\gamma^{-1}(\Lambda_-) \subset \Lambda_-,\ \ d_{\mathbb{S}^d}(\gamma^{-1}y, \gamma^{-1}y') \leq \lambda d_{\mathbb{S}^d}(y, y').$$

利用命题 3.1，可以像 [You98，引理 2] 中那样证明，存在一个 $T$-不变遍历概率测度 $\nu$，定义在 $\Delta_0$ 上，使得

$$d\nu = f_0\, d\mu \tag{6}$$

其中 $f_0 : \Delta_0 \to \mathbb{R}$ 是一个正的 Lipschitz 密度函数，其值有正下界且 $+\infty$。注意，因此 $\Lambda_+ \subset \Delta_0$ 是相对于等价测度 $\mu$ 和 $\nu$的满测度子集。

**定义 3.3** (圆柱)。我们将形如 $\gamma\Delta_0 \subset \Delta_0$ 的子集称为长度为 $n$的柱集，其中 $\gamma \in \mathcal{H}^n$且 $n \in \mathbb{N}$。我们将 $\Delta_0$ 视为长度为 0 的圆柱。这些通常用 $\mathtt{C}$ 或其他打字机字体的字母表示。

在小节 8.1中，我们将使用柱集构造 $\mu$-可测划分$\Delta_0$。

按照 [Sto11，第 5], 节，我们在 $\Delta_0$ 上引入另一个距离函数 $D$，定义为

$$D(x, y) = \min\{\operatorname{diam}(\mathtt{C}) : \text{cylinders } \mathtt{C} \subset \Delta_0 \text{ such that } x, y \in \overline{\mathtt{C}}\}$$

当 $x,\ y \in \Delta_0$且 $x \neq y$时；否则为 $D(x,\ y) = 0$。下面引理的证明是显然的。

**引理 3.4**。以下结论成立：

*(1)* $D$ 是 $\Delta_0$上的距离函数；*(2)* 对所有的 $x, y \in \Delta_0$，有 $d_{\mathrm{E}}(x, y) \leq D(x, y)$；*(3)* 对所有的 $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathcal{H}^n$ 以及 $x, y \in \Delta_0$，有 $D(\gamma x, \gamma y) \leq \lambda^n D(x, y)$。

下面的引理记录了本文中反复使用的柱集的基本估计。关于测度的估计对博雷尔子集也成立。

**引理 3.5.** 对于所有的柱集 $\mathtt{C} \subset \Delta_0$、博雷尔子集 $E \subset \Delta_0$ 和 $\gamma \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n$，我们有

$$\operatorname{diam}(\gamma\mathtt{C}) \asymp \|d\gamma\| \operatorname{diam}(\mathtt{C}), \qquad \mu(\gamma E) \asymp \|d\gamma\|^{\delta}\mu(E), \qquad \nu(\gamma E) \asymp \|d\gamma\|^{\delta}\nu(E),$$

其中某个隐常数为 $C_{\mathrm{cyl}} > 1$。

证明。设 $\mathtt{C}$ 和 $E$ 如引理中所述，并且 $\gamma = \gamma_{j_1}\cdots\gamma_{j_n} \in \mathcal{H}^n$。我们先估计 $\mu(\gamma E)$ 和 $\nu(\gamma E)$。利用命题 3.1 中的性质 (3) 和 (4) 以及链式法则，对于任意 $x,\ y \in \Delta_0$，有

$$\begin{aligned}|\log\|(d\gamma)_x\| - \log\|(d\gamma)_y\|| &\le \sum_{l=1}^{n-1} C_1 d_{\mathrm{E}}(\gamma_{j_{l+1}}\cdots\gamma_{j_n}x, \gamma_{j_{l+1}}\cdots\gamma_{j_n}y)\\ &\le \frac{C_1}{1-\lambda}\operatorname{diam}(\Delta_0).\end{aligned}$$

那么，对于任意 $x \in \Delta_0$，有

$$\|(d\gamma)_x\| \asymp \|d\gamma\|. \tag{7}$$

由方程 (5) 和 (6)，对于任意博雷尔子集 $E \subset \Delta_0$，有

$$\nu(\gamma E) \asymp \mu(\gamma E) \asymp \mu(E)\|d\gamma\|^{\delta}.$$

接下来，我们估计 $\operatorname{diam}(\gamma\mathtt{C})$。首先证明不等式的后一部分。对于任意 $y \in \gamma\Delta_0$，通过写成 $y = \gamma x$，可得

$$\|(d\gamma^{-1})_y\| = \|(d\gamma)_x\|^{-1} \asymp \|\gamma\|^{-1}. \tag{8}$$

注意，对于任意点 $x,\ y \in \mathtt{C}$，由凸性可知，直线 $xy$ 包含于 $\Delta_0$ 中。现在，$d_{\mathrm{E}}(\gamma x,\ \gamma y)$ 受曲线长度 $\gamma\cdot xy$ 的限制。因此，利用对所有 $z \in \Delta_0$ 均成立的不等式 $\|(d\overline{\gamma})_z\| \le \|d\gamma\|$，可得

$$d_{\mathrm{E}}(\gamma x, \gamma y) \le \|d\gamma\| d_{\mathrm{E}}(x, y).$$

对所有点 $x,\ y \in \mathtt{C}$ 取 $d(\gamma x,\ \gamma y)$ 的上确界，得到

$$\operatorname{diam}(\gamma\mathtt{C}) \le \|d\gamma\| \operatorname{diam}(\mathtt{C}).$$

现在，我们证明该不等式的前半部分。固定任意一个球 $B \subset \Delta_0$。我们写成 $\mathtt{C} = \beta\Delta_0$，其中 $\beta \in \mathcal{H}^m$，而 $m$ 是圆柱的长度。由于 $G$-作用在 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 上具有保角性，像 $\gamma\beta B \subset \beta B \subset \Delta_0$ 仍然是球。因此，利用球的凸性以及式（8），对于 $\gamma^{-1}$ 和 $\beta^{-1}$，我们可以像上一段中那样应用类似的论证，从而得到

$$\operatorname{diam}(B) \ll \frac{\operatorname{diam}(\gamma\beta B)}{\|d\gamma\|\cdot\|d\beta\|} \le \frac{\operatorname{diam}(\gamma\mathtt{C})}{\|d\gamma\|\cdot\|d\beta\|}.$$

由上一段，我们还得到

$$\operatorname{diam}(\mathtt{C}) = \operatorname{diam}(\beta\Delta_0) \le \|d\beta\|\operatorname{diam}(\Delta_0) \ll \|d\beta\|\operatorname{diam}(B).$$

结合这两个不等式，我们得到

$$\|d\gamma\|\operatorname{diam}(\mathtt{C}) \ll \operatorname{diam}(\gamma\mathtt{C}).$$

■

固定一个常数

$$C_{\Delta_0} \ge C_{\mathrm{cyl}}\cdot\max\{1, \operatorname{diam}(\Delta_0), \mu(\Delta_0)\} > 1. \tag{9}$$

3.2. **测地流的符号模型**。回顾子集 $\Lambda_+$，$\Lambda_- \subset \Lambda_\Gamma$（见第 3.1 小节）。定义 $T: \Lambda_+ \times \Lambda_- \to \Lambda_+ \times \Lambda_-$ 如下：

$$\hat{T}(x,y) = \left(\gamma_j^{-1}x, \gamma_j^{-1}y\right) \qquad \text{if } x \in \Delta_j, \text{ for all } y \in \Lambda_+ \text{ and } j \in \mathcal{J}.$$

令 $\mathscr{R}$：$\Delta_\sqcup \to \mathbb{R}$ 为命题3.1中给出的函数。略去符号滥用所带来的歧义，定义 $\mathscr{R}$：$\Delta_\sqcup \times \Lambda_- \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{R}(x,y) = \mathscr{R}(x)$，对所有 $(x,y) \in \Delta_\sqcup \times \Lambda_-$均成立。我们定义空间

$$\Lambda^{\mathscr{R}} = \{(x,y,s) \in \Lambda_+ \times \Lambda_- \times \mathbb{R} : 0 \le s < \mathscr{R}(x,y)\}.$$

我们使用记号 $\mathscr{R}_0 = 0$ 和

$$\mathscr{R}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mathscr{R} \circ \hat{T}^j \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

双曲斜积半流 $\{\hat{T}_t\}_{t\ge 0}$ 定义为

$$\hat{T}_t(x,y,s) = (\hat{T}^n(x,y), s + t - \mathscr{R}_n(x,y))$$

对于所有 $(x,y,s) \in \Lambda_+ \times \Lambda_- \times \mathbb{R}$，其中 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 满足 $0 \le s + t - \mathscr{R}_n(x,y) < \mathscr{R}(\hat{T}^n(x,y))$。

3.2.1. 从 $\Lambda^{\mathscr{R}}$ 到$\mathrm{T}^1(X)$的映射。我们引入以下嵌入：

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \Delta_0 \times \Lambda_- \times \{0\} &\to \partial^2(\mathbb{H}^{d+1}) \times \mathbb{R} \\ (x,y,0) &\mapsto (x,y,\log(1+\|x\|^2)). \end{aligned} \tag{11}$$

从霍普夫参数化的公式（式（1））可以看出，$\Phi$ 映射$\Delta_0 \times \{\infty\} \times \{0\}$ 到以 $\infty$ 为基点、且包含 $o = e_{d+1} \in \mathbb{H}^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 的不稳定 horosphere。滥用记号，我们定义如下时间变换映射：

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \Lambda^{\mathscr{R}} &\to \partial^2(\mathbb{H}^{d+1}) \times \mathbb{R} \\ (x,y,s) &\mapsto (x,y,s+\log(1+\|x\|^2)). \end{aligned}$$

对于所有 $x \in \Lambda_+$ 和 $y, y' \in \Lambda_-$，点 $\Phi(x, y, 0)$ 和 $\Phi(x, y', 0)$ 位于以 $x$ 为基点的同一个稳定 horosphere 上。

利用识别 $\mathrm{T}^1(X) \cong \Gamma\backslash(\partial^2(\mathbb{H}^{d+1}) \times \mathbb{R})$，映射 $\tilde{\Phi}$ 诱导出映射$\Phi$：$\Lambda^{\mathscr{R}} \to \mathrm{T}^1(X)$。我们有 $\Phi$ 在两个半流之间定义了一个半共轭：

$$\Phi \circ \hat{T}_t = \mathcal{G}_t \circ \Phi \qquad \text{for all } t \ge 0.$$

3.3. **标架流的符号模型**。固定一个参考点 $x_0 \in \Lambda_+ \subset \Delta_0$。我们定义一个截面

$$\tilde{F} : \Delta_0 \times \Lambda_- \to \mathrm{F}(\mathbb{H}^{d+1})$$

它关于第一个变量光滑，具体如下：

- 固定一个以切向量 $\tilde{\Phi}(x_0, \infty, 0)$ 为基点的标架 $\tilde{F}(x_0, \infty) \in \mathrm{F}(\mathbb{H}^{d+1})$。
- 延拓截面 $F$，使得对于任意 $x, x' \in \Delta_0$，标架 $F(x,\infty)$ 和$F(x',\infty)$ 后向渐近，即

$$\lim_{t \to -\infty} d(\tilde{F}(x,\infty)a_t, \tilde{F}(x',\infty)a_t) = 0.$$

那么，对于某个唯一的 $n^+ \in N^+$，必有 $\tilde{F}(x', \infty) = \tilde{F}(x, \infty)n^+$。

• 扩展截面 $F$，使得对于任意 $x \in \Delta_0$ 和 $y,\ y' \in \Lambda_-$，标架 $\tilde{F}(x,\ y)$ 和 $\tilde{F}(x,\ y')$ 正向渐近，即

$$\lim_{t\to\infty} d(\tilde{F}(x,y)a_t, \tilde{F}(x,y')a_t) = 0.$$

那么，必有 $\tilde{F}(x,\ y') = \tilde{F}(x,\ y)n^-$，其中存在某个唯一的 $n^- \in N^-$。

那么，$F$ 诱导出一个映射 $F\colon \Delta_0 \times \Lambda_- \to \mathrm{F}(X)$。

**定义 3.6**（全纯）。全纯是一个映射 $\mathscr{H}\colon \Delta_\sqcup \times \Lambda_- \to M$，使得对于所有 $(x,\ y) \in \Delta_\sqcup \times \Lambda_-$，都有

$$F(x,y)a_{\mathscr{R}(x,y)} = F\big(\hat{T}(x,y)\big)\mathscr{H}(x,y)^{-1}.$$

**定义 3.7**（广义全纯）。我们称这个组合映射为

$$\begin{aligned}\mathscr{G} : \Delta_\sqcup \times \Lambda_- &\to AM\\ (x,y) &\mapsto a_{\mathscr{R}(x,y)}\mathscr{H}(x,y)\end{aligned}$$

该广义全纯。

以下引理可利用 $F$ 的构造推导得出（参见 [SW21，引理 4。2] 其证明）。

**引理 3.8**。对所有 $x \in \Delta_\sqcup$，映射 $\mathscr{R}|_{\{x\}\times\Lambda_-}$、$\mathscr{H}|_{\{x\}\times\Lambda_-}$ 和 $\mathscr{G}|_{\{x\}\times\Lambda_-}$ 均为常数。

我们定义空间

$$\Lambda^{\mathscr{R}} \times M = \{(x,y,m,s) \in \Lambda_+ \times \Lambda_- \times M \times \mathbb{R} : 0 \le s < \mathscr{R}(x,y)\}.$$

我们使用记号 $\mathscr{H}_0 = \mathscr{G}_0 = e$ 和

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_n &= \mathscr{H}\cdot\big(\mathscr{H}\circ\hat{T}\big)\cdots\big(\mathscr{H}\circ\hat{T}^{n-1}\big),\\ \mathscr{G}_n &= \mathscr{G}\cdot\big(\mathscr{G}\circ\hat{T}\big)\cdots\big(\mathscr{G}\circ\hat{T}^{n-1}\big),\end{aligned} \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

符号标架半流 $\{\hat{T}_t\}_{t\ge 0}$ 定义为

$$\hat{T}_t(x,y,m,s) = (\hat{T}^n(x,y), \mathscr{H}_n(x,y)^{-1}m, s+t-\mathscr{R}_n(x,y))$$

对所有 $(x,\ y,\ m,\ s) \in \Lambda_+\times\Lambda_-\times M\times\mathbb{R}$，其中 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 使得 $0 \le s+t-\mathscr{R}_n(x,\ y) < \mathscr{R}(\hat{T}^n(x,\ y))$。

3.3.1. 从 $\Lambda^{\mathscr{R}} \times M$ 到 $\mathrm{F}(X)$。滥用记号，我们定义映射

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} : \Lambda^{\mathscr{R}} \times M &\to \mathrm{F}(\mathbb{H}^{d+1})\\ (x,y,m,s) &\mapsto \tilde{F}(x,y)a_s m.\end{aligned}$$

该映射定义良好，并诱导出映射 $\Phi\colon \Lambda^{\mathscr{R}} \times M \to \mathrm{F}(X)$。事实上，我们有如下关系

$$\Phi(x,y,m,a_s) = F(x,y)a_s m.$$

我们断言，$\Phi$定义了两个半流之间的半共轭：

$$\Phi\circ\hat{T}_t = \mathcal{F}_t\circ\Phi \qquad \text{for all } t \ge 0. \tag{12}$$

为此，注意到对于任意的 $(x,\ y,\ m,\ s) \in \Lambda^{\mathscr{R}} \times M$，我们有如下表达式

$$\hat{T}_t(x,y,m,s) = \big(\hat{T}^n(x,y), \mathscr{H}_n(x,y)^{-1}m, s+t-\mathscr{R}_n(x,y)\big).$$

那么，一方面，我们有

$$\begin{aligned}\Phi\circ\hat{T}_t &= \Phi\big(\hat{T}^n(x,y),\mathscr{H}_n(x,y)^{-1}m,s+t-\mathscr{R}_n(x,y)\big)\\ &= F\big(\hat{T}^n(x,y)\big)\mathscr{H}_n(x,y)^{-1}ma_{s+t-\mathscr{R}_n(x,y)}.\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t\circ\Phi &= \mathcal{F}_t\circ\Phi(x,y,m,s)\\ &= F(x,y)ma_{s+t}\\ &= F\big(\hat{T}^n(x,y)\big)\mathscr{H}_n(x,y)^{-1}ma_{s+t-\mathscr{R}_n(x,y)} \qquad \text{(by Definition 3.6)}.\end{aligned}$$

这就完成了对公式（12）的论证。

3.3.2. 将 $\hat{\nu}^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}$ 与 $m^{\mathrm{BMS}}$ 联系起来。 [LP22，命题 4.11]̂ 证明，存在唯一的 $T$-不变遍历概率测度 $\hat{\nu}$，其定义在 $\Lambda_+\times\Lambda_-$ 上，并投影到 $\Lambda_+$ 上的测度 $\nu$。我们赋予 $\Lambda^{\mathscr{R}}$ 以 $\{\hat{T}_t\}_{t\geq0}$-不变测度 $d\hat{\nu}^{\mathscr{R}}:=d\hat{\nu}\,dm^{\mathrm{Leb}}/\bar{\mathscr{R}}$，其中 $m^{\mathrm{Leb}}$ 是勒贝格测度，而 $\bar{\mathscr{R}}=\hat{\nu}(\mathscr{R})$。固定 $M$ 上的哈尔概率测度 $m^{\mathrm{Haar}}$，积分中将隐式使用该测度。在 $\Lambda^{\mathscr{R}}\times M$ 上，我们考虑乘积测度 $\hat{\nu}^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}$：对于任意有界连续函数 $f\colon\Lambda^{\mathscr{R}}\times M\to\mathbb{R}$，

$$\big(\hat{\nu}^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}\big)(f)=\int_{\Lambda^{\mathscr{R}}}\int_M f(x,y,m,s)\,dm\,d\hat{\nu}^{\mathscr{R}}(x,y,s).$$

回顾 [LP22] 中证明的以下结果。

**命题 3.9** ([LP22，命题 4.15])。 映射

$$\Phi:\big(\Lambda^{\mathscr{R}},\{\hat{T}_t\}_{t\geq0},\hat{\nu}^{\mathscr{R}}\big)\to\big(\mathrm{T}^1(X),\{\mathcal{G}_t\}_{t\in\mathbb{R}},m^{\mathrm{BMS}}\big)$$

是一个因子映射，即，

$$\Phi_*\hat{\nu}^{\mathscr{R}}=m^{\mathrm{BMS}}\qquad\textit{and}\qquad\Phi\circ\hat{T}_t=\mathcal{G}_t\circ\Phi\qquad\textit{for all } t\geq0.$$

**推论 3.10.** 映射

$$\Phi:\big(\Lambda^{\mathscr{R}}\times M,\{\hat{T}_t\}_{t\geq0},\hat{\nu}^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}\big)\to\big(\mathrm{F}(X),\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}},m^{\mathrm{BMS}}\big)$$

是一个因子映射，即，

$$\Phi_*\big(\hat{\nu}^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}\big)=m^{\mathrm{BMS}}\qquad\textit{and}\qquad\Phi\circ\hat{T}_t=\mathcal{F}_t\circ\Phi\qquad\textit{for all } t\geq0.$$

¯证明。 给定一个有界函数 $f\in C(\mathrm{F}(X)\ \mathbb{R})$，我们定义函数 $f:\mathrm{T}^1(X)\to\mathbb{R}$ 为

$$\bar{f}(\Gamma gM)=\int_M f(\Gamma gm)\,dm.$$

我们有 $\bar{f}\in C(\mathrm{T}^1(X)\ \mathbb{R})$，它也是有界的。注意，对于任意 $(x,\ y,\ s)\in\Lambda^{\mathscr{R}}$，我们有

$$(\bar{f}\circ\Phi)(x,y,s)=\int_M f(F(x,y)a_sm)\,dm.$$

因此，利用命题 3.9，我们有

$$\begin{aligned} m^{\mathrm{BMS}}(f) &= \int_{\mathrm{T}^1(X)} \int_M f(\Gamma g m)\, dm\, dm^{\mathrm{BMS}}(\Gamma g M) = \int_{\mathrm{T}^1(X)} \bar{f}\, dm^{\mathrm{BMS}} \\ &= \int_{\Lambda^{\mathscr{R}}} (\bar{f} \circ \Phi)(x,y,s)\, d\hat{\nu}^{\mathscr{R}}(x,y,s) \\ &= \int_{\Lambda^{\mathscr{R}}} \int_M f(F(x,y)a_s m)\, dm\, d\hat{\nu}^{\mathscr{R}}(x,y,s) = \left(\hat{\nu}^{\mathscr{R}} \otimes m^{\mathrm{Haar}}\right)(f). \end{aligned}$$

■

## 4. Transfer operators with holonomy

本节中，我们介绍与可数无限编码相关的带全纯的传递算子。本文的主要技术目标是在第8节中获得这些算子的谱界。

回顾一下，我们已在 $M$ 上固定了哈尔概率测度。还记得，$L^2(M,\mathbb{C})$ 是一个希尔伯特空间，配备由 $\langle f,g\rangle = \int_M fg$ 定义的标准内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。按照惯例，我们用 $\|\cdot\|_2$ 表示相应的范数 $L^2$，其定义在 $L^2(M,\mathbb{C})$ 及其任意子空间上。

在指数混合的证明中，我们需要处理函数空间

$$C(\Lambda^{\mathscr{R}} \times M, \mathbb{C}) \cong C(\Lambda^{\mathscr{R}}, C(M,\mathbb{C})) \subset C(\Lambda^{\mathscr{R}}, L^2(M,\mathbb{C})).$$

令 $M$ 表示 $M$ 的酉对偶。用 $1 \in M$ 表示平凡不可约表示。定义 $M_0 = M - \{1\}$。鉴于上述内容，自然可以运用 Peter–Weyl 定理，得到希尔伯特空间分解

$$L^2(M,\mathbb{C}) = \widehat{\bigoplus_{\rho\in\widehat{M}}} V_\rho^{\oplus \dim(\rho)}$$

对应于左正则表示 $\varrho\colon M \to \mathrm{U}(L^2(M,\mathbb{C}))$ 的分解 $\varrho = \widehat{\bigoplus}_{\rho\in\widehat{M}} \rho^{\oplus\dim(\rho)}$。

对于所有 $b\in\mathbb{R}$ 和 $\rho\in\widehat{M}$，我们定义张量酉表示 $\rho_b : AM \to \mathrm{U}(V_\rho)$ 如下：

$$\rho_b(a_t m)(z) = e^{ibt}\rho(m)(z) \qquad \text{for all } z\in V_\rho,\ t\in\mathbb{R}, \text{ and } m\in M.$$

我们引入一些与李代数有关的记号。对于李群对应的李代数，我们用相应的花体字母表示：$\mathfrak{g} = \mathrm{T}_e(G)$，$\mathfrak{a} = \mathrm{T}_e(A)$，$\mathfrak{m} = \mathrm{T}_e(M)$ 和 $\mathfrak{n}^{\pm} = \mathrm{T}_e(N^{\pm})$。对于任意酉表示 $\rho\colon M \to \mathrm{U}(V)$，其中某个希尔伯特空间为 $V$，我们将 $e\in M$ 处的微分记为 $d\rho = (d\rho)_e\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{u}(V)$，并定义范数

$$\|\rho\| = \sup_{z\in\mathfrak{m},\|z\|=1} \|d\rho(z)\|_{\mathrm{op}}$$

任意酉表示 $\rho\colon AM \to \mathrm{U}(V)$ 也类似。

以下是关于李理论范数的一些有用事实（其 [证明21]见相关文献）。

**引理 4.1** ([SW21，引理 4.3])。对于所有 $b\in\mathbb{R}$ 和 $\rho\in M$，我们有

$$\sup_{a\in A, m\in M} \sup_{\substack{z\in \mathrm{T}_{am}(AM),\\ \|z\|=1}} \|(d\rho_b)_{am}(z)\|_{\mathrm{op}} = \|\rho_b\|$$

以及 最大值$\{|b|,\|\rho\|\}\le\|\rho_b\|\le|b|+\|\rho\|$。

**引理 4.2** ([SW21, 引理 4.4]). 存在 $\varepsilon_1\in(0,\ 1)$，使得对于所有的 $b\in\mathbb{R}$、$\rho\in\widehat{M}$ 和 $\omega\in V^{\oplus\dim(\rho)\rho}$，若满足 $\|\omega\|_2=1$，则存在 $z\in\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{m}$，使得 $\|z\|=1$，且 $\|d\rho_b(z)(\omega)\|_2\ge\varepsilon_1\|\rho_b\|$。

Dolgopyat 方法所需振荡的来源，由局部非可积条件（*LNIC*）提供；该条件将在第5 节介绍。当 $\|\rho_b\|$ 足够大时，这些振荡便会传播。但这恰好发生在 $|b|$ 足够大或 $\rho\in M$ 非平凡时。设 $b_0>0$，我们稍后将固定该值。这促使我们定义

$$\widehat{M}_0(b_0)=\{(b,\rho)\in\mathbb{R}\times\widehat{M}:|b|>b_0\text{ or }\rho\neq1\}.$$

我们固定相关常数 $\delta_\varrho=$ 下确界$_{b\in\mathbb{R},\ \rho\in\widehat{M}_0}\|\rho_b\|=$ 下确界$_{\rho\in\widehat{M}_0}\|\rho\|$ 之所以为正，是因为 $M$ 是一个紧连通李群（回顾 [Lub10，例 3.1.4] 紧李群具有性质（T））。于是，$\inf_{(b,\rho)\in\widehat{M}_0(b_0)}\|\rho_b\|\ge\min\{b_0,\delta_\varrho\}$。因此，我们也固定

$$\delta_{1,\varrho}=\min\{1,\delta_\varrho\}. \tag{13}$$

**定义 4.3**（带整体单值性的转移算子）。对于所有 $\xi=a+ib\in\mathbb{C}$ 满足 $a>-\epsilon_0$ 且 $\rho\in\widehat{M}$，带整体单值性的转移算子 $\mathcal{M}_{\xi\mathscr{R},\ \rho}:\ C\big(\Lambda_+,\ V^{\oplus\dim(\rho}{}^{\rho}\big)\to C\big(\Lambda_+,\ V^{\oplus\dim(\rho}{}^{\rho}\big)$定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\xi\mathscr{R},\rho}(H)(x)&=\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}e^{-\xi\mathscr{R}(\gamma x)}\rho(\mathscr{H}(\gamma x)^{-1})H(\gamma x)\\&=\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}e^{-a\mathscr{R}(\gamma x)}\rho_b(\mathscr{G}(\gamma x)^{-1})H(\gamma x)\end{aligned}$$

对所有的 $x\in\Lambda_+$ 和 $H\in C\big(\Lambda_+,\ V^{\oplus\dim(\rho}{}^{\rho}\big)$，其中 $\|H\|_\infty<\infty$。

由于指数尾性质，上述定义良好（参见命题 3.1中的性质（5））。记作 $\mathcal{L}_{\xi\mathscr{R}}:=\mathcal{M}_{\xi\mathscr{R},\ 1}$。

设 $(V,\ \|\cdot\|)$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的任意赋范向量空间。设 $\Delta_0$ 上的任意距离函数为 $d$；特别地，$d=d_{\mathrm{E}}$ 或 $d=D$。对于任意函数 $H:\ \Lambda_+\to V$，记

$$\begin{aligned}\|H\|_\infty&=\sup\{\|H(x)\|:x\in\Lambda_+\},\\\mathrm{Lip}_d(H)&=\sup\left\{\frac{\|H(x)-H(x')\|}{d(x,x')}:x,x'\in\Lambda_+,x\neq x'\right\},\\\|H\|_{\mathrm{Lip}(d)}&=\|H\|_\infty+\mathrm{Lip}_d(H).\end{aligned}$$

用 $\mathrm{Lip}_d(\Lambda_+,\ V)$ 表示满足 $\|H\|_{\mathrm{Lip}(d)}<\infty$ 的函数 $H:\ \Lambda_+\to V$ 所构成的空间。如果 $d=d_{\mathrm{E}}$，则在上述记号中省略 $d$。特别地，对于某个 $\rho\in\widehat{M}$ 以及 $(\mathbb{R},\ |\cdot|)$，我们将使用对应于赋范向量空间 $\big(V_\rho^{\oplus\dim(\rho)},\ \|\cdot\|_2\big)$ 的函数空间 $\mathrm{Lip}\big(\Lambda_+,\ V^{\oplus\dim(\rho}{}^{\rho}\big)$ 和 $\mathrm{Lip}_D(\Lambda_+,\ \mathbb{R})$。

对于任意函数 $H:\ \Delta_0\to V$，记

$$\mathrm{Lip}_d^{\mathrm{e}}(H)=\sup\left\{\frac{\|H(x)-H(x')\|}{d(x,x')}:x,x'\in\Delta_j,x\neq x',j\in\mathcal{J}\right\}.$$

相对于欧几里得度量，在 $\Delta_0$ 上定义 PS 测度 $\mu_{\mathrm{E}}$ 为

$$d\mu_{\mathrm{E}}(x)=(1+\|x\|^2)^\delta\,d\mu(x). \tag{14}$$

注意， $\Lambda_+ \subset \Delta_0$ 是相对于 $\mu_{\mathrm{E}}$ 的满测度子集。利用 PS 测度 $\mu$ 的准不变性，经过直接计算可得 $\mathcal{L}^*_{\delta\mathscr{R}}(\mu_{\mathrm{E}}) = \mu_{\mathrm{E}}$。

根据引理 A.1，算子族 $\xi \mapsto \mathcal{L}_{(\delta+\xi)\mathscr{R}}$ 在 $\mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{C})$ 上关于 $\{\xi = a + ib \in \mathbb{C} : a > -\frac{\epsilon_0}{2}\}$ 是解析的。仿照 [You98，命题 A] 可证明 $\mathcal{L}_{\delta\mathscr{R}}|_{\mathrm{Lip}(\Lambda_+,\mathbb{C})}$ 具有谱隙，且存在一个最大的简单特征值 $\lambda_0 = 1$，其对应的特征函数为 $h_0 : \Lambda_+ \to \mathbb{R}$，由 $h_0(x) = (1 + \|x\|^2)^{-\delta} f_0(x)$ 给出，其中 $f_0$ 是式 (6) 中定义的密度函数。它满足 $\int_{\Lambda_+} h_0 \, d\mu_{\mathrm{E}} = 1$。此外，根据算子扰动理论（参见 [Kat95，第 7] 章），存在 $a_0' \in (0, \frac{\epsilon_0}{2})$ 和解析映射

- $[-a_0', a_0'] \to \mathbb{R}$ denoted by $a \mapsto \lambda_a$,
- $[-a_0', a_0'] \to \mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{R})$ denoted by $a \mapsto h_a$,

使得 $\mathcal{L}_{(\delta+a)\mathscr{R}} h_a = \lambda_a h_a$，且 $h_a$ 与 0 的距离有正下界， $+\infty$ 并归一化为 $\int_{\Lambda_+} h_a \, d\mu_{\mathrm{E}} = 1$。

回顾测度 $\mu$ 和 $\nu$ 分别来自第 2.4 节和第 3.1节，以及公式（6）。结合公式（14）和 $h_0$的定义，我们得到

$$d\nu = h_0 \, d\mu_{\mathrm{E}}. \tag{15}$$

定义函数

$$\mathscr{F}^{(a)} = -(\delta + a)\mathscr{R} - \log(\lambda_a) + \log \circ h_a - \log \circ h_a \circ T$$

它与 $-(\delta + a)\,\mathscr{R}$ $-\log(\lambda_a)$ 上同调等价。由命题 3.1中的性质 (4)，我们可以固定某个 $a_0' > 0$ 以及

$$C_1' > \max\left(\mathrm{Lip}^{\mathrm{e}}(\mathscr{R}), \mathrm{Lip}^{\mathrm{e}}(\mathscr{G}), \sup_{|a| \le a_0'} \mathrm{Lip}^{\mathrm{e}}\big(\mathscr{F}^{(a)}\big)\right), \qquad C_2 = \frac{C_1'}{1 - \lambda}, \tag{16}$$

其中，$\mathrm{Lip}^{\mathrm{e}}(\mathscr{G})$ 的定义与此类似，只是使用 $AM$ 上的黎曼度量。

对于所有满足 $a > -\epsilon_0$ 和 $\rho \in$的 $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$ $\widehat{\ }$ $M$，我们将带全纯的传递算子归一化为

$$\mathcal{M}_{\xi,\rho} = m_{\lambda_a h_a}^{-1} \circ \mathcal{M}_{(\delta+\xi)\mathscr{R},\rho} \circ m_{h_a}$$

其中 $m_h : C\big(\Lambda_+, V^{\oplus \dim(\rho)}\big) \to C\big(\Lambda_+, V^{\oplus \dim(\rho)}\big)$表示由 $h \in C(\Lambda_+, \mathbb{R})$ 定义的乘法算子。对所有 $k \in \mathbb{N}$，其第 $k$ 次迭代可简单表示为

$$\mathcal{M}^k_{\xi,\rho}(H)(x) = \sum_{\gamma \in \mathcal{H}^k} e^{\mathscr{F}^{(a)}_k(\gamma x)} \rho_b(\mathscr{G}^k(\gamma x)^{-1}) H(\gamma x)$$

对所有 $x \in \Lambda_+$ 和 $H \in C\big(\Lambda_+, V^{\oplus \dim(\rho)}\big)$均成立。记 $\mathcal{L}_\xi := \mathcal{M}_{\xi,\,1}$。由于上述归一化，它满足 $\mathcal{L}_0^*(\nu) = \nu$。

## 5. Local non-integrability condition

本节将确立第一个关键性质，称为局部非可积条件（*LNIC*）。

令 $\Gamma_{\mathrm{b}} < \Gamma$ 为由 $\{\gamma^{-1} \in \Gamma : \gamma \in \mathcal{H}\}$生成的子半群。令 $\Lambda_{\mathrm{b}} \subset \Lambda_\Gamma \subset \partial\mathbb{H}^{d+1}$ 为 $\Gamma_{\mathrm{b}}$的极限集。回顾在[LP22]中确立的以下结果。

**引理 5.1** ([LP22，引理 6。62])。 极限集 $\Lambda_{\mathrm{b}}$ 不包含于 $\partial\mathbb{H}^{d+1} = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$中的任何广义球面。

**引理 5.2** ([LP22，引理 6。64])。 设 $\xi \in \Lambda_{\mathrm{b}}$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $n_\xi \in \mathbb{N}$使得对所有 $n \geq n_\xi$，都存在 $\gamma \in \mathcal{H}^n$ 满足

$$d_{\mathbb{S}^d}(\gamma^{-1}\infty, \xi) \leq \epsilon.$$

注记 5.3. 由引理 3.2 可知 $\Lambda_{\mathrm{b}} \subset \Lambda_{-}$。此外， $\gamma \in \mathcal{H}$ 的构造表明 $\infty \in \Lambda_{\mathrm{b}}$ (见 [LP22，第 6]节)。

回顾小节 $x_0 \in \Lambda_+$ 中的参考点 3.3。我们首先给出一个类似于 [SW21 定义 6.1] 的定义，该定义受到了 Brin–Pesin 变换[BP74 的启发，Bri82]。

**定义 5.4** （关联标架序列）。 对于任意序列

$$((x_0, \infty), (x_0, y), (x, y), (x, \infty), (x_0, \infty)) \in (\Delta_0 \times \Lambda_-)^5 \tag{17}$$

我们定义一个唯一的 关联标架序列 $(g_1, g_2, \ldots, g_5) \in \mathrm{F}(\mathbb{H}^n)^5 \cong G^5$ b y

~$g_1 = F(x_0, \infty)$,$g_2 = \tilde{F}(x_0, y) \in g_1 N^-$ 使得 $g_2 M = \tilde{\Phi}(x_0, y, 0) \in \mathrm{T}^1(\mathbb{H}^n)$
$\cong G/M$， 使得 $g_3 a_t M = \tilde{\Phi}(x, y, 0) \in \mathrm{T}^1(\mathbb{H}^n) \cong G/M$ 对于某个 $t \in \mathbb{R}$,
$g_4 \in g_3 N^-$ 使得 $g_4 a_t M = \tilde{\Phi}(x, \infty, 0) \in \mathrm{T}^1(\mathbb{H}^n) \cong G/M$ 对于某个 $t \in \mathbb{R}$,
$g_5 \in g_4 N^+$ 使得 $g_5 a_t M = \tilde{\Phi}(x_0, \infty, 0) \in \mathrm{T}^1(\mathbb{H}^n) \cong G/M$ 对于某个 $t \in \mathbb{R}$.

我们继续使用上述定义中的记号。定义子集

$$N_1^+ = \{n^+ \in N^+ : F(x_0, \infty) n^+ \in F(\Delta_0 \times \{\infty\})\} \subset N^+,$$
$$N_1^- = \{n^- \in N^- : F(x_0, \infty) n^- \in F(\{x_0\} \times \Lambda_{\mathrm{b}})\} \subset N^-,$$

~其中前者是开集，后者是紧集。定义 $N_1^- \subset N^-$ 为 $N_1^-$的一个开邻域。现在，若式 (17) 中的序列对应于某个 $n^+ \in N_1^+$和 $n^- \in N_1^-$，使得 $F(x, \infty) = F(x_0, \infty) n^+$ 且 $F(x_0, y) = F(x_0, \infty) n^-$分别成立，则我们可以定义映射

$$\Xi : N_1^+ \times N_1^- \to AM$$
$$(n^+, n^-) \mapsto g_5^{-1} g_1.$$

为了在固定 $n^- \in N_1^-$时将其视为仅依赖于第一个自变量的函数，我们记作$\Xi_{n^-}$: $N_1^+ \to AM$。

现在我们将其与广义全纯 $\mathcal{G}$ 和 LNIC 联系起来。根据定义并应用引理 3.2，对所有 $\gamma \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^n$，存在 $n_\gamma \in N_1^-$使得

$$F(x_0, \gamma^{-1}(\infty)) = F(x_0, \infty) n_\gamma.$$

我们希望证明，广义全纯 $\mathcal{G}$ 在某种适当意义下快速振荡。首先，我们通过如下方式将其与映射 $\Xi$ 及相关的李理论联系起来。

**引理 5.5.** 设 $\gamma \in \mathcal{H}^n$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n^- = n_\gamma \in N_1^-$。设 $x \in \Delta_0$ 和 $n^+ \in N_1^+$ 满足 $F(x, \infty) = F(x_0, \infty) n^+$。那么，我们有

$$\Xi(n^+, n^-) = \mathcal{G}^n(\gamma(x_0), \infty)^{-1} \mathcal{G}^n(\gamma(x), \infty).$$

此引理与 [SW21，引理 62] 类似，且可以用类似的方法证明。

令 $\pi\colon\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{m}$ 为相对于分解$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}^{+}\oplus\mathfrak{n}^{-}$的投影映射。以下引理可完全按照 [SW21中的引理 6 证明。3]。

**引理 5.6**。对于所有 $n^{-}\in N_1^{-}$，我们有

$$(d\Xi_{n^{-}})_e=\pi\circ\mathrm{Ad}_{n^{-}}|_{\mathfrak{n}^{+}}\circ(dh_{n^{-}})_e$$

其中 $h_{n^{-}}\colon\ N_1^{+}\to N^{+}$ 是到其像上的一个微分同胚，在 $n^{-}\in\tilde{N}_1^{-}$上也光滑，并满足 $h_e=\mathrm{Id}^{N_1^{+}}$。因此，其像为 $(d\Xi_{n^{-}})_e(\mathfrak{n}^{+})\ =\pi(\mathrm{Ad}_{n^{-}}(\mathfrak{n}^{+}))\subset\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{m}$。

以下引理也可按照 [SW21中的引理 64] 证明，使用引理 5.1，该引理取代了整个极限集 $\Lambda_\Gamma$ 不包含于 $\partial\mathbb{H}^{d+1}=\mathbb{R}^d\cup\{\infty\}$中的任何广义球这一事实。

**引理 5.7**。存在 $n_1^{-},n_2^{-},\dots,n_{j_0}^{-}\in N_1^{-}$，对某些 $j_0\in\mathbb{N}$ 和 $\epsilon>0$，使得如果 $\eta_1^{-}$，$\eta_2^{-},\dots,\eta_{j_0}^{-}\in N_1^{-}$ 满足 $d_{N^{-}}(\eta_j^{-},n_j^{-})\le\epsilon$ 对所有 $1\le j\le j_0$ 成立，则

$$\sum_{j=1}^{j_0}\pi\big(\mathrm{Ad}_{\eta_j^{-}}(\mathfrak{n}^{+})\big)=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{m}.$$

现在可以陈述适用于我们所处情形的 LNIC。给定任意一对逆分支 $\alpha,\ \beta\in\mathcal{H}^m$ 对某个 $m\in\mathbb{N}$，定义映射 $\mathrm{BP}_{\alpha,\ \beta}\colon\ \Delta_0\times\Delta_0\to AM$ 为

$$\mathrm{BP}_{\alpha,\beta}(x,y)=\mathcal{G}^m(\alpha x,\infty)^{-1}\mathcal{G}^m(\alpha y,\infty)\mathcal{G}^m(\beta y,\infty)^{-1}\mathcal{G}^m(\beta x,\infty)$$

对所有 $x,\ y\in\Delta_0$。

**命题 5.8**（LNIC）。存在 $\epsilon\in(0,1)$、$m_0\in\mathbb{N}$、$j_0\in\mathbb{N}$，使得对所有 $m\ge m_0$，存在 $\{\alpha_j\}_{j=0}^{j_0}\subset\mathcal{H}^m$，使得对所有 $x\in\Delta_0$ 和 $\omega\in\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{m}$，若满足 $\|\omega\|=1$，则存在 $1\le j\le j_0$ 和 $Z\in\mathrm{T}x\ (\Delta_0)$，满足 $\|Z\|=1$，使得

$$|\langle(d\,\mathrm{BP}_{j,x})_x(Z),\omega\rangle|\ge\epsilon$$

其中，我们将 $\mathrm{BP}j:=\mathrm{BP}_{\alpha_0,\alpha_j}$ 和 $\mathrm{BP}_{j,x}:=\mathrm{BP}j(x,\cdot)$ 记为，对所有 $x\in\Delta_0$ 和 $1\le j\le j_0$均成立。

命题 5.8 将由命题 5.9推出。

**命题 5.9.** 存在 $\epsilon\in(0,1)$、$m_0\in\mathbb{N}$、$j_0\in\mathbb{N}$，以及 $x_0$ 的一个开邻域$U\subset\Delta_0$，使得对所有 $m\ge m_0$，均存在 $\{\alpha_j\}_{j=0}^{j_0}\subset\mathcal{H}^m$，使得对所有满足 $\|\omega\|=1$的 $x\in U$ 和 $\omega\in\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{m}$，均存在 $1\le j\le j_0$ 和 $Z\in\mathrm{T}x(U)$，满足$\|Z\|=1$，使得

$$|\langle(d\,\mathrm{BP}_{j,x})_x(Z),\omega\rangle|\ge\epsilon$$

使用与命题 5.9中相同的记号。

命题 5.9 可仿照 [SW21中的命题 6 证明。5] 只需对引理5.6和 5.7 作少量记号上的调整即可。还需要引理 5.2 来替代马尔可夫截面的拓扑混合性质。

我们需要下面这个引理。

**引理 5.10**。设 $U\subset\Delta_0$ 是一个满足 $U\cap\Lambda_\Gamma\neq\varnothing$ 的开子集。存在$m_0\in\mathbb{N}$，使得对所有整数 $m\ge m_0$，都存在 $\gamma\in\mathcal{H}^m$，使得 $\gamma\Delta_0\subset U$。

证明。设 $U \subset \Delta_0$ 是一个满足 $U \cap \Lambda_\Gamma \neq \varnothing$ 的开子集。设 $x \in U \cap \Lambda_\Gamma$ 和 $\epsilon > 0$ 满足 $B(x, 2\epsilon) \subset U$。注意到 $\mu(B(x,\epsilon)) > 0$。固定 $m_0 \in \mathbb{N}$，使得$\lambda^{m_0}\mathrm{diam}(\Delta_0) < \epsilon$。设 $m \geq m_0$ 为一个整数。由于对任意 $n \in \mathbb{N}$，$\mu(\Delta_0) = \sum_{\gamma\in\mathcal{H}^n} \mu(\gamma\Delta_0)$，因此存在 $\gamma \in \mathcal{H}^m$，使得 $B(x,\epsilon) \cap \gamma\Delta_0 \neq \varnothing$。由命题 3.1 中的性质（3），我们还有 $\mathrm{diam}(\gamma\Delta_0) \leq \lambda^m \mathrm{diam}(\Delta_0) \leq \lambda^{m_0}\mathrm{diam}(\Delta_0) < \epsilon$，因此 $\gamma\Delta_0 \subset B(x, 2\epsilon) \subset U$。■

证明命题 5.9 蕴含命题 5.8。令 $\tilde{\epsilon}$、$\tilde{m}_0$、$j_0$ 和 $U$ 为命题 5.9 中的 $\epsilon$、$m_0$、$j_0$ 和 $U$。根据引理 5.10，我们可以固定某个 $\gamma \in \mathcal{H}^n$，使得对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $\gamma\Delta_0 \subset U$。固定 $\epsilon \in (0, \tilde{\epsilon} \cdot \inf\{\|(d\gamma)_x\| : x \in \Delta_0\})$；由命题 3.1 中的性质 (4)，这是可行的。固定 $m_0 = \tilde{m}_0 + n$。令 $m \geq m_0$ 为一个整数。令 $\tilde{m} = m - n \geq \tilde{m}_0$。令 $\{\tilde{\alpha}_j\}_{j=0}^{j_0}$ 为命题 5.9 所给出的逆分支，并令 $\{\alpha_j\}_{j=0}^{j_0} = \{\tilde{\alpha}_j\gamma\}_{j=0}^{j_0}$。记 $\widetilde{\mathrm{BP}}_j := \mathrm{BP}_{\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_j}$ 和 $\mathrm{BP}_j := \mathrm{BP}_{\alpha_0,\alpha_j}$。将由 $g \in G$ 给出的共轭映射记为 $C_g : G \to G$。对于所有 $1 \leq j \leq j_0$，利用定义以及群 $A$ 与群 $AM$ 彼此交换这一事实，我们计算得

$$\mathrm{BP}_j(x, x') = C_{\mathscr{H}^n(\gamma x,\infty)^{-1}}(\widetilde{\mathrm{BP}}_j(\gamma x, \gamma x')) \qquad \text{for all } x, x' \in \Delta_0,$$

因此，对其取微分可得

$$(d\,\mathrm{BP}_{j,x})_x = \mathrm{Ad}_{\mathscr{H}^n(\gamma x,\infty)^{-1}} \circ (d\widetilde{\mathrm{BP}}_{j,\gamma x})_{\gamma x} \circ (d\gamma)_x \qquad \text{for all } x \in \Delta_0.$$

设 $x \in \Delta_0$ 和 $\omega \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$ 满足 $\|\omega\| = 1$，并取 $\tilde{\omega} = \mathrm{Ad}^*_{\mathscr{H}^n(\gamma x,\infty)^{-1}}(\omega)$。注意到我们仍有 $\|\tilde{\omega}\| = 1$，因为 $\mathfrak{g}$ 上的内积是左 $\mathrm{Ad}_K$-不变的。利用 $\tilde{x} := \gamma x \in \gamma\Delta_0 \subset U$ 和命题 5.9，存在 $1 \leq \tilde{j} \leq j_0$ 和 $Z \in \mathrm{T}_{\tilde{x}}(U)\tilde{}$，满足 $\|Z\| = 1$，使得

$$|\langle (d\widetilde{\mathrm{BP}}_{\tilde{j},\tilde{x}})_{\tilde{x}}(\tilde{Z}), \tilde{\omega}\rangle| \geq \tilde{\epsilon}.$$

因此，取 $j = \tilde{j}$ 和 $Z = \frac{(dT^n)_{\tilde{x}}(Z)}{\|(dT^n)_{\tilde{x}}(\tilde{Z})\|}$，我们计算得到

$$\begin{aligned}
|\langle (d\,\mathrm{BP}_{j,x})_x(Z), \omega\rangle| &= |\langle (d\widetilde{\mathrm{BP}}_{j,\gamma x})_{\gamma x}((d\gamma)_x(Z)), \mathrm{Ad}^*_{\mathscr{H}^n(\gamma x,\infty)^{-1}}(\omega)\rangle| \\
&= \|(d\gamma)_x(Z)\| \cdot |\langle (d\widetilde{\mathrm{BP}}_{\tilde{j},\tilde{x}})_{\tilde{x}}(\tilde{Z}), \tilde{\omega}\rangle| \\
&\geq \tilde{\epsilon} \cdot \inf\{\|(d\gamma)_x\| : x \in \Delta_0\} > \epsilon.
\end{aligned}$$

■

固定 $\varepsilon_2 \in (0,1)$，$m_0 \in \mathbb{N}$和 $j_0 \in \mathbb{N}$ 作为本文余下部分中由命题 $\epsilon$、$m_0$和 $j_0$ 所给出的5.8 。

我们以一个近似引理结束本节，该引理将在第 8节中使用。固定 $\delta_{AM} > 0$，使得 $B_{AM}(e, \delta_{AM}) \subset AM$中的任意一对点都存在一条经过它们的唯一测地线。固定一个常数 $C_{\mathrm{BP}} > 0$ 使得

$$C_{\mathrm{BP}} \geq \sup\{\|(d\,\mathrm{BP}_{j,x})_y\|_{\mathrm{op}} : x, y \in \Delta_0, j \in \{1, 2, \ldots, j_0\}\}$$

对任意 $m \geq m_0$ 以及相应的映射 $\{\mathrm{BP}_j\}_{j=1}^{j_0}$ 由命题 5.8给出。根据命题 5.8 和5.9 的证明（见 [SW21，命题 6。5], 特别是，[SW21，式 (6)]）可知，$C_{\mathrm{BP}}$ 可以选取得与逆分支及命题 5.8所给出的逆分支长度无关。引理 5.11可按照 [SW21，引理 71] 来证明。

**引理 5.11**。设 $m \geq m_0$ 和 $\{\mathrm{BP}_j\}_{j=1}^{j_0}$ 为命题 5.8 给出的相应映射。那么，存在 $C_{\exp,\mathrm{BP}} > 0$ 使得对于所有 $1 \leq j \leq j_0$ 和 $x, y \in \Delta_0$，若满足 $\|x-y\| < \frac{\delta_{AM}}{C_{\mathrm{BP}}}$，则有

$$d_{AM}(\exp(Z), \mathrm{BP}_j(x,y)) \leq C_{\exp,\mathrm{BP}} \|x-y\|^2$$

其中 $Z = (d\mathrm{BP}_{j,\,x})_x (y-x)$。

## 6. Non-concentration property

本节将建立第二个关键性质，即非集中性质（*NCP*）。主要结果命题 6.1是对 [SW21，命题 6 的适当推广，适用于6] 带尖点的几何有限双曲流形。

我们先介绍一些记号。回顾第 $v_o \in \mathrm{T}^1(\mathbb{H}^{d+1})$ 小节 2.1中参考向量的选取。通过这一选取，$a_t$ 在 $\mathbb{H}^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 上的作用就是对所有 $e^{-t}$ 按因子进行缩放。我们将不稳定 horosphere 子群参数化为 $t \in \mathbb{R}$。

$$N^+ = \{n_x^+ : x \in \mathbb{R}^d\}$$

因此，对于所有 $x \in \mathbb{R}^d$，都有正向端点 $(n_x^+)^+ = x$。定义映射 $u_\bullet : \Delta_0 \to \mathrm{T}^1(X)$，即对所有 $x \in \Delta_0$，令 $u_x = \pi \circ \tilde{\Phi}(x, \infty, 0)$，其中 $\tilde{\Phi}$ 是如公式（11）所定义的嵌入，而 $\pi$ 是从 $\partial^2(\mathbb{H}^{d+1}) \times \mathbb{R} \cong \mathrm{T}^1(\mathbb{H}^{d+1})$ 到 $\mathrm{T}^1(X)$ 的投影。注意，此时 $u_{\Delta_0}$ 是对应于 $\Delta_0 \times \{\infty\} \times \{0\}$ 的 horosphere 子集的浸入。回顾公式（9），我们定义紧区域

$$\Omega_R \subset \mathrm{T}^1(X) \tag{18}$$

为 $u_{\Delta_0}$ 的闭 $(R + \log(C_{\Delta_0}))$-邻域。

**命题 6.1** (NCP)。设 $R > 0$。存在 $\eta \in (0,1)$，使得对于所有 $\epsilon \in (0,1)$，$x \in \Lambda_\Gamma \cap \Delta_0 - B(\partial\Delta_0, \epsilon)$ 满足 $\overline{u_x a_{-\log(\epsilon)}} \in \Omega_R$，且 $w \in \mathbb{R}^d$ 满足 $\|w\| = 1$，都存在 $y \in \Lambda_\Gamma \cap B(x, \epsilon) \subset \Delta_0$，使得 $|\langle y - x, w\rangle| \geq \epsilon\eta$。

证明。为导出矛盾，假设该命题不成立。则存在 $R > 0$，使得对于所有 $j \in \mathbb{N}$，取 $\eta_j = \frac{1}{j}$ 后，存在 $\epsilon_j \in (0,1), x_j \in \Lambda_\Gamma \cap \Delta_0 - B(\partial\Delta_0, \epsilon_j)$，满足 $u_{x_j} a_{-\log(\epsilon_j)} \in \Omega_R$，且 $w_j \in \mathbb{R}^d$ 满足 $\|w_j\| = 1$，使得对于所有 $y \in \Lambda_\Gamma \cap B(x_j, \epsilon_j)$，$|\langle y - x_j, w_j\rangle| \leq \epsilon_j \eta_j = \frac{\epsilon_j}{j}$ 均成立。因此，我们可以将其改写为

$$\Lambda_\Gamma \cap B(x_j, \epsilon_j) \subset \left\{ y \in \mathbb{R}^d : |\langle y - x_j, w_j\rangle| \leq \frac{\epsilon_j}{j} \right\} \qquad \text{for all } j \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

我们希望利用分形集 $\Lambda_\Gamma$ 的自相似性。我们有 $\Gamma n_{x_j}^+ M = u_{x_j} \in u_{\Delta_0}$。对于所有 $j \in \mathbb{N}$，令 $t_j = -\log(\epsilon_j)$，我们有 $\Gamma n_{x_j}^+ a_{t_j} M = \sim u_{x_j} a_{t_j} \in \Omega_R$，根据假设，因此 $n_{x_j}^+ a_{t_j} \in \Gamma\Omega_R$，其中 $\Omega_R$ 是 $\Omega_R$ 的某个 $M$-不变提升，我们注意到它是紧集。因此，对于所有 $j \in \mathbb{N}$，存在 $\beta_j \in \Gamma$ 和 $g_j \in \tilde{\Omega}_R$，使得 $n_{x_j}^+ a_{t_j} = \beta_j g_j$。现在对于所有 $j \in \mathbb{N}$，我们有 $g_j a_{-t_j} n_{-x_j}^+ = \beta_j^{-1}$。因此，$g_j a_{-t_j} n_{-x_j}^+$ 在 $\partial_\infty(\mathbb{H}^{d+1})$ 上的作用保持 $\Lambda_\Gamma$。

现在，代入 $g_j a_{-t_j} n_{-x_j}^+$ 式（19）得

$$\Lambda_\Gamma \cap g_j B(0,1) \subset g_j \left\{ y \in \mathbb{R}^d : |\langle y, w_j\rangle| \leq \frac{1}{j} \right\} \qquad \text{for all } j \in \mathbb{N}.$$

由紧致性，可取子列使得 $\lim_{j\to\infty} w_j = w \in \mathbb{R}^{d\tilde{}}$其中 $\|w\| = 1$ 且 $\lim_{j\to\infty} g_j = g \in \Omega_{R^\circ}$ 于是取极限后 $j \to \infty$，有$\Lambda_\Gamma \cap gB(0, 1) \subset g\{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, w\rangle = 0\}$。这与 [Win15，命题312]矛盾，因为 $\Gamma < G$ 是扎里斯基稠密的。■

还可以根据尖点结构（见第2.3小节）以及 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$ 的几何性质推出：当且仅当所有尖点都具有最大秩时，不带有关于紧子集 Ω 的条件的 NCP 成立$_R \subset \mathrm{T}^1(X)$（参见 [DFSU21，定理 315] 及其证明）。也就是说，存在非最大秩尖点时，关于紧子集 Ω 的条件$_R \subset \mathrm{T}^1(X)$ 是必要的。本节最后给出一个例子，进一步阐明 [DFSU21，定理 315] 之后的评论，从而展示后一结论。由此可见，难点在于，在 Dolgopyat 方法中，我们无法在划分的每个 集合上都获得抵消$\mathcal{P}_{(b,\rho)}$ （见 $\Delta_0$ 引理 8.5 和命题 8.8）。

**例 6.2**。 设 $\Gamma < G$ 是一个带有抛扑元素的几何有限子群，且 $p \in \partial\mathbb{H}^{d+1} - \{\infty\}$ 是 Γ在 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$上的作用的一个秩 1 抛物不动点。设 $g \in G$ 是满足 $gp = \infty$的元素。定义 $\tilde{\Gamma} = g\Gamma g^{-1} < G$，其同构于 Γ。则， $\infty \in \partial\mathbb{H}^{d+1}$ 是 $\tilde{\Gamma}$在 $\partial\mathbb{H}^{d+1}$上的作用的一个秩 1 抛物不动点。回顾第2.3 小节及其中的记号，我们有相应的基本域 $\Delta_\infty := B_Y(C_\infty) \times \Delta'_{\infty^\circ}$

设 $\Delta_Y \subset Y \subset \mathbb{R}^d$ 是一个包含$d-1$的开（$B_Y(C_\infty)$ 维平行多胞体。根据式（3），我们有

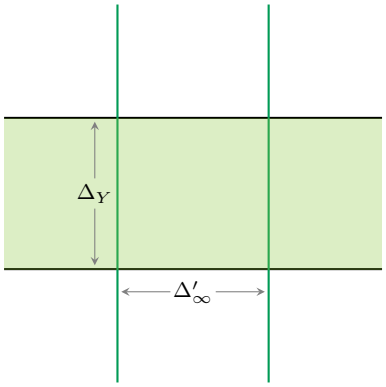
$$\Lambda_{\tilde{\Gamma}} - \{\infty\} \subset \bigcup_{\gamma\in\tilde{\Gamma}_\infty} \gamma\left(\overline{\Delta_Y \times \Delta'_\infty}\right),$$

˜其中 $\Gamma_\infty <$Stabr̃$(\infty)$ 是引理 2.1 所给出的有限指数子群。令$\{F_{j,k} : j \in \{1, 2, \ldots, d\},\ k \in \{1, 2\}\}$ 为 $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ 中包含相应的 $\Delta_Y \times \Delta'_\infty$ 的（$d-1$）维广义仿射子空间的集合。该集合按如下方式排序：对于所有$j \in \{1, 2, \ldots, d\}$，$F_{j,\ 1}$ 与 $F_{j,\ 2}$ 平行，且$F_{d,\ 1}$与 $F_{d,\ 2}$均正交于 1 维子空间$Z \subset \mathbb{R}^d$。该广义仿射子空间集合确定了相应的集合$\{H_{j,k} : \ j \in \{1, 2, \ldots, d-1\},\ k \in \{1, 2\}\}$，即不包含 $\Lambda_{\tilde{\Gamma}}$ 的开半空间集合。

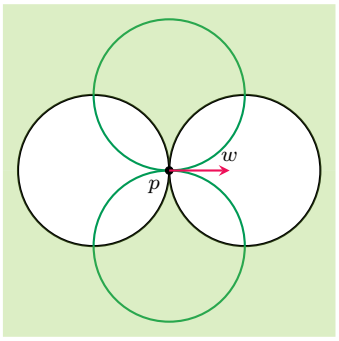
利用 $g^{-1}$，我们得出 $\{g^{-1}F_{j,k} : \ j \in \{1, 2, \ldots, d\},\ k \in \{1, 2\}\}$ 由（$d-1$）维球面组成，使得 $g^{-1}F_{j,\ 1}$和 $g^{-1}F_{j,\ 2}$在所有 $p$处彼此相切。此外，对于所有 $j \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$和 $k \in \{1, 2\}$，$g^{-1}F_{j,\ 1}$是开球 $g^{-1}H_{j,\ k}$的边界。事实上，我们有

$$\Lambda_\Gamma \subset \mathbb{R}^d \cup \{\infty\} - \bigcup_{\substack{j\in\{1,2,\ldots,d-1\},\\ k\in\{1,2\}}} g^{-1}H_{j,k}.$$

任取一个以 $p$ 为基点、且同时与 $g^{-1}F_{j,}$1 和 $g^{-1}F_{j,}$2 正交的单位向量 $w \in \mathbb{R}^d$，其中 $j \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$可任意选取。注意，此时 $w$ 自动与 $g^{-1}F_{d,}$1 和 $g^{-1}F_{d,}$2 相切。于是，SW21 命题 6.6] 中所述的 NCP 在 $p$ 处沿方向 $w$ 失效，也就是说，以下命题不成立：存在 $\eta \in (0, 1)$，使得对于所有 $\epsilon \in (0, 1)$，都存在 $y \in \Lambda_\Gamma \cap B(p, \epsilon)$，使得 $|\langle y - p, w\rangle| \geq \epsilon\eta$。




$\infty$ 是一个秩 1 抛物不动点




$p$ 是一个秩 1 抛物不动点

FIGURE 3. $\partial\mathbb{H}^3$中的秩 1 抛物不动点示意图。极限集包含于阴影区域中。

## 7. LARGE DEVIATION PROPERTY

本节将确立第三个关键性质，称为 大偏差性质（大偏差原理）。

回顾小节 $\mu$和 $\nu$ 中定义的测度 2.4 和 3.1，以及公式（6）。

对于所有 $t > 0$ 和 $R > 0$，我们将 $\Omega^\dagger(t, R)$ 定义为由满足以下条件的极大圆柱集 $\mathtt{C} \subset \Delta_0$ 组成的集合

$$e^{-R-t} \leq \operatorname{diam}(\mathtt{C}) \leq e^{R-t}.$$

定义

$$\Omega(t, R) = \bigcup_{\mathtt{C}\in\Omega^\dagger(t,R)} \mathtt{C} \subset \Delta_0.$$

下面给出 $\Omega(t, R) \subset \Delta_0$ 与式 (18) 中定义的紧子集 $\Omega_R \subset \mathrm{T}^1(X)$ 之间的关系。

**引理 7.1**。设 $t > 0$ 和 $R > 0$。对于所有 $x \in \Omega(t, R)$，有 $u_x a_t \in \Omega_R$。

为了证明引理 7.1，我们需要一个由引理 3.5得出的简要估计。

**引理 7.2**。设 $t > 0$ 和 $R > 0$。对于任意柱集 $\mathtt{C} \in \Omega^\dagger(t, R)$，记作 $\mathtt{C} = \gamma\Delta_0$，其中 $\gamma \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n$。我们有

$$C_{\Delta_0}^{-1} e^{-R-t} \leq \|d\gamma\| \leq C_{\Delta_0} e^{R-t}.$$

引理 7.1 的证明。设 $t > 0$ 和 $R > 0$。设 $x \in \Omega(t, R)$。取圆柱$\mathtt{C} = \gamma\Delta_0 \in \Omega^\dagger(t, R)$，它包含 $x$，并设 $n$ 为其长度。回忆

$$\mathscr{R}_n(x) = \log \|(dT^n)_x\| = -\log \|(d\gamma)_{x'}\|$$

其中 $x = \gamma x'$。利用引理 7.2 和式（7），可得

$$\mathscr{R}_n(x) \in [t - (R + \log(C_{\Delta_0})), t + (R + \log(C_{\Delta_0}))].$$

由于 $u_x a_{\mathscr{R}_n(x)} \in u_{\Delta_0}$，我们得到 $u_x a_t \in \Omega_R$。 ∎

以下命题即为所需的大偏差原理。我们将在小节7.2中证明它可由命题7.9得出。

**命题 7.3** (大偏差原理)。 存在 $R_0 > 0$ 和 $\kappa \in (0,1)$，使得以下结论成立。对所有 $m$、$n \in \mathbb{N}$ 和 $t > 0$，均有

$$\nu\{x \in \Lambda_+ : \#\{j \in \mathbb{N} : j \le n, T^{jm}(x) \in \Omega(t, R_0)\} < \kappa n\} \le e^{-\kappa n}.$$

这里的参数 $m$ 是步长。为简便起见，读者初读本节时可以取 $m = 1$。

命题 7.3 是经典大偏差原理的一个一致版本，因为它针对 $\Omega(t, R_0)$ 证明了一个速率为 $\kappa$ 的大偏差原理，而该速率对所有 $t > 0$都是一致的。其证明思路类似于独立同分布的抛硬币过程的大偏差原理证明（见 [DZ10，第 3.1] 节）。核心命题给出了这样的估计：在 $n$ 个事件中发生 $\ell$ 个指定坏事件的概率小于 $e^{-\epsilon\ell}$。然后，我们计算在 $n$ 个事件中发生 $\ell$ 个坏事件的方式数，并将相应概率求和。我们关注满足 $\ell \ge n - \kappa n$的 $\ell$，因此，只要将参数 $\kappa$取得足够小，就能得到所需的大偏差原理。命题 7.3 表明，我们需要研究 $T^{jm}(x)$ 是否属于 $\Omega(t, R_0)$；根据引理 7.1，这大致等价于研究测地射线 $\{u_{T^{jm}(x)}a_t \in \mathrm{T}^1(X) : t > 0\}$ 是否位于某个尖点中，这对应于我们动力系统的一个坏事件。困难之处在于，我们还需要将 $\ell$ 个坏事件进一步划分为若干连续坏事件的并集；从几何上看，这意味着测地轨迹 $u_x a_t$ 一直留在同一个尖点中，没有返回紧致部分。命题 7.9 给出了这类连续坏事件的估计。在陈述命题 7.9 之前，我们需要做一些准备。

7.1. **从尖点到剩余等待时间的界**。 我们先回顾一些常数和利普希茨界，它们将在本节余下部分频繁用到。由命题 3.1，对任意 $z$，$z' \in \Delta_0$ 和 $\gamma \in \mathcal{H}$，有

$$\|\gamma z - \gamma z'\| \le \lambda \|z - z'\| \tag{20}$$

并且（参见公式（41））， 对所有 $z$，$z' \in \Delta_0$，$l \in \mathbb{N}$，以及 $\gamma \in \mathcal{H}^l$，有

$$|\mathscr{R}_l(\gamma z) - \mathscr{R}_l(\gamma z')| \le C_2 \|z - z'\|, \tag{21}$$

回顾公式（16）中的常数。固定

$$\lambda_0 = \inf\{\mathscr{R}(x) : x \in \Delta_\sqcup\},$$
$$C_3 = \max\{C_2, C_2 \operatorname{diam}(\Delta_0) + |\log(\operatorname{diam}(\Delta_0))|\}.$$

**定义 7.4** （停止时间，剩余等待时间）。 对于所有 $(y,\ t) \in \Lambda_+ \times \mathbb{R}^+$，其停止时间 是唯一的 $l = l(y,\ t) \in \mathbb{N}$，满足 $\mathscr{R}_l(y) \le t < \mathscr{R}_{l+1}(y)$，其剩余等待时间 则是差值 $\mathscr{R}_{l+1}(y) - t$。

当对 $(y,\ t)$ 这一对没有歧义时，我们通常会写作 $l$ 以简化记号。

我们来说明这一概念的几何直观。主要估计之一——命题7.9，研究的是形如 $T^{im}x$ 的点 $y$。我们想考察点 $y$ 是否属于 $\Omega(t,\ R)$；根据引理 7.1，这大致等价于判断 $u_y a_t$ 是否位于某个尖点中。观察到，我们可以大致将 $u_y a_t$ 与 $u_{T^n y} a_{t - \mathscr{R}_n(y)}$ 视为相同：由编码的构造可知，$u_y a_{\mathscr{R}_n(y)}$ 与 $u_{T^n y}$ 保持正距离，且二者位于同一稳定叶上；因此，对于 $t \ge \mathscr{R}_n(y)$，$u_y a_t$ 与 $u_{T^n y} a_{t - \mathscr{R}_n(y)}$ 之间的距离是一致有界的。停止

时间 $l = l(y,\ t)$ 是满足 $t \geq \mathscr{R}_n(y)$ 的 $n$ 的最大可能值。剩余时间 $t - \mathscr{R}_l(y)$ 与下一次返回时间 $\mathscr{R}(T^l y)$ 共同告诉我们点 $u_y a_t$ 是否位于某个尖点中。下面的引理将这一观察定量化。示意图见 Fig.4 。

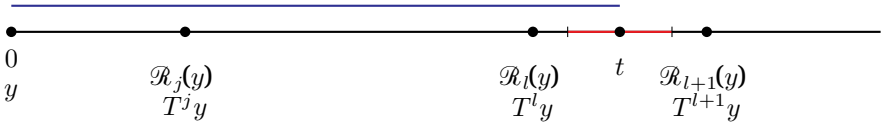



FIGURE 4. 这是一条时间轴。对于形如 $\mathscr{R}_j(y)$ 的时刻，我们在下方添加一个点 $T^j y$ ，它可以视为测地轨迹 $u_y a_{\mathscr{R}_j(y)} \approx u_{T^j y}$ 上的一个点。蓝色线段的长度为$t$。红色线段表示时间区间 $s$ ，其对应的点 $u_y a_s$ 位于尖 cusp 区域内。

**引理 7.5**。 对于所有 $y \notin \Omega(t, R)$、 $t > 0$ 和 $R > 2C_3$，我们有一个更强的不等式

$$\mathscr{R}_l(y) + (R - C_3) < t < \mathscr{R}_{l+1}(y) - (R - C_3).$$

证明。设 $y = \gamma_1 \cdots \gamma_l z \notin \Omega(t, R)$ 满足 $z \in \Delta_0$ 且 $\gamma_j \in \mathcal{H}$。令 $t > 0$，并且$R > 2C_3$。于是由等式 (21)，对于 $x \in \Delta_0$ ，有

$$\|(d\gamma_1 \cdots \gamma_l)_x\| = \exp(-\mathscr{R}_l(\gamma_1 \cdots \gamma_l x)) \in \exp(-\mathscr{R}_l(y))[e^{-C_2\|x-z\|}, e^{C_2\|x-z\|}].$$

因此，由引理 3.5

$$\operatorname{diam}(\gamma_1 \cdots \gamma_l \Delta_0) \in \exp(-\mathscr{R}_l(y))[e^{-C_3}, e^{C_3}].$$

由于 $y \notin \Omega(t, R)$，我们有

$$\operatorname{diam}(\gamma_1 \cdots \gamma_l \Delta_0) \notin \exp(-t)[e^{-R}, e^{R}].$$

因此，第二个区间不可能包含于第一个区间。根据停止时间的定义以及引理的假设，我们有$\mathscr{R}_l(y) + C_3 \leq t + R$。因此，

$$-\mathscr{R}_l(y) + C_3 > -t + R,$$

这意味着 $t > \mathscr{R}_l(y) + R - C_3$。另一方向的证明类似。 ■

给定两点 $T^i y, T^r y \notin \Omega(t, R)$，我们可以将 $u_{T^i y} a_t$ 和 $u_{T^r y} a_t$ 视为测地轨迹 $\{u_y a_s \in \mathrm{T}^1(X) : s > 0\}$ 上的点。我们引入以下定义，以判定它们是否位于同一个尖点。

**定义 7.6** (等价)。 设 $y \in \Lambda_+$、 $t > 0$ 和 $R > 0$。对于满足 $T^i y,\ T^r y \notin \Omega(t,\ R)$（其中某个 $i,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）的两点 $(T^i y,\ t)$ 和 $(T^r y,\ t)$，如果等价，则称它们等价，当且仅当

$$l(T^i y, t) + i = l(T^r y, t) + r,$$

并用 $[(T^i y, t)]$ 表示其等价类。另一种刻画方式是 $\mathscr{R}_{i+l_i}(y) < t + \mathscr{R}_r(y) < \mathscr{R}_{i+l_i+1}(y)$，其中 $l_i = l(T^i y, t)$（见图 5）。由此可推知，使 $(T^k y, t)$ 与 $(T^i x, t)$ 等价的 $k \in \mathbb{N}$ 构成一个区间，且该区间包含 $i$ 和 $r$。

**引理 7.7.** 设 $y \in \Lambda_+$、 $t > 0$ 和 $R > 2C_3$。若 $(T^i y, t)$ 与 $(T^r y, t)$ 在 $0 \le i \le r$ 下等价，则对于停止时间 $l = l(T^i y, t)$，剩余等待时间满足

$$\mathscr{R}_{l+1}(T^i y) - t > \frac{R}{2} + f\lambda_0,$$

其中 $f = r - i$。

证明。 假设引理的条件成立。将引理 7.5 应用于 $T^r y$，由于 $l + i = l(T^r y,\ t) + r$，我们有

$$\mathscr{R}_{l+1-(r-i)}(T^r y) - R > t - C_3.$$

这意味着

$$\mathscr{R}_{l+1}(T^i y) = \mathscr{R}_{l+1-(r-i)}(T^r y) + \mathscr{R}_{(r-i)}(T^i y) > t + (R - C_3) + (r-i)\lambda_0.$$

证明完毕。 ■

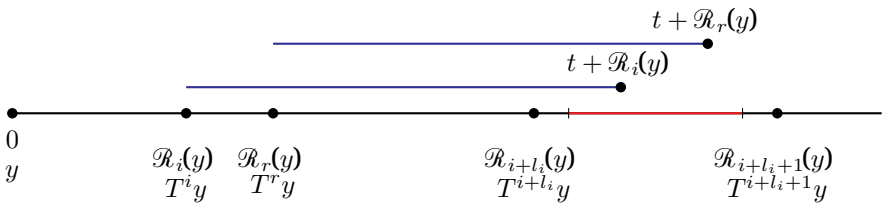



FIGURE 5. 点 $(T^i y, t)$ 和 $(T^r y, t)$ 等价。这里，$l_i = l(T^i y, t)$、 $l_r = l(T^r y, t)$，以及 $i + l_i = r + l_r$。蓝色线段的长度为 $t$。红色线段是时间区间 $s$，在此期间，相应的点 $u_y a_s$ 位于尖 cusp 区域内。

**7.2. 归约为组合词。** 设$\mathbf{n} := \{1, \dots, n\}$。词 $w$ 是$\mathbf{n}$的一个子集。设 $\ell(w)$为 $w$中元素的个数。对于一个词 $w$，我们将其划分为如下形式的（离散）子区间

$$w = \bigcup_{j=1}^{\boldsymbol{j}+1} I_j = \{i_1, \dots, r_1\} \cup \cdots \cup \{i_{\boldsymbol{j}+1}, \dots, r_{\boldsymbol{j}+1}\},$$

其中 $\boldsymbol{j}+1 \le n$，且对所有 $1 \le j \le \boldsymbol{j}$， $i_j \le r_j < i_{j+1}$；对所有 $1 \le j \le \boldsymbol{j}+1$， $I_j = \{i_j, i_j + 1, \dots, r_j\}$。这里， $\boldsymbol{j}+1$ 称为 $w$中的子区间数。记$I := \{I_j : 1 \le j \le \boldsymbol{j}+1\}$。我们用有序对（$w$， $I$）表示词 $w$ 及其划分。例如，若取 $n = 6$，则 $w = I_1 \cup I_2 = \{1,2\} \cup \{4,5,6\}$ 是$\mathbf{n} = \{1, \dots, 6\}$的一个词。我们将研究这种划分，以及像 $w = \{1,2\} \cup \{4,5\} \cup \{6\}$这样的划分，它们都是 $w$ 的划分。

**定义 7.8** （类型）。 设 $R > 0$。给定一个三元组 $(w,\ t,\ m)$，其中 $w \subset \mathbf{n}$、 $t > 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$，若点 $x \in \Lambda_+$ 的类型为 $(w,\ t,\ m)$，则

$$w = \{k \in \mathbf{n} : T^{km} x \notin \Omega(t, R)\}. \tag{22}$$

给定一个四元组（$w$，$I$，$t$，$m$），其中 $w \subset \mathbf{n}$，一个关于 $w$、 $t > 0$ 的划分 $I$，以及 $m \in \mathbb{N}$，点 $x \in \Lambda_+$ 的类型为（$w$，$I$，$t$，$m$），当且仅当 $x$ 的类型为（$w$，$t$，$m$）且划分 $I$

由 $w$ 中各点的等价类确定 $\{(T^{km}x,\ t):\ k\in w\}$根据定义 7.6，也就是说，对于所有 $1\le j\le \boldsymbol{j}+1$，存在 $k_j\in w$ 使得

$$I_j=\{k\in w:(T^{km}x,t)\in[(T^{k_jm}x,t)]\}.$$

对于每个四元组 $(w,I,t,m)$，我们利用尖点远离来估计类型为 $(w,I,t,m)$ 的 $x\in\Lambda_+$ 集合的测度。主要命题如下。

**命题 7.9.** 存在 $\epsilon>0$，使得对所有充分大的 $R>0$、$t>0$ 以及 $n$、$m\in\mathbb{N}$，以下结论成立。对于所有满足以下条件的四元组$(w,I,t,m)$：$w$ 是自然数集中的一个词，且 $I$ 是 $w$ 的一个划分，我们有

$$\nu\{x\in\Lambda_+:x\ \textit{is of type}\ (w,I,t,m)\}\le e^{-\epsilon((\boldsymbol{j}+1)R+\ell(w)-\boldsymbol{j}-1)}.$$

证明命题 7.9 蕴含命题 7.3。固定由命题 7.9 给出的 $\epsilon>0$。令 $R>0$、$\kappa\in(0,1)$、$t>0$ 和 $n$、$m\in\mathbb{N}$。根据定义 7.6，对于每个类型为 $(w,t,m)$ 的点 $x\in\Lambda_+$，都存在 $w$ 的一个划分 $I$，使得 $x$ 的类型为 $(w,I,t,m)$。对于每个词 $w$，将 $w$ 划分为 $k$ 个子区间的方法数小于 $\binom{\ell(w)}{k-1}$，其中 $k\le\ell(w)$。因此，由命题 7.9 可得，

$$\begin{aligned}\nu\{x\in\Lambda_+:x\text{ is of type }(w,t,m)\}&\le\sum_{k=1}^{\ell(w)}\binom{\ell(w)}{k-1}e^{-\epsilon(kR+\ell(w)-k)}\\&\le e^{-\epsilon\ell(w)}(1+e^{-\epsilon(R-1)})^{\ell(w)}.\end{aligned}$$

取足够大的 $R$（具体取值依赖于 $\epsilon$），我们得到

$$\nu\{x\in\Lambda_+:x\text{ is of type }(w,t,m)\}\le e^{-\epsilon\ell(w)/2}.\tag{23}$$

一个词 $w$ 称为 坏词，如果其长度满足 $\ell(w)\ge\lfloor(1-\kappa)n\rfloor$。对于每个坏词 $w$，我们有式（23）中的估计。为了得到命题 7.3中的大偏差估计，还需对所有坏词求和。坏词的数量可由二项式系数的有限和界定：对于任意 $\ell\le n$，我们有

$$\sum_{k=0}^{\ell}\binom{n}{k}\le\sum_{k=0}^{\ell}\frac{n^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\ell}\frac{\ell^k}{k!}\left(\frac{n}{\ell}\right)^k\le e^{\ell}\left(\frac{n}{\ell}\right)^{\ell}.$$

因此，取 $\ell=n-\lfloor(1-\kappa)n\rfloor$，我们得到

$$\sum_{k=\lfloor(1-\kappa)n\rfloor}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n-\lfloor(1-\kappa)n\rfloor}\binom{n}{k}\le e^{(\kappa+|\log\kappa|\kappa)n}.$$

结合式（23），我们得到

$$\begin{aligned}&\nu\{x\in\Lambda_+:\#\{1\le j\le n,\ T^{jm}x\notin\Omega(t,R)\}\ge(1-\kappa)n\}\\&\le e^{-\epsilon(1-\kappa)n/2}e^{(\kappa+|\log\kappa|\kappa)n}.\end{aligned}$$

取足够小的 $\kappa>0$ 即可完成证明。 ∎

本节余下部分的目标是证明命题 7.9。

7.3. **大剩余等待时间的测度估计**。回想一下，对于任意 $(x,t) \in \Lambda_+ \times \mathbb{R}^+$，我们将 $l = l(x,t)$ 记作满足条件 $\mathscr{R}_l(x) \le t < \mathscr{R}_{l+1}(x)$ 的 $(x,t)$ 的停止时间。差值 $\mathscr{R}_{l+1}(x) - t$ 称为剩余等待时间。

**命题 7.10**。存在 $\epsilon > 0$，使得对所有充分大的 $R > 0$ 以及 $t > R$，都有

$$\nu\{x \in \Lambda_+ : \mathscr{R}_{l+1}(x) - t > R\} \le e^{-\epsilon R}.$$

上述命题的证明将在小节 7.5 中给出。下面给出指数尾性质的一个直接推论（见命题 3.1 中的性质（5））。

**命题 7.11**。存在 $\epsilon > 0$，使得对所有充分大的 $R > 0$，都有

$$\nu\{x \in \Lambda_+ : \mathscr{R}(x) > R\} \le e^{-\epsilon R}.$$

证明。由切比雪夫不等式

$$\nu\{x \in \Lambda_+ : \mathscr{R}(x) > R\} \le e^{-\epsilon_0 R} \int_{\Lambda_+} e^{\epsilon_0 \mathscr{R}(x)}\, d\nu(x) \qquad \text{for all } R > 0.$$

取充分大的 $R$ 即可完成证明。 ■

**命题 7.12**。存在 $\epsilon > 0$，使得对于所有充分大的 $R > 0$、$i \in \mathbb{N}$ 和 $t > 0$，我们有

$$\nu\{x \in \Lambda_+ : \mathscr{R}_{l+1}(T^i x) - t > R\} \le e^{-\epsilon R},$$

其中 $l = l(T^i x, t)$ 是 $(T^i x, t)$ 的停止时间。

证明。由于测度 $\nu$ 具有 $T$-不变性，我们只需考虑$i = 0$的情形。

我们分两种情况讨论：当时间 $t$ 较大时，使用命题7.10；当时间 $t$ 较小时，使用命题 7.11。固定 $\epsilon > 0$ 为这些命题所给出的 $\epsilon$中的最小值，并取 $R > 0$ 充分大，使两个比例关系都成立。

如果 $t > R$，我们可以应用命题 7.10 得到所需的界。

否则 $t \le R$。注意，若 $t \ge \mathscr{R}_l(x)$ 且 $\mathscr{R}_{l+1}(x) - t > R$，则 $\mathscr{R}(T^{l+1}x) > R$。对于固定的 $l$，我们可以利用命题 7.11 以及 $T$-不变性，得到 $\nu$：

$$\nu\{x \in \Lambda_+ : \mathscr{R}(T^{l+1}x) > R\} = \nu\{x \in \Lambda_+ : \mathscr{R}(x) > R\} \le e^{-\epsilon R}. \tag{24}$$

由于$\{\mathscr{R}(y)\colon\ y \in \Lambda_+\} > \lambda_0$ 和 $R \ge t \ge \mathscr{R}_l(x)$，此类 $l$ 可能的选择数量不超过 $R$。结合式（24），可得

$$\nu\{x \in \Lambda_+ : \mathscr{R}_{l+1}(x) - t > R\} \le Re^{-\epsilon R} \le e^{-\epsilon R/2}$$

调整 $\epsilon$ 后，证明即告完成。 ■

**推论 7.13** (单次尖点偏离)。存在 $\epsilon > 0$，使得对所有充分大的 $R > 0$，$t > 0$，以及 $n$、$m \in \mathbb{N}$，均有

$$\nu\{x \in \Lambda_+ : (x,t) \text{ and } (T^{nm}x, t) \text{ are equivalent}\} \le e^{-\epsilon(nm\lambda_0 + R)}.$$

证明。令 $R$，$t$，$n$，以及 $m$ 如推论中所述。令 $x \in \Lambda_+$。根据引理 7.7，若（$x$，$t$）与（$T^{nm}x$，$t$）等价，则可得

$$\mathscr{R}_{l+1}(x) - t > \frac{R}{2} + (nm - 0)\lambda_0.$$

我们通过使用命题7.12完成证明。 ■

7.4. **条件概率**。 我们从命题7.9得到多次尖点游走的估计7.12 的方式，受到条件概率语言的启发。

给定任意 $n$， $m \in \mathbb{N}$和 $t > 0$，我们考虑四元组 $(w,\ I,\ t,\ m)$，其中 $w$是 $\mathbf{n}$ 中的一个词，且 $I = \{I_j :\ 1 \le j \le \boldsymbol{j}+1\}$ 是 $w$的一个划分：

$$w = \bigcup_{j=1}^{\boldsymbol{j}+1} I_j = \{i_1, \dots, r_1\} \cup \cdots \cup \{i_{\boldsymbol{j}+1}, \dots, r_{\boldsymbol{j}+1}\}$$

对于 $i_j \le r_j < i_{j+1}$ 所有 $1 \le j \le \boldsymbol{j}$。命题7.9 的证明将对区间数 $\boldsymbol{j}+1$使用归纳法。

给定一个类型为 $(w,\ I,\ t,\ m)$ 的点 $x \in \Lambda_+$，令 $l_j := l(T^{i_j m}x,\ t)$ 为 $(T^{i_j m}x,\ t)$ 的停止时间。对于每个 $1 \le j \le \boldsymbol{j}$，由于 $(T^{i_j m}x,\ t)$ 和 $(T^{i_{j+1} m}x,\ t)$ 不等价，我们有

$$l_j + i_j m < l_{j+1} + i_{j+1} m. \tag{25}$$

对于每个 $1 \le j \le \boldsymbol{j}+1$ 以及所有 $i \in I_j$，点 $(T^{im}x,\ t)$ 都等价。因此，当 $\boldsymbol{j}+1 = 1$时，命题 7.9 就是推论 7.13。

为说明命题 7.9 的证明思路，我们描述该命题中的概率模型以供比较。对 $(\Lambda_+, \nu)$ 而言，它是一个概率空间。若对所有 $i \in I_j$，$T^{im}x$ 和 $t$ 都等价（定义 7.6），则第 $j$ 个事件在点 $x$ 发生，当且仅当对所有 $i \in I_j$，$T^{im}x \notin \Omega(t, R)$。我们的模型的区别在于，所有 $\boldsymbol{j}+1$ 个事件在点 $x \in \Lambda_+$ 发生的定义要求 $x$ 满足 $1 \le j \le \boldsymbol{j}+1$ 的所有第 $j$ 个事件；此外，对于不同区间 $I_j$ 中的 $i$，$(T^{im}x, t)$ 不等价。

为了进行归纳法，我们引入以下定义，它提取了我们所需的全部信息，这些信息来自 $x$类型为 $(w,\ I,\ t,\ m)$ 的对象。这个定义比定义7.6更弱，因此有助于进行归纳法。

**定义 7.14**。 给定 $i,\ f,\ m \in \mathbb{N}$、 $R > 0$ 和 $t > 0$，如果停止时间 $l = l(T^{im}x,\ t)$ 满足，则称 $x \in \Lambda_+$ 满足（$i,\ t,\ m,\ R,\ f$）

$$\mathscr{R}_l(T^{im}x) + R \le t < \mathscr{R}_{l+1}(T^{im}x) - (R + mf\lambda_0). \tag{26}$$

给定任意 $x \in \Lambda_+$，我们知道扩张映射 $T^n$ 对任意$n \in \mathbb{N}$都在 $x$ 处有定义，并且对某个 $\gamma \in \mathcal{H}^n$而言具有 $T^n x = \gamma^{-1}x$ 的形式。我们称元素 $\gamma$ 为 $x$ 的长度为 $n$的逆分支。

**引理 7.15**。给定 $i$、$f$、$m \in \mathbb{N}$、 $R \ge C_3$和 $t > 0$，假设 $x \in \Lambda_+$满足（$i$、$t$、$m$、$R$、$f$）。令 $l$为（$T^{im}x$、$t$）的停止时间。取 $x$ 的长度为 $k \ge im + l + 1$的逆分支 $\gamma$。那么，对于所有 $y \in \gamma\Delta_0$，停止时间 $l(T^{im}y$、$t) = l(T^{im}x$、$t)$。此外，点 $y$ 满足（$i$、 $t$、 $mR - C_3\lambda^{k-(im+l+1)}$、 $f$）。

证明。 假设引理的条件成立。取 $l = l(T^{im}x,\ t)$。由于 $\gamma$是 $x$ 长度为 $k$的逆分支，因此我们可以写成 $x = \gamma z,\quad y = \gamma z'$。由式（20）和（21），可得

$$\begin{aligned} |\mathscr{R}_l(T^{im}y) - \mathscr{R}_l(T^{im}x)| &= |\mathscr{R}_l(T^{im}(\gamma z)) - \mathscr{R}_l(T^{im}(\gamma z'))| \\ &\le C_2 \|T^{im+l}(\gamma z) - T^{im+l}(\gamma z')\| \le C_3\lambda^{k-(im+l)}. \end{aligned}$$

同样，

$$|\mathscr{R}_{l+1}(T^{im}y) - \mathscr{R}_{l+1}(T^{im}x)| \le C_3\lambda^{k-(im+l+1)}.$$

注意到停止时间 $l(T^{im}x,t)$ 的方程 (26)，我们有 $y$ 满足将 26 代入 $R$ 后的方程 ( $R - C_3\lambda^{k-(im+l+1)}$)，这自动意味着$l(T^{im}x,t) = l(T^{im}y,t)$。■

命题 7.9 的证明。设 $R$， $t$， $n$，以及 $m$ 如命题所述。取一个 y 四元组 $(w,\ I,\ t,\ m)$。我们对 $I$ 的区间个数 $\boldsymbol{j}+1$ 进行归纳。

对于 $\boldsymbol{j}+1=1$，这正是推论 7.13。常数 $\lambda_0$ 被吸收到 $\epsilon$中，并注意到 $\ell(w)$ $=\sum_{j=1}^{j+1}(f_j+1) = f_1+1$。

对于 $\boldsymbol{j}+1>1$，设 $R_1 = R/2$ 和 $f_j = r_j - i_j$。设

$$\mathcal{S}_1 := \{x \in \Lambda_+ : x \text{ is of type } (w,I,t,m)\}.$$

在证明的其余部分，我们将用 $l_j(x)$ 表示停止时间 $l(T^{i_j m}x,\ t)$。设

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ \begin{array}{l} x \in \Lambda_+ : i_j m + l_j(x) > i_{j-1}m + l_{j-1}(x) \text{ and} \\ x \text{ satisfies } (i_j,t,m,R_1,f_j) \text{ for } j = 1,\dots,\boldsymbol{j}+1 \end{array} \right\}. \tag{27}$$

根据引理 7.5 和 7.7、式（25）以及类型的定义（$w$、 $I$、 $t$、 $m$），我们有$\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$. 因此，我们只需对 $\nu$（$S_2$）进行界定。

我们希望使用条件概率的语言，计算式（27）中给出的集合的测度。首先，通过固定 $j = 1$、.....、 $\boldsymbol{j}$的逆分支来固定相应的事件，然后计算最后一个事件的条件概率$j = \boldsymbol{j}+1$。

在继续证明该命题之前，我们需要以下内容。令$k_j(x)$: $= i_j m + l_j(x) + 1$。令

$$\mathcal{H}(w,I,t,m) := \left\{ \begin{array}{l} \gamma \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n : \exists x \in \mathcal{S}_2 \text{ such that} \\ \text{the inverse branch of } x \text{ of length } k_{\boldsymbol{j}}(x) \text{ is } \gamma \end{array} \right\}. \tag{28}$$

**引理 7.16**。集合 $\{\gamma\Delta_0 :\ \gamma \in \mathcal{H}$（$w$、 $I$、 $t$、 $m$）$\}$ 由彼此不相交的柱集组成，即不存在 $\gamma$、 $\gamma' \in \mathcal{H}$（$w$、 $I$、 $t$、 $m$） 使得 $\gamma = \gamma'\gamma''$ 对于某个$\gamma'' \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n$。

证明。为导出矛盾，假设引理不成立。于是，对于某个 $\gamma,\gamma' \in \mathcal{H}(w,I,t,m)$ 和 $\gamma'' \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n$，我们有$\gamma = \gamma'\gamma''$。根据定义， $\gamma$（分别地，$\gamma'$）是某个长度为 的 $x \in \mathcal{S}_2$（分别地， $x' \in \mathcal{S}_2$）的逆分支

$$k_{\boldsymbol{j}}(x) = i_{\boldsymbol{j}} m + l_{\boldsymbol{j}}(x) + 1 \qquad (\text{resp. } k_{\boldsymbol{j}}(x') = i_{\boldsymbol{j}} m + l_{\boldsymbol{j}}(x') + 1).$$

我们将 $l_{\boldsymbol{j}}$ （分别地， $l'_{\boldsymbol{j}}$）记作停止时间 $l_{\boldsymbol{j}}(x)$（分别地， $l_{\boldsymbol{j}}(x')$）。此外，由于 $x$ 和$x'$ 满足（$i_{\boldsymbol{j}},t,R_1,f_{\boldsymbol{j}}$），我们有

$$\mathcal{R}_{l_{\boldsymbol{j}}}(T^{i_{\boldsymbol{j}}m}x) \le t - R_1 \qquad \text{and} \qquad \mathcal{R}_{l'_{\boldsymbol{j}}+1}(T^{i_{\boldsymbol{j}}m}x') - t > R_1 + f_{\boldsymbol{j}}\lambda_0.$$

但是根据假设 $\gamma = \gamma'\gamma''$，因此我们有 $l'_{\boldsymbol{j}}+1 \le l_{\boldsymbol{j}}$。注意， $x = \gamma z = \gamma'\gamma''z$和 $x' = \gamma' z'$。因此

$$\mathcal{R}_{l'_{\boldsymbol{j}}+1}(T^{i_{\boldsymbol{j}}m}\gamma' z') \le \mathcal{R}_{l'_{\boldsymbol{j}}+1}(T^{i_{\boldsymbol{j}}m}\gamma'\gamma'' z) + C_3 \le \mathcal{R}_{l_{\boldsymbol{j}}}(T^{i_{\boldsymbol{j}}m}\gamma z) + C_3 \le t - R_1 + C_3,$$

其中，第一个不等式由式（21）得到。这与假设矛盾。 ■

因此，根据定义和引理7.16，

$$\begin{aligned} \nu(\mathcal{S}_2) &= \nu \left\{ \begin{array}{l} x \in \Lambda_+ : i_j m + l_j(x) > i_{j-1}m + l_{j-1}(x) \text{ and} \\ x \text{ satisfies } (i_j,t,m,R_1,f_j) \text{ for } j = 1,\dots,\boldsymbol{j}+1 \end{array} \right\} \\ &\le \sum_{\gamma\in\mathcal{H}(w,I,t,m)} \nu \left\{ \begin{array}{l} \gamma z \in \gamma\Lambda_+ : i_{\boldsymbol{j}+1}m + l_{\boldsymbol{j}+1}(\gamma z) > i_{\boldsymbol{j}}m + l_{\boldsymbol{j}}(\gamma z) \\ \text{and } \gamma z \text{ satisfies } (i_{\boldsymbol{j}+1},t,m,R_1,f_{\boldsymbol{j}+1}) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

由此可见，为了估计 $\nu(\mathcal{S}_2)$，我们需要估计以下各量：

I. 前 $j$ 个事件的概率：

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{H}(w,I,t,m)} \nu(\gamma\Delta_0);$$

II. 前 $j$ 个事件发生时的条件概率：

$$\frac{1}{\nu(\gamma\Delta_0)}\cdot\nu\left\{\begin{array}{l}\gamma z\in\gamma\Lambda_+ : i_{j+1}m+l_{j+1}(\gamma z) > i_jm+l_j(\gamma z)\\ \text{and } \gamma z \text{ satisfies } (i_{j+1},t,m,R_1,f_{j+1})\end{array}\right\}. \tag{29}$$

7.4.1. **I.** 的估计。取 $\gamma\in\mathcal{H}(w,\ I,\ t,\ m)$。存在 $x'=\gamma z'\in\mathcal{S}_2$。根据引理 7.15，对于所有满足 $x=\gamma z$ 且 $z\in\Lambda_+$ 的 $l_j(x)=l_j(x')$，其停止时间对于所有$1\le j\le j$ 都是 $x$。这样的 $x$ 属于集合

$$\left\{\begin{array}{l}x\in\gamma\Lambda_+ : i_jm+l_j(x) > i_{j-1}m+l_{j-1}(x) \text{ and}\\ x \text{ satisfies } (i_j,t,m,R_1-C_3\lambda^{k_j-(i_jm+l_j+1)},f_j) \text{ for } j=1,\dots,j\end{array}\right\}. \tag{30}$$

因此，根据公式（30）和引理 7.16，

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma\in\mathcal{H}(w,I,t,m)} \nu(\gamma\Delta_0)\\ &\le \nu\left\{\begin{array}{l}x\in\Lambda_+ :\ i_jm+l_j(x) > i_{j-1}m+l_{j-1}(x) \text{ and}\\ x \text{ satisfies } (i_j,t,m,R_1-C_3\lambda^{k_j-(i_jm+l_j+1)},f_j) \text{ for } j=1,\dots,j\end{array}\right\}.\end{aligned} \tag{31}$$

7.4.2. II. 的估计。现在我们估计“在 $\gamma$ 下的条件概率”。下面给出更精确的表述。设 $\gamma\in\mathcal{H}(w,\ I,\ t,\ m)$。对于任意满足公式（29）中给定条件的 $x=\gamma z$，我们用 $z\in\Lambda_+$ 改写该条件；然后可以应用命题 7.12。注意，存在 $x'\in\gamma z'\in\mathcal{S}_2$。根据引理 7.15，对于所有满足 $z\in\Lambda_+$ 的 $x=\gamma z$，停止时间 $l_j(x)$ 等于 $l_j(x')$，其中 $1\le j\le j$。我们将这个公共数 $l_j(x)$ 记为 $l_j$。回忆一下，$k_j=i_jm+l_j+1$ 是 $\gamma$ 的长度。

(i) If $k_j\le i_{j+1}m$, then $T^{i_{j+1}m}\gamma z=T^{i_{j+1}m-k_j}z$. Hence, the point $z$ satisfies $\left(\frac{i_{j+1}m-k_j}{m},t,m,R_1,f_{j+1}\right)$. Here we abuse notation. Although $\frac{i_{j+1}m-k_j}{m}$ may not be an integer, $\left(\frac{i_{j+1}m-k_j}{m},t,m,R_1,f_{j+1}\right)$ makes sense under Definition 7.14.

(ii) 若 $k_j>i_{j+1}m$，则令 $l'=i_{j+1}m+l_{j+1}-k_j$。由于 $i_{j+1}m+l_{j+1}>i_jm+l_j$，我们知道 $l'\ge 0$。先固定 $z_0\in\Lambda_+$，并令 $t_\gamma=t-\mathscr{R}_{k_j-i_{j+1}m}(T^{i_{j+1}m}\gamma z_0)$。我们将验证 $l'$ 是$(z=T^{k_j}x,\ t_\gamma,$ $m,\ R_1-C_3,\ f_{j+1})$的新停止时间，并且 $z$满足$(0,\ t_\gamma,\ m,\ R_1-C_3,\ f_{j+1})$。由于我们得到 $\mathscr{R}_{l'+1}(z)-t_\gamma=\mathscr{R}_{l_{j+1}+1}(T^{i_{j+1}m}\gamma z)-t-(\mathscr{R}_{k_j-i_{j+1}m}(T^{i_{j+1}m}\gamma z)-\mathscr{R}_{k_j-i_{j+1}m}(T^{i_{j+1}m}\gamma z_0))\ge R_1+f_{j+1}\lambda_0-C_3$，

其中，最后一个不等式由式（21）以及 $x$ 满足（$i_{j+1}$，$t$，$m$，$R_1$，$f_{j+1}$）这一事实得出。类似地，

$$\mathscr{R}_{l'}(z) + R_1 - C_3 < t_\gamma.$$

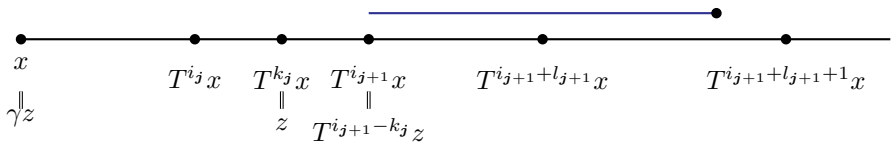



FIGURE 6. 估计 II 的情形（i）。这与图 4 类似。为简化记号，我们只写出点 $T^i x$，它也表示 $\mathscr{R}_i(x)$ 在时间轴上的位置。蓝色线段的长度为 $t_\gamma$。

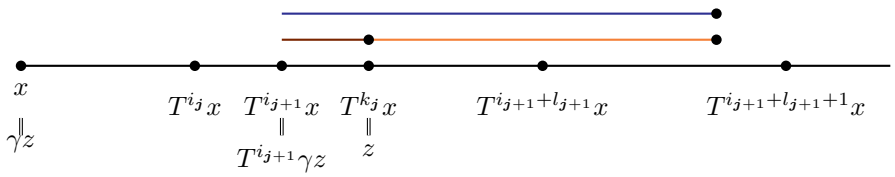



FIGURE 7. 估计 II 的情形（ii）。棕色线的长度约为 $\mathscr{R}_{k_j - i_{j+1}}(T^{i_{j+1}}\gamma z_0)$，橙色线的长度约为 $t_\gamma = t - \mathscr{R}_{k_j - i_{j+1}}(T^{i_{j+1}}\gamma z_0)$。

如果 $\gamma$ 的长度满足情形（ii），那么我们有

$$\begin{aligned}
&\nu\left\{\begin{array}{l} x = \gamma z \in \gamma\Lambda_+ : x \text{ satisfies } (i_{j+1}, t, R_1, f_{j+1}) \\ \text{and } i_{j+1}m + l_{j+1} > i_j m + l_j \end{array}\right\} \\
&\le \nu\left(\{x = \gamma z \in \gamma\Lambda_+,\ z \text{ satisfies } (0, t_\gamma, R_1 - C_3, f_{j+1})\}\right) \\
&\le C_{\mathrm{cyl}}\|d\gamma\|^\delta \nu(\{z \in \Lambda_+ : z \text{ satisfies } (0, t_\gamma, R_1 - C_3, f_{j+1})\}) \qquad \text{（由引理 3.5）} \\
&\le C_{\mathrm{cyl}}\|d\gamma\|^\delta e^{-\epsilon(R_1 - C_3 + f_{j+1} m\lambda_0)} \qquad \text{(by Proposition 7.12)} \\
&\le C_4 \nu(\gamma\Lambda_+) e^{-\epsilon(R_1 - C_3 + f_{j+1} m\lambda_0)} \qquad \text{(by Lemma 3.5)},
\end{aligned} \tag{32}$$

其中 $C_4 = C_{\mathrm{cyl}}^2$。

如果 $\gamma$ 的长度满足情形（i），那么上面的第二个方程适用于满足 $\binom{i_{j+1}m - k_j}{m}, t, m, R_1, f_{j+1}$ 的 $z$。根据与上面相同的估计，我们有

$$\begin{aligned}
&\nu\left\{\begin{array}{l} x = \gamma z \in \gamma\Lambda_+ : x \text{ satisfies } (i_{j+1}, t, R_1, f_{j+1}) \\ \text{and } i_{j+1}m + l_{j+1} > i_j m + l_j \end{array}\right\} \\
&\le C_4 \nu(\gamma\Lambda_+) e^{-\epsilon(R_1 + f_{j+1} m\lambda_0)}.
\end{aligned} \tag{33}$$

7.4.3. 完成对 $\nu(\mathcal{S}_2)$ 的估计。 对所有 $\gamma \in \mathcal{H}(w、\ I、\ t、\ m)$ 求和，我们有

$$\begin{aligned}\nu(\mathcal{S}_2) &= \sum_{\gamma\in\mathcal{H}(w,I,t,m)} \nu\left\{ \begin{array}{l} \gamma z \in \gamma\Lambda_+ : \gamma z \text{ satisfies } (i_{\boldsymbol{j}+1}, t, m, R_1, f_{\boldsymbol{j}+1}) \\ \text{and } i_{\boldsymbol{j}+1}m + l_{\boldsymbol{j}+1} > i_{\boldsymbol{j}}m + l_{\boldsymbol{j}} \end{array} \right\} \\ &\le \sum_{\gamma\in\mathcal{H}(w,I,t,m)} \nu(\gamma\Lambda_+)(C_4 e^{-\epsilon(R_1 - C_3 + f_{\boldsymbol{j}+1}m\lambda_0)}) \quad \text{(by Eqs. (32) and (33))} \\ &\le \nu\left\{ \begin{array}{l} x \in \Lambda_+ : x \text{ satisfies } (i_j, t, m, R_1 - C_3\lambda^{k_{\boldsymbol{j}} - (i_j m + l_j + 1)}, f_j) \text{ and} \\ i_j m + l_j(x) > i_{j-1}m + l_{j-1}(x) \text{ for } j = 1, \dots, \boldsymbol{j} \end{array} \right\} \\ &\quad \times (C_4 e^{-\epsilon(R_1 - C_2 + f_{\boldsymbol{j}+1}m\lambda_0)}) \quad \text{(by Eq. (31))}.\end{aligned}$$

对于最后一个等式中的第一项，我们用归纳法对其进行估计。我们重复这一过程，并将数量 $\boldsymbol{j}$ 减少。每一步都会得到一项，类似于最后一个等式中的第二项。微妙之处在于，第一步之后，事件 $j = 1, \dots, \boldsymbol{j}$ 的数量 $R_1$ 会发生变化，而误差的形式为$C_3\lambda^{k_{\boldsymbol{j}} - (i_j m + l_j + 1)}$。由于 $\lambda < 1$，对于固定的 $j$，经过 $\boldsymbol{j} + 1 - j$ 步后，数量 $R_1$ 被替换为

$$R_1 - C_3 \sum_{r=j}^{\boldsymbol{j}} \lambda^{k_r - (i_j m + l_j + 1)},$$

它大于 $R_1 - C_3/(1-\lambda)$，其中由于假设 $i_r m + l_r > i_{r-1}m + l_{r-1}$， $k_r$ 彼此不同。然后，我们使用条件概率的论证来计算第 $j$ 个事件的测度。总之，我们得到

$$\nu(\mathcal{S}_2) \le \prod_{j=1}^{\boldsymbol{j}+1} C_4 e^{-\epsilon(f_j m\lambda_0 + R_1 - C_3(1 + \frac{1}{1-\lambda}))}.$$

回忆一下 $\ell(w) = \sum_{j=1}^{\boldsymbol{j}+1}(f_j + 1) = \sum_{j=1}^{\boldsymbol{j}+1} f_j + (\boldsymbol{j} + 1)$。最后，通过使用命题 7.9 ，将 $m \ge 1$ 减小到 $\epsilon$ ，并选择 $\epsilon\lambda_0/2$，取足够大的 $R_1 = R/2$ 以吸收常数 $C_3, C_4$。 ■

7.5. 更新定理。本节将证明命题 7.10。关于更新定理的参考文献，例如参见 [Woo82] and [Fel71]。我们定义一个从 $\Lambda_+ \times \mathbb{R}$ 到 $\Lambda_+ \times \mathbb{R}$的“随机游走”：从点 $(x, t) \in \Lambda_+ \times \mathbb{R}$出发，到达下一个点 $(y, t + \mathcal{R}(y))$ 且满足 $Ty = x$ 的概率为 $e^{-\delta\mathcal{R}(y)}$。那么，这种“随机游走”的更新定理的积分形式见定理 7.17。通过使用转移算子和拉普拉斯变换的经典方法，可以得到这类更新定理。为了在命题 7.10 中获得指数误差项，我们需要[LP22]给出的谱隙结果。

命题7.10 用于估计剩余等待时间满足 $x \in \Lambda_+$ 的集合的测度，其中该剩余等待时间满足 $\mathcal{R}_{l+1}(x) - t > R$ 其中 $l = l(x, t)$ 是停止时间。在引理 7.19中，我们通过经典计算，将剩余等待时间与定理 34中方程（7.17）所示更新和的积分联系起来；定理 7.17 给出了更新定理的积分形式。由此，我们可以从定理 7.17 推出命题 7.10。

仅在本小节中，记 $L_s := \mathcal{L}_{(\delta+s)\mathcal{R}}$ 对于 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re s > -\epsilon_0$，它是第 4 节中定义在 $\mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{C})$ 上的未归一化转移算子。我们还使用测度 $\mu_{\mathrm{E}}$ ，它满足 $L_0^*(\mu_{\mathrm{E}}) = \mu_{\mathrm{E}}$。回顾一下， $h_0 \in \mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{R})$ 是

传递算子 $L_0$ 的特征函数，特征值为 1，且 $\int_{\Lambda_+} h_0\, d\mu_{\mathrm{E}} = 1$。令 $\sigma_0 := \mathscr{R} = \hat{\nu}(\mathscr{R}) = \int_{\Lambda_+} \mathscr{R} h_0\, d\mu_{\mathrm{E}}$ 为李雅普诺夫指数。

对于任意紧支撑函数 $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$、$x \in \Lambda_+$ 和 $t > 0$，我们引入更新和

$$\mathcal{R}f(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathcal{H}^n} e^{-\delta \mathscr{R}_n(\gamma x)} f(\mathscr{R}_n(\gamma x) - t) \tag{34}$$

它收敛。我们用 $\|\cdot\|_1$ 表示 $L^1$ 范数。

**定理 7.17** (更新定理)。存在 $\epsilon > 0$，使得对所有 $f \in C_{\mathrm{c}}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$、$x \in \Lambda_+$ 和 $t > 0$，都有

$$\mathcal{R}f(x,t) = \frac{h_0(x)}{\sigma_0} \int_{-t}^{\infty} f\, dm^{\mathrm{Leb}} + O\big(e^{-\epsilon t} e^{\epsilon m^{\mathrm{Leb}}(\operatorname{supp} f)} (\|f''\|_1 + \|f\|_1)\big)$$

当 $t \to +\infty$ 时。

由引理 A.1可知，$s \mapsto L_s$ 在 $\{s \in \mathbb{C}$ 上解析：$\Re s > -\frac{\epsilon_0}{2}\}$，其中$\epsilon_0$ 来自命题 3.1中的指数尾性质。我们需要一个关于算子 $(\mathrm{Id} - L_s)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L_s^n$的引理。证明与有限符号编码的情形类似；例如参见 [Lal89，命题 7.2 和 7.3]。引理 7.18比 [Lal89] 中的结果更强，因为我们得到了到半平面 $\{s \in \mathbb{C}:\ \Re s > -\eta\}$ 的亚纯延拓，并且 $U(s)$的范数估计在 $s$上是一致的，至多相差一个多项式因子。

**引理 7.18.** 映射 $s \mapsto (\mathrm{Id} - L_s)^{-1}$存在亚纯延拓，我们仍用同一符号表示该延拓，其定义域 $\{s \in \mathbb{C}:\ \Re s > 0\}$ 为 $\{s \in \mathbb{C}:\ \Re s > -\eta\}$，其中某个 $\eta \in (0, \frac{\epsilon_0}{2})$ $\Re s > -\eta\}$ 成立。此外，我们有如下分解

$$(\mathrm{Id} - L_s)^{-1} = \frac{N(0)}{\sigma_0 s} + U(s) \qquad \textit{for all } |\Re s| < \eta, \tag{35}$$

其中，对所有 $\phi \in \mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{C})$，$N(0)\phi = \mu_{\mathrm{E}}(\phi) h_0$，且 $s \mapsto U(s)$ 是解析的，并满足

$$\|U(s)\|_{\mathrm{op}} \le C(1 + |\Im s|)^2 \qquad \textit{for all } |\Re s| < \eta. \tag{36}$$

证明. 首先，我们处理 $s \in \mathbb{C}$ 较小的 $|s|$情形。由 $L_0$ (参见第 4节) 的谱刻画及其谱分解可知，它是拟紧的（参见 [Kat95，第 3]章）。进一步运用算子扰动理论（参见 [Kat95，第 7]章），可得

$$L_s = \lambda_s N(s) + Q(s) \qquad \text{for all } s \in \mathcal{O},$$

对于以 0 为中心的某个开球 $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$，以及解析映射 $s \mapsto \lambda_s$、$s \mapsto N(s)$ 和 $s \mapsto Q(s)$。这里，$\lambda_s$ 是 $L_s$ 的最大简单特征值，且这些算子满足$N(s)Q(s) = Q(s)N(s) = 0$，$N(s)^2 = N(s)$（即一个投影），以及 $\|Q(s)\|_{\mathrm{op}} \le \rho < 1$。因此，

$$(\mathrm{Id} - L_s)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L_s^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_s^n N(s) + Q(s)^n) = \frac{N(s)}{1 - \lambda_s} + \sum_{n=0}^{\infty} Q(s)^n.$$

为了得到方程（35），我们需要计算 $\partial_s \lambda_s|_{s=0}$（参见 [PP90，命题 4。10] 和 [AGY06，引理 7。22]）。令 $h_s \in \mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{C})$ 为 $L_s$对应特征值 $\lambda_s$ 的特征函数，并令 $\int_{\Lambda_+} h_s\, d\mu_{\mathrm{E}} = 1$ 满足 $s \mapsto h_s$ 为解析函数。接下来

的计算中，我们用 $L_s$ 和 $\lambda_s$ 表示它们关于变量 $s$的导数。对 $\lambda_s h_s = L_s h_s$ 求导并积分，得到

$$\int_{\Lambda_+} (\dot{\lambda}_s h_s + \lambda_s \dot{h}_s)\, d\mu_{\mathrm{E}} = \int_{\Lambda_+} (\dot{L}_s h_s + L_s \dot{h}_s)\, d\mu_{\mathrm{E}}.$$

然后将 $s = 0$ 代入上式。由于 $L_0^*(\mu_{\mathrm{E}}) = \mu_{\mathrm{E}}$，我们有 $\int_{\Lambda_+} \dot{h}_0\, d\mu_{\mathrm{E}} = \int_{\Lambda_+} L_0 \dot{h}_0\, d\mu_{\mathrm{E}}$，因此得到

$$\partial_s \lambda_s|_{s=0} = \dot{\lambda}_0 = \int_{\Lambda_+} \dot{L}_0 h_0\, d\mu_{\mathrm{E}} = -\int_{\Lambda_+} L_0(\mathscr{R} h_0)\, d\mu_{\mathrm{E}} = -\sigma_0.$$

因此，映射 $s \mapsto N(s)/(1-\lambda_s)$ 在 0 处有一个简单极点，并且

$$s \mapsto \frac{N(s)}{1-\lambda_s} - \frac{N(0)}{\sigma_0 s}$$

在 $\mathcal{O}$ 上解析。因此， $s \mapsto U(s) := (\mathrm{Id} - L_s)^{-1} - N(0)/(\sigma_0 s)$ 是解析的，且等式 (35) 在 $\mathcal{O}$ 上成立。等式 (36) 显然成立。

现在，我们处理 $s \in \mathbb{C}$，其 $|\Re s|$ 有界且 $|\Im s|$较大。利用 [LP22 命题 73] 给出的谱界，并采用与 [Nau05 命题 53]之后或 [AGY06 命题 716], 的证明中类似的论证，我们得到如下结论：存在 $C > 0$， $\eta \in (0, \mathrm{diam}(\mathcal{O})/2)$， $b_0 > 0$，以及 $\rho \in (0,1)$，使得

$$\|L_s^n\|_{\mathrm{op}} \le C(1 + |\Im s|)^2 \rho^n \qquad \text{on } \{s \in \mathbb{C} : |\Re s| < \eta,\ |\Im s| > b_0\}.$$

这意味着 $\mathrm{Id} - L_s$ 可逆，且 $s \mapsto (\mathrm{Id} - L_s)^{-1}$ 在 $\{s \in \mathbb{C} : |\Re s| < \eta, \quad |\Im s| > b_0\}$ 上解析，其范数满足

$$\|(\mathrm{Id} - L_s)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \le C \frac{(1 + |\Im s|)^2}{1 - \rho}.$$

因此， $s \mapsto U(s) := (\mathrm{Id} - L_s)^{-1} - N(0)/(\sigma_0 s)$ 是解析的，并且等式 (35) 和 (36) 在 $\{s \in \mathbb{C} : \ |\Re s| < \eta, \quad |\Im s| > b_0\}$。

对于 $\{s \in \mathbb{C} : \ |\Re s| < \eta\}$ 中远离 0 且 $\infty$ 的其余区域，依据与 [Lal89，命题 7。3] 和 [AGY06，引理 7。21]，中相同的论证，算子 $L_s$ 的谱半径小于 1，且 $s \mapsto (\mathrm{Id} - L_s)^{-1}$ 是解析的，由此完成证明。■

定理 7.17 的证明。 令 $f$， $x$，并令 $t$ 如引理中所述。利用等式（34）、傅里叶变换和控制收敛定理，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} f(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathcal{H}^n} e^{-\delta \mathscr{R}_n(\gamma x)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(\mathscr{R}_n(\gamma x) - t)} \hat{f}(\xi)\, d\xi \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi} \hat{f}(\xi) L_{-i\xi}^n(\chi_{\Lambda_+})(x)\, d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi} \hat{f}(\xi) (\mathrm{Id} - L_{-i\xi})^{-1}(\chi_{\Lambda_+})(x)\, d\xi.
\end{aligned}$$

利用引理 7.18，我们按照 [Li22，命题427], 所述继续推导。它是经典 Paley–Wiener定理的一个版本，由此完成证明。■

在开始证明命题 7.10之前，我们需要一个引理，用来联系剩余等待时间与更新和的积分。

**引理 7.19**。 对于所有 $R>0$ 和 $t>0$，我们有

$$\mu_{\mathrm{E}}\{x\in\Lambda_+ : \mathscr{R}_{l+1}(x)-t>R\}=\int_{\Lambda_+}\mathcal{R}f_x(x,t)\,d\mu_{\mathrm{E}}(x),$$

其中 $f_x := \chi_{\{s\in\mathbb{R}:R-\mathscr{R}(x)<s\le 0\}}$ 对所有 $x\in\Lambda_+$ 均成立。

证明。设 $R>0$ 和 $t>0$。利用 $L_0^*(\mu_{\mathrm{E}})=\mu_{\mathrm{E}}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mu_{\mathrm{E}}\{x\in\Lambda_+ : \mathscr{R}_{l+1}(x)-t>R\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Lambda_+}\chi_{\{y\in\Lambda_+:\mathscr{R}_n(y)\le t<\mathscr{R}_{n+1}(y)-R\}}(x)\,d\mu_{\mathrm{E}}(x)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Lambda_+}L_0^n\big(\chi_{\{y\in\Lambda_+:\mathscr{R}_n(y)\le t<\mathscr{R}_{n+1}(y)-R\}}\big)(x)\,d\mu_{\mathrm{E}}(x)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Lambda_+}\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^n}e^{-\delta\mathscr{R}_n(\gamma x)}\chi_{\{y\in\Lambda_+:R-\mathscr{R}(T^n y)<\mathscr{R}_n(y)-t\le 0\}}(\gamma x)\,d\mu_{\mathrm{E}}(x)\\
&=\int_{\Lambda_+}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^n}e^{-\delta\mathscr{R}_n(\gamma x)}f_x(\mathscr{R}_n(\gamma x)-t)\,d\mu_{\mathrm{E}}(x).
\end{aligned}$$

由等式（34），证明完成。 ■

命题 7.10 的证明。取 $\epsilon>0$ 为命题 $\epsilon$给出的3.1 和 7.11 以及定理 7.17 中相应量的最小值。设 $R>1$ 和 $t>R$。根据引理 7.19，我们希望将定理 7.17 应用于 $\mathcal{R}f_x$，其中 $f_x$ 如引理中所述。由于$f_x$ 不是 $C^2$，我们取一个大于 $f_x$ 的光滑函数。

令 $s_x=$ 为$\{-t/2, R-\mathscr{R}(x)\}$的最大值。若 $s_x\le 0$，令 $g_x$ 为一个支撑于 $[s_x-1,1]$ 且在 $[s_x,0]$ 上等于 1 的光滑凸函数。否则，令 $g_x=0$。于是，$m^{\mathrm{Leb}}(\operatorname{supp} g_x)\le$为 $\{t/2+2, \mathscr{R}(x)-R+2\}$的最小值，且 $\|g_x''\|_1$，$\|g_x\|_1\le t$。由定理 7.17，可得

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda_+}\mathcal{R}g_x(x,t)\,d\mu_{\mathrm{E}}(x)&=\int_{\Lambda_+}\left(\frac{h_0(x)}{\sigma_0}\int_{\mathbb{R}}g_x\,dm^{\mathrm{Leb}}+O\big(e^{-\epsilon t/2}t\big)\right)d\mu_{\mathrm{E}}(x)\\
&\ll\int_{\{y\in\Lambda_+:\mathscr{R}(y)>R\}}(\mathscr{R}(x)-R+2)\,d\mu_{\mathrm{E}}(x)+e^{-\epsilon t/4}\\
&\le\frac{1}{\epsilon_0}\int_{\Lambda_+}e^{\epsilon_0(\mathscr{R}(x)-R+2)}\,d\mu_{\mathrm{E}}(x)+e^{-\epsilon t/4}\\
&\ll e^{-\epsilon R/4}
\end{aligned}$$

由于指数尾性质（参见命题 3.1中的性质（5））。

现在，我们可以对 $\int_{\Lambda_+}\mathcal{R}f_x\,d\mu_{\mathrm{E}}$ 进行估计。若 $\mathscr{R}(x)<R+t/2$，则由 $g_x$ 的构造可得 $f_x\le g_x$。因此

$$\int_{\{y\in\Lambda_+:\mathscr{R}(y)<R+t/2\}}\mathcal{R}f_x(x,t)\,d\mu_{\mathrm{E}}(x)\le\int_{\Lambda_+}\mathcal{R}g_x(x,t)\,d\mu_{\mathrm{E}}(x)\ll e^{-\epsilon R/4}. \tag{37}$$

根据命题 7.11形式的指数尾性质，

$$\mu_{\mathrm{E}}\{x\in\Lambda_+ : \mathscr{R}(x)\ge R+t/2\}\ll e^{-\epsilon(R+t/2)}.$$

对于方程（ $\mathcal{R}f_x$ 34）中定义的更新和 $n\ge t/\lambda_0$，若 $\mathscr{R}_n(y)-t>0$，则$f_x(\mathscr{R}_n(y)-t)=0$。我们只需对整数 $0\le n\le t/\lambda_0$ 求和。然后，由于

事实是 $f_x \le 1 \ll h_0$，我们有

$$\mathcal{R}f_x(x,t) = \sum_{n=0}^{\lfloor t/\lambda_0 \rfloor} \sum_{\gamma\in\mathcal{H}^n} e^{-\delta\mathscr{R}_n(\gamma x)} f_x(\mathscr{R}_n(\gamma x) - t) \ll \sum_{n=0}^{\lfloor t/\lambda_0 \rfloor} \sum_{\gamma\in\mathcal{H}^n} e^{-\delta\mathscr{R}_n(\gamma x)} h_0(\gamma x)$$
$$= \sum_{n=0}^{\lfloor t/\lambda_0 \rfloor} L_0^n(h_0)(x) \le \frac{t}{\lambda_0} h_0(x) \ll t.$$

因此我们有

$$\int_{\{y\in\Lambda_+ : \mathscr{R}(y) \ge R+t/2\}} \mathcal{R}f_x(x,t)\, d\mu_{\mathrm{E}}(x) \ll e^{-\epsilon(R+t/2)} t \ll e^{-\epsilon R}. \tag{38}$$

通过结合公式（ $\mu_{\mathrm{E}}$ 37）和（38），我们得到所需的不等式。证明的最后一步是先回顾 $\nu$ 相对于 $\mu_{\mathrm{E}}$绝对连续且具有有界稠密性，然后调整 $\epsilon$ 并取 $R > 0$ 充分大且取决于 $\epsilon$ ，以吸收累积的隐常数。■

注7.20：通过更精确的估计，我们可以得到一个渐近公式 a

$$\mu_{\mathrm{E}}\{x : \mathscr{R}_{l+1}(x) - t > R\} = \int_{\{y\in\Lambda_+ : \mathscr{R}(y) > R\}} h_0(x)(\mathscr{R}(x) - R)\, d\mu_{\mathrm{E}}(x) + O\big(e^{-\epsilon t}\big)$$

对所有 $R > 0$ 充分大的 $t > R$成立。由于我们在命题7.10 中只需要一个上界，因此不再给出这一更精确公式的证明。

注7.21：在命题7.12的证明中，我们看到实际上只需要命题7.10的一个较弱版本，即对所有 $t > e^{\epsilon R/2}$成立。因此，对于该论证而言，具有多项式误差的定理7.17 版本就足够了。定理7.17的当前版本可能具有独立的研究价值，因此我们在此给出这一更强的版本。

## 8. Dolgopyat's method

如引言中所述，本节将采用一种 Dol- gopyat 方法，该方法结合了 Stoyanov 的工作 [Sto11], Sarkar–Winter [SW21], 和 Tsujii–Zhang [TZ23]。我们的目标是证明定理8.1。

先介绍一些记号。设 $(V, \|\cdot\|)$ 是$\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$上的任意赋范向量空间。设 $d$ 是 $\Delta_0$ 上的任意距离函数；特别地， $d = d_{\mathrm{E}}$ 或 $d = D$。设 $H\colon \Lambda_+ \to V$是任意函数。按照 Dolgopyat [Dol98], 定义一族等价范数

$$\|H\|_{1,b} = \|H\|_\infty + \frac{1}{\max\{1, |b|\}} \operatorname{Lip}_d(H), \qquad b \in \mathbb{R}.$$

于是，Lipschitz 范数就是$\|H\|_{\mathrm{Lip}(d)} = \|H\|_{1,1}$。回忆一下小节 $\nu$ 中的测度 3.1。若 $H$ 可测，记

$$\|H\|_2 = \left( \int_{\Lambda_+} \|H(x)\|^2\, d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

我们还定义函数 $\|H\|\colon \Lambda_+ \to \mathbb{R}$ 如下

$$\|H\|(x) = \|H(x)\| \qquad \text{for all } x \in \Lambda_+.$$

**定理 8.1.** 存在 $\eta>0$、$C>0$、$a_0>0$ 和 $b_0>0$，使得对于$\widehat{\ }$所有满足 $|a|<a_0$ 的 $\xi=a+ib\in\mathbb{C}$，若 $(b,\rho)\in M_0(b_0)$，则对于所有 $k\in\mathbb{N}$ 以及 $H\in \mathrm{Lip}\big(\Lambda_+, V^{\oplus \dim(\rho\ \ \ \rho)}\big)$，有

$$\big\|\mathcal{M}^k_{\xi,\rho}(H)\big\|_2\le Ce^{-\eta k}\|H\|_{1,\|\rho_b\|}.$$

$\widehat{\ }$对于所有 $(b,\ \rho)\in M_0(b_0)$，回顾第 7 节中的 $\Omega(\log\|\rho_b\|,\ R_0)\subset\Delta_0$。

定理 *8.2*。存在 $\eta\in(0,1)$、$\kappa\in(0,1)$、$a_0>0$、$b_0>0$、$m\in\mathbb{N}$，以及一个连续函数 $\zeta:[-a_0,a_0]\to\mathbb{R}$，满足 $\zeta(0)=1$，使得以下$\widehat{\ }$成立。对于所有满足 $|a|<a_0$ 的 $\xi=a+ib\in\mathbb{C}$，若 $(b,\rho)\in M_0(b_0)$，则对于所有$H\in \mathrm{Lip}\big(\Lambda_+, V^{\oplus \dim(\rho\ \ \ \rho)}\big)$，存在一列正函数 $\{h_n\}_{n=0}^\infty\subset \mathrm{Lip}_D(\Lambda_+,\mathbb{R})$，满足 $h_0=\|H\|_1$、$\|\rho_b\|$，以及一列 $\Omega(\log\|\rho_b\|,R_0)$ 的闭子集 $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$，使得：

（1）对所有 $n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\big\|\mathcal{M}^{nm}_{\xi,\rho}(H)(x)\big\|_2\le h_n(x)\qquad \text{for all } x\in\Lambda_+;$$

（2）对所有 $n\in\mathbb{N}$，我们有

$$h_n^2(x)\le\begin{cases}\eta\mathcal{L}_0^m(h_{n-1}^2)(x), & x\in\Omega_n,\\ \zeta(a)\mathcal{L}_0^m(h_{n-1}^2)(x), & x\in\Lambda_+-\Omega_n;\end{cases}$$

（3）对所有 $n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\nu\{x\in\Lambda_+:\#\{j\in\mathbb{N}:1\le j\le n, T^{jm}x\in\Omega_j\}<\kappa n\}<2e^{-\kappa n}.$$

下面的证明受到 [TZ23，命题 3 的启发。15] 但我们改用转移算子的语言。

定理 8.2 推出定理 8.1 的证明。用 $\tilde\eta,\kappa,\tilde a_0,b_0,m$ 和 $\zeta$ 表示定理 8.2 给出的常数和函数。固定 $\eta=\frac14\min\{\kappa,-\kappa\log(\tilde\eta)\}$ and$a_0\in(0,\tilde a_0)$，使得 $\sup\{|\log(\zeta(a))|\div a\in[-a_0,a_0]\}\le\eta$。固定

$$C_0=\sup\big\{\big\|\mathcal{M}_{\xi,\rho}\big\|_{\mathrm{op}}^{2m}:|a|\le a_0,\rho\in\widehat{M}\big\}\le\sup\big\{\big\|\mathcal{L}_\xi\big\|_{\mathrm{op}}^{2m}:|a|\le a_0\big\},$$

$$C=\sqrt{3C_0},$$

将转移算子视为作用在 $L^2\big(\Lambda_+,V^{\oplus\dim(\rho\ \ \ \rho)}\big)$ 和 $L^2(\Lambda_+,\mathbb{R})\widehat{\ }$ 上的算子。令 $\xi=a+ib\in\mathbb{C}$ 满足 $|a|<a_0$。假设 $(b,\rho)\in M_0(b_0)$。令$k\in\mathbb{N}$，并将 $k=nm+l$ 写成整数 $n\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ 和 $0\le l<m$。令$H\in\mathrm{Lip}\big(\Lambda_+,V^{\oplus\dim(\rho\ \ \ \rho)}\big)$。于是我们得到定理 8.2 给出的相应序列 $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ 和$\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$。

我们递归地定义函数序列 $\{G_j:\Lambda_+\to\mathbb{R}\}_{j=0}^\infty$，如下：

$$G_0=h_0^2,$$

$$G_j(x)=\begin{cases}\tilde\eta G_{j-1}(x), & x\in T^{-jm}(\Omega_j),\\ \zeta(a)G_{j-1}(x), & x\in\Lambda_+-T^{-jm}(\Omega_j),\end{cases}\qquad\text{for all } j\in\mathbb{N}.$$

我们首先用归纳法证明它们满足

$$\mathcal{L}_0^{jm}(G_j)\ge h_j^2\qquad\text{for all } j\in\mathbb{Z}_{\ge0}.\tag{39}$$

基础情形 $j=0$ 显然成立。现在令 $j\in\mathbb{N}$，并假设对于 $j-1$，等式（39）成立。根据定义可立即得到，对于所有 $\gamma\in\mathcal{H}^m$，我们有

$$\mathcal{L}_0^{(j-1)m}(G_j)(\gamma x)=\begin{cases}\tilde{\eta}\mathcal{L}_0^{(j-1)m}(G_{j-1})(\gamma x), & \text{for all } x\in\Omega_j\\ \zeta(a)\mathcal{L}_0^{(j-1)m}(G_{j-1})(\gamma x), & \text{for all } x\in\Lambda_+-\Omega_j.\end{cases}\tag{40}$$

对于所有 $x\in\Omega_j$，我们结合使用等式（40）、归纳假设以及定理8.2中的性质（2），得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^{jm}(G_j)(x)&=\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^m}e^{\mathscr{F}_m^{(0)}(\gamma x)}\mathcal{L}_0^{(j-1)m}(G_j)(\gamma x)\\&=\tilde{\eta}\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^m}e^{\mathscr{F}_m^{(0)}(\gamma x)}\mathcal{L}_0^{(j-1)m}(G_{j-1})(\gamma x)\\&\geq\tilde{\eta}\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^m}e^{\mathscr{F}_m^{(0)}(\gamma x)}h_{j-1}^2(\gamma x)=\tilde{\eta}\mathcal{L}_0^m(h_{j-1}^2)(x)\geq h_j^2(x).\end{aligned}$$

对于所有 $x\in\Lambda_+-\Omega_j$，类似的计算可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^{jm}(G_j)(x)&=\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^m}e^{\mathscr{F}_m^{(0)}(\gamma x)}\mathcal{L}_0^{(j-1)m}(G_j)(\gamma x)\\&=\zeta(a)\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^m}e^{\mathscr{F}_m^{(0)}(\gamma x)}\mathcal{L}_0^{(j-1)m}(G_{j-1})(\gamma x)\\&\geq\zeta(a)\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^m}e^{\mathscr{F}_m^{(0)}(\gamma x)}h_{j-1}^2(\gamma x)=\zeta(a)\mathcal{L}_0^m(h_{j-1}^2)(x)\geq h_j^2(x).\end{aligned}$$

这就证明了等式（39）。

现在，利用定理8.2中的性质（1）、等式（39，以及 $\mathcal{L}_0^*(\nu)=\nu$，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{M}_{\xi,\rho}^k(H)\right\|_2^2&\leq C_0\left\|\mathcal{M}_{\xi,\rho}^{nm}(H)\right\|_2^2\leq C_0\|h_n\|_2^2\\&\leq C_0\int_{\Lambda_+}\mathcal{L}_0^{nm}(G_n)\,d\nu\\&=C_0\int_{\Lambda_+}G_n\,d\nu.\end{aligned}$$

利用 $\zeta(a)>\tilde{\eta}$，对于所有 $x\in\{y\in\Lambda_+:\#\{j\in\mathbb{N}:\ j\leq n,\ T^{jm}y\in\Omega_j\}\geq\kappa n\}$，我们有如下界

$$G_n(x)\leq\zeta(a)^{n-\lceil\kappa n\rceil}\tilde{\eta}^{\lceil\kappa n\rceil}G_0(x)\leq e^{\eta n}\tilde{\eta}^{\kappa n}h_0^2(x)$$

而对于所有 $x\in\{y\in\Lambda_+:\#\{j\in\mathbb{N}:\ j\leq n,\ T^{jm}y\in\Omega_j\}<\kappa n\}$，我们有平凡的界

$$G_n(x)\leq\zeta(a)^nG_0(x)\leq e^{\eta n}h_0^2(x).$$

利用定理8.2中的性质（3），我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{M}_{\xi,\rho}^k(H)\right\|_2^2&\leq C_0\int_{\Lambda_+}G_n\,d\nu\\&\leq C_0e^{\eta n}(\tilde{\eta}^{\kappa n}\cdot(1-2e^{-\kappa n})+2e^{-\kappa n})\|h_0\|_\infty^2\\&\leq C^2e^{-2\eta n}\|H\|_{1,\|\rho_b\|}^2.\end{aligned}$$

■

本节余下部分的目标是证明定理8.2。引理8.3–8.5是预备引理。

以下是一个 Lasota–Yorke 型引理。文献中有许多类似的引理。不过，由于我们处理的是可数无限编码以及$V^{\oplus \dim(\rho)\rho}$值函数，我们给出一个类似于 [SW21引理 7.3]和 [Sto11附录]中的证明。

**引理 8.3**。设 $d$ 是 $\Delta_0$ 上的任意距离函数，使得 $d_{\mathrm{E}}(x,y) \le d(x,y)$对所有 $x, y \in \Lambda_+$ 均成立（例如，$d = d_{\mathrm{E}}$ 或 $d = D$）。存在 $A_0 > 1$，使得对于所有满足 $|a| < a_0'$的$\xi = a + ib \in \mathbb{C}$，若 $(b,\rho) \in M_0(1)$，则对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有：

*(1)* 若 $h \in \mathrm{Lip}_d(\Lambda_+, \mathbb{R})$ 和 $B > 0$ 满足

$$|h(x) - h(x')| \le B h(x) d(x,x')$$

对所有 $x, x' \in \Lambda_+$，于是我们有

$$|\mathcal{L}_a^k(h)(x) - \mathcal{L}_a^k(h)(x')| \le A_0(B\lambda^k + 1)\mathcal{L}_a^k(h)(x) d(x,x')$$

对所有 $x, x' \in \Lambda_+$。*(2)* 若 $H \in \mathrm{Lip}\big(\Lambda_+, V^{\oplus \dim(\rho}{}^{\rho}\big)$，$h \in \mathrm{Lip}_d(\Lambda_+, \mathbb{R})$ 和 $B > 0$ 满足

$$\|H(x) - H(x')\|_2 \le B h(x) d(x,x')$$

对所有 $x, x' \in \Lambda_+$，于是我们有

$$\left\|\mathcal{M}_{\xi,\rho}^k(H)(x) - \mathcal{M}_{\xi,\rho}^k(H)(x')\right\|_2 \le A_0\left(B\lambda^k \mathcal{L}_a^k(h)(x) + \|\rho_b\| \mathcal{L}_a^k \|H\|(x)\right) d(x,x')$$

*for all* $x, x' \in \Lambda_+$.

证明。回顾等式 (13) 和 (16)，固定 $A_0 > 4e^{C_2 \operatorname{diam}(\Delta_0)} \delta_{1,\varrho}^{C_2}$令 $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$，其中 $|a| < a_0'$，并假设 $(b,\rho) \in M_0(1)$。令 $k \in \mathbb{N}$。令 $x, x' \in \Lambda_+$。

首先推导一些界。对任意 $\gamma \in \mathcal{H}^k$，根据命题 3.1，我们有$d(T^l(\gamma x)\ T^l(\gamma x')) \le \lambda^{k-l} d(x,x')$ 对所有整数 $0 \le l \le k$。利用 $\mathrm{Lip}^{\mathrm{e}}\big(\mathscr{F}^{(a)}\big) \le C_1'$，我们有

$$\begin{aligned} \left|\mathscr{F}_k^{(a)}(\gamma x) - \mathscr{F}_k^{(a)}(\gamma x')\right| &\le \sum_{l=0}^{k-1} \left|\mathscr{F}^{(a)}(T^l(\gamma x)) - \mathscr{F}^{(a)}(T^l(\gamma x'))\right| \\ &\le \sum_{l=0}^{k-1} C_1' \lambda^{k-l} d(x,x') \le C_2 d(x,x'). \end{aligned} \tag{41}$$

结合对所有 $z \in \mathbb{C}$ 都成立的不等式 $|1 - e^z| \le e^{\Re z}|z|$，我们得到

$$\left|1 - e^{\mathscr{F}_k^{(a)}(\gamma x') - \mathscr{F}_k^{(a)}(\gamma x)}\right| \le e^{C_2 d(x,x')} C_2 d(x,x') \le \frac{A_0}{2} \delta_{1,\varrho} d(x,x'). \tag{42}$$

为证明性质（1），假设 $h \in \mathrm{Lip}_d(\Lambda_+, \mathbb{R})$ 和 $B > 0$ 满足引理中的条件。利用式（41）和（42），我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{L}_a^k(h)(x) - \mathcal{L}_a^k(h)(x')\right| \\
\leq &\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^k} \left| e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} h(\gamma x) - e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x')} h(\gamma x') \right| \\
\leq &\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^k} \left( \left| 1 - e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x') - \mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} \right| e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} h(\gamma x) + e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x')} |h(\gamma x) - h(\gamma x')| \right) \\
\leq &\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^k} \left( A_0 d(x,x') e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} h(\gamma x) + A_0 e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} B h(\gamma x) d(\gamma x, \gamma x') \right) \\
\leq &(A_0 + A_0 B\lambda^k) d(x,x') \sum_{\gamma\in\mathcal{H}^k} e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} h(\gamma x) \\
= &A_0 (B\lambda^k + 1) \mathcal{L}_a^k(h)(x) d(x,x')
\end{aligned}$$

其中所有求和均因指数尾性质而收敛（参见命题 3.1中的性质（5））。

为证明性质（2），设 $H \in \mathrm{Lip}\big(\Lambda_+, V^{\oplus_{\dim(\rho}}{}^{\rho}\big)$, $h \in \mathrm{Lip}_d(\Lambda_+, \mathbb{R})$，并且$B > 0$ 与引理中的情形相同。按照式（41) 中类似但更复杂的计算，利用 $\mathrm{Lip}^{\mathrm{e}}(\mathcal{G}) \leq C_1'$ （参见 [ Sar22b，引理 5.2。3]）可得，对任意 $\gamma \in \mathcal{H}^k$，均有

$$\begin{aligned}
\|\rho_b(\mathcal{G}^k(\gamma x)^{-1}) - \rho_b(\mathcal{G}^k(\gamma x')^{-1})\|_{\mathrm{op}} &\leq \|\rho_b\| d_{AM}(\mathcal{G}^k(\gamma x), \mathcal{G}^k(\gamma x')) \\
&\leq 2C_2 \|\rho_b\| d(x,x').
\end{aligned} \tag{43}$$

因此，利用公式（41）–（43），我们得到

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{M}_{\xi,\rho}^k(H)(x) - \mathcal{M}_{\xi,\rho}^k(H)(x')\right\|_2 \\
\leq &\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^k} \left\| e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} \rho_b(\mathcal{G}^k(\gamma x)^{-1}) H(\gamma x) - e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x')} \rho_b(\mathcal{G}^k(\gamma x')^{-1}) H(\gamma x') \right\|_2 \\
\leq &\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^k} \Big( \left| 1 - e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x') - \mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} \right| e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} \|\rho_b(\mathcal{G}^k(\gamma x)^{-1}) H(\gamma x)\|_2 \\
&+ e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x')} \|(\rho_b(\mathcal{G}^k(\gamma x)^{-1}) - \rho_b(\mathcal{G}^k(\gamma x')^{-1})) H(\gamma x)\|_2 \\
&+ e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x')} \|\rho_b(\mathcal{G}^k(\gamma x')^{-1})(H(\gamma x) - H(\gamma x'))\|_2 \Big) \\
\leq &\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^k} \Big( \frac{A_0}{2} \delta_{1,\varrho} d(x,x') e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} \|H(\gamma x)\|_2 \\
&+ 2C_2 e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x')} \|\rho_b\| d(x,x') \|H(\gamma x)\|_2 \\
&+ e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x')} \|H(\gamma x) - H(\gamma x')\|_2 \Big) \\
\leq &\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^k} \Big( \frac{A_0}{2} \|\rho_b\| d(x,x') e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} \|H(\gamma x)\|_2 + \frac{A_0}{2} \|\rho_b\| e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} d(x,x') \|H(\gamma x)\|_2 \\
&+ A_0 B\lambda^k e^{\mathcal{F}_k^{(a)}(\gamma x)} h(\gamma x) d(x,x') \Big) \\
\leq &A_0 \big( B\lambda^k \mathcal{L}_a^k(h)(x) + \|\rho_b\| \mathcal{L}_a^k \|H\|(x) \big) d(x,x').
\end{aligned} \tag{44}$$

■

我们还需要下面的引理。

**引理 8.4**。对于所有 $r>0$，存在 $c>0$，使得对于所有 $x\in\Lambda_\Gamma\cap\Delta_0$，存在一个圆柱 $\mathtt{C}\subset B(x,r)$，满足 直径$(\mathtt{C})>c$，且 $\nu(\mathtt{C})>c$。

证明。设 $r>0$。由于 $\Lambda_\Gamma\cap\Delta_0$是紧的，它有一个有限覆盖 $\{B(x_j,r/2)\}_{j=1}^n$，其中 $\{x_j\}_{j=1}^n\subset\Lambda_\Gamma\cap\Delta_0$ 和 $n\in\mathbb{N}$。由引理 5.10，$B(x_j,r/2)$ 对所有 $1\le j\le n$ 都包含一个圆柱 $\mathtt{C}_j$。固定 $c=\min_{1\le j\le n}\min\{$直径$(\mathtt{C}_j)\ \nu(\mathtt{C}_j)\}$。于是引理成立，因为对于任意 $x\in\Lambda_\Gamma\cap\Delta_0$，球 $B(x,r)$ 对某个 $1\le j\le n$覆盖 $B(x_j,r/2)$。■

现在我们为 Dolgopyat 方法固定几个基本常数。回忆一下 $x_0\in\Lambda_+\subset\Delta_0$，它来自第 3.3 小节。固定 $\delta_0>0$ 使得

$$B(x_0,2\delta_0)\subset\Delta_0. \tag{45}$$

回忆一下 $\varepsilon_1$，它来自引理 4.2；以及 $\varepsilon_2$，它是在命题 5.8之后固定的。固定 $R_0>0$，它由命题 7.3给出。对于 $R_0$，固定 $\varepsilon_3\in(0,1)$ 使其为命题 $\eta$ 所给出的 6.1。固定正数常数

$$b_0=1, \tag{46}$$

$$E>\frac{2A_0}{\delta_{1,\varrho}}, \tag{47}$$

$$\delta_1<\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{14}<\varepsilon_3, \tag{48}$$

$$\epsilon_1<\min\left\{\delta_0C_{\mathrm{cyl}}^{-1}C_{\Delta_0}^{-1}e^{-R_0},\delta_1^{-1}\delta_0\cdot 8A_0C_{\mathrm{cyl}}C_{\Delta_0}e^{R_0},\frac{1}{\delta_1},\frac{\delta_1}{C_{\mathrm{BP}}^2},\frac{\delta_1\delta_{1,\varrho}}{C_{\mathrm{exp,BP}}}\right\}. \tag{49}$$

Fix

$$c_0>0 \tag{50}$$

使其为引理 8.4 针对 $r=\frac{\delta_1\epsilon_1}{8A_0C_{\mathrm{cyl}}C_{\Delta_0}e^{R_0}}$所给出的常数。固定

$$\mathtt{c}=c_0C_{\mathrm{cyl}}^{-1}C_{\Delta_0}^{-1}. \tag{51}$$

Fix

$$m\ge m_0\text{ such that }\lambda^m<\max\left\{\mathtt{c}e^{-2R_0},\frac{1}{8A_0},\frac{1}{8E\epsilon_1},\frac{\delta_1}{32E}\right\}. \tag{52}$$

固定 $\{\alpha_j\}_{j=0}^{j_0}\subset\mathcal{H}^m$ 以及相应的映射 $\{\mathrm{BP}_j:\ \Delta_0\times\Delta_0\to AM\}_{j=1}^{j_0}$，它由命题 5.8给出。再固定正数常数

$$T_0=\max\left\{\sup\left\{\left\|\mathscr{F}_m^{(a)}\big|_{\alpha_j\Delta_0}\right\|_\infty:|a|\le a_0'\right\}:j\in\{0,1,\dots,j_0\}\right\}, \tag{53}$$

$$\tau<\min\left\{\frac{1}{4},2Ee^{-R_0}\mathtt{c}C_{\mathrm{cyl}}^{-1}\min_{j\in\{0,1,\dots,j_0\}}\|d\alpha_j\|,\frac{\arccos\left(1-\frac{(\delta_1\epsilon_1)^2}{2}\right)^2}{16\cdot16e^{2T_0}}\right\}. \tag{54}$$

以下引理给出了 Dolgopyat 方法所需的抵消。证明方法与 [SW21引理 81] 相同，结合命题 5.8 （LNIC）、命题 6.1 （NCP）以及引理 4.2中的下界即可。然而，请注意，这对所有 $x\in\Delta_0$ 并不成立，且还需要满足 NCP 所带来的一个额外约束。因此，抵消只会出现在以这类 $x$ 或其配对点 $y$为中心的球上。

**引理 8.5**。对于所有 $(b,\rho)\in\widehat{M_0}(b_0)$，$x\in\Lambda_\Gamma\cap\Delta_0$ $B\left(\partial\Delta_0,\frac{\epsilon_1}{\|\rho_b\|}\right)$ 满足 $u_x a_{\log\|\rho_b\|}\in\Omega_{R_0}$，且 $\omega\in V^{\oplus_{\dim(\rho)}\rho}$ 满足 $\|\omega\|_2=1$，存在 $1\le j\le j_0$ 和 $y\in\Lambda_\Gamma\cap B\left(x,\frac{\epsilon_1}{\|\rho_b\|}\right)-B\left(x,\frac{\delta_1\epsilon_1}{\|\rho_b\|}\right)$，使得

$$\left\|d\rho_b\left(d(\mathrm{BP}_{j,x})_x(y-x)\right)(\omega)\right\|_2>7\delta_1\epsilon_1.$$

## 8.1. 良划分与 Dolgopyat 算子。

**定义 8.6**（划分、原子、更细、更粗）。A $\nu$-可测划分 $\mathcal{P}$ of$\Delta_0$ 是由互不相交的博雷尔子集 $\mathtt{C}\subset\Delta_0$ 组成的集合，满足

$$\nu\left(\bigcup_{\mathtt{C}\in\mathcal{P}}\mathtt{C}\right)=\nu(\Delta_0).$$

对于任意点 $x\in\Delta_0$，其原子 是包含 $x$ 的唯一元素，记作 $\mathcal{P}(x)\in\mathcal{P}$；若 $\mathcal{P}$ 中不存在这样的元素，则定义 $\mathcal{P}(x)=\varnothing$。对于两个 $\nu$-可测划分 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$，若对于任意 $\mathtt{D}\in\mathcal{Q}$，都存在 $\mathtt{C}\in\mathcal{P}$ 使得 $\mathtt{D}\subset\mathtt{C}$，则称 $\mathcal{Q}$ 比 $\mathcal{P}$ 更细，或称 $\mathcal{P}$ 比 $\mathcal{Q}$ 更粗，记作$\mathcal{Q}\succeq\mathcal{P}$。

对于所有 $(b,\rho)\in M_0(b_0)$，令 $\mathcal{P}_{(b,\rho)}$ 为 $\nu$-可测划分，它由 $\Delta_0$ 极大圆柱集$\mathtt{C}\subset\Delta_0$ 组成，且 $\mathrm{diam}(\mathtt{C})\le\frac{e^{R_0}}{\|\rho_b\|}$。根据定义（见第7节），有

$$\Omega^\dagger(\log\|\rho_b\|,R_0)=\left\{\mathtt{C}\in\mathcal{P}_{(b,\rho)}:\mathrm{diam}(\mathtt{C})\ge\frac{e^{-R_0}}{\|\rho_b\|}\right\}\tag{55}$$

**引理 8.7.** 对于$(b,\rho)\in M_0(b_0)$ 以及 $n\in\mathbb{N}$，有 $T^{-n}(\mathcal{P}_{(b,\rho)})\succeq\mathcal{P}_{(b,\rho)}$。

证明。令 $(b,\rho)\in M_0(b_0)$，且 $n\in\mathbb{N}$。令 $\mathtt{C}\in T^{-n}(\mathcal{P}_{(b,\rho)})$。则 $T^n(\mathtt{C})\in\mathcal{P}_{(b,\rho)}$，因此根据扩张性质，有

$$\mathrm{diam}(\mathtt{C})\le\mathrm{diam}(T^n(\mathtt{C}))\le\frac{e^{R_0}}{\|\rho_b\|}.$$

因此，根据 $\mathcal{P}_{(b,\rho)}$ 的定义，存在一个包含 $\mathtt{C}$ 的圆柱 $\mathtt{D}\in\mathcal{P}_{(b,\rho)}$。 ■

命题8.8 将引入可能发生抵消的子圆柱集。

**命题 8.8.** 令 $(b,\rho)\in\widehat{M_0}(b_0)$ 且 $\mathtt{J}\in\Omega^\dagger(\log\|\rho_b\|,R_0)$。存在$x_1\in\mathtt{J}\cap\Lambda_+$，使得 $B\left(x_1,\frac{\epsilon_1}{\|\rho_b\|}\right)\subset\mathtt{J}$，并且对于所有满足 $\|\omega\|_2=1$ 的 $\omega\in V^{\oplus_{\dim(\rho)}\rho}$，都存在 $1\le j\le j_0$ 和 $x_2\in\Lambda_+\cap B\left(x_1,\frac{\epsilon_1}{\|\rho_b\|}\right)-B\left(x_1,\frac{\delta_1\epsilon_1}{\|\rho_b\|}\right)$，使得

(1) $\left\|d\rho_b\left(d(\mathrm{BP}_{j,x_1})_{x_1}(x_2-x_1)\right)(\omega)\right\|_2\ge7\delta_1\epsilon_1$;
(2) *for all* $k\in\{1,2\}$, *there exists a* $T^{-m}(\mathcal{P}_{(b,\rho)})$*-measurable subset* $\mathtt{J}_k\subset\mathtt{J}\cap B\left(x_k,\frac{\delta_1\epsilon_1}{4A_0\|\rho_b\|}\right)$ *such that*

$$\mathrm{diam}(\mathtt{J}_k)>\mathsf{c}\,\mathrm{diam}(\mathtt{J}),\qquad\qquad\nu(\mathtt{J}_k)>\mathsf{c}\nu(\mathtt{J}).$$

证明。令（$b$，$\rho$）及 $\mathtt{J}$ 如命题所述。设 $\mathtt{J}=\gamma\Delta_0$，其中 $\gamma\in\mathcal{H}^n$且 $n\in\mathbb{N}$。由等式（55）和引理 7.2，可得

$$C_{\Delta_0}^{-1}e^{-R_0}\|\rho_b\|^{-1}\le\|d\gamma\|\le C_{\Delta_0}e^{R_0}\|\rho_b\|^{-1}.\tag{56}$$

取 $x_1 = \gamma x_0 \in \mathtt{J} \cap \Lambda_+$。回忆等式（ $B$（$x_0$, $2\delta_0$） $\subset \Delta_0$ 中的结论45）。对于$\delta_0' := \frac{\delta_0}{C_{\mathrm{cyl}} C_{\Delta_0} e^{R_0}}$，有

$$B\left(x_1, \frac{\epsilon_1}{\|\rho_b\|}\right) \subset B\left(x_1, \frac{\delta_0'}{\|\rho_b\|}\right) \subset \gamma B(x_0, \delta_0) \subset \mathtt{J}$$

由等式 (56)、类似于引理 3.5 的论证以及不等式$\epsilon_1 < \delta_0'$ (参见等式 (49))。由于 $x_1 \in \Omega(\log \|\rho_b\|, R_0)$，引理 7.1 给出 $u_{x_1} a_{\log \|\rho_b\|} \in \Omega_{R_0}$。设 $\omega$如命题中所述。利用引理 8.5 以及 $\Lambda_+ \subset \Delta_0$ 具有全测度这一事实，我们得到一点 $x_2$ 使得

$$x_2 \in \Lambda_+ \cap B\left(x_1, \frac{\epsilon_1}{\|\rho_b\|}\right) - B\left(x_1, \frac{\delta_1 \epsilon_1}{\|\rho_b\|}\right) \subset \mathtt{J} \cap \Lambda_+$$

并且性质（1）成立。

设 $k \in \{1, 2\}$。由引理 8.4 和等式 (50)，存在一个圆柱 $\mathtt{J}_k' \subset B\left(\gamma^{-1} x_k, \frac{\delta_1 \epsilon_1}{8 A_0 C_{\mathrm{cyl}} C_{\Delta_0} e^{R_0}}\right)$，其直径为 $\mathrm{diam}(\mathtt{J}_k') > c_0$，且 $\nu(\mathtt{J}_k') > c_0$。取 $\mathtt{J}_k = \gamma \mathtt{J}_k' \subset B\left(x_k, \frac{\delta_1 \epsilon_1}{4 A_0 \|\rho_b\|}\right)$，其中利用等式 (56) 和引理 3.5 得到该包含关系。再次利用引理 3.5 和等式 (51)，可得

$$\mathrm{diam}(\mathtt{J}_k) \geq C_{\mathrm{cyl}}^{-1} \|d\gamma\| \,\mathrm{diam}(\mathtt{J}_k') > c_0 C_{\mathrm{cyl}}^{-1} C_{\Delta_0}^{-1} \,\mathrm{diam}(\mathtt{J}) = \mathtt{c}\,\mathrm{diam}(\mathtt{J}), \tag{57}$$

$$\nu(\mathtt{J}_k) \geq C_{\mathrm{cyl}}^{-1} \|d\gamma\|^{\delta} \nu(\mathtt{J}_k') > c_0 C_{\mathrm{cyl}}^{-1} C_{\Delta_0}^{-1} \nu(\mathtt{J}) = \mathtt{c}\nu(\mathtt{J}). \tag{58}$$

利用方程（52），可得

$$\mathrm{diam}(T^m(\mathtt{J}_k)) \geq \lambda^{-m} \,\mathrm{diam}(\mathtt{J}_k) > \mathtt{c}\lambda^{-m} \,\mathrm{diam}(\mathtt{J}) \geq \frac{\mathtt{c}\lambda^{-m}}{e^{R_0}\|\rho_b\|} > \frac{e^{R_0}}{\|\rho_b\|}$$

这意味着 $T^m(\mathtt{J}_k)$ 是 $\mathcal{P}_{(b,\rho)}$-可测的。 ■

我们构造一个函数，用以指示在哪些子圆柱集中可以获得衰减。令 $(b, \rho) \in \widehat{M}_0(b_0)$, $\mathtt{J} \in \Omega^\dagger(\log \|\rho_b\|, R_0)$, 且 $H \in \mathrm{Lip}(\Lambda_+, V^{\oplus \dim(\rho)}_{\rho})$。引入以下记号：

- 记为 $x_1^{\mathtt{J},H} \in \mathtt{J}$ 命题 $x_1$ 8.8 所给出的，并将同一命题应用于单位向量

$$\omega = \frac{\rho_b\left(g^m\left(\alpha_0 x_1^{\mathtt{J},H}\right)^{-1}\right) H\left(\alpha_0 x_1^{\mathtt{J},H}\right)}{\left\|H\left(\alpha_0 x_1^{\mathtt{J},H}\right)\right\|_2} \in V_\rho^{\oplus \dim(\rho)}; \tag{59}$$

- 记为

$$x_2^{\mathtt{J},H} \in \Lambda_+ \cap B\left(x_1^{\mathtt{J},H}, \frac{\epsilon_1}{\|\rho_b\|}\right) \subset \mathtt{J} \cap \Lambda_+, \tag{60}$$

$$1 \leq j^{\mathtt{J},H} \leq j_0, \tag{61}$$

$$\mathtt{J}_k^H \subset \mathtt{J} \cap B\left(x_k^{\mathtt{J},H}, \frac{\delta_1 \epsilon_1}{4 A_0 \|\rho_b\|}\right), \tag{62}$$

相应的 $x_2$, $j$以及 $\mathtt{J}_k$ 命题 8.8 所给出的，对所有 $k \in \{1, 2\}$;

- 定义 $\Xi(b, \rho) = \Omega^\dagger$(对数 $\|\rho_b\|, R_0$) $\times \{1, 2\} \times \{1, 2\}$;
- 对所有 $J \subset \Xi(b, \rho)$，定义 $\Omega_J^H = \bigcup_{(\mathtt{J},k,l) \in J} \mathtt{J}_k^H$;
- 定义 $\mathtt{J}_{k,1}^H = \alpha_0 \mathtt{J}_k^H$和 $\mathtt{J}_{k,2}^H = \alpha_{j^{\mathtt{J},H}} \mathtt{J}_k^H$对所有 $k \in \{1, 2\}$;

- 在 $\Lambda_+$ 上定义如下函数:

$$\beta_J^H = \chi_{\Lambda_+} - \tau \sum_{(\mathtt{J},k,l)\in J} \chi_{\mathtt{J}_{k,l}^H}, \tag{63}$$

其中，我们将特征函数 $\chi_{\mathtt{J}_{k,l}^H}$ 视为定义在 $\Lambda_+$上的函数。

注意， $x_{,1}^{\mathtt{J},H}$ 和 $\mathtt{J}_1^H$ 均不依赖于 $H$。尽管 $\beta_J^H$ 是利用特征函数定义的，但它相对于确实是 Lipschitz 的，这正是距离函数 $D$的优势。更确切地说，利用引理 3.5，我们得到以下引理。

**引理 8.9**。 设$(b,\rho) \in \widehat{M}_0(b_0)$、 $J \subset \Xi(b,\rho)$，且 $H \in \mathrm{Lip}\big(\Lambda_+, V^{\oplus_{\dim(\rho}}{}^{\rho}\big)$。则 $\beta_J^H \in \mathrm{Lip}_D(\Lambda_+,\mathbb{R})$ 满足

$$\mathrm{Lip}_D\big(\beta_J^H\big) \le \frac{\tau\|\rho_b\|e^{R_0}}{\mathtt{c}C_{\mathrm{cyl}}^{-1}\min_{j\in\{0,1,\dots,j_0\}}\|d\alpha_j\|}. \tag{64}$$

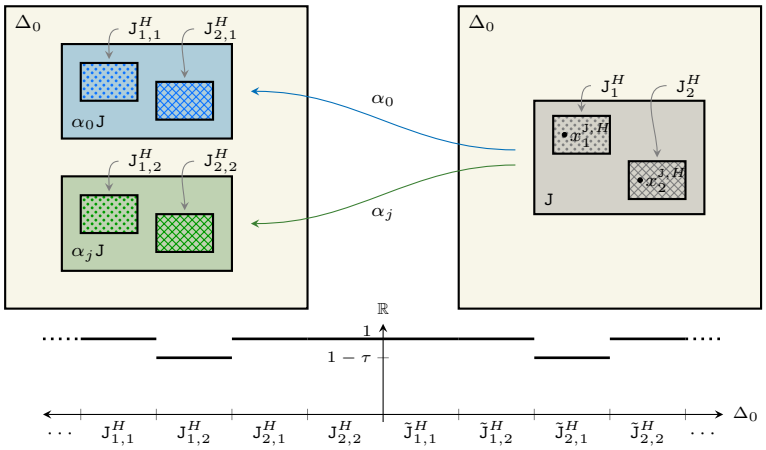



FIGURE 8. $\beta_J^H$的构造示意图。为简单起见，图中的柱集形状和大小均作了简化。

**定义8.10** （Dolgopyat算子）。 对于所有满足 $|a| < a_0'$的 $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$，若 $(b,\rho) \in \widehat{M}_0(b_0)$，则对于所有 $J \subset \Xi(b,\rho)$ 以及 $H \in \mathrm{Lip}\big(\Lambda_+, V^{\oplus_{\dim(\rho}}{}^{\rho}\big)$，我们定义*Dolgopyat*算子$\mathcal{N}_{a,J}^H$: $\mathrm{Lip}_D(\Lambda_+,\mathbb{R}) \to \mathrm{Lip}_D(\Lambda_+,\mathbb{R})$，其定义为

$$\mathcal{N}_{a,J}^H(h) = \mathcal{L}_a^m\big(\beta_J^H h\big) \qquad \text{for all } h \in \mathrm{Lip}_D(\Lambda_+,\mathbb{R}).$$

事实上，$\mathcal{N}_{a,J}^H(h)$ 关于 $D$对于任意 $h \in \mathrm{Lip}_D(\Lambda_+,\mathbb{R})$ 满足 Lipschitz 条件这一事实，可以仿照引理 8.3加以证明。

**引理 8.11**。 存在 $a_0 > 0$, $\eta \in (0,1)$，以及 $C > 0$，使得对于所有满足 $|a| < a_0$ 的 $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$，若 $(b,\rho) \in M_0(b_0)$，则对于所有 $J \subset \Xi(b,\rho)$和 $(H,h) \in \mathrm{Lip}\big(\Lambda_+, V^{\oplus_{\dim(\rho}}{}^{\rho}\big) \times \mathrm{Lip}_D(\Lambda_+,\mathbb{R})$，有

$$\mathcal{N}_{a,J}^H(h)^2(x) \le \begin{cases} \eta\mathcal{L}_0^m(h^2)(x), & x \in \Omega_J^H \\ \zeta(a)\mathcal{L}_0^m(h^2)(x), & x \in \Lambda_+ - \Omega_J^H, \end{cases}$$

其中 $\zeta$： $[-a_0,a_0] \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，且满足 $\zeta(0) = 1$。

证明。回忆等式 $T_0$ 中的常数（53）。固定 $\eta=\sqrt{1-\tau e^{-T_0}}$。我们引入函数 $\zeta$：$[-a_0',a_0']\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$\zeta(a)=(\lambda_a^{-2}\lambda_{2a})^m\left\|\frac{h_0}{h_a}\right\|_\infty\left\|\frac{h_a}{h_0}\right\|_\infty\left\|\frac{h_a}{h_{2a}}\right\|_\infty\left\|\frac{h_{2a}}{h_a}\right\|_\infty$$

其目的很快就会明确。由于 $\zeta$ 是连续的，且 $\zeta(0)=1$，我们可以固定一个充分小的 $a_0\in(0,a_0'/2)$，使得对于所有 $|a|<a_0$，$\eta\zeta(a)\le 1$。令 $\xi$、$(b,\rho)$、$J$ 以及 $(H,h)$ 如引理中所述。由柯西–施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{a,J}^H(h)^2&=\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^m}e^{\mathscr{F}_m^{(a)}(\gamma x)}\beta_J^H(\gamma x)h(\gamma x)\right)^2\\&\le\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^m}e^{(\mathscr{F}_m^{(a)}-a\mathscr{R}_m)(\gamma x)}\beta_J^H(\gamma x)^2\right)\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{H}^m}e^{(\mathscr{F}_m^{(a)}+a\mathscr{R}_m)(\gamma x)}h(\gamma x)^2\right)\\&\le\zeta(a)\mathcal{L}_{2a}^m\big(\big(\beta_J^H\big)^2\big)\mathcal{L}_0^m(h^2).\end{aligned}$$

注意，由于转移算子的归一化，$\mathcal{L}_{2a}^m(\chi_{\Lambda_+})=\chi_{\Lambda_+}$。因此，$\mathcal{L}_{2a}^m\big(\big(\beta_J^H\big)^2\big)\le 1$，从而得到平凡界 $\mathcal{N}_{a,J}^H(h)^2\le\zeta(a)\mathcal{L}_0^m(h^2)$。现在，令 $x\in\Omega_J^H$。于是，对于某个 $(J,k,l)\in J$，$x\in\mathrm{J}_k^H$。利用 $\big(\beta_J^H\big)^2\le\chi_{\Lambda_+}-\tau\chi_{\mathrm{J}_{k,l}^H}$ 以及公式 (53)，我们有

$$\mathcal{L}_{2a}^m\big(\big(\beta_J^H\big)^2\big)(x)\le\mathcal{L}_{2a}^m(\chi_{\Lambda_+})(x)-\tau\mathcal{L}_{2a}^m\left(\chi_{\mathrm{J}_{k,l}^H}\right)(x)\le 1-\tau e^{-T_0}=\eta^2.$$

因此，将此结果代入前面的不等式可得

$$\mathcal{N}_{a,J}^H(h)^2(x)\le\eta^2\zeta(a)\mathcal{L}_0^m(h^2)(x)\le\eta\mathcal{L}_0^m(h^2)(x).$$

■

8.2. **锥不变性**。首先，我们按照 Tsujii–Zhang [TZ23] 和 Dolgopyat [Dol98]的定义，引入以下两个相关的稠密性概念。

**定义 8.12**（稠密）。设 $\mathcal{P}$ 是 $\nu$-可测划分，定义在 $\Delta_0$上。若子集$B\subset\Delta_0$ 满足 $\nu\big(B\triangle\bigcup_{x\in B}\mathcal{P}(x)\big)=0$，则称其为 $\mathcal{P}$-可测的。此外，若存在某个 $c>0$，使得 $\nu$-可测子集 $A\subset B$ 在 $B$ 中是（$\mathcal{P}$，$c$）-稠密的，则称其为

$$\nu(A\cap\mathcal{P}(x))>c\nu(\mathcal{P}(x))\qquad\text{for }\nu\text{-almost all }x\in B.$$

**定义 8.13**（稠密指标集）。设 $(b,\rho)\in M_0(b_0)$。若对于所有 $\mathrm{J}\in\Omega^\dagger(\log\|\rho_b\|,R_0)$，都存在 $(k,l)\in\{1,2\}\times\{1,2\}$使得 $(\mathrm{J},k,l)\in J$，则称 $J\subset\Xi(b,\rho)$ 为稠密指标集。

对于所有 $(b,\rho)\in M_0(b_0)$，如果 $J\subset\Xi(b,\rho)$ 是一个稠密指标集，那么根据命题8.8，我们有 $\Omega_J^H$在 $\Omega(\log\|\rho_b\|,R_0)$ 中是（$\mathcal{P}_{(b,\rho)}$，c）-稠密的，对于所有 $H\in\mathrm{Lip}\big(\Lambda_+,V^{\oplus\dim(\rho)}\big)$。

定义 $\mathcal{J}(b,\rho)=\{J\subset\Xi(b,\rho)\colon J\text{是一个稠密指标集}\}$。本小节中，我们引入一个锥，并证明对于某个 $J\in\mathcal{J}(b,\rho)$，由带整体单值性的传递算子和 Dolgopyat 算子组成的一对算子会保持该锥不变。这是 Dolgopyat 方法的核心，我们借助命题 8.8 获得带整体单值性的传递算子的各项之和的抵消。该命题依据命题 5.8 (LNIC)、命题6.1 (NCP)，以及引理4.2中的下界。

对于所有 $(b,\ \rho) \in M_0(b_0)$，定义锥

$$\mathcal{C}_{(b,\rho)}(\Lambda_+) = \left\{ \begin{array}{l} (H,h) \in \mathrm{Lip}\big(\Lambda_+, V_\rho^{\oplus \dim(\rho)}\big) \times \mathrm{Lip}_D(\Lambda_+, \mathbb{R}) : \\ (1) \quad h > 0, \\ (2) \quad |h(x) - h(x')| \le E\|\rho_b\| h(x) D(x,x') \ \text{ for all } \ x, x' \in \Lambda_+, \\ (3) \quad \|H(x)\|_2 \le h(x) \ \text{for all }, x \in \Lambda_+, \\ (4) \quad \|H(x) - H(x')\|_2 \le E\|\rho_b\| h(x) D(x,x') \ \text{ for all } \ x, x' \in \Lambda_+ \end{array} \right\} \tag{65}$$

使用式 $E$ （47）中定义的常数。

命题 *8.14*。设 $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$，其中 $|a| < a_0'$，并假设 $(b,\rho) \in M_0(b_0)$。对于所有 $(H,h) \in \mathcal{C}_{(b,\rho)}(\Lambda_+)$，存在 $J \in \mathcal{J}(b,\rho)$，使得 $\big(\mathcal{M}_{\xi,\rho}^m(H)\mathcal{N}_{a,J}^H(h)\big) \in \mathcal{C}_{(b,\rho)}(\Lambda_+)$。

本小节余下部分的目标是证明命题 8.14。式（65）中性质（1）的保持是显然的。式（65）中性质 (2) 和 (4) 的保持可由以下两个引理推出。证明与 [SW21 中的引理 9.1 和 9.2]类似。它们与原始的 [Dol98中的命题 6 和引理 11]相对应。性质（3）的保持将在后文给出。

引理 *8.15*。对于所有 $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$ 满足 $|a| < a_0'$ 的情形，若 $(b,\ \rho) \in M_0(b_0)$，且若 $h \in Lip_D(\Lambda_+,\ \mathbb{R})$ 满足公式（65）中的性质（2），则对于所有 $J \subset \Xi(b,\ \rho)$ 以及 $H \in Lip(\Lambda_+,\ V^{\oplus} dim\ (\rho^{\ \rho}))$，$\mathcal{N}_a^H,\ _J(h)$ 也满足公式（65）中的性质（2）。

证明。令 $\xi$，$(b,\ \rho)$，$h$，$J$，以及 $H$ 均如引理中所述。令 $x,\ x' \in \Lambda_+$。利用公式（54）和（64），以及 $\beta_J^H \ge 1 - \tau$，可得

$$\begin{aligned} \big|\big(\beta_J^H h\big)(x) - \big(\beta_J^H h\big)(x')\big| &\le |h(x) - h(x')| + h(x)\big|\beta_J^H(x) - \beta_J^H(x')\big| \\ &\le E\|\rho_b\| h(x) D(x,x') + h(x) \cdot \frac{\tau \|\rho_b\| e^{R_0}}{\mathsf{c} C_{\mathrm{cyl}}^{-1} \min_{j \in \{0,1,\ldots,j_0\}} \|d\alpha_j\|} \cdot D(x,x') \\ &\le 3E\|\rho_b\| \cdot \frac{\beta_J^H(x)}{1-\tau} \cdot h(x) D(x,x') \\ &\le 4E\|\rho_b\| \big(\beta_J^H h\big)(x) D(x,x'). \end{aligned}$$

现在应用引理 8.3 以及公式（47）和（52），可得

$$\begin{aligned} \big|\mathcal{N}_{a,J}^H(h)(x) - \mathcal{N}_{a,J}^H(h)(x')\big| &= \big|\mathcal{L}_a^m\big(\beta_J^H h\big)(x) - \mathcal{L}_a^m\big(\beta_J^H h\big)(x')\big| \\ &\le A_0(4E\|\rho_b\|\lambda^m + 1)\mathcal{L}_a^m\big(\beta_J^H h\big)(x) D(x,x') \\ &= E\|\rho_b\| \mathcal{N}_{a,J}^H(h)(x) D(x,x'). \end{aligned}$$

■

引理 *8.16*。对于所有满足 $|a| < a_0'$ 的 $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$，若 $(b,\rho) \in M_0(b_0)$，且若 $(H,h) \in Lip\big(\Lambda_+, V^{\oplus} dim(\rho^{\ \rho})\big) \times Lip_D(\Lambda_+, \mathbb{R})$ 满足公式（65）中的性质 *(3)* 和性质 *(4)*，则对于所有 $J \subset \Xi(b,\rho)$，$\big(\mathcal{M}_{\xi,\rho}^m(H)\mathcal{N}_{a,J}^H(h)\big)$ 也满足公式（65）中的性质 *(4)*。

证明。设 $\xi$，$(b,\rho)$，$(H,h)$，以及 $J$如引理中所述。设 $x,x'\in\Lambda_+$。应用引理 8.3 以及公式（47）、（52）和（54），并利用 $\beta_J^H\geq 1-\tau$，可得

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{M}_{\xi,\rho}^m(H)(x)-\mathcal{M}_{\xi,\rho}^m(H)(x')\right\|_2\\
&\leq A_0\left(E\|\rho_b\|\lambda^m\mathcal{L}_a^m(h)(x)+\|\rho_b\|\mathcal{L}_a^m(\|H\|_2)(x)\right)D(x,x')\\
&\leq A_0\left(\frac{E\|\rho_b\|}{8A_0}+\frac{E\|\rho_b\|}{2A_0}\right)\mathcal{L}_a^m(h)(x)D(x,x')\\
&\leq\left(\frac{E\|\rho_b\|}{8(1-\tau)}+\frac{E\|\rho_b\|}{2(1-\tau)}\right)\mathcal{L}_a^m\left(\beta_J^H h\right)(x)D(x,x')\\
&\leq E\|\rho_b\|\mathcal{N}_{a,J}^H(h)(x)D(x,x').
\end{aligned}$$

■

在式（65）中保持性质（3）至关重要，前面提到的抵消正是在此发生的。这可由接下来的四个引理推出。对于所有满足 $|a|<a_0'$ 的 $\xi=a+ib\in\mathbb{C}$，若 $(b,\rho)\in\widehat{M_0}(b_0)$，则对于所有 $(H,h)\in\mathrm{Lip}(\Lambda_+,V^{\oplus\dim(\rho)})\times\mathrm{Lip}_D(\Lambda_+,\mathbb{R})$，以及 $1\leq j\leq j_0$，我们定义函数 $\chi_{j,1}^{[\xi,\rho,H,h]},\chi_{j,2}^{[\xi,\rho,H,h]}:\Lambda_+\to\mathbb{R}$，定义如下

$$\begin{aligned}
&\chi_{j,1}^{[\xi,\rho,H,h]}(x)\\
&=\frac{\left\|e^{\mathcal{F}_m^{(a)}(\alpha_0x)}\rho_b(\mathcal{G}^m(\alpha_0x)^{-1})H(\alpha_0x)+e^{\mathcal{F}_m^{(a)}(\alpha_jx)}\rho_b(\mathcal{G}^m(\alpha_jx)^{-1})H(\alpha_jx)\right\|_2}{(1-\tau)e^{\mathcal{F}_m^{(a)}(\alpha_0x)}h(\alpha_0x)+e^{\mathcal{F}_m^{(a)}(\alpha_jx)}h(\alpha_jx)},\\
&\chi_{j,2}^{[\xi,\rho,H,h]}(x)\\
&=\frac{\left\|e^{\mathcal{F}_m^{(a)}(\alpha_0x)}\rho_b(\mathcal{G}^m(\alpha_0x)^{-1})H(\alpha_0x)+e^{\mathcal{F}_m^{(a)}(\alpha_jx)}\rho_b(\mathcal{G}^m(\alpha_jx)^{-1})H(\alpha_jx)\right\|_2}{e^{\mathcal{F}_m^{(a)}(\alpha_0x)}h(\alpha_0x)+(1-\tau)e^{\mathcal{F}_m^{(a)}(\alpha_jx)}h(\alpha_jx)}
\end{aligned}$$

对于所有 $x\in\Lambda_+$。这些函数用于编码这样一种情形：当它们至多为 1 时，分子中的向量之间会发生抵消。第二个下标表示抵消发生在哪一个逆分支 $\alpha_0$ 或 $\alpha_j$ 上。

以下引理的证明与 [SW21，引理 98]类似。它与原始的 [Dol98，引理 14]相仿。

**引理 8.17**。设 $(b,\rho)\in M_0(b_0)$。假设 $(H,h)\in\mathcal{C}_{(b,\rho)}(\Lambda_+)$。那么，对于所有 $(\mathtt{J},k,l)\in\Xi(b,\rho)$，令 $j=0$ *if* $l=1$ *and* $j=j^{\mathtt{J},H}$ *if* $l=2$，则有

$$\frac{1}{2}\leq\frac{h(\alpha_jx)}{h(\alpha_jx')}\leq 2\qquad \textit{for all } x,x'\in\mathtt{J}_k^H$$

并且以下两种情况至少有一种成立

*(1)* $\|H(\alpha_jx)\|_2\leq\frac{3}{4}h(\alpha_jx)$ 对所有 $x\in\mathtt{J}_k^H$ 均成立；
*(2)* $\|H(\alpha_jx)\|_2\geq\frac{1}{4}h(\alpha_jx)$ 对所有 $x\in\mathtt{J}_k^H$ 均成立。

对于任意 $k\geq 2$，记 $\Theta(w_1,w_2)=\arccos\left(\frac{\langle w_1,w_2\rangle}{\|w_1\|\cdot\|w_2\|}\right)\in[0,\pi]$ 为 $w_1$与 $w_2\in\mathbb{R}^k-\{0\}$之间的夹角，其中使用标准内积和范数。以下是欧几里得几何中的一个基本引理（证明见 [Sar22b，引理 5.4。9]）。

**引理 8.18**。设 $k \geq 2$。若 $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^k - \{0\}$ 使得 $\Theta(w_1, w_2) \geq \alpha$ 且 $\frac{\|w_1\|}{\|w_2\|} \leq L$ 对于某些 $\alpha \in [0, \pi]$ 和 $L \geq 1$，则有

$$\|w_1 + w_2\| \leq \left(1 - \frac{\alpha^2}{16L}\right) \|w_1\| + \|w_2\|.$$

回顾方程 (60)–(62)，指标 $1 \leq j^{\mathrm{J},H} \leq j_0$ 表示，对于 $H \in \mathrm{Lip}(\Delta_0, V^{\oplus \dim(\rho)})$，应比较逆分支 $\alpha_0$ 和 $\alpha_{j^{\mathrm{J},H}}$，以便在 J 内获得抵消；这种抵消发生于 $\mathrm{J}_1^H$ 或 $\mathrm{J}_2^H$。

引理 *8.19*。设 $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$，其中 $|a| < a_0'$ 且 $(b, \rho) \in M_0(b_0)$。假设 $(H, h) \in \mathcal{C}_{(b,\rho)}(\Lambda_+)$。对于所有 $J \in \Omega^\dagger(\log \|\rho_b\|, R_0)$，记 $j = j^{\mathrm{J},H}$，则存在 $(k, l) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ 使得 $\chi_{j\,l}^{[\xi,\rho,H,h]}$，并且对所有 $x \in \mathrm{J}_k^H \cap \Lambda_+$，$(x) \leq 1$。

证明。设 $\xi$、$(b, \rho)$、$(H, h)$ 和 J 如引理中所述。为简化记号，我们将 $x^{\mathrm{J},H}_{,k}$ 对所有 $k \in \{1, 2\}$ 记作 $x_k$，并将 $j^{\mathrm{J},H}$ 记作 $j$。

现在，若引理 8.17 中的备选情形（1）对某个 $(k, l) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ 的 $(\mathrm{J}\ k, l) \in \Xi(b, \rho)$ 成立，则可以验证，对于所有 $x \in \mathrm{J}_k^H \cap \Lambda_+$，$\chi_{j\,l}^{[\xi,\rho,H,h]}$、$(x) \leq 1$。否则，引理 8.17 中的备选情形（2）对 (J, 1, 1)、(J, 1, 2)、(J, 2, 1)、(J, 2, 2) $\in \Xi(b, \rho)$ 成立。我们希望使用引理 8.18，但首先需要为相对角和相对大小建立界。先从相对角开始。

对所有 $x \in \Lambda_+$ ~~和 $\ell \in \{0, j\}$~~，定义 $\omega_\ell(x) = {}^{H(\alpha_\ell x)}/_{\|H(\alpha_\ell x)\|_2}$ 以及 $\phi_\ell(x) = \mathscr{g}^m(\alpha_\ell x)$。令 $\ell \in \{0, j\}$。对于任意两点 $y, z \in (\mathrm{J}_1^H \sqcup \mathrm{J}_2^H) \cap \Lambda_+$，不失一般性，我们可以假设 $\|H(\alpha_\ell y)\|_2 \leq \|H(\alpha_\ell z)\|_2$。利用正弦定理、引理 8.17 中的备选情形（2）以及式（52）、（60）和（65），可得

$$\begin{aligned}
\sin(\Theta(\omega_\ell(y), \omega_\ell(z))) &\leq \frac{\|H(\alpha_\ell y) - H(\alpha_\ell z)\|_2}{\max\{\|H(\alpha_\ell y)\|_2, \|H(\alpha_\ell z)\|_2\}} \\
&\leq \frac{E\|\rho_b\| h(\alpha_\ell z) D(\alpha_\ell y, \alpha_\ell z)}{\|H(\alpha_\ell z)\|_2} \\
&\leq 4E\|\rho_b\| \cdot \frac{\epsilon_1 \lambda^m}{\|\rho_b\|} \\
&\leq 4E\epsilon_1 \lambda^m \in (0, 1/2),
\end{aligned}$$

利用余弦定理和式（49）和（52），可得

$$\begin{aligned}
\|\omega_\ell(y) - \omega_\ell(z)\| &= \sqrt{2 - 2\cos(\Theta(\omega_\ell(y), \omega_\ell(z)))} \\
&= \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \sin^2(\Theta(\omega_\ell(y), \omega_\ell(z)))}} \\
&\leq \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - (4E\epsilon_1 \lambda^m)^2}} \\
&\leq \frac{\delta_1 \epsilon_1}{4}.
\end{aligned} \tag{66}$$

对于所有 $x \in \Lambda_+$ 和 $\ell \in \{0, j\}$，定义

$$\begin{aligned}
V_\ell(x) &= e^{\mathscr{F}_m^{(a)}(\alpha_\ell x)} \rho_b(\phi_\ell(x)^{-1}) H(\alpha_\ell x), \\
\hat{V}_\ell(x) &= \frac{V_\ell(x)}{\|V_\ell(x)\|_2} = \rho_b(\phi_\ell(x)^{-1}) \omega_\ell(x).
\end{aligned}$$

利用式（66），我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left\|\hat{V}_0(x_2)-\hat{V}_j(x_2)\right\|_2 \\
&=\|\rho_b(\phi_0(x_2)^{-1})\omega_0(x_2)-\rho_b(\phi_j(x_2)^{-1})\omega_j(x_2)\|_2 \\
&=\|\rho_b(\phi_j(x_2)\phi_0(x_2)^{-1})\omega_0(x_2)-\omega_j(x_2)\|_2 \\
&\geq\|\rho_b(\phi_j(x_2)\phi_0(x_2)^{-1})\omega_0(x_1)-\omega_j(x_1)\|_2 \\
&\quad-\|\rho_b(\phi_j(x_2)\phi_0(x_2)^{-1})\omega_0(x_2)-\rho_b(\phi_j(x_2)\phi_0(x_2)^{-1})\omega_0(x_1)\|_2 \\
&\quad-\|\omega_j(x_2)-\omega_j(x_1)\|_2 \\
&=\|\rho_b(\phi_j(x_2)\phi_0(x_2)^{-1})\omega_0(x_1)-\omega_j(x_1)\|_2-\|\omega_0(x_2)-\omega_0(x_1)\|_2 \\
&\quad-\|\omega_j(x_2)-\omega_j(x_1)\|_2 \\
&\geq\|\rho_b(\phi_j(x_2)\phi_0(x_2)^{-1})\omega_0(x_1)-\rho_b(\phi_j(x_1)\phi_0(x_1)^{-1})\omega_0(x_1)\|_2 \\
&\quad-\|\rho_b(\phi_j(x_1)\phi_0(x_1)^{-1})\omega_0(x_1)-\omega_j(x_1)\|_2-\delta_1\epsilon_1 \\
&=\|\rho_b(\phi_0(x_1)^{-1})\omega_0(x_1)-\rho_b(\phi_0(x_1)^{-1}\phi_0(x_2)\phi_j(x_2)^{-1}\phi_j(x_1)\phi_0(x_1)^{-1})\omega_0(x_1)\|_2 \\
&\quad-\|\rho_b(\phi_0(x_1)^{-1})\omega_0(x_1)-\rho_b(\phi_j(x_1)^{-1})\omega_j(x_1)\|_2-\delta_1\epsilon_1 \\
&\geq\|\rho_b(\phi_0(x_1)^{-1})\omega_0(x_1)-\rho_b(\mathrm{BP}_j(x_1,x_2))\rho_b(\phi_0(x_1)^{-1})\omega_0(x_1)\|_2 \\
&\quad-\left\|\hat{V}_0(x_1)-\hat{V}_j(x_1)\right\|_2-\delta_1\epsilon_1.
\end{aligned}
$$

回顾一下，我们在式（59）中，对单位向量 $\omega=\rho_b(\phi_0(x_1)^{-1})\omega_0(x_1)$ 应用了命题 8.8 。令 $Z=d(\mathrm{BP}_{j,x_1})_{x_1}(x_2-x_1)$。继续估计上面的第一项，我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\omega-\rho_b(\mathrm{BP}_j(x_1,x_2))(\omega)\|_2\geq\|\omega-\rho_b(\exp(Z))(\omega)\|_2-\|\rho_b(\exp(Z))(\omega)-\rho_b(\mathrm{BP}_j(x_1,x_2))(\omega)\|_2\geq\|\omega-\exp(d\rho_b(Z))(\omega)\|_2-\|\rho_b\|\cdot d_{AM}(\exp(Z),\mathrm{BP}_j(x_1,x_2))\geq\|d\rho_b(Z)(\omega)\|_2-\|\rho_b\|^2\|Z\|^2-\|\rho_b\|\cdot d_{AM}(\exp(Z),\mathrm{BP}_j(x_1,x_2))\geq\|d\rho_b(Z)(\omega)\|_2-\|\rho_b\|^2C_{\mathrm{BP}}^2d(x_1,x_2)^2-C_{\exp,\mathrm{BP}}\cdot\|\rho_b\|\cdot d(x_1,x_2)^2\text{ (引理 5.11)}\geq 7\delta_1\epsilon_1-\delta_1\epsilon_1-\delta_1\epsilon_1\geq 5\delta_1\epsilon_1.\text{ (由命题 8.8 和式（49）可得）}
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\left\|\hat{V}_0(x_1)-\hat{V}_j(x_1)\right\|_2+\left\|\hat{V}_0(x_2)-\hat{V}_j(x_2)\right\|_2\geq 4\delta_1\epsilon_1.
$$

这意味着存在 $k\in\{1,2\}$，使得

$$
\left\|\hat{V}_0(x_k)-\hat{V}_j(x_k)\right\|_2\geq 2\delta_1\epsilon_1.
$$

对于任意 $x\in\mathrm{J}_k^H\cap\Lambda_+$ 和 $\ell\in\{0,j\}$，利用公式（43）、（49）和（66）中的估计，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left\|\hat{V}_\ell(x_k)-\hat{V}_\ell(x)\right\|_2 \\
&\leq\|(\rho_b(\phi_\ell(x_k)^{-1})-\rho_b(\phi_\ell(x)^{-1}))\omega_\ell(x)\|_2+\|\rho_b(\phi_\ell(x)^{-1})(\omega_\ell(x_k)-\omega_\ell(x))\|_2 \\
&\leq A_0\|\rho_b\|\cdot\|x-x_k\|+\|\omega_\ell(x_k)-\omega_\ell(x)\|_2 \\
&\leq A_0\|\rho_b\|\cdot\frac{\delta_1\epsilon_1}{4A_0\|\rho_b\|}+\frac{\delta_1\epsilon_1}{4} \\
&=\frac{\delta_1\epsilon_1}{2}.
\end{aligned}
$$

因此，对于所有 $x \in \mathrm{J}_k^H \cap \Lambda_+$，我们有

$$\left\|\hat{V}_0(x) - \hat{V}_j(x)\right\|_2 \geq \delta_1\epsilon_1 \in (0,1).$$

然后利用余弦定理，所需的相对角界为

$$\Theta(V_0(x), V_j(x)) = \Theta(\hat{V}_0(x), \hat{V}_j(x)) \geq \arccos\left(1 - \frac{(\delta_1\epsilon_1)^2}{2}\right) \in (0,\pi).$$

我们证明相对大小的界。任取 $y_0 \in \mathrm{J}_k^H \cap \Lambda_+$。我们有 $h(\alpha_0 y_0) \leq h(\alpha_j y_0)$ 或 $h(\alpha_j y_0) \leq h(\alpha_0 y_0)$。令 $(\ell, \ell') = (0, j)$，并在第一种情形下令 $l = 1$；在第二种情形下令 $(\ell, \ell') = (j, 0)$，并令 $l = 2$。回想 $\rho_b$ 是酉表示，由引理 8.17 可得

$$\begin{aligned}\frac{\|V_\ell(x)\|_2}{\|V_{\ell'}(x)\|_2} &= \frac{e^{\mathscr{F}_m^{(a)}(\alpha_\ell x)}\|H(\alpha_\ell x)\|_2}{e^{\mathscr{F}_m^{(a)}(\alpha_{\ell'} x)}\|H(\alpha_{\ell'} x)\|_2} \leq \frac{4e^{\mathscr{F}_m^{(a)}(\alpha_\ell x) - \mathscr{F}_m^{(a)}(\alpha_{\ell'} x)} h(\alpha_\ell x)}{h(\alpha_{\ell'} x)} \\ &\leq \frac{16e^{2T_0} h(\alpha_\ell y_0)}{h(\alpha_{\ell'} y_0)} \leq 16e^{2T_0}\end{aligned}$$

对所有 $x \in \mathrm{J}_k^H \cap \Lambda_+$，这就是所需的相对大小界。现在利用引理 8.18、式（54）以及 $\|H\| \leq h$ 对于 $\|V_0(x) + V_j(x)\|_2$ 可得

$$\chi_{j,l}^{[\xi,\rho,H,h]}(x) \leq 1 \qquad \text{for all } x \in \mathrm{J}_k^H \cap \Lambda_+.$$

■

对于每个 $\mathrm{J} \in \Omega^\dagger$(对数 $\|\rho_b\|$, $R_0$)，我们使用引理 8.19 来找到 $(k, l)$，其并集给出 $J \in \mathcal{J}(b, \rho)$，对应于 $(H, h)$。根据定义和引理 8.19 可直接推导出以下引理（参见 [Sto11，引理 5。3] 和[SW21，引理 9。11]的证明）。

引理 *8.20*。对于所有满足 $|a| < a_0'$ 的 $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$，若 $(b, \rho) \in M_0(b_0)$，且若 $(H, h) \in \mathcal{C}_{(b,\rho)}(\Lambda_+)$，则存在 $J \in \mathcal{J}(b, \rho)$，使得 $\left(\mathcal{M}_{\xi,\rho}^m(H)\mathcal{N}_{a,J}^H(h)\right)$ 也满足公式（65）中的性质（3）。

结合引理 8.15、8.16和 8.20即可完成命题 8.14的证明。

8.3. **随机优势与定理 8.2的证明**。在本小节中，我们将各个组成部分结合起来，完成定理 8.2的证明。定理 8.2 中的性质（3）由命题 7.3 推出，但证明还需要用到 Tsujii–Zhang 的随机优势技巧 [TZ23，第 14]节。

我们先开始证明定理 8.2：在本小节余下部分中固定由引理8.11给出的 $\eta$和 $a_0$，并令 $\tilde{\kappa}$ 为与命题7.3给出的 $R_0$ 相对应的 $\kappa$。我们将在本小节末尾再固定定理8.2 的 $\kappa$。此外，在本小节余下部分中，令 $(b, \rho) \in \widehat{M}_0(b_0)$，且 $H \in \mathrm{Lip}\left(\Lambda_+, V^{\oplus \text{维数}(\rho)}_{\rho}\right)$。接着我们归纳定义

$$\begin{aligned}(H_0, h_0) &= \left(H, \|H\|_{1,\|\rho_b\|} \cdot \chi_{\Lambda_+}\right) \in \mathcal{C}_{(b,\rho)}(\Lambda_+), \\ (H_j, h_j) &= \left(\mathcal{M}_{\xi,\rho}^m(H_{j-1}), \mathcal{N}_{a,J_{j-1}}^{H_{j-1}}(h_{j-1})\right) \in \mathcal{C}_{(b,\rho)}(\Lambda_+) \qquad \text{for 全部 } j \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

其中 $J_{j-1} \in \mathcal{J}(b, \rho)$ 对应于 $(H_{j-1}, h_{j-1}) \in \mathcal{C}_{(b,\rho)}(\Lambda_+)$，对所有 $j \in \mathbb{N}$，均由命题 8.14 归纳给出。对所有 $j \in \mathbb{N}$，固定 $\Omega_j = \Omega_{J_{j-1}}^{H_{j-1}}$。定理 8.2 中的性质（1）和（2）分别由引理 8.11 和命题 8.14推出。

剩下要证明定理 8.2 中的性质（3）。我们针对当前情形对 [TZ23 的第 14] 节作了调整。为简化记号，令 $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{(b,\rho)}$, $\mathcal{P}' := T^{-m}(\mathcal{P}) \succeq \mathcal{P}$，并令 $\mathcal{P}$-可测集 $\Omega := \Omega(\log \|\rho_b\|, R_0)$。根据命题 8.8，对所有 $j \in \mathbb{N}$，集合 $\Omega_j \subset \Omega$ 是 $\mathcal{P}'$-可测的，且为 $(\mathcal{P}, c)$-稠密。为了继续进行，我们需要引理 8.21。定义

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \inf\{j \in \mathbb{N} : T^{jm}(x) \in \tilde{\Omega}\}, \\ \sigma(x) &= T^{\tau(x)m}(x), \end{aligned} \qquad \text{for all } x \in \Lambda_+,$$

并采用与方程（10）类似的记号。令 $n \in \mathbb{N}$，$\kappa \in (0, 1)$ 和 $\kappa' \in (0, 1)$ 为任意元素。我们引入以下集合

$$\begin{aligned} A_{n,\kappa} &= \{x \in \Lambda_+ : \#\{j \in \mathbb{N} : j \le n, T^{jm}(x) \in \Omega_j\} < \kappa n\} \subset \Lambda_+, \\ B_{n,\kappa} &= \{x \in \Lambda_+ : \#\{j \in \mathbb{N} : j \le n, T^{jm}(x) \in \tilde{\Omega}\} < \kappa n\} \subset A_{n,\kappa}, \\ C_{n,\kappa} &= \{x \in \Lambda_+ : \#\{j \in \mathbb{N} : j \le n, \sigma^j(x) \in \Omega_{\tau_j(x)}\} < \kappa n\} \subset \Lambda_+. \end{aligned}$$

我们首先推导方程（67），它给出了这些集合之间一个有用的关系。对所有 $x \in \Lambda_+ - B_{n,\kappa}$，都有 $\sigma^j(x) = T^{\tau_j(x)m}(x) \in \tilde{\Omega}$，对所有 $1 \le j \le \lceil \kappa n \rceil$ but $\tau^{\lceil \kappa n \rceil}(x) \le n$ 也成立。因此，对所有 $x \in A_{n,\kappa\kappa'} - B_{n,\kappa}$，有

$$\#\{j \in \mathbb{N} : j \le \lceil \kappa n \rceil, \sigma^j(x) \in \Omega_{\tau_j(x)}\} \le \#\{j \in \mathbb{N} : j \le n, T^{jm}(x) \in \Omega_j\} < \kappa\kappa' n.$$

因此，我们得到

$$A_{n,\kappa\kappa'} - B_{n,\kappa} \subset C_{\lceil \kappa n \rceil, \kappa'}. \tag{67}$$

现在，定理 8.2 中的性质（3）要求对$\nu(A_{n,\kappa\kappa'})$进行适当的控制。由于根据命题7.3，我们已经能够控制 $\nu(B_{n,\kappa})$，因此只需控制 $\nu(C_{\lceil \kappa n \rceil, \kappa'})$。以下引理将阐述这一内容。

**引理 8.21**。存在 $\kappa \in (0,1)$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\nu(C_{n,\kappa}) < e^{-\kappa n}$。

证明。固定 $\kappa = \mathfrak{c}^{C_{\text{cyl}}^2}$。定义集合 $\Upsilon_k = \{x \in \Delta_0 : \sigma^k(x) \in \Omega_{\tau_k(x)}\}$，对所有 $k \in \mathbb{N}$，以及划分 $\mathcal{Q}_k = \sigma^{-k}(\mathcal{P})$，对所有 $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$。我们首先说明，对所有 $k \in \mathbb{N}$，$\Upsilon_k$ 是 $\mathcal{Q}_{k+1}$-可测的。对于任意原子 $\mathcal{Q}_k(x)$，存在某个 $x \in \Delta_0$，使得存在一个逆分支 $\gamma \in \mathcal{H}^{\tau_k}(x)$，且 $x' \in \Delta_0$ 满足 $\mathcal{Q}_k(x) = \gamma\mathcal{Q}_0(x')$。注意，$\tau_k$ 在 $\mathcal{Q}_k(x)$ 上为常数。因此，我们有 $\Upsilon_k \cap \mathcal{Q}_k(x) = \gamma(\Omega_{\tau_k}(x) \cap \mathcal{Q}_0(x'))$，其中 $\Omega_{\tau_k}(x) \cap \mathcal{Q}_0(x')$ 是 $\mathcal{P}'$-可测的，正如所需。由于 $\Omega_{\tau_k}(x)$ 是 $(\mathcal{Q}_0, c)$-稠密的，利用引理 3.5，我们估计期望值

$$\mathbb{E}(\chi_{\Upsilon_k}|\mathcal{Q}_k)(x) = \frac{\nu(\Upsilon_k \cap \mathcal{Q}_k(x))}{\nu(\mathcal{Q}_k(x))} \ge \frac{\nu(\Omega_{\tau_k(x)} \cap \mathcal{Q}_0(x'))}{C_{\text{cyl}}^2 \nu(\mathcal{Q}_0(x'))} > \frac{c}{C_{\text{cyl}}^2} = \kappa.$$

因此，我们的随机过程受一个速率为 $\kappa$ 的独立同分布的抛硬币过程（它是一个马尔可夫链）所支配；已知通过转移算子技术（见 [DZ10，第 3 节。1]）它同样满足大偏差原理。■

固定 $\tilde{\kappa}'$ 为引理 $\kappa$ 8.21所给出的。固定 $\kappa = \tilde{\kappa}\tilde{\kappa}'$ 为定理 8.2中的。于是，利用公式（67）以及命题 7.3 和引理 8.21中的大偏差原理，我们有

$$\nu(A_{n,\kappa}) = \nu(A_{n,\tilde{\kappa}\tilde{\kappa}'}) \le \nu(B_{n,\tilde{\kappa}}) + \nu(C_{\lceil \tilde{\kappa} n \rceil, \tilde{\kappa}'}) < e^{-\tilde{\kappa} n} + e^{-\tilde{\kappa}' n} \le 2e^{-\kappa n}$$

从而完成了定理 8.2 中性质（3）的证明。

## 9. Exponential mixing of the frame flow

有了推论 3.10，我们采用卷积论证，如 [LP22 定理 3.1] 和 [Sar22b 定理 3.14]中的证明那样使用凸起函数，借助半流 $\{\hat{T}_t\}_{t\geq 0}$ 在 $\Lambda^{\mathscr{R}}\times M$上相对于测度 $\hat{\nu}^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}$的指数混合，得到定理 1.1 。按照 [AGY06 第 8 节2] 或 [SW21 第 10 节3], 中的做法，对强稳定方向积分消去后，只需证明半流 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 在 $\Lambda^{\mathscr{R}}_+\times M$上的指数混合。更准确地说，我们首先定义空间

$$\Lambda^{\mathscr{R}}_+\times M=\{(x,m,s)\in\Lambda_+\times M\times\mathbb{R}:0\leq s<\mathscr{R}(x)\}.$$

由于全纯映射 $\mathscr{H}:\ \Delta_{\sqcup}\times\Lambda_-\to M$ 根据引理3.8与收缩方向无关，因此我们可以将 $\mathscr{H}$ 视为定义在 $\Delta_{\sqcup}$上的映射。定义半流$\{T_t\}_{t\geq 0}$ 如下:

$$T_t(x,m,s)=(T^n x,\mathscr{H}^n(x)m,s+t-\mathscr{R}_n(x))$$

对所有 $(x,\ m,\ s)\ \in\ \Lambda^{\mathscr{R}}_+\times M$，其中 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$使得 $0\leq s+t-\mathscr{R}_n(x)<\mathscr{R}(T^n x)$。回想一下，我们在 $\Lambda^{\mathscr{R}}\times M$上赋予了测度 $d\hat{\nu}^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}):=d\hat{\nu}\,dm\,dm^{\mathrm{Leb}}/\bar{\mathscr{R}}$，其中 $m^{\mathrm{Leb}}$是勒贝格测度，且 $\bar{\mathscr{R}}=\hat{\nu}(\mathscr{R})$。类似地，在 $\Lambda^{\mathscr{R}}_+\times M$上，我们考虑由 $d\big(\nu^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}\big):=d\nu\,dm\,dm^{\mathrm{Leb}}/\bar{\mathscr{R}}$定义的测度 $\nu^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}$。与符号标架流模型 $(\Lambda^{\mathscr{R}},\ \{\hat{T}_t\}_{t\geq 0},\ \hat{\nu}^{\mathscr{R}})$相比，动力系统 $\big(\Lambda^{\mathscr{R}}_+,\ \{T_t\}_{t\geq 0},\ \nu^{\mathscr{R}}\big)$ 的作用是忘掉收缩方向。

我们引入一些范数。记 $\nabla_M$ 为 $M$上的列维-奇维塔联络。对于在 $\mathbb{R}$ 和 $M$ 坐标下可微的函数 $\phi:\ \Lambda^{\mathscr{R}}_+\times M\to\mathbb{R}$ ，我们定义范数

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{C^r_M}&=\sup\{\|\nabla^k_M\phi\|_\infty:0\leq k\leq r\},\\ \|\phi\|_{C^r_M C^1_{\mathbb{R}}},&=\sup\{\|\nabla^k_M\partial_t\phi\|_\infty+\|\nabla^k_M\phi\|_\infty:0\leq k\leq r\}.\end{aligned}$$

对于任意函数 $\psi:\ \Lambda^{\mathscr{R}}_+\times M\to\mathbb{R}$，我们定义 Lipschitz 范数

$$\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}=\|\psi\|_\infty+\sup\left\{\frac{|\psi(x,m,t)-\psi(x',m',t')|}{d_{\mathrm{E}}(x,x')+d_M(m,m')+|t-t'|}:(x,m,t)\neq(x',m',t')\right\}.$$

**定理 9.1**。存在 $C>0$、 $\eta>0$和 $r\in\mathbb{N}$ ，使得对于所有函数 $\phi$、 $\psi$: $\Lambda^{\mathscr{R}}_+\times M\to\mathbb{R}$，若它们分别具有有界的 $C^r_M C^1_{\mathbb{R}}$ 范数和有界的 *Lipschitz* 范数，并且 $t>0$，则有

$$\left|\int_{\Lambda^{\mathscr{R}}_+\times M}(\phi\circ T_t)\cdot\psi\,d\big(\nu^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}\big)-\big(\nu^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}\big)(\phi)\cdot\big(\nu^{\mathscr{R}}\otimes m^{\mathrm{Haar}}\big)(\psi)\right|\leq Ce^{-\eta t}\|\phi\|_{C^r_M C^1_{\mathbb{R}}}\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}.$$

证明与 [SW21，引理 10。3], 类似，主要区别在于我们使用了具有无界回归时间映射的无限符号编码，并且函数仅在方向 $\Lambda_+$上是 Lipschitz 的。我们仅详细说明所需的修改。

设 $\phi\in C(\Lambda^{\mathscr{R}}_+\times M,\ \mathbb{R})$ 且 $\xi\in\mathbb{C}$。定义 $\hat{}\ \phi_\xi\in B(\Lambda_+,\ L^2(M,\ \mathbb{C}))$ 如下:

$$\hat{\phi}_\xi(x)(m)=\int_0^{\mathscr{R}(x)}\phi(x,m,t)e^{-\xi t}\,dm^{\mathrm{Leb}}(t)\qquad\text{for all } m\in M \text{ and } x\in\Lambda_+.$$

我们还可以将其进一步分解为：对所有 $x \in \Lambda_+$，$\hat{\ } \phi_\xi(x) = \sum_{\rho \in \widehat{M}} \hat{\ } \phi_{\xi,\ \rho}(x) \in \widehat{\bigoplus}_{\rho \in \widehat{M}} V_\rho^{\oplus \dim(\rho)}$。设 $\rho \in \widehat{M}$。通过投影 $\phi_\rho(x,\ \cdot,\ t) = [\phi(x,\ \cdot,\ t)]_\rho \in V_\rho^{\oplus \dim(\rho)}$，定义 $\phi_\rho \in C(\Lambda_+^{\mathscr{R}} \times M,\ \mathbb{R})$。对所有 $x \in \Lambda_+$ 和 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们有：

$$\hat{\phi}_{\xi,\rho}(x)(m) = \int_0^{\mathscr{R}(x)} \phi_\rho(x, m, t) e^{-\xi t}\, dm^{\mathrm{Leb}}(t) \qquad \text{for all } m \in M \text{ and } x \in \Lambda_+.$$

下面的引理在我们的情形下可视为 [SW21中的引理 10。2]

**引理 9.2**。存在 $C > 0$ 和 $a_0 > 0$，使得对于所有 $\rho \in M$，分别具有有界 $\phi$范数和有界 *Lipschitz* 范数的函数 $\psi\colon \Lambda_+^{\mathscr{R}} \times M \to \mathbb{R}$，以及满足 $|a| \leq a_0$的 $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$，都有

$$\left( \int_{\Lambda_+} \left\| \hat{\phi}_\xi(x) \right\|_{C_M^r}^2 d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \frac{\|\phi\|_{C_M^r C_{\mathbb{R}}^1}}{\max\{1, |b|\}},$$

$$\left\| \mathcal{M}_{\xi,\rho}\left(\hat{\psi}_{-\xi,\rho}\right) \right\|_{1,\|\rho_b\|} \leq C \frac{\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}}{\max\{1, |b|\}}.$$

证明。回顾式（$C_2 > 0$ 16）中的常数以及引理 8.3中的 $A_0 > 0$。固定$C_5 = \frac{9 \max\{1, C_2\} \int_{\Lambda_+} e^{(\epsilon_0/2)\, \mathscr{R}(x)}\, d\nu(x)}{a_0^2} < \infty$和 $C = 2C_5(1 + A_0)$。令 $a_0 = \epsilon_0/8$。我们证明第一个不等式。若 $|b| \leq 1$，由 $\hat{\ } \phi_\xi(x)$ 的定义可得

$$\int_{\Lambda_+} \left\| \hat{\phi}_\xi(x) \right\|_{C_M^r}^2 d\nu(x) \leq \int_{\Lambda_+} e^{a_0 \mathscr{R}(x)} \|\phi(x)\|_{C_M^r}^2 d\nu(x) \leq C_5 \|\phi\|_{C_M^r C_{\mathbb{R}}^1}^2.$$

若 $|b| \geq 1$，分部积分得

$$\nabla_M^k \hat{\phi}_\xi(x) = \int_0^{\mathscr{R}(x)} \nabla_M^k \phi(x, \cdot, t) e^{-\xi t}\, dm^{\mathrm{Leb}}(t)$$

$$= \left[ -\frac{1}{\xi} \nabla_M^k \phi(x, \cdot, t) e^{-\xi t} \right]_{t=0}^{t \nearrow \mathscr{R}(x)} + \frac{1}{\xi} \int_0^{\mathscr{R}(x)} \left. \frac{d}{dt'} \right|_{t'=t} \nabla_M^k \phi(x, \cdot, t') \cdot e^{-\xi t}\, dm^{\mathrm{Leb}}(t)$$

对所有 $x \in \Lambda_+$ 和 $0 \leq k \leq r$均成立。因此利用指数尾性质（见命题 3.1 中的性质（5））,

$$\begin{aligned} &\int_{\Lambda_+} \left\| \hat{\phi}_\xi(x) \right\|_{C_M^r}^2 d\nu(x) \\ &\leq \frac{1}{|b|^2} \int_{\Lambda_+} \left( 2\|\phi(x)\|_{C_M^r} e^{a_0 \mathscr{R}(x)} + \|\phi(x)\|_{C_M^r C_{\mathbb{R}}^1} \mathscr{R}(x) e^{a_0 \mathscr{R}(x)} \right)^2 d\nu(x) \\ &\leq C_5 \frac{\|\phi\|_{C_M^r C_{\mathbb{R}}^1}^2}{|b|^2}. \end{aligned}$$

现在我们证明第二个不等式。

$$\mathcal{M}_{\xi,\rho}\left(\hat{\psi}_{-\xi,\rho}\right)(x) = \sum_{\gamma \in \mathcal{H}} e^{\mathscr{F}^{(a)}(\gamma x)} \rho_b(\mathscr{G}(\gamma x)^{-1}) \hat{\psi}_{-\xi,\rho}(\gamma x)$$

对所有 $x \in \Lambda_+$。我们首先给出 $L^\infty$ 范数的界。利用与第一个已证不等式类似的估计，我们得到

$$\left\| \hat{\psi}_{-\xi,\rho}(x) \right\|_2 \leq \left\| \hat{\psi}_{-\xi}(x) \right\|_2 \leq \left\| \hat{\psi}_{-\xi}(x) \right\|_\infty \leq \frac{\max\{1, \mathscr{R}(x)\} e^{a_0 \mathscr{R}(x)} \|\psi\|_{\mathrm{Lip}}}{\max\{1, |b|\}}. \tag{68}$$

因此，由于 $\rho_b$ 是酉表示，我们得到

$$\left\|\mathcal{M}_{\xi,\rho}\left(\hat{\psi}_{-\xi,\rho}\right)\right\|_\infty \leq \frac{\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}}{\max\{1,|b|\}}\mathcal{L}_a\left(e^{2a_0\mathscr{R}}\right) \leq \frac{\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}}{\max\{1,|b|\}}\mathcal{L}_{a-2a_0}(\chi_{\Lambda_+}).$$

同样根据指数尾性质，

$$\left\|\mathcal{M}_{\xi,\rho}\left(\hat{\psi}_{-\xi,\rho}\right)\right\|_\infty \leq C_5\frac{\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}}{\max\{1,|b|\}}.$$

接下来，我们处理 Lipschitz 范数。按照引理ˆ中性质（2）的证明8.3 中针对 $H=\psi_{-\xi,\ \rho}$的相同计算，我们得到式（44），并说明如何估计倒数第三个等式中的三项。与前面的估计类似，对于前两项，我们可以利用式（68）来估计 $\|H(\gamma x)\|_2$，并得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}\left(\frac{A_0}{2}\delta_{1,\varrho}d_{\mathrm{E}}(x,x')e^{\mathscr{F}^{(a)}(\gamma x)}\|H(\gamma x)\|_2 + 2C_2e^{\mathscr{F}^{(a)}(\gamma x')}\|\rho_b\|d_{\mathrm{E}}(x,x')\|H(\gamma x)\|_2\right)\\
&\leq A_0\cdot\frac{1+\|\rho_b\|}{\max\{1,|b|\}}\cdot\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}\cdot d_{\mathrm{E}}(x,x')\mathcal{L}_{a-2a_0}(\chi_{\Lambda_+})\\
&\leq C_5A_0\cdot\frac{1+\|\rho_b\|}{\max\{1,|b|\}}\cdot\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}\cdot d_{\mathrm{E}}(x,x').
\end{aligned}$$

对于最后一项，我们首先需要估计 $\|H(\gamma x)-H(\gamma x')\|_2$。不失一般性，我们可以假设 $\mathscr{R}(\gamma x)\leq\mathscr{R}(\gamma x')$。于是

$$\begin{aligned}
&\|H(\gamma x)-H(\gamma x')\|_2 = \left\|\hat{\psi}_{-\xi,\rho}(\gamma x)-\hat{\psi}_{-\xi,\rho}(\gamma x')\right\|_2\\
&\leq |\mathscr{R}(\gamma x)-\mathscr{R}(\gamma x')|\cdot\|\psi_\rho\|_2e^{a_0\mathscr{R}(\gamma x)}\\
&\quad+\int_0^{\mathscr{R}(\gamma x)}\|\psi_\rho(\gamma x,t)-\psi_\rho(\gamma x',t)\|_2e^{a_0t}\,dm^{\mathrm{Leb}}(t)\\
&\leq\left(C_2e^{a_0\mathscr{R}(\gamma x')}+\mathscr{R}(\gamma x)e^{a_0\mathscr{R}(\gamma x)}\right)\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}d_{\mathrm{E}}(x,x'),
\end{aligned}$$

根据式（41）中的估计。因此，按照上述类似的计算，我们有

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}e^{\mathscr{F}^{(a)}(\gamma x)}\|H(\gamma x)-H(\gamma x')\|_2\leq C_5\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}d_{\mathrm{E}}(x,x')$$

将所有项相加，我们得到

$$\frac{1}{\max\{1,\|\rho_b\|\}}\operatorname{Lip}\left(\mathcal{M}_{\xi,\rho}\left(\hat{\psi}_{-\xi,\rho}\right)\right)\leq C_5(1+2A_0)\frac{\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}}{\max\{1,|b|\}}.$$

利用 $\|\cdot\|_1$、$\|\rho_b\|$ 和引理 4.1，证明 ■

ˆ我们可以通过将 [SW21的引理 10.3] 中的 $\sup_{u\in U}\|\phi_\xi(u)\|_{C^r_M}$替换为 $\left(\int_{\Lambda_+}\|\hat{}\phi_\xi(x)\|^2_{C^r_M}\,d\nu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$并沿用相同的论证，证明一个类似的结论。这便得到半流的指数混合，即定理9.1。

## Appendix A. Analyticity of the complex transfer operator

回顾一下，对于 $s \in \mathbb{C}$，我们引入了复传递算子 $L_s := \mathcal{L}_{(\delta+s)\mathscr{R}} : \mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{C}) \to \mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{C})$，其定义如下：对于 $u \in \mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{C})$ 和 $x \in \Lambda_+$，

$$L_s(u)(x) = \sum_{\gamma \in \mathcal{H}} e^{-(\delta+s)\mathscr{R}(\gamma x)} u(\gamma x).$$

定义在 $\mathbb{C}$ 的子集上的算子值映射称为解析（或全纯），若其是 Fr´echet 可微的。在本附录中，我们证明引理 A.1。证明与 [BQ16 中的引理 11 类似，17], 为使本文完整，我们在此给出证明。

**引理 A.1**。对于任意 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re s > -\frac{\epsilon_0}{2}$ 的情形，复传递算子 $L_s$关于 $s$ 解析依赖。

注意，命题 3.1 中的性质 (4) 表明存在 $C_1 > 0$，使得对任意 $\gamma \in \mathcal{H}$ 以及任意 $x \in \Delta_0$，$\|(d(\log \|d\gamma\|))_x\| < C_1$。注意 $\mathscr{R}(\gamma x) = -\log \|(d\gamma)_x\|$。因此，存在 $C_6 > 1$，使得对任意 $\gamma \in \mathcal{H}$ 以及任意$x \in \Delta_0$,

$$\frac{1}{C_6}\|\mathscr{R} \circ \gamma\|_\infty \le \mathscr{R}(\gamma x) \le C_6 \|\mathscr{R} \circ \gamma\|_\infty,$$
$$\|\mathscr{R} \circ \gamma\|_\infty - C_6 \le \mathscr{R}(\gamma x) \le \|\mathscr{R} \circ \gamma\|_\infty + C_6.$$

此外，命题 3.1 中的性质（5）指出，存在 $\epsilon_0 \in (0,1)$ 使得$\int_{\Lambda_+} e^{\epsilon_0 \mathscr{R}} < \infty$。利用 $\mu$ 的准不变性，我们得到

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{H}} e^{-(\delta-\epsilon_0)\|\mathscr{R}\circ\gamma\|_\infty} < \infty. \tag{69}$$

引理 *A.1*的证明。固定 $s \in \mathbb{C}$，使得 $\Re s > -\frac{\epsilon_0}{2}$。任取满足 $C_6|\theta| < \frac{\epsilon_0}{2}$ 的 $\theta \in \mathbb{C}$。对于 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，我们引入算子 $L_{s,\theta,m} : \mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{C}) \to \mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{C})$，其定义如下：对于 $u \in \mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{C})$ 和 $x \in \Lambda_+$，

$$L_{s,\theta,m}(u)(x) = \theta^m \sum_{\gamma \in \mathcal{H}} (-\mathscr{R}(\gamma x))^m e^{-(\delta+s)\mathscr{R}(\gamma x)} u(\gamma x).$$

注意，对于 $m = 0$，该算子等于 $L_s$。由于对于任意 $\gamma \in \mathcal{H}$ 和 $x \in \Lambda_+$，

$$e^{-(\delta+s+\theta)\mathscr{R}(\gamma x)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(-\theta\mathscr{R}(\gamma x))^m e^{-(\delta+s)\mathscr{R}(\gamma x)}, \tag{70}$$

要证明 $L$ 在 $s$ 的某个邻域内解析，只需验证对于所有 $u \in \mathrm{Lip}(\Lambda_+, \mathbb{C})$，均有

(1) $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} L_{s,\ \theta,\ m}(u)(x)$ 对任意 $x \in \Lambda_+$ 都逐点收敛到 $L_{s+\theta}(u)(x)$；(2) 级数绝对收敛

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \|L_{s,\theta,m}(u)\|_{\mathrm{Lip}} \le M \|u\|_{\mathrm{Lip}}, \tag{71}$$

对于某个与 $u$ 和 $\theta$ 无关的常数 $M$。

我们首先提出以下断言：对于任意 $x \in \Lambda_+$，该和

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathcal{H}} \frac{1}{m!} |\theta|^m \mathscr{R}(\gamma x)^m e^{-(\delta - \frac{\epsilon_0}{2})\mathscr{R}(\gamma x)} \tag{72}$$

收敛于 $\sum_{\gamma\in\mathcal{H}} e^{-(\delta-\frac{\epsilon_0}{2}-|\theta|)\mathscr{R}(\gamma x)}$。我们证明该断言。对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们可以交换求和顺序：

$$\sum_{m=0}^{n}\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}\frac{1}{m!}|\theta|^m\mathscr{R}(\gamma x)^m e^{-(\delta-\frac{\epsilon_0}{2})\mathscr{R}(\gamma x)}=\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}|\theta|^m\mathscr{R}(\gamma x)^m e^{-(\delta-\frac{\epsilon_0}{2})\mathscr{R}(\gamma x)},$$

左侧级数的收敛性可由公式（69）和（70）以及 $C_6|\theta|<\frac{\epsilon_0}{2}$ 这一假设推出。我们估计

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}|\theta|^m\mathscr{R}(\gamma x)^m e^{-(\delta-\frac{\epsilon_0}{2})\mathscr{R}(\gamma x)}-\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}e^{-(\delta-\frac{\epsilon_0}{2}-|\theta|)\mathscr{R}(\gamma x)}\right|\\ =&\left|\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}|\theta|^m\mathscr{R}(\gamma x)^m-e^{|\theta|\mathscr{R}(\gamma x)}\right)e^{-(\delta-\frac{\epsilon_0}{2})\mathscr{R}(\gamma x)}\right|.\end{aligned}\tag{73}$$

任取 $\epsilon>0$。由指数尾性质（见命题 3.1中的性质（5））， 存在 $M>1$ 使得

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{H},\mathscr{R}(\gamma x)>M}e^{-(\delta-\frac{\epsilon_0}{2}-|\theta|)\mathscr{R}(\gamma x)}<\epsilon.\tag{74}$$

同时注意到，对于所有充分大的 $n\in\mathbb{N}$，我们有一致收敛

$$\left|\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}z^m-e^z\right|<\epsilon\tag{75}$$

对于任意满足 $|z|<M$ 的 $z\in\mathbb{C}$。现在可以看到

$$(73)\ll\epsilon$$

将和 $\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}$ 分成 $\sum_{\gamma\in\mathcal{H},\mathscr{R}(\gamma x)\le M}$ 和 $\sum_{\gamma\in\mathcal{H},\mathscr{R}(\gamma x),>M}$ 并应用公式（74）和（75）。至此，命题得证。

回到命题 (1)，可以像证明 (72) 的收敛性那样证明。接下来，我们证明式 (71) 中的绝对收敛。我们估计上确界范数：对任意 $x\in\Lambda_+$，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}L_{s,\theta,m}(u)(x)\right|&\le\|u\|_\infty\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}|\theta|^m\mathscr{R}(\gamma x)^m e^{-(\delta-\frac{\epsilon_0}{2})\mathscr{R}(\gamma x)}\\&\ll\|u\|_\infty\sum_{\gamma\in\mathcal{H}}e^{-(\delta-\epsilon_0)\|\mathscr{R}\circ\gamma\|_\infty}.\end{aligned}$$

因此，$\left|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} L_{s,\,\theta,\,m}(u)\right|_{\infty}$ 被一个与 $\|u\|_{\infty}$ 成正比的统一常数所控制。剩下的任务是估计利普希茨半范数。对任意 $m \in \mathbb{N}$ 以及任意 $x,\ y \in \Lambda_{+}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{L_{s,\theta}, m(u)(x) - L_{s,\theta,m}(u)(y)}{d_{\mathrm{E}}(x,y)} = A_m + B_m + C_m, \ \text{where}\\
&A_m = \theta^m \sum_{\gamma\in\mathcal{H}} \frac{(-\mathscr{R}(\gamma x))^m - (-\mathscr{R}(\gamma y))^m}{d_{\mathrm{E}}(x,y)} e^{-(\delta+s)\mathscr{R}(\gamma x)} u(\gamma x),\\
&B_m = \theta^m \sum_{\gamma\in\mathcal{H}} (-\mathscr{R}(\gamma y))^m \frac{e^{-(\delta+s)\mathscr{R}(\gamma x)} - e^{-(\delta+s)\mathscr{R}(\gamma y)}}{d_{\mathrm{E}}(x,y)} u(\gamma x),\\
&C_m = \theta^m \sum_{\gamma\in\mathcal{H}} (-\mathscr{R}(\gamma y))^m e^{-(\delta+s)\mathscr{R}(\gamma y)} \frac{u(\gamma x) - u(\gamma y)}{d_{\mathrm{E}}(x,y)}.
\end{aligned}$$

由于对任意 $a,\ b \in \mathbb{C}$,

$$|a^m - b^m| \le m \max\{|a|, |b|\}^{m-1} |a-b|,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
|A_m| &\ll \|u\|_{\infty} |\theta|^m \sum_{\gamma\in\mathcal{H}} m (C_6 \|\mathscr{R}\circ\gamma\|_{\infty})^{m-1} \frac{|\mathscr{R}(\gamma x) - \mathscr{R}(\gamma y)|}{d_{\mathrm{E}}(x,y)} e^{-(\delta+\Re s)\|\mathscr{R}\circ\gamma\|_{\infty}}\\
&\ll \|u\|_{\infty} \sum_{\gamma\in\mathcal{H}} m |\theta|^m (C_6 \|\mathscr{R}\circ\gamma\|_{\infty})^{m-1} e^{-(\delta+\Re s)\|\mathscr{R}\circ\gamma\|_{\infty}}.
\end{aligned}$$

接下来，我们采用指数函数的幂级数定义，其形式为 $e^z = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m!} z^{m-1}$ 对任意 $z \in \mathbb{C}$。我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} |A_m| &\ll \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\gamma\in\mathcal{H}} \frac{m}{m!} |\theta|^m (C_6 \|\mathscr{R}\circ\gamma\|_{\infty})^{m-1} e^{-(\delta+\Re s)\|\mathscr{R}\circ\gamma\|_{\infty}} \|u\|_{\infty}\\
&\ll \|u\|_{\infty} \sum_{\gamma\in\mathcal{H}} e^{-(\delta+\Re s - C_6|\theta|)\|\mathscr{R}\circ\gamma\|_{\infty}},
\end{aligned}$$

其中，该等式的证明与（72）的收敛性证明相同。因此，我们已证明，总和 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}$ $A_m$ 有一个由 $\|u\|_{\infty}$ 的统一倍数所界。

对于 $B_m$，我们使用以下不等式：对任意 $a,\ b \in \mathbb{C}$,

$$|e^a - e^b| \le \max\{e^{\Re a}, e^{\Re b}\} |a-b|.$$

我们得到

$$\begin{aligned}
|B_m| &\ll |\theta|^m \sum_{\gamma\in\mathcal{H}} (\mathscr{R}(\gamma y))^m e^{-(\delta+\Re s)\|\mathscr{R}\circ\gamma\|_{\infty}} \frac{|(\delta+s)\mathscr{R}(\gamma x) - (\delta+s)\mathscr{R}(\gamma y)|}{d_{\mathrm{E}}(x,y)} \|u\|_{\infty}\\
&\ll \sum_{\gamma\in\mathcal{H}} |\theta|^m (C_6 \|\mathscr{R}\circ\gamma\|_{\infty})^m e^{-(\delta+\Re s)\|\mathscr{R}\circ\gamma\|_{\infty}} \|u\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |B_m| \ll \|u\|_{\infty} \sum_{\gamma\in\mathcal{H}} e^{-(\delta+\Re s - C_6|\theta|)\|\mathscr{R}\circ\gamma\|_{\infty}},$$

这使得左侧的和有一个由 $\|u\|_{\infty}$ 的统一倍数给出的上界。

最后，由于每个 $\gamma \in \mathcal{H}$ 都通过收缩作用于 $\Lambda_+$，我们有

$$\frac{u(\gamma x) - u(\gamma y)}{d_{\mathrm{E}}(x,y)} = \frac{u(\gamma x) - u(\gamma y)}{d_{\mathrm{E}}(\gamma x, \gamma y)} \cdot \frac{d_{\mathrm{E}}(\gamma x, \gamma y)}{d_{\mathrm{E}}(x,y)} \le \mathrm{Lip}(u).$$

因此，

$$|C_m| \ll |\theta|^m \sum_{\gamma \in \mathcal{H}} |C_6 \|\mathscr{R} \circ \gamma\|_\infty|^m e^{-(\delta + \Re s)\|\mathscr{R} \circ \gamma\|_\infty} \mathrm{Lip}(u),$$

这意味着

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |C_m| \le \mathrm{Lip}(u) \sum_{\gamma \in \mathcal{H}} e^{-(\delta + \Re s - C_6|\theta|)\|\mathscr{R} \circ \gamma\|_\infty},$$

再次将左侧的和估计为 $\mathrm{Lip}(u)$ 的一个一致倍数。 ■

## References


[AM16] Vitor Ara´ujo 和 Ian Melbourne。非一致双曲流的相关指数衰减及其稳定叶丛，包括经典的洛伦兹吸引子。*Ann. Henri Poincaré*, 17 11 2975 3004, 2016 5 ( ): – . AG Artur [13] Avila 和 Sebastien Gouezel。模空间中代数测度的拉普拉斯算子小特征值及 Teichm¨uller 流的混合性质。*Ann. ofMath. (2)*, 178 2 385 442, 2013 4 ( ): – . AGY Artur Avila、Sebastien [06] Gouezel 和 Jean-Christophe Yoccoz。Teichm¨uller 流的指数混合。*Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (104):143–211, 2006年。[ 02] Bab Martine Babillot。关于双曲系统的混合性质。

*Israel J. Math.*, 129 61 2 : –76, 2002年。[BV05] Viviane Baladi 和 Brigitte Vall´ée。没有有限马尔可夫分割的曲面半流的相关指数衰减。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(3):865– 874, 2005年。 5[BQ16] Yves Benoist 和 Jean-Fran¸cois Quint。 *Random walks on reductive groups*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern* 第62卷。Springer, *Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]* 2016 57 Cham, [ 93] 。Bow B. H.

Bowditch。双曲群的几何有限性。 *J. Funct. Anal.*, 113 2 245 317, 1993 ( ): – . [ 82] Bri M. Brin。标架流的遍历理论。载于

*Ergodic theory and dynamical systems, II (College Park, Md., 1979/1980)* 21 *Progr. Math.* 163 183 ，卷，页码 – 。Birkh 1982 19 auser，Boston, Mass., *Invent. Math.*。BG M. Brin 和 M. [ 80] Gromov。关于标架流的遍历性。 *Invent. Math.*, 60 7, 1980 1 1 3 ( ): – . [BP74] M. I. Brin 和 Ja. B. Pesin。部分双曲动力系统。 *Math. USSR* , : – . [ *Izv.* 8 177 218, 1974 2, 19

BMMW17] Keith Burns、Howard Masur、Carlos Matheus 和 Amie Wilkinson。魏尔-彼得森测地流的混合速率：特殊模空间中的指数混合。 *Geom. Funct. Anal.*, 27(2):240–288, 2017年。[CLMS21] Mihajlo Ceki´c、Thibault Lefeuvre、Andrei Moroianu 和 Uwe Semmelmann。关于偶数维流形上标架流的遍历性。 *arXiv.org*, 2021年11月。3[Che98] N. I. Chernov。阿诺索夫流的马尔可夫近似与相关衰减。*Ann. of Math. (2)*, 147 2 269 324, 1998 5 ( ): – . CS Michael Chow 和 Pratyush Sarkar。凸余 [ 22] 紧局部对称空间上标架流的指数混合。arXiv:

2211 14737, 2022 2, 4 。. 预印本。DFSU [ 21] Tushar Das、Lior Fishman、David Simmons 和 Mariusz Urbanski。极端性与动力系统定义的测度，第二部分：来自共形动力系统的测度。*Ergodic Theory Dynam. Systems*, 41(8):2311–2348, 2021年。3, 5, 23

[DZ10] Amir Dembo 和 Ofer Zeitouni。 *Large deviations techniques and applications*, *Stochastic Modelling and Applied Probability*第38卷。Springer-Verlag，柏林，2010 1998 25, 53 。第二版的订正重印本。Dol Dmitry [98] Dolgopyat。关于阿诺索夫流中的相关衰减。 *Ann. of Math. (2)*, 147 2 357( ): – 390, 1998 2, 5, 38, 47, 48, 49 。Dol Dmitry Dolgopyat。关于双曲系统的紧群扩张的混合性 [02] 质。 *Israel J. Math.*, 130 157 205, 2002 3, 5 : – . EO Sam Edwards 和 Hee [21] Oh。几何有限双曲流形上的谱隙与指数混合。 *Duke Math. J.*, 170 15 3417 3458, 2021 2 ( ): – . Edw Samuel C. [22] Edwards。几何有限双曲曲面上 horocycle 流的有效等分布。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*, ( 6 4040 4092, 2022 4 ): – . Fel [71] William Feller。. John Wiley & Sons, Inc.，纽约-伦敦-悉尼，第二版，1971年。34[FS90] L. Flaminio 和 R. J. Spatzier。几何有限群、帕特森-沙利文测度与拉特纳刚性定理。 *Invent. Math.*, 99 3 601 626, 1990 2 ( ): – . FHP R. Froese、P. [91] Hislop 和 P. Perry。非最大秩尖点双曲流形的 Mourre 估计及相关界。 *J. Funct. Anal.*, 98 310, 1991年 2 292 5 ( ): – . [Gui06] Colin Guillarmou。某些几何有限双曲流形上的共振。*Comm. Partial Differential Equations*, 31 1 3 445 467, 2006 5 ( - ): – . GK Colin Guillarmou 和 [21] Benjamin Kuster。双曲 3 22 11 3565 3617, 2021 3 流形上的标架流谱理论。 *Ann. Henri Poincaré*, [12] ( ): – . GM Colin Guillarmou 和 Rafe Mazzeo。几何有限双曲流形上拉普拉斯算子的预解式。 *Invent. Math.*, 187 1 99 144, 2012 5 ( ): – . KL Michael Kapovich 和 Beibei Liu。负曲率夹逼的哈达玛流形中的几何有限性。 *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, [19] 44 2 841 875, 2019 8 ( ): – . Kat Tosio Kato。. 数 [95] 学经典。Springer-Verlag，柏林，*Perturbation theory for linear operators* 1995 1980 18, 35 。该版本的重印本。Kha Osama Khalil。几何有限局部对称空间上的混合、共振与谱隙。2021年。预印本，[21] https://www.math.utah.edu/ khalil/publications/mixing.pdf。 2 [89] Lal Steven P. Lalley。符号动力系统中的更新定理及其在测地流、非欧镶嵌及其分形极限中的应用。 *Acta Math.*, 163(1- 2 1 55, 1989 35, 36 ): – . LP F. Ledrappier 和 M. Pollicott。(2×2)- 矩阵线性作用的遍历性质。*Duke Math. J.*, 116(2):353–388, 2003 年。[Li [03] 22] Jialun Li。分裂半单李群上随机游走的傅里叶衰减、更新定理与谱隙。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 55(6):1613–1686, 2022年。6, 36[LP22] Jialun Li 和 Wenyu Pan。带尖点的几何有限双曲流形上测地流的指数混合。 *Invent. Math.*, 第1–91页，2022年。在线先行发表。2, 4, 5, 6, 10, 11, 15, 18, 19, 34, 36, 54[Lub10] Alexander Lubotzky。 *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*。现代 Birkh¨auser 经典。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2010年。附有 Jonathan D. Rogawski 的附录，为 1994 17 版本的重印本。MMO Gregory Margulis、[14] Amir Mohammadi 和 Hee Oh。克莱因流形上的闭测地线与全纯单值。 *Geom. Funct. Anal.*, 24 5 1608 1636, 2014 3 ( ): – . MO Amir Mohammadi 和 [15] Hee Oh。几何有限群轨道的矩阵系数、计数与素数。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17 4 837 897, 2015 2 ( ): – . Moo Calvin [87] C. Moore。测地流相关系数的指数衰减。载于 *Group representations ergodic theory operator algebras and mathematical physics* , , , , 第卷，页码 – 。 *(Berkeley, Calif., 1984)* 6 *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 163 181 Springer，纽约，1987年。2[Nau05] F. Naud。坎托尔集上的扩张映射与 ζ 函数的解析延拓。 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38 1 116 153, 2005 36 ( ): – . OS [13] Hee Oh 和 Nimish A. Shah。几何有限双曲群轨道的等分布与计数。 *J. Amer. Math. Soc.*, 26(2):511–562, 2013年。3

[OW16] Hee Oh 和 Dale Winter。凸共紧同余子群的统一指数混合与无共振区域，$SL_2(\mathbb{Z})$。 *J. Amer. Math. Soc.*, 29(4):1069–1115, 2016。3, 4[PP90] William Parry 和 Mark Pollicott。双曲动力系统的ζ函数与周期轨道结构。 *Astérisque* 187 188 268, 1990 35 , ( - ): 。Rat John G. Ratcliffe。, 第[ 19] *Foundations of hyperbolic manifolds* 149 *Graduate Texts* 卷，出自。Springer，Cham，*in Mathematics* 2019 [2019] [ 1299730] 8 ©。的第三版。Rat Marina[ 87] Ratner。测地流与horocycle流的混合速率。 *Ergodic Theory Dynam. Systems* 7 2 267 288, 1987 , ( ): – 。2[ 03] ´ ´ Rob Thomas Roblin。负曲率下的遍历性与等分布。 ´ *Mém. Soc.* egative。,( ):vi , 。*Math. Fr. (N.S.)* 95 +96 2003 3[ 82] Rud Daniel J. Rudolph。Sullivan几何测度在几何有限双曲流形上的遍历行为。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2(3-4):491–512 ( 1983 1982 2 ), 。Sar a Pratyush Sarkar。凸共紧薄SO( *n* 1 409 [ 22 ] 108610, 58, 2022 4 , )子群的Selberg 3/16定理推广。 *Adv. Math.* (part A):Paper No. [ 22 ] *Uniform Exponential Mixing of Finite Flows for Congruence Covers of Convex Cocompact Hyperbolic Manifolds* 。ProQuest LLC，Ann Arbor，MI，2022 42, 49, 54 。博士论文（Ph.D.）——耶鲁大学。SW Pratyush Sarkar 和[ 21] Dale Winter。凸共紧双曲流形上标架流的指数混合。 *Compos. Math.*, 157(12):2585–2634, 2021。2, 3, 4, 5, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 38, 41, 43, 48, 49, 52, 54, 55, 56[Sid22] Salman Siddiqi。某些阿诺索夫流的等距扩张的相关衰减。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 第1–51页，2022年。在线提前发表。3[Sto11] Luchezar Stoyanov。A公理流的Ruelle转移算子谱。 *earity* 24 4 1089 1120, 2011 *Nonlin* , ( ): – 。2, 11, 38, 41, 52[ 22] TW Nattalie Tamam 和 Jacqueline M. Warren。无限体积秩一齐性空间中horosphere流的有效等分布。 *Ergodic Theory Dynam.* , 第 – 页。在线提前发表。*Systems* 1 61, 2022 4, 5[ 23] TZ Masato Tsujii 和 Zhiyuan Zhang。三维光滑混合阿诺索夫流均为指数混合。 *Ann. of Math. (2)*, 197(1):65–158, 2023。2, 6, 38, 39, 47, 52, 53[Win15] Dale Winter。秩一局部对称空间上标架流的混合与测度分类。 *Israel J. Math.*, 210 1 467 507, 2015 2, 23 ( ): – 。Woo Michael Woodroofe。[ 82] *Nonlinear renewal theory in sequential analysis*，第39卷，出自 *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，1982 34 。You Lai-Sang Young。具有某种双曲性[ 98] 的动力系统的统计性质。 *Ann. of Math. (2)*, 147(3):585–650, 1998。11, 18

Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich, Switzerland; *Current*: CNRS-Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École Polytechnique, 91128 PALAISEAU, France
*Email address*: jialun.li@polytechnique.edu

Department of Mathematics, University of Toronto, 40 St George St, Toronto, ONM5S 2E4, Canada*Email address*: wenyup.pan@utoronto.ca

Department of Mathematics, UC San Diego, 9500 Gilman Drive, San Diego, CA 92093, USA
*Email address*: psarkar@ucsd.edu