arXiv:2302.03803v1 [math.AG] 7 Feb 2023

射影托里克轨形的弱 (k,k)-Lefschetz 定理

William D. Montoya

坎皮纳斯州立大学（UNICAMP）数学、统计与科学计算研究所，Sérgio Buarque de Holanda 街 651 号，邮编 13083-859，巴西圣保罗州坎皮纳斯

2023年2月9日

摘要

首先，我们证明了射影托里克轨形上 (1,1)-Lefschetz定理的一个推广；其次，我们证明，在由拟光滑交曲面通过 Cayley 技巧得到的 $2k$ 维拟光滑超曲面上，每个有理 (k,k)-上同调类都是代数的，即霍奇猜想在这些超曲面上成立。

1 引言

在 [3] 中，我们证明了，在适当条件下，对于射影托里克轨形 $\mathbb{P}^d_\Sigma$ 中非常一般的余维为 s 的拟光滑交子簇 X，若其具有 $d+s=2(k+1)$，则霍奇猜想成立；也就是说，根据庞加莱对偶，每个(p,p)-上同调类都是 X中代数子簇基本类的有理线性组合。上述结果的证明，对于 $p \neq d+1-s$而言，依赖于一个 Lefschetz

日期：2023年2月9日 2020年数学主题分类：14C30、14M10、14J70、14M25 关键词：(1,1)-Lefschetz 定理、霍奇猜想、托里克簇、完全交 电子邮件：
wmontoya@ime.unicamp.br

定理（[7]）以及射影轨形的硬 Lefschetz 定理（[11]）。当 $p = d + 1 - s$ 时，证明依赖于 Cayley 技巧。该技巧将 X 与射影向量丛中的一个拟光滑超曲面 Y 联系起来；Cayley 命题（4.3）则给出了 X 和 Y的某些本原上同调（4.2）之间的同构。遵循 Mavlyutov 在 [7], 中的思想，Cayley 技巧将拟光滑超曲面已知的结果推广到拟光滑交子簇。本文的思路恰好相反：我们将拟光滑交子簇的一些结果转用于拟光滑超曲面，主要是(1, 1)-Lefschetz 定理。

致谢。感谢 Ugo Bruzzo 教授和 Tiago Fonseca 进行有益的讨论。同时感谢 FAPESP 博士后资助项目（编号 2019/23499-7）提供的支持。

2 预备知识与记号

2.1 托里克簇

设 M 是秩为 d 的自由阿贝尔群，设 $N = Hom（M，Z）$，以及 $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$

定义 2.1. • 若存在 k 个线性无关的本原元素 e_1、.....、$e_k \in N$，使得 $\sigma = \{\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_k e_k\}$，则凸子集 $\sigma \subset N_R$ 是一个有理 k 维单纯锥。

- 生成元 e_i 是整的，当且仅当对于每个 i 以及任意非负有理数 μ，乘积 μe_i 属于 N 时，μ 是整数。
- 给定两个有理单纯锥 σ, σ'，如果 σ' 的整生成元集合是 σ ($\sigma' < \sigma$) 的整生成元集合的子集，则称 σ' 是 σ ($\sigma' < \sigma$) 的面。
- 由有理单纯锥组成的有限集合 $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_t\}$ 称为有理单纯完备 d 维扇，当且仅当：1. Σ 中各锥的所有面都属于 Σ；2. 如果 $\sigma, \sigma' \in \Sigma$，那么 $\sigma \cap \sigma' < \sigma$ 且 $\sigma \cap \sigma' < \sigma'$；3. $N_{\mathbb{R}} = \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_t$。

一个有理单纯完备的 d 维扇 Σ 定义了一个 d 维托里克簇$\mathbb{P}^d_\Sigma$，它只有轨形奇点，并且我们假设它是射影的。此外，$T := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \simeq (\mathbb{C}^*)^d$ 是作用在 $\mathbb{P}^d_\Sigma$ 上的环面作用。我们用 $\Sigma(i)$ 表示其 i 维锥

Σ 的，并且每个 $\rho \in \Sigma$ 对应于 $\mathbb{P}^d_\Sigma$ 上一个不可约的 T-不变魏尔除子 D_ρ。令 Cl(Σ) 表示 $\mathbb{P}^d_\Sigma$ 上模去有理等价后的魏尔除子群。

$\mathbb{P}^d_\Sigma$ 的全坐标环是多项式环 $S = \mathbb{C}[x_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)]$， S 具有 Cl(Σ)-分次，Weil 除子 $D = \sum_{\rho\in\Sigma(1)} u_\rho D_\rho$ 确定单项式 $x^u := \prod_{\rho\in\Sigma(1)} x_\rho^{u_\rho} \in S$，反之 $\deg(x^u) = [D] \in \mathrm{Cl}(\Sigma)$。

对于锥 $\sigma \in \Sigma$, $\hat{\sigma}$ 是 Σ 中不包含于 σ的 1 维锥的集合，而 $x^{\hat{\sigma}} := \prod_{\rho\in\hat{\sigma}} x_\rho$ 是 S中的相应单项式。

定义 2.2。 $\mathbb{P}^d_\Sigma$ 的无关理想是单项式理想 $B_\Sigma := < x^{\hat{\sigma}} \mid \sigma \in \Sigma >$，而仿射空间 $\mathbb{A}^d := Spec(S)$ 中的零点集 $Z(\Sigma) := \mathbb{V}(B_\Sigma)$是无关轨迹。

命题 2.3（定理 5.1.11 [5]）。托里克簇 $\mathbb{P}^d_\Sigma$ 是范畴商 $\mathbb{A}^d \setminus Z(\Sigma)$，由群 $Hom(\mathrm{Cl}(\Sigma), \mathbb{C}^*)$ 作用得到，且该群作用由 S 的 Cl(Σ)- 分次诱导。

2.2 轨形

现在我们简要介绍复轨形，并陈述下一节所需的定理，即复轨形的德拉姆定理和多尔博定理。

定义 2.4。复维数为 d 的复轨形是一个奇异复空间，其奇点在局部上同构于商奇点 $\mathbb{C}^d/G$，其中 $G \subset Gl(d, \mathbb{C})$ 是有限子群。

定义 2.5。复轨形 Z 上的微分形式定义为：在 $z \in Z$ 附近，它是 $\mathbb{C}^d$ 上的 G-不变微分形式，其中 $G \subset Gl(d, \mathbb{C})$，且 Z 在 z 附近局部同构于 $\mathbb{C}^d/G$。

粗略地说，轨形的局部几何可归结为局部的 G-不变几何。

我们分别有定义德拉姆上同调群和多尔博上同调群（对于固定的 $p \in \mathbb{N}$）的微分形式复形（$A^\bullet(Z)$ d）以及双分次微分形式的双复形（$A^{\bullet,\bullet}(Z)$ ∂, $\bar{\partial}$）：

$$H^\bullet_{dR}(Z, \mathbb{C}) := \frac{\ker d}{\operatorname{im} d} \quad \text{and} \quad H^{p,\bullet}(Z, \bar{\partial}) := \frac{\ker \bar{\partial}}{\operatorname{im} \bar{\partial}}$$

定理 2.6（ [4] 中的定理 3.4.4 以及 [1] 中的定理 1.2）。设 Z 是一个紧复轨形。存在自然同构：

- $H^{\bullet}_{dR}(Z,\mathbb{C}) \simeq H^{\bullet}(Z,\mathbb{C})$
- $H^{p,\bullet}(Z,\partial) \simeq H^{\bullet}(X,\Omega^{p}_{Z})$

3 射影托里克轨形的 (1,1)-Lefschetz定理

定义3.1。如果 $X \subset \mathbb{P}^{d}_{\Sigma}$ 一个子簇，则称其为准光滑的，当且仅当 $\mathbb{V}(I_X) \subset \mathbb{A}^{\#\Sigma(1)}$ 在$Z(\Sigma)$之外光滑。

例3.2。准光滑超曲面，或更一般地说，准光滑交子簇，都是准光滑子簇（更多细节见 [2] 或 [7] ）。

△

注3.3。按照 Satake 在 [8] 中的定义，准光滑子簇是 $\mathbb{P}^{d}_{\Sigma}$ 的子轨形。直观地说，它们是其唯一奇点都来自环境空间的子簇。

△

定理3.4。设 $X \subset \mathbb{P}^{d}_{\Sigma}$ 为一个准光滑子簇。那么每个 (1, 1)-上同调类 $\lambda \in H^{1,1}(X) \cap H^{2}(X,\mathbb{Z})$ 都是代数的

证明。由指数短正合列

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^{*} \to 0$$

可得上同调长正合列

$$H^{1}(\mathcal{O}_X^{*}) \to H^{2}(X,\mathbb{Z}) \to H^{2}(\mathcal{O}_X) \simeq H^{0,2}(X)$$

其中最后一个同构归功于 [9] 中的 Steenbrink。现在，只需证明下列图表的交换性

$$\begin{array}{ccc} H^{2}(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{2}(X,\mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \ Dolbeault \\ H^{2}(X,\mathbb{C}) & & \\ \downarrow de\ Rham \simeq & & \\ H^{2}_{dR}(X,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^{0,\bar{\partial}^{2}}(X) \end{array}$$

关键在于轨形的德拉姆同构和多尔博同构。其余证明与 [6] 中的 (1, 1)-Lefschetz 定理相同。

□

注 3.5. 当 $k = 1$ 和 $\mathbb{P}^d_\Sigma$ 是射影空间时，我们便得到经典的 (1,1)-Lefschetz 定理。

△

根据射影轨形的硬 Lefschetz 定理（详情见 [11] ），我们得到一个上同调的同构：

$$H^\bullet(X,\mathbb{Q}) \simeq H^{2\dim X-\bullet}(X,\mathbb{Q})$$

由.....给出 Lefschetz 态射；由于它是 Hodge 结构之间的态射，我们有 ：

$$H^{1,1}(X,\mathbb{Q}) \simeq H^{\dim X-1,\dim X-1}(X,\mathbb{Q})$$

与之前一样，对于 X ：

推论 3.6. 如果 X 的维数为 1、2 或 3，则霍奇猜想在 X 上成立。

证明。若 $dim_{\mathbb{C}}X = 1$ ，根据射影轨形的硬 Lefschetz 定理，结论显然成立。维数为 2 和 3 的情形由定理 3.5 和硬 Lefschetz 定理涵盖。

□

4 Cayley 技巧与 Cayley 命题

Cayley 技巧是一种将拟光滑交子簇与准光滑超曲面关联起来的方法。设 $L_1,\dots,L_s$ 是 $\mathbb{P}^d_\Sigma$ 上的线丛，并设 $\pi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}^d_\Sigma$ 是与向量丛 $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_s$ 相关联的射影空间丛。已知 $\mathbb{P}(E)$ 是一个 $(d + s - 1)$ 维单纯形托里克簇，其扇取决于线丛的次数以及扇 Σ。此外，若不考虑分次，$\mathbb{P}^d_\Sigma$ 的 Cox 环为 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_m]$，则 $\mathbb{P}(E)$ 的 Cox 环为

$$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_s]$$

此外，对于由 f_1、.....、f_s 切出的 X 拟光滑交子簇，且满足 $\deg(f_i) = [L_i]$，我们将其与由 $F = y_1f_1 + \cdots + y_sf_s$ 切出的超曲面 Y 联系起来，后者可证为准光滑。更多详情请参见 [7] 中的第 2 节。

我们将 $\mathbb{P}(E)$ 记为 $\mathbb{P}^{d+s-1}_{\Sigma X}$, 以便追踪其与 X 和 $\mathbb{P}^d_\Sigma$ 的关系。以下是一条关键说明。

注 4.1. 存在一个态射 $\iota : X \to Y \subset \mathbb{P}^{d+s-1}_{\Sigma X}$,。此外，每个点 $z := (x, y) \in Y$满足 $y \neq 0$ 都有一个原像。因此，对于任意子簇 $W = \mathbb{V}(I_W) \subset X \subset \mathbb{P}^d_\Sigma$ ，存在$W\prime \subset Y \subset \mathbb{P}^{d+s-1}_{\Sigma X}$,使得 $\pi(W') = W$，即 $W' = \{z = (x, y) \mid x \in W\}$。

△

对于 $X \subset \mathbb{P}^d_\Sigma$ 拟光滑交簇，由包含 $i^* : H^{d-s}(\mathbb{P}^d_\Sigma, \mathbb{C}) \to H^{d-s}(X, \mathbb{C})$ 所诱导的上同调态射，根据 [7] 中的命题 1.4 是单射。

定义 4.2. $H^{d-s}_{\text{prim}}(X)$ 的原始上同调是商空间 $H^{d-s}(X, \mathbb{C})/i^*(H^{d-s}(\mathbb{P}^d_\Sigma, \mathbb{C}))$ 和 $H^{d-s}_{\text{prim}}(X, \mathbb{Q})$，其系数取有理系数。

$H^{d-s}(\mathbb{P}^d_\Sigma, \mathbb{C})$ 和 $H^{d-s}(X, \mathbb{C})$ 具有纯霍奇结构，而态射 i^* 与它们相容，因此 $H^{d-s}_{\text{prim}}(X)$ 获得纯霍奇结构。

下一个命题是 Cayley 命题。

命题 4.3. *[* 命题 2.3，见 *[3]]*。设 $X = X_1 \cap \cdots \cap X_s$ 是 $\mathbb{P}^d_\Sigma$ 中由齐次多项式 $f_1 \dots f_s$ 切出的准光滑交子簇。那么对于 $p \neq \frac{d+s-1}{2}, \frac{d+s-3}{2}$

$$H^{p-1,d+s-1-p}_{\text{prim}}(Y) \simeq H^{p-s,d-p}_{\text{prim}}(X).$$

推论 4.4. 若 $d + s = 2(k + 1)$,

$$H^{k+1-s,k+1-s}_{\text{prim}}(X) \simeq H^{k,k}_{\text{prim}}(Y)$$

注 4.5. 上述同构对于有理系数也成立，因为 $H^\bullet(X, \mathbb{C}) = H^\bullet(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. 。更多详情请参见 [10] 中第 7.1 节的开头。

△

5 主要结果

定理 5.1. 设 $Y = \{F = y_1 f_1 + \cdots + y_k f_k = 0\} \subset \mathbb{P}^{2k+1}_{\Sigma X}$,为与拟光滑交曲面 $X = X_{f_1} \cap \cdots \cap X_{f_k} \subset \mathbb{P}^{k+2}_\Sigma$ 相关联的拟光滑超曲面。那么在 Y上，霍奇猜想成立。

证明。若 $H^{k,k}{}_{\text{prim}}(X, \mathbb{Q}) = 0$ ，则结论成立。因此，假设 $H^{k,k}{}_{\text{prim}}(X, \mathbb{Q}) \neq 0$。根据 Cayley 命题 $H^{k,k}{}_{\text{prim}}(Y, \mathbb{Q}) \simeq H^{1,1}{}_{\text{prim}}(X, \mathbb{Q})$；再由射影托里克轨形的 (1, 1)-Lefschetz 定理,

存在一个非零的有理系数代数基 $\lambda_{C_1}, \ldots, \lambda_{C_n}$，它是$H^{1,1\,\mathrm{prim}}(X, \mathbb{Q})$ 的基；也就是说，存在 $n := h^{1,1\,\mathrm{prim}}(X, \mathbb{Q})$ 条代数曲线 $C_1, \ldots, C_n$，它们位于 X 中，使得在庞加莱对偶下，同调类 $[C_i]$ 映射为 λ_{C_i}，$[C_i] \mapsto \lambda_{C_i}$。回顾一下，不考虑分次时，$\mathbb{P}^{k+2}$ 的 Cox 环包含于 $\mathbb{P}^{2k+1}_{\Sigma,X}$ 的 Cox 环中。考虑分次后，若 $\alpha \in \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^{k+2}_{\Sigma})$，则 $(\alpha, 0) \in \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^{2k+1}_{\Sigma X,})$。因此，定义 $C_i \subset \mathbb{P}^{k+2}_{\Sigma}$ 的多项式可以在 $\mathbb{P}^{2k+1}_{X,\Sigma}$ 中解释，但次数不同。此外，根据注记 4.1，每个 C_i 都包含于 $Y = \{F = y_1 f_1 + \cdots + y_k f_k = 0\}$ 中，并且其余维为 k。

断言：$\{\lambda_{C_i}\}_{i=1}^{n}$ 是 $H^{k,k}{}_{\mathrm{prim}}(Y, \mathbb{Q})$的一组基。

只需证明 λ_{C_i} 在 $H^{k,k}\,\mathrm{prim}(Y, \mathbb{Q})$中非零，或者等价地证明上同调类$\{\lambda_{C_i}\}_{i=1}^{n}$ 并非来自环境空间。反证法，假设存在一个 j和$C \subset \mathbb{P}^{2k+1}_{\Sigma X}$，使得 $\lambda_C \in H^{k,k}(\mathbb{P}^{2k+1}_{\Sigma X}, , \mathbb{Q})$与 $i^*(\lambda_C) = \lambda_{C_j}$ 相等；或者用同调的说法，存在一个（$k+2$）维代数子簇$V \subset \mathbb{P}^{2k+1}_{\Sigma X}$，使得 $V \cap Y = C_j$，因此它们作为$\mathbb{P}^{2k+1}_{\Sigma X}$,的同调类相等，即 $[V \cap Y] = [C_j]$。容易验证，作为 $\mathbb{P}^{k+2}_{\Sigma}$的子簇，$\pi(V) \cap X = C_j$，其中 $\pi : (x, y) \mapsto x$。因此$[\pi(V) \cap X] = [C_j]$，这等价于说 λ_{C_j} 来自 $\mathbb{P}^{k+2}_{\Sigma}$，与 $[C_j]$的选取矛盾。

□

注记 5.2. 在前一个定理的证明中，关键事实是霍奇猜想在 X 上成立，我们通过反证法将其转化为 Y 上的结论。因此，运用类似的论证，我们得到：

△

命题 5.3. 设 $Y = \{F = y_1 f_s + \cdots + y_s f_s = 0\} \subset \mathbb{P}^{2k+1}_{\Sigma X,}$ 是与拟光滑交子簇 $X = X_{f_1} \cap \cdots \cap X_{f_s} \subset \mathbb{P}^{d}_{\Sigma}$ 相关联的拟光滑超曲面，且满足$d + s = 2(k+1)$。若霍奇猜想在 X 上成立，则它在 Y 上也成立。

推论 5.4. 若 Y的维数为 $2s-1$、$2s$ 或 $2s+1$，则霍奇猜想在 Y 上成立。

证明。由命题 5.3 和推论 3.6 得出。

□

参考文献

[1] Angella, D. 某些轨形的上同调。《几何与物理杂志》71 (2013), 117–126。 *[2]* Batyrev, V. V., and Cox, D. A. 托里克簇中射影超曲面的霍奇结构。《杜克数学杂志》75, 2 (1994年8月)。[3] Bruzzo, U., and Montoya, W. 关于托里克簇中准光滑完全交的霍奇猜想。圣保罗数学科学杂志。专题：代数中的几何与几何中的代数 (2021)。*[4]* Caramello Jr, F. C. 轨形导论。arXiv:1909.08699v6 (2019)。[5] Cox, D., Little, J., and Schenck, H. 托里克簇，第 124 卷。美国数学学会，2011。 [6] Griffiths, P., and Harris, J. 《代数几何原理》。John Wiley & Sons, Ltd, 1978。[7] Mavlyutov, A. R. 托里克簇中完全交的上同调。发表于《太平洋数学杂志》191, 第 1 期 (1999), 133–144。*[8]* Satake, I. 关于流形概念的一种推广。《美国国家科学院院刊》42, 6 (1956), 359–363。[9] Steenbrink, J. H. M. 准齐次奇点的交形式。Compositio Mathematica 34, 2 (1977), 211–223。*[10]* Voisin, C. 《霍奇理论与复代数几何 I》，剑桥高等数学研究丛书第 1 卷。剑桥大学出版社，2002。[11] Wang, Z. Z., and Zaffran, D. 关于 K ¨ahler 轨形的硬 Lefschetz 定理的一点说明。《美国数学会会刊》137, 08 (2009年8月)。