arXiv:2302.03809v1 [math.DG] 8 Feb 2023

仿射曲线的舒尔型比较定理及其在格点估计中的应用

RALPH HOWARD

Abstract. 若 $c, \bar{c}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 是两条按仿射弧长参数化的凸平面曲线，且 $A: [a,b] \to [0,\infty)$ 是由限制 $c|_{[a,s]}$ 与连接 $c(a)$ 和 $c(s)$ 的线段所围成的面积，其中 A 是关于 c 的相应函数；若仿射曲率满足 $\varkappa(s) \leq \bar{\varkappa}(s)$，则 $A(s) \geq \bar{A}(s)$。此外，对于凸曲线上的任意一点，我们定义以该点为中心的适配仿射坐标，并根据曲率的界给出曲线坐标的精确估计。证明这些界需要将经典的斯特姆–刘维尔型比较定理推广到高阶非齐次方程。这些估计使我们能够根据仿射曲率以及顶点之间的仿射距离，对内接三角形的面积给出精确界。这些不等式进而给出凸曲线上格点数量关于其仿射弧长的上界。

1. Introduction.

本文的研究成果首先源于这样一个愿望：将欧几里得曲线微分几何中的一些结果推广，或者更准确地说，类比到仿射情形中；第二个动机是利用这些结果，根据曲线的仿射弧长以及仿射曲率的界，给出凸曲线上格点数量的上界。

设 $\mathcal{C}$ 是平面中的一条嵌入连通曲线。当且仅当 $\mathcal{C}$ 位于其凸包的边界上时，我们称 $\mathcal{C}$ 为凸的。当且仅当该曲线是某个有界凸集的边界时，称其为闭凸曲线。

曲线的欧几里得微分几何中的一个基本结果是 A. Schur 的比较定理：如果 $\mathcal{C}$ 和 $\bar{\mathcal{C}}$ 是两条长度相同的凸非闭曲线，并且 $\bar{\mathcal{C}}$ 的曲率处处大于

2020 数学学科分类。 52A15、34C10、11P21。关键词和短语。 凸曲线、仿射弧长、仿射曲率、比较定理、曲线上的格点。

C的曲率，那么 C的终点之间的距离小于 $\overline{C}$的终点之间的距离。也就是说，曲率越大，终点之间的距离越小。（关于精确表述和证明，参见 [3, 第 36] 页或 [6, 定理 2-19，第 31] 页。）原始证明见 [13]。[15]（高维和最小正则性）、 [5] （双曲空间中的版本）以及 [11]（洛伦兹平面中的版本）给出了一些扩展和推广。

在仿射几何中，平面上两点之间的距离没有定义，但曲线上两点之间的线段与曲线所围成的面积是有定义的（见图1）。回忆一下，$\mathbb{R}^2$ 的特殊仿射运动 是形如 $v \mapsto Mv+b$ 的映射，其中 M 是满足 $\det(M) = 1$ 且 $b \in \mathbb{R}^2$的线性映射。（有关仿射弧长和仿射曲率的约定与定义，见第2节。）舒尔定理的仿射版本是：曲率越大，围成的面积越小：

定理 A. 设 $c, \overline{c}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 是以仿射弧长为参数的曲线，其仿射曲率分别为 $\varkappa$ 和 $\overline{\varkappa}$；设 A 和 $\overline{A}$分别为曲线与其终点之间的线段所围成的面积，如图1所示（ A 和 $\overline{A}$的精确定义见第2节）。假设 $\varkappa$ 满足以下三个条件之一：**(a)** $\varkappa$ 为常数；**(b)** $\varkappa \le 0$；或 **(c)** $\varkappa \le k_1$，其中 k_1 是满足 $k_1 \le (\pi/(b-a))^2$的正数常量。则

$$\varkappa \le \overline{\varkappa} \text{ on } [a,b] \quad implies \quad A \ge \overline{A}$$
$$\varkappa \ge \overline{\varkappa} \text{ on } [a,b] \quad implies \quad A \le \overline{A}$$

无论哪种情况 $A = \overline{A}$ 都意味着 c 是 $\overline{c}$ 经特殊仿射运动所得的像。

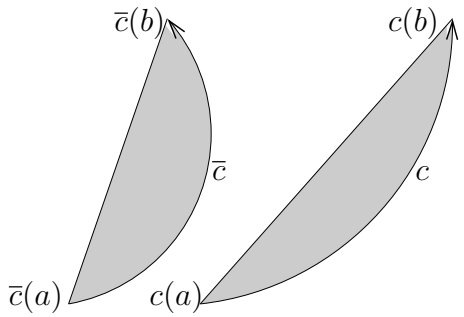

图1。曲线 c 和 $\overline{c}$，展示了由曲线以及连接其终点的割线段所围成的面积。

这是下文定理 4.1 的一个特例。除这一结果外，我们还给出了关于内接三角形面积的比较结果（命题 4.3、定理 5.8），以及以曲线上某点为中心、与曲线几何性质“相适应”的坐标系的比较结果（定理 5.5）。

这些结果基于对齐次二阶微分方程的 Sturm 型比较定理的推广，并将其推广到非齐次高阶方程。为说明这类结果的相关性，在定理 1 中，若将$A = A(b)$视为端点 $c(b)$的函数，那么定理 2.2 的一个特例是 A 满足以下三阶初值问题

$$A''' + \varkappa A' = \frac{1}{2}, \qquad A(a) = A'(a) = A''(a) = 0.$$

因此，定理 A 可由这类微分方程的比较定理推出。第3节建立了比较线性常微分方程解的一般理论。

最后，我们考虑如何根据凸曲线的仿射弧长界以及仿射曲率界，界定其上的格点数量。关于凸曲线上格点数量的最初结果是 Jarník [9] 的定理：长度为 L 的闭严格凸曲线至多包含 $3(2\pi)^{-1/3}L^{2/3} + O(L^{1/3})$，且首项的指数和常数都是最佳的。Bombieri 和 Pila[2] 、Swinnerton-Dyer [16] 等人改进了 Jarník 的结果，这些改进涉及对曲线高阶导数的界定。对于四阶导数的界，依照仿射曲率来理解导数界，并以仿射弧长表示这些界，是很自然的做法。对于椭圆上的弧， [8]已采用了这种方法。仿射弧长比欧几里得弧长更适用于这类问题的另一个原因是，格 $\mathbb{Z}^2$ 在 SL 2，$\mathbb{Z}$ 整数矩阵行列式为 1 的群作用下保持不变。仿射弧长在该群作用下保持不变，而欧几里得弧长则不然。

定理 B. 设 k_0 和 k_1 为常数，且满足 $k_0 \le k_1$。那么存在一个数 $L_{k_0} > 0$，使得若 $k_1 \le (\pi/(2L_{k_0}))^2$ （若 $k_1 \le 0$，则此条件自动成立），并且若 $\mathcal{C}$ 是一条仿射曲率满足$k_0 \le \varkappa \le k_1$ 且 $m = \lfloor \Lambda(\mathcal{C})/(2L_{k_0}) \rfloor$ 的凸曲线，那么

$$\#(\mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{C}) \le 2m + 2.$$

当 $k_0 = 0$常数为 $L_0 = 1$时。在这种情况下，抛物线弧 $\mathcal{C} = \{(s,\ s(s-1)/2)\colon\ 0 \le s \le 2m+1\}$ 展示了这一点

该估计是尖锐的。对于 $k_0 < 0$，数值 $L = L_{k_0}$ 是以下方程的解

$$\left(\frac{\sinh(\sqrt{|k_0|}\, L)}{\sqrt{|k_0|}}\right)\left(\frac{\cosh(\sqrt{|k_0|}\, L) - 1}{|k_0|}\right) = \frac{1}{2}.$$

在这种情况下，也存在界是紧的例子，见第7节。对于 k_0 在 $k_0 > 0$ 时，也有一个类似的方程。不过，第7.4段中的讨论和例子表明，当 $k_0 \leq 0$时，这些结果最有意义。

2. Affine arc length, affine curvature, and the differential equation for the area function.

我们介绍关于仿射曲线几何的约定。关于这一主题的其他资料见 [1], [6], 和 [14]。若 $v,\ w \in \mathbb{R}^2$ 则$v \wedge w = v_1 w_2 - v_2 w_1$ 其中 $v = (v_1,\ v_2)$，且 $w = (w_1,\ w_2)$。这是以 v 和 w为行组成的矩阵的行列式。若 I 是一个区间，且 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ 是一条仿射曲线，其中速度向量 $\gamma'(t)$ 与加速度向量 $\gamma''(t)$ 对所有 $t \in I$ 都线性无关，则直接计算可得 1- 形式

$$(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t))^{1/3}\ dt$$

在 $\mathbb{R}^2$ 的 C^2 重参数化和特殊仿射变换下均保持不变。c 的仿射弧长 记作 $\Lambda(c)$，定义为对这一 1-形式积分。因此，$\Lambda(c) = \int_a^b (c'(t) \wedge c''(t))^{1/3}\, dt$ 其中$[a, b]$ 是 c 的定义域。等价地，若 $c\colon I \to \mathbb{R}^2$，则当且仅当 s 是沿 c 的仿射弧长时，

$$c'(s) \wedge c''(s) \equiv 1.$$

这使曲线具有自然定向：沿 c，基 $c'(s)$，$c''(s)$ 始终为正（即右手定向）的定向。这等同于使 1-形式$c'(t) \wedge c''(t)^{\frac{1}{3}}\, dt$ 为正的定向。向量 $c'(s)$ 是仿射切向量，而 $c''(s)$ 是仿射法向量。在此定向下，欧几里得曲率 κ 为正，这意味着 c 局部凸：在任意一点，其切线在该点附近是支撑直线，曲线位于该切线所界定的闭半平面内，且仿射法向量指向该半平面。

对 $c'(s)$ 求导，并使用 $c'(s) \wedge c'(s) = 0$，可得

$$c'(s) \wedge c'''(s) = 0.$$

这意味着 $c'''(s)$ 线性依赖于 $c'(s)$，因此存在某个标量函数 $\varkappa(s)$，

$$c'''(s) = -\varkappa(s)c'(s).$$

函数 $\varkappa$ 是 c的< стиль id='2'>仿射曲率。（采用这一符号约定，是为了使椭圆具有正常数仿射曲率，而双曲线具有负常数曲率。）仿射曲率决定一条曲线，且确定到一个仿射运动为止。

定理 2.1。设 I是 $\mathbb{R}$ 中的一个区间，且 c_1、c_2：$I \to \mathbb{R}^2$ 是具有相同仿射曲率的 C^3仿射单位速曲线，即在每一点处仿射曲率都相同。则 c_1 和 c_2 相差一个仿射运动。也就是说，对于某个线性映射 M：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，满足 $\det(M) = 1$，以及某个 $b \in \mathbb{R}^2$，有 $c_2(s) = Mc_1(s) + b$ 对所有 $s \in I$均成立。□

证明可见于 [1], [6], 和 [14]。值得注意的是，尽管该定理只要求 $c_1(s)$ 和 $c_2(s)$ 是关于仿射弧长的 C^3 函数，但这些曲线的像将是 $\mathbb{R}^2$ 中的 C^4 浸入子流形。参见命题 5.4

若 c：$I \to \mathbb{R}^2$ 在某个区间 I 上成立，且 $a \in I$ 和 $p_0 \in \mathbb{R}^2$，则定义

$$A_{c,a,p_0}(s) := \begin{cases} \text{Signed area bounded by the restriction } c\big|_{[a,s]} \\ \text{and the segments } \overline{p_0c(a)} \text{ and } \overline{p_0c(s)}. \end{cases}$$

见图2。为了给出精确且更便于计算的定义，令 f 为函数

$$f(t,s) = (1-t)p_0 + tc(s), \qquad 0 \le t \le 1, \quad s \in I.$$

那么，$A_{c,\ a,\ p_0}(s)$ 是点集 $\{f(t,\ \sigma) :\ 0 \le t \le 1$ 且 σ 介于 a 和 $s\}$之间的有向面积，这是一个可以用积分计算的量。f 的偏导数和雅可比矩阵为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= c(s) - p_0 \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= tc'(s) \\ \frac{\partial f}{\partial t} \wedge \frac{\partial f}{\partial s} &= t(c(s) - p_0) \wedge c'(s). \end{aligned}$$

因此，$A_{c,\ a,\ p_0}$ 的精确定义为

$$
\begin{aligned}
A_{c,a,p_0}(s) &= \int_a^s \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,\sigma) \wedge \frac{\partial f}{\partial s}(t,\sigma)\, dt\, d\sigma \\
&= \int_a^s \int_0^1 t(c(\sigma) - p_0) \wedge c'(\sigma)\, dt\, d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \int_a^s (c(\sigma) - p_0) \wedge c'(\sigma)\, d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

计算面积 $A_{c,\ a,\ p_0}(s)$ 时，$f_t \wedge f_u = t(c(\sigma) - p_0) \wedge c'(\sigma)$ 为正的点所对应的面积计为正；为负时，面积计为负，面积为负。

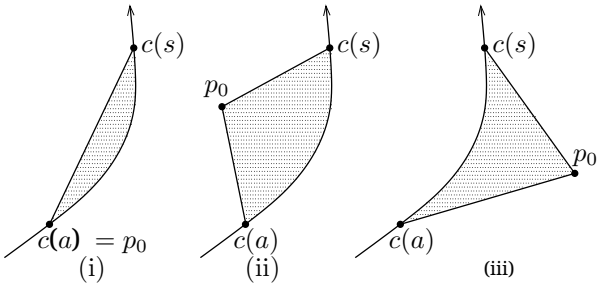

图2. 对某些点 p_0 的选取，面积$A_{c,\ a,\ p_0}(s)$。在 (i) 和 (ii) 中，我们有 $A_{c,\ a,\ p_0}(s) > 0$，而在 (iii) 中，$A_{c,\ a,\ p_0}(s) < 0$。

对 $A(s)$ 求前三阶导数：$= A_{c,\ a,\ p_0}(s)$，并利用 $c'(s) \wedge c''(s) = 1$ 和 $c'''(s) = -\varkappa(s)c(s)$，可知它满足一个三阶微分方程。

$$
A'(s) = \frac{1}{2}(c(s) - p_0) \wedge c'(s) \tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
A''(s) &= \frac{1}{2}c'(s) \wedge c'(s) + \frac{1}{2}(c(s) - p_0) \wedge c''(s) \\
&= \frac{1}{2}(c(s) - p_0) \wedge c''(s)
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
A'''(s) &= \frac{1}{2}c'(s) \wedge c''(s) + \frac{1}{2}(c(s) - p_0) \wedge c'''(s) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(c(s) - p_0) \wedge (-\varkappa(s)c'(s)) \\
&= \frac{1}{2} - \varkappa(s)A'(s).
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

这就证明了：

定理 2.2. 对于任意点 p_0 ，面积函数 $A(s)= A_{c,\ a,\ p_0}(s)$满足三阶微分方程

$$A''' + \varkappa A' = \frac{1}{2}.$$

具有初始条件

$$A(a) = 0, \quad A'(a) = \frac{1}{2}(c(a)-p_0)\wedge c'(a), \quad A''(a) = \frac{1}{2}(c(a)-p_0)\wedge c''(a).$$

□

2.1. **一些记号与约定**。对于在某个区间上以特定参数化给出的曲线，我们的一些结果难以表述，也就是说，形如 $c\colon I \to \mathbb{R}^2$。因此，我们将用 $\mathcal{C}$ 及其带下标的变体表示嵌入凸曲线。若 $p \in \mathcal{C}$ ，则$\mathbf{t}_{\mathcal{C}}(p)$ 和 $\mathbf{n}_{\mathcal{C}}(p)$ 分别表示仿射切向量和仿射法向量。具体而言，若 $c\colon I \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个局部仿射单位速度参数化，且 $c(s_0) = p$，则$\mathbf{t}_{\mathcal{C}}(p) = c'(s_0)$，而 $\mathbf{n}_{\mathcal{C}}(s_0) = c''(s_0)$。 $\mathcal{C}$ 在 p 处的仿射曲率记作 $\varkappa(p)$。

3. Comparison results for initial value problems.

定义 3.1。设 I 是 $\mathbb{R}$ 中的一个区间，且 $\mathcal{D}$ 是定义在 $C^n(I)$ 上的线性微分算子，其形式为

$$\mathcal{D}y = \frac{d^n y}{ds^n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(s)\frac{d^j y}{ds^j}$$

其中，函数 $a_0, \dots, a_{n-1}$ 在 I 上连续。那么， $\mathcal{D}$ 在此区间上的 拉格朗日核是函数 $K\colon I \times I \to \mathbb{R}$，由以下初值问题定义

$$\frac{\partial^n K}{\partial s^n}(s;r) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(s)\frac{\partial^j K}{\partial s^j}(s;r) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^j K}{\partial s^j}(r;r) = 0 \quad \text{for} \quad 0 \le j \le n-2, \qquad \frac{\partial^{n-1} K}{\partial s^{n-1}}(r;r) = 1. \tag{3.2}$$

固定 r 后，方程 (3.2) 是关于函数 $s \mapsto K(s;r)$ 的线性常微分方程，因此 K 的存在唯一性可由线性常微分方程的存在唯一性定理得出。由微分方程解对初始条件和参数的连续依赖性结果可知， $K(s;r)$ 是连续的（参见 [4,第 1] 章）。

注3.2。这个核似乎没有通用的名称。一些作者称其为格林函数（例如 [10]），但这个术语通常用于边值问题，而非初值问题，因此这种叫法似乎有些误导。由于它被用于求解非齐次 $\mathcal{D}y = f$ 的柯西问题，一些作者（例如 [7]）称其为柯西核。但它不过是应用拉格朗日参数变易法得到的核（参见 [10, 第 145–147] 页），因此拉格朗日很可能是最早写下它的某种形式的人。

定理 3.3. 设 $\mathcal{D}$ 如定义 *3.1* 所述，函数 $f\colon I \to \mathbb{R}$连续，且 $r \in I$。那么，将 y 的 j阶导数记为 $y^{(j)}$，初值问题的解为

$$\mathcal{D}y = f, \qquad y^{(j)}(r) = 0 \quad for \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

is

$$y(s) = \int_r^s K(s;t) f(t)\, dt.$$

证明。这是一个已知结果（似乎是一些应用数学家中流传的某种民间定理），其一个稍强版本的证明见 [10, 定理 4-2，第 149]页。为完整起见，我们给出一个简短的证明。根据微积分基本定理以及对含参数函数积分求导的莱布尼茨公式

(3.3)
$$\frac{\partial}{\partial s}\int_r^s \frac{\partial^j K}{\partial s^j}(s;t) f(t)\, dt = \frac{\partial^j K}{\partial s^j}(s;s) f(s) + \int_r^s \frac{\partial^{j+1} K}{\partial s^{j+1}}(s;t) f(t)\, dt$$

对于 $j = 0, \ldots, (n-1)$成立。当 $j \le n-2$时，我们有 $(\partial^j K/\partial s^j)(s;\, s) = 0$，由此得到

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_r^s \frac{\partial^j K}{\partial s^j}(s;t) f(t)\, dt = \int_r^s \frac{\partial^{j+1} K}{\partial s^{j+1}}(s;t) f(t)\, dt$$

因此，对于 $j = 0$，1，.....，$n-1$

$$y^{(j)}(s) = \int_r^s \frac{\partial^j K}{\partial s^j}(s;t) f(t)\, dt.$$

当 $j = n-1$ 时，利用 $(\partial^{n-1}K/\partial s^{n-1})(s;s) = 1$ 以及 K 的微分方程，

$$\begin{aligned} y^{(n)}(s) &= f(s) + \int_r^s \frac{\partial^n K}{\partial s^n}(s;t) f(t)\,dt \\ &= f(s) + \int_r^s \left(-\sum_{j=0}^{n-1} a_j(s) \frac{\partial^j K}{\partial s^j}(s;t) \right) f(t)\,dt \\ &= f(s) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j(s) \int_r^s \frac{\partial^j K}{\partial s^j}(s;t) f(t)\,dt \\ &= f(s) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j(s) y^{(j)}(s) \end{aligned}$$

因此 $\mathcal{D}y = f$。初始条件 $y^{(j)}(r) = 0$ 对于 $j = 0, 1, \ldots, n-1$ 由 $\int_r^r = 0$得出。□

定义 3.4。设 I 为一个区间，$\mathcal{D}$ 为定义 3.1 中的线性微分算子，且 K 为 $\mathcal{D}$的拉格朗日核。那么K 在 I 上向前正，当且仅当对所有 $r,\ s \in I$

$$s > r \quad \text{implies} \quad K(s;r) \geq 0.$$

注3.5。若 K 在此意义下向前正，则对固定的 r，由 $y(s) := K(s;r)$ 给出的函数是齐次线性微分方程的一个非恒零解。此类解的零点是孤立的。因此，对固定的 r，$s \mapsto K(s;r)$ 的零点集是离散集。因此，当 K 向前正时，$s \mapsto K(s;r)$ 在 $I \cap [r,\infty)$ 上几乎处处为正。这个事实将会多次用到。

注 3.6。对于定义 3.1 中定义在区间 I 上的任意线性微分算子 $\mathcal{D}$，以及满足初始条件 (3.2) 的 $r \in I$，存在一个 $\delta > 0$，使得 $K(s;r) > 0$ 对于 $r < s < r + \delta$ 成立。利用这一点、连续性和紧致性论证可知，对于任意 $r \in I$，存在一个区间 I_0，满足 $r \in I_0 \subseteq I$，使得限制 $K\big|_{I_0 \times I_0}$ 在 I_0 上向前正。

拉格朗日核具有向前正性的定义，受到以下比较结果的启发。（这一结果可以推广到更广泛的一类微分算子，但其表述颇为繁琐，而且此处不需要如此一般的结果。）

定理 3.7。 设 $\varkappa$、 $\varkappa\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续，且 n 和 ℓ 为满足 $0 \le \ell < n$ 的整数。设 y、 $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 为满足 n 阶微分方程的 C^n 函数

$$y^{(n)} + \varkappa y^{(\ell)} = f \quad and \quad \overline{y}^{(n)} + \overline{\varkappa}\,\overline{y}^{(\ell)} = f \tag{3.4}$$

对于某个连续函数 f，并且在a处具有相同的初始条件： $y^{(j)}(a) = y^{(j)}(a)$ 对于 $j = 0, 1, \dots, n-1$。假设

(a) 微分算子 $y \mapsto y^{(n)} + \varkappa y^{(\ell)}$ 的拉格朗日核 K 在 $[a,b]$ 上向前正，并且

(b) 在 $[a,b]$ 上几乎处处有 $y^{(\ell)} > 0$ 。

Then

$$\varkappa \le \overline{\varkappa} \text{ on } [a,b] \quad implies \quad y \ge \overline{y} \text{ on } [a,b], \tag{3.5}$$

$$\varkappa \ge \overline{\varkappa} \text{ on } [a,b] \quad implies \quad y \le \overline{y} \text{ on } [a,b]. \tag{3.6}$$

此外，在上述任一情形下，若 $y(b) = y(b)$，则对所有 $s \in [a,b]$， $\varkappa(s) = \varkappa(s)$ 且$y(s) = y(s)$。

证明。 将 (3.4) 中的第一个方程从第二个方程中相减，并稍作重新排列，得到

$$(\overline{y} - y)^{(n)} + \overline{\varkappa}(y - y)^{(\ell)} = -(\overline{\varkappa} - \varkappa)y^{(\ell)}$$

由于 y 和 y 在 a 处具有相同的初始条件，函数 $y - y$ 及其前 $n-1$ 阶导数在 a 处均为零。因此，由定理 3.3 可得

$$\overline{y}(s) - y(s) = -\int_a^s \overline{K}(s;t)(\overline{\varkappa}(t) - \varkappa(t))y^{(\ell)}(t)\,dt.$$

根据我们的假设，对每个 s ，不等式 $K(s;t)y^{(\ell)}(t) > 0$ 对几乎所有 $t \in [s,b]$ 都成立。因此，若 $\varkappa \le \varkappa$ 在 $[a,b]$ 上成立，则 $y \ge y$ 在 $[a,b]$ 上成立；若 $y(b) = y(b)$，则对 $t \in [a,b]$ 有 $\varkappa(t) = \varkappa(t)$，这意味着 y 和 y 在 $[a,b]$ 上刻画了同一个初值问题，因而在此区间上相等。若 $\varkappa \ge \varkappa$ 在 $[a,b]$ 上成立，也可作类似论证。□

为了给出与我们的问题相关的常系数线性算子的拉格朗日核，引入一些记号会很方便。令 k 为实数，并通过以下初值问题定义函数 $\mathbf{c}_k$ 和 $\mathbf{s}_k$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_k'' + k\mathbf{c}_k = 0, \qquad & \mathbf{c}_k'(0) = 1, \quad \mathbf{c}_k'(0) = 0 \\ \mathbf{s}_k'' + k\mathbf{s}_k = 0, \qquad & \mathbf{s}_k(0) = 0, \quad \mathbf{s}_k'(0) = 1 \end{aligned}$$

或者更明确地说

$$\mathbf{c}_k(s)=\begin{cases}\cos(\sqrt{k}\,s), & k>0;\\ 1, & k=0;\\ \cosh(\sqrt{|k|}\,s), & k<0.\end{cases}\qquad \mathbf{s}_k(s)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\sqrt{k}\,s)}{\sqrt{k}}, & k>0;\\ s, & k=0;\\ \dfrac{\sinh(\sqrt{|k|}\,s)}{\sqrt{|k|}}, & k<0.\end{cases}$$

这些满足

$$\mathbf{c}_k'=-k\mathbf{s}_k,\qquad \mathbf{s}'=\mathbf{c}_k \tag{3.7}$$

$$\mathbf{c}_k^2+k\mathbf{s}_k^2=1 \tag{3.8}$$

$$\mathbf{c}_k(a+s)=\mathbf{c}_k(a)\mathbf{c}_k(s)-k\mathbf{s}_k(a)\mathbf{s}_k(s) \tag{3.9}$$

$$\mathbf{s}_k(a+s)=\mathbf{s}_k(a)\mathbf{c}_k(s)+\mathbf{c}_k(a)\mathbf{s}_k(s). \tag{3.10}$$

要看出导数公式成立，或许最简单的方法是注意到 c_k' 和 $-k\mathsf{s}_k$ 都是初值问题 $y''+ky=0$,$y(0)=0$, $y'(0)=-k$的解，而 s_k' 和 c_k 是 $y''+ky=0$, $y(0)=1$ 和 $y'(0)=0$的解。这说明 $\mathsf{c}_k^2+k\mathsf{s}_k^2$ 的导数为零，因此它是常数，进而说明（3.8）成立。对于 c_k的加法公式，注意（3.9）的左右两边都满足初值问题 $u''+ku=0$, $u(0)=\mathsf{c}_k(a)$ 和 $u'(0)=\mathsf{c}_k'(a)=-k\mathsf{s}_k(a)$。类似的论证表明，$\mathsf{s}_k$ 的加法公式也成立。

命题 3.8。设 $k\in\mathbb{R}$，且 I 为一个区间。

(a) $y\mapsto y''+ky$ 在 I 上的拉格朗日核为

$$P_k(s;r)=\mathbf{s}_k(s-r).$$

当 $k\le 0$ 时，该核在所有区间 I 上都向前正。当 $k>0$ 时，对于满足 $k\le(\pi/L)^2$、长度为 L 的所有区间，该核都向前正。

(b) $y\mapsto y'''+ky'$ 的拉格朗日核为

$$Q_k(s;r)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathbf{c}_k(s-r)}{k}, & k\neq 0;\\ \dfrac{(s-r)^2}{2}, & k=0.\end{cases}$$

对于所有 k，该核在所有区间上都向前正。

证明。利用 (3.7) 直接计算可知，这些函数满足拉格朗日核的定义条件；检验它们何时向前正也很直接。□

引理 3.9. 设 $\varkappa\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续的，且 $u\in C^2([a,b])$满足 $u''+\varkappa u=0$。

(a) 若 $u(a) = 0$, $u'(a) \neq 0$, 且 $k_0 \leq (\pi/(b-a))^2$, , 则 $u \neq 0$ 在 (a,b) 上成立。
(b) 若 $u(a) \neq 0$, $u'(a) = 0$, 且 $k_0 \leq (\pi/(2(b-a))^2$, , 则 $u \neq 0$ 在 (a,b) 上成立。

证明。 虽然 (a) 可以利用斯图姆比较定理[4, 定理 1.1 第 208], 页证明, 但我们给出一个基于定理 3.7 的简短证明, 其优点是同样适用于 (b)。不失一般性, 可假设 $u'(a) = 1$, 此时对于 $s > a$ 且在 a 附近, 有 $u(s) > 0$ s 。为导出矛盾, 假设 u 在 (a, b) 内有一个零点, 并令 b^* 为 u 在 (a, b) 内的最小零点。于是 $u > 0$ 在 (a, b^*) 上成立。令 $\overline{u}(s) := \mathrm{s}_{k_0}(\overline{s} - a)$。则

$$\overline{u}'' + k_0\overline{u} = 0, \qquad \overline{u}(a) = 0, \quad \overline{u}'(a) = 1.$$

根据命题 3.8, $u \mapsto u'' + k_0 u$ 的拉格朗日核为 $K(s;r) = P_{k_0}(s,r) = \mathrm{s}_{k_0}(s-r)$; 当$k_0 \leq 0$时, 它在所有区间上均向前正; 或者当$k_0 > 0$时, 在任意长度满足 $k_0 \leq (\pi/L)^2$ 的区间上均向前正。因此, 由定理 3.7（取 $n = 2$ 和 $\ell = 0$）, 可得 $\underline{u}(s) = \mathrm{s}_{k_0}(s-a) \leq u(s)$ 在 $(0, b^*)$ 上成立。由于 $u(b^*) = 0$, 这意味着 $\mathrm{s}_{k_0}(b^* - a) \leq 0$, 因此 $\mathrm{s}_{k_0}(s-a) = 0$ 在 $(a, b^*]$ 内应有一个解, 但事实并非如此。

对于 (b), 采用相同思路, 利用 3.7 比较 u 与 $u := \mathrm{c}_{k_0}$。 □

定理 3.10。 设 I 是一个区间, 且 $\varkappa\colon\ I \to \mathbb{R}$ 连续。那么, $y \mapsto y''' + \varkappa y'$ 的拉格朗日核在以下情况下是向前正的:

(a) $\varkappa$ 是常数, *(b)* $\varkappa \leq 0$, 或 *(c)* $\varkappa \leq k_1$, 其中正数常量 k_1 满足 $k_1 \leq (\pi/L)^2$, 这里 L 是 I的长度。

证明。 $\varkappa$ 为常数的情形可由命题 3.8 得出。

情形 (b) 的假设可重述为 $\varkappa \leq k_1 := 0$。采用这一记号, 在情形 (b) 和 (c) 中都有 $\varkappa \leq k_1$ 。令 $y(s) := K(s;r)$, 则 $(y')'' + \varkappa(y') = 0$, $y'(a) = 0$, $(y')'(a) = 1$。将引理 3.9 应用于 $u := y'$, 可得在情形 (b) 和 (c) 中, $I \cap (r, \infty)$ 上的 $y' > 0$。令 K 为 $y \mapsto y''' + k_1 y'$ 的拉格朗日核。根据情形 (a), K 是向前正的。定理 3.7（取 $n = 3$ 和 $\ell = 1$）推出 $I \cap (r, \infty)$ 上的 $y \geq y$。当 $k_1 = 0$ 时, 我们有 $y(s) = (s-r)^2/2 > 0$; 而当 $k_1 > 0$ 时, 我们有 $y(s) = (1 - \mathrm{c}_{k_1}(s-r))/k_1 \geq 0$。由于 $y(s) = K(s;r)$, 且 r 是 I 中的任意元素, 故证毕。□

引理 3.11。 令 $k \in \mathbb{R}$，则初值问题的解

$$\begin{aligned} &\overline{x}_k''' + k\overline{x}_k' = 0, \qquad \overline{x}_k(0) = 0, \quad \overline{x}_k'(0) = 1, \quad \overline{x}_k''(0) = 0 \\ &\overline{y}_k''' + k\overline{y}_k' = 0, \qquad \overline{y}_k(0) = 0, \quad \overline{y}_k'(0) = 0, \quad \overline{y}_k''(0) = 1 \end{aligned}$$

are

$$\begin{aligned} \overline{x}_k(s) &= \mathbf{s}_k(s) \\ \overline{y}_k(s) &= \begin{cases} \dfrac{1 - \mathbf{c}_k(s)}{k}, & k \neq 0 \\ \dfrac{s^2}{2}, & k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

曲线 $\bar{c}_k(s) := (\overline{x}_k(s)\ \overline{y}_k(s))$ 具有单位仿射速度和常仿射曲率 k。该参数化给出了圆锥曲线中包含$(0,\ 0)$ 的连通分支，其方程为

$$x^2 + ky^2 - 2y = 0.$$

证明。 利用方程 (3.7) 和 (3.8) 可直接计算得到。 □

命题 3.12。 设 $\varkappa$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $x \in C^3([a, b])$满足

$$x''' + \varkappa x' = 0, \qquad x(a) = 0, \quad x'(a) = 1, \quad x''(a) = 0.$$

假设对于某些常数 k_0 和 k_1，有 $k_0 \leq \varkappa \leq k_1$ 以及 $k_1 \leq (\pi/(2(b-a)))^2$。那么，采用引理 *3.11* 的记号，不等式

$$\overline{x}_{k_1}(b-a) \leq x(b) \leq \overline{x}_{k_0}(b-a)$$

成立。如果下界取等号（上界取等号时亦然），则在 $[a, b]$ 上，$\varkappa(s) = k_1$ 和 $x(s) = x_{k_1}(s-a)$（上界取等号时分别为 $\varkappa = k_0$ 和$x(s) = x_{k_0}(s-a)$）。

命题 3.13。 设 $\varkappa$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $y \in C^3([a, b])$满足

$$y''' + \varkappa y' = 0, \qquad y(a) = 0, \quad y'(a) = 0, \quad y''(a) = 1.$$

假设存在常数 k_0 和 k_1，使得 $k_0 \leq \varkappa \leq k_1$ 且 $k_1 \leq (\pi/(b-a))^2$。那么，采用引理 *3.11* 中的记号，不等式

$$\overline{y}_{k_1}(b-a) \leq y(b) \leq \overline{y}_{k_0}(b-a)$$

成立。如果下界（分别地，上界）取等号，那么在 $[a, b]$ 上，$\varkappa(s) = k_1$ 和 $y(s) = y_{k_1}(s-a)$（分别地，$\varkappa = k_0$ 和 $y(s) = y_{k_0}(s-a)$）。

命题 *3.12* 和 *3.13* 的证明。我们证明命题 3.12；命题 3.13 的证明类似。由引理 3.9 的 (b) 部分应用于函数 $u = x'$，可知 $x' > 0$ 在 (a, b) 上成立。因此，通过将 x 与 $x(s) = x_{k_1}(s)$ 进行比较，根据定理 3.7 可得 x 的下界；通过与 $x(s) := x_{k_0}(s)$ 比较，可得上界。定理 3.7 也涵盖了取等号的情形。□

4. Comparisons for areas

定理 4.1。设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个凸开集（不必有界），其边界为 C^4。设 $p_0 \in \partial D$，且 $c\colon\ [0, L] \to \partial D$ 具有仿射单位速度，$c(0) = p_0$，并设 $\varkappa$ 是 c的仿射曲率。设 $\varkappa\colon\ [0, L] \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，使算子 $y \mapsto y''' + \varkappa y'$ 具有向前正的拉格朗日核，并通过初值问题定义 $A\colon\ [0, L] \to \mathbb{R}$

$$\overline{A}''' + \overline{\varkappa}\overline{A}' = \frac{1}{2}, \qquad \overline{A}(0) = \overline{A}'(0) = \overline{A}''(0) = 0$$

那么，令 $A_{c,\ 0,\ c(0)}$ 如 (2.1) 中所述，

$$\varkappa(s) \le \overline{\varkappa}(s)\ on\ [0, L] \quad implies \quad A_{c,0,c(0)}(L) \ge \overline{A}(L)$$
$$\varkappa(s) \ge \overline{\varkappa}(s)\ on\ [0, L] \quad implies \quad A_{c,0,c(0)}(L) \le \overline{A}(L)$$

在这两种情形中的任一种，如果等号成立，则 $\varkappa \equiv \overline{\varkappa}$ 在 $[0, L]$上。

证明。为简化记号，令 $A = A_{c,0,c(0)}$。由定理 2.2 A满足微分方程 $A''' + \varkappa A = 1/2$，且 $p_0 = c(0)$；根据公式 (2.1) 和 (2.2)，有 $A(0) = A'(0) = A''(0) = 0$。由方程 2.2，$A'(s) = \frac{1}{2}(c(s) - c(0)) \wedge c'(s)$。这意味着（见图 3），$\overline{A}'(s) > 0$ 所有 s，且 $c(s) \ne p_0$。因此，结论由定理 3.7 得出。□

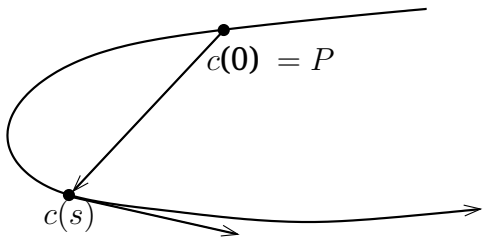

图 3. 向量 $c(s) - c(0)$ 和 $c'(s)$ 构成 $\mathbb{R}^2$ 的右手（即正向）基。

令 $k \in \mathbb{R}$，并设

$$\overline{A}_k(s) = \begin{cases} \dfrac{s - \mathbf{s}_k(s)}{2k}, & k \neq 0; \\ \dfrac{s^3}{12}, & k = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

根据$\mathbf{s}_k$ 的定义，不难验证

$$\overline{A}_k'''(s) + k\overline{A}_k'(s) = \frac{1}{2} \qquad \overline{A}_k(0) = \overline{A}_k'(0) = \overline{A}_k''(0) = 0.$$

采用定理 4.1 的记号，$A_k = A_{c,0,c(0)}$ 其中 c 是一条具有常仿射曲率 k的曲线。

推论 *4.2*。*</style}*采用定理 *4.1* 和方程 *4.1* 中的记号，若$k_0 \leq \varkappa \leq k_1$ 对于某些常数 k_0 和 k_1成立，则

$$\overline{A}_{k_1}(L) \leq A_{c,0,c(0)}(s) \leq \overline{A}_{k_0}(L)$$

在区间 $[0, L]$上。如果 $A_{c,0,c(0)}(L) = \overline{A}_{k_0}(L)$ （分别地，$A_{c,0,c(0)}(L) = \overline{A}_{k_1}(L)$），则 c 在区间 $[0, L]$上具有常曲率 k_0 （分别为 k_1）。□

命题 4.3。设 $\mathcal{C}$ 为凸曲线，并具有仿射曲率上界$\varkappa \geq k_0$。则任何顶点位于 $\mathcal{C}$ 上的三角形 $\triangle p_1p_2p_3$ 都满足

$$\operatorname{Area}(\triangle p_1p_2p_3) < \overline{A}_{k_0}(\Lambda(\mathcal{C})) \tag{4.2}$$

其中 $\overline{A}_{k_0}$ 如公式 (4.1) 所示，且 $\Lambda(\mathcal{C})$是 $\mathcal{C}$的仿射长度。

证明。设 k_1 是 c的仿射曲率的任意上界。由推论 4.2即可得出结论。见图 4 □

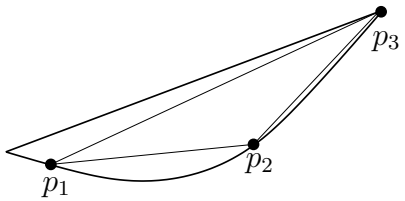

图 4. $\triangle p_1p_2p_3$ 的面积小于由 $\mathcal{C}$ 以及连接 $\mathcal{C}$ 的两个终点的线段所围成区域的面积，而该区域的面积至多为 $A_{k_0}(\Lambda(\mathcal{C}))$，由推论 4.2可得。

注记 4.4。命题 4.3 中的估计在如下意义下接近最优：对于固定的仿射长度 $\Lambda(\mathcal{C})$，当 $k_0 \to -\infty$ 时，不等式 4.2 两边之比趋于 1。为说明这一点，令 $L > 0$ 和 $\mathcal{C}$ 为由 c_{k_0} 参数化的曲线：$[-L, L] \to \mathbb{R}^2$ 为引理 3.11 中的曲线。

于是，由于 c_{k_0} 具有仿射单位速度， $\Lambda(\mathcal{C}) = 2L$。令 p_1、 p_2 和 p_3 为图5所示的对象。于是，根据 $\mathbf{s}_{k_0}(2L) = 2\mathbf{c}_{k_0}(L)\mathbf{s}_{k_0}(L)$ 进行计算（这由加法公式 (3.10) 得出）

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Area}(\triangle p_1p_2p_2)}{\overline{A}_{k_0}(\Lambda(\mathcal{C}))} - 1 &= -\frac{\mathbf{s}_{k_0}(L) - L}{\mathbf{s}_{k_0}(L)\mathbf{c}_{k_0}(L) - L} \\ &= -\frac{\sinh(\sqrt{|k_0|}L) - \sqrt{|k_0|}L}{\sinh(\sqrt{|k_0|}L)\cosh(\sqrt{|k_0|}L) - \sqrt{|k_0|}L} \\ &\sim \frac{-e^{-\sqrt{|k_0|}L}}{2} = \frac{-e^{-\sqrt{|k_0|}\Lambda(\mathcal{C})/2}}{2}.\end{aligned}$$

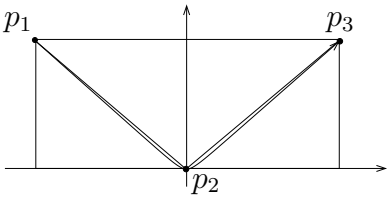

图5。这里 $p_1 = (x_{k_0}(-L), y_{k_0}(-L))$、$-p_2 = (0,0)$ 和 $p_3 = (x_{k_0}(L), y_{k_0}(L))$。那么，$\operatorname{Area}(\triangle p_1p_2p_3) = x_{k_0}(L)y_{k_0}(L)$。该曲线是方程为 $x^2 + k_0y^2 - 2y = 0$ 的双曲线。

5. Adapted coordinates and geometric bounds.

定义5.1。设 $\mathcal{C}$ 是一条嵌入凸曲线，且 $p_0 \in \mathcal{C}$。设 $I_{\mathcal{C},p_0} \subseteq \mathbb{R}$ 为唯一的区间，使得存在一个仿射单位速度参数化 $c_{\mathcal{C},p_0}\colon I_{\mathcal{C},p_0} \to \mathcal{C}$，满足 $c_{\mathcal{C},p_0}(0) = p_0$，并且该参数化覆盖整个 $\mathcal{C}$。这称为 $\mathcal{C}$ 在 p_0 处的标准参数化。那么， $\mathcal{C}$ 在 p_0 处的仿射适配坐标是以 p_0 为中心的 $\mathbb{R}^n$ 上的线性坐标 ξ, η，其中

$$\left.\frac{\partial}{\partial\xi}\right|_{p_0} = \mathbf{t}_{\mathcal{C}}(p_0) = c'_{\mathcal{C},p_0}(0), \qquad \left.\frac{\partial}{\partial\eta}\right|_{p_0} = \mathbf{n}_{\mathcal{C}}(p_0) = c''_{\mathcal{C},p_0}(0).$$

作图参数集是最大的区间 $I^*_{\mathcal{C},\,p_0} \subseteq I_{\mathcal{C},\,p_0}$ 使得限制 $c_{\mathcal{C},\,p_0}\big|_{I^*_{\mathcal{C},\,p_0}}$ 的像：$I^*_{\mathcal{C},\,p_0} \to \mathcal{C}$ 在适配坐标 ξ， η 中是一个图像。作图区间 $I^{**}_{\mathcal{C},\,p_0}$ 是集合 $I^{**}_{\mathcal{C},\,p_0} := \{\xi(c(s)) : s \in I^*_{\mathcal{C},\,p_0}\}$。参见图6。

引理5.2. 设 ξ, η 是在 p_0 处适配于 $\mathcal{C}$ 的仿射适配坐标，且 $x, y\colon I_{\mathcal{C},p_0} \to \mathbb{R}$ 是 c 在该坐标系中的坐标，也就是说

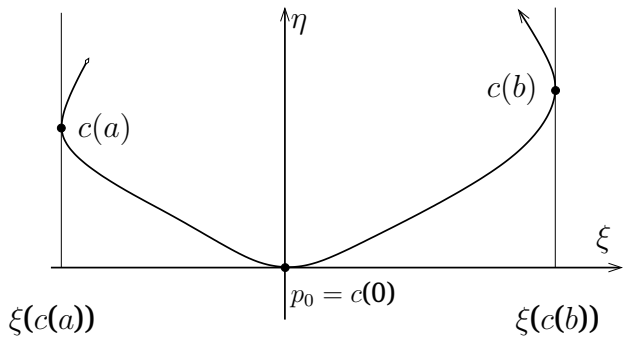

图6。在此， $c := c_{\mathcal{C},p_0}$ 是 $\mathcal{C}$ 在 p_0 处的标准参数化。以 $p_0 = c(0)$ 为中心的仿射适配坐标中， ξ 轴与 $\mathcal{C}$ 在 p_0 处相切，而 η 轴的方向为仿射法向量 $c''(0) = \mathrm{n}_{\mathcal{C}}(0)$。由局部凸性可知，该曲线局部上是一个凸函数的图像。设 $[a,b]$ 是 $I_{\mathcal{C},p_0}$ 中满足 $0 \in [a,b]$ 的最大子区间，使得限制 $c\big|_{[a,b]}$ 是一个图像。此即 $I^*_{\mathcal{C},p_0}$，也就是作图参数集。区间 $[\xi(c(a)) \ \eta(c(b))]$ 在 ξ 轴上的像（即作图函数的定义域）是作图区间 $I^{**}_{\mathcal{C},p_0}$。注意，$I^{**}_{\mathcal{C},p_0}$ 的终点（若不是 $I_{\mathcal{C},p_0}$ 的终点）是切线 $\mathcal{C}$ 变为竖直的位置；也就是说，若 $x(s) = \xi(c(s))$，则这些点满足 $x'(s) = 0$。

$x(s) := \xi(c(s))$ 以及 $y(s) := \eta(c(s))$。那么 x 和 y 满足以下初值问题

$$\begin{aligned} &x''' + \varkappa x = 0, && x(0) = 0 && x'(0) = 1 && x''(0) = 0 \\ &y''' + \varkappa y = 0, && y(0) = 0 && y'(0) = 0 && y''(0) = 1 \end{aligned}$$

其中 $\varkappa$ 是 $\mathcal{C}$ 的仿射曲率。

证明。由方程 $c''' + \varkappa c' = 0$ 以及适配坐标的定义，可轻易得出此结论。□

引理 5.3。设 $p_0 \in \mathcal{C}$。沿用引理*5.2*中的记号，$\{s \in I_{\mathcal{C},p_0} : \ x'(s) > 0\}$ 中 0 的连通分支包含于作图参数集 $I^*_{\mathcal{C},p_0}$。

证明。令 I_0 为 $\{s \in I_{\mathcal{C},p_0}$ 中 0 的连通分支：$x'(s) > 0\}$，并令 $J := \{x(s) : \ s \in I_0\}$。于是，由于对于 I_0，$x'(s) > 0$，映射 $s \mapsto x(s)$ 是 I_0 与 J 之间的微分同胚。定义 $f\colon J \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f(x(s)) := \int_0^s y'(t)\,dt. \tag{5.1}$$

对其求导得到 $\frac{d}{ds}(f(x(s)) - y(s)) = 0$。因此，$f(x(s)) - y(s) = C$，其中 C 为某个常数。由于 $x(0) = y(0) = f(0) = 0$，我们有 $C = 0$，这意味着对于 $s \in I_0$，$y(s) = f(x(s))$。因此，I_0包含在关于 p_0的作图参数集中。□

在仿射适配坐标的定义中，假设曲线 $\mathcal{C}$ 属于可微类 C^3。一般而言，标准参数化只能属于 C^2。若标准参数化属于 C^3（这是定义仿射曲率所要求的条件），则 $\mathcal{C}$ 的正则性会提高：正如我们现在将要证明的，它将是 $\mathbb{R}^2$ 中一个 C^4 浸入子流形。

命题 5.4. 采用引理 *5.3* 中的记号，若 $\varkappa$ 对于 $k \geq 0$ 是 C^k，则函数 f 是 C^{k+4}。因此，曲线 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个 C^{k+4} 浸入子流形。

证明。由于 $y(s) = f(x(s))$，且 x 和 y 都是 C^3，因此 f 是 C^3。对 (5.1) 求三次导数，得到

$$\begin{aligned} y'(s) &= f'(x(s))x'(s) \\ y''(s) &= f''(x(s))x'(s)^2 + f'(x(s))x''(s) \\ y'''(s) &= f'''(x(s))x'(s)^3 + 3f''(x(s))x'(s)x''(s) + f'(x(s))x'''(s). \end{aligned} \tag{5.2}$$

在 (5.2) 中利用 $x'''(s) = -\varkappa(s)x'(s)$、$y'''(s) = -\varkappa(s)y'(s)$ 以及 $y'(s) = f'(x(s))x'(s)$，得到

$$0 = f'''(x(s))x'(s)^3 + 3f''(x(s))x'(s)x''(s)$$

函数 x' 在图像参数化集合的内部不为零，因此我们可以除以 $x'(s)^3$，得到

$$f'''(x(s)) = -\frac{3f''(x(s))x''(s)}{x'(s)^2}.$$

由于 x 是 C^3，且 $x' \neq 0$ 具有一个 C^3 反函数 g，因此存在一个 C^3 函数g，使得 $g(x(s)) = s$。因此

$$f'''(x) = -\frac{3f''(x)x''(g(x))}{x'(g(x))^2}$$

这表明 f''' 是 C^1，因此 f 是 C^4。对于由图像 $y = f(x)$ 给出的 C^4 类非参数曲线，其仿射曲率为（参见[1,第 14 页，式 (83)]）

$$\varkappa(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(f''(x)^{\frac{2}{3}}}\right)'' = \frac{f''''(x)}{2f''(x)^{\frac{5}{3}}} - \frac{5f'''(x)^2}{9f''(x)^{\frac{8}{3}}}$$

这可以改写为以下形式

$$f''''(x) = 2\kappa(x)f''(x)^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{9}\frac{f'''(x)^2}{f''(x)}$$

根据常微分方程的标准正则性定理，如果$\varkappa$ 是 C^k ，那么 f 是 C^{k+4}。或者，也可以对该方程反复求导，并用归纳法得出结果。□

定理 *5.5*。设 $\mathcal{C}$ 是 C^4 ，且设 $p_0 \in \mathcal{C}$。假设 $(-L,\ L) \subseteq I_{\mathcal{C},\ p_0}$，其中某个 $L > 0$。还假设，对于某些常数 k_0 和 k_1 ， $\mathcal{C}$ 的仿射曲率满足界 $k_0 \leq \varkappa\ (s)\ \leq k_1$ ，其中 $-L \leq s \leq L$，且 $k_1 \leq\ (\pi/2L)^{\ 2}$。设 ξ，η 为 p_0 处的仿射适配坐标，令$x\ (s)\ = \xi\ (c\ (s)\ )$ ，且 $y\ (s)\ = \eta\ (c\ (s)\ )$ 。那么 $(-L,\ L)$ 包含于 $\mathcal{C}$ 关于 p_0的作图参数集中。采用引理 *3.11* 中的记号，不等式

$$\overline{x}_{k_1}(|s|) \leq |x(s)| \leq \overline{x}_{k_0}(|s|) \tag{5.3}$$

$$\overline{y}_{k_1}(s) \leq y(s) \leq \overline{y}_{k_0}(s) \tag{5.4}$$

在区间 $(-L, L)$上成立。令 $R := \mathbf{s}^{k_1}(L)$，则 $\mathcal{C}$ 在 s_0 处的作图区间包含 $(-R, R)$。若 $s_1 \in (-L, L)$ 满足 $s_1 \neq 0$ ，且 (5.3) 或 (5.4) 中的任一下界取等号，则将 c 限制在 *0* 与 s_1 之间的点所构成的区间上，所得曲线具有常曲率 k_1。同样，若 (5.3) 或 (5.4) 中的任一上界取等号，则将 c 限制在0 与 s_1 之间的点所构成的区间上，所得曲线具有常曲率 k_0。

证明。 将引理 3.9 应用于 $u = x'$ 在 $[0, L)$ 上，得到$x' > 0$ 在 $[0, L)$ 上。将同一引理应用于 $u(s) = x'(-s)$ 在 $[0, L)$ 上（其满足 $u''(s) + \varkappa(-s)u(s) = 0$），可推出 $x' \neq 0$ 区间 $(-L, L)$。因此， $x' > 0$ 在 $(-L, L)$ 上成立，故由引理 5.3，区间 $(-L, L)$ 包含于 $\mathcal{C}$ 在 p_0 处的作图参数集中。在区间 $[0, L)$ 上，区间 $[0, L)$ 上的不等式 5.3 和 5.4 由命题 3.12 和 3.13 得出。

为得到由下式给出的 $s \in (-L, 0]$ let $\widetilde{x}, \widetilde{y}\colon\ [0, -L) \to \mathbb{R}$ 的不等式

$$\widetilde{x}(s) = -x(-s), \qquad \widetilde{y}(s) = y(-s).$$

这些满足

$$\widetilde{x}'''(s) + \varkappa(-s)\widetilde{x}'(s) = 0, \qquad \widetilde{x}(0) = 0, \quad \widetilde{x}'(0) = 1, \quad \widetilde{x}''(0) = 0,$$
$$\widetilde{y}'''(s) + \varkappa(-s)\widetilde{y}'(s) = 0, \qquad \widetilde{y}(0) = 0, \quad \widetilde{y}'(0) = 0, \quad \widetilde{y}''(0) = 1.$$

再次结合命题 3.12 和 3.13 以及 $\widetilde{x}$and $\widetilde{y}$ 的定义可得

$$\overline{x}_{k_1}(s) \le -x(-s) \le \overline{x}_{k_0}(s)$$
$$\overline{y}_{k_1}(s) \le y(-s) \le \overline{y}_{k_0}(s)$$

在 $[0, L)$ 上。将 s 替换为 $-s$，并利用 $x_{k_j}(=s) = -x_{k_j}(s)$ 和 $y_{k_j}(-s) = y_{k_j}(s)$，可得不等式 (5.3) 和 (5.4) 在 $(-L,\ 0]$ 上也成立。界 (5.3) 蕴含作图区间包含 $(-R,\ R)$。

关于等号成立条件的陈述可由命题 3.12 和 3.13 中的等号情形推出。□

推论 5.6。设 $\mathcal{C}$ 具有仿射曲率上界 $\varkappa \le 0$，并假设存在一个定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的仿射单位速度参数化 $c\colon\ \mathbb{R} \to \mathcal{C}$。那么 c 是双射；对于任意点 $p_0 \in \mathcal{C}$，曲线在 p_0 处的仿射适配坐标中全局上是图像 $\eta = f(\xi)$。

证明。设 $p_0 \in \mathcal{C}$。不失一般性，可假设 $c(0) = p_0$。设 $L > 0$。在定理 5.5 中令 $k_0 = \min\{\varkappa(s) :\ s \in [-L, L]\}$，并令 $k_1 = 0$，可知作图参数集包含 $(-L,\ L)$，且作图区间包含 $(-s_{k_1}(L) s_{k_1}(L)) = (-L,\ L)$（因为 $\mathbf{s}_{k_1}(s) = \mathbf{s}_0(s) = s$）。令 $L \to \infty$ 即得证。□

例 5.7。要说明在此推论中仿射曲率上界是必要的，注意对于任意 $k > 0$，令 $\mathcal{C}$ 为方程为 $x^2 + y^2 = k^{-3/4}$ 的圆。那么 $c\colon\ \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ 由下式给出

$$c(s) = \left(k^{-3/4} \cos(k^{1/2} s), k^{-3/4} \sin(k^{1/2} s)\right)$$

是单位仿射速率，且 $\mathcal{C}$ 具有常曲率 k，但 c 不是单射，并且 $\mathcal{C}$ 在任何坐标系下都不是全局图像。

定理 5.8。设 $\mathcal{C}$ 的曲率界为 $k_0 \le \varkappa \le k_1$，其中 k_0、k_1 是满足 $k_1 \le (\pi/\Lambda(\mathcal{C}))^2$ 的常数。设 p_1、p_2、p_3 是 $\mathcal{C}$ 上相距较远的点。设 $L = \Lambda(\mathcal{C})/2$。则

$$\operatorname{Area}(\triangle p_1 p_2 p_3) \le \overline{x}_{k_0}(L) \overline{y}_{k_0}(L).$$

等号成立当且仅当 $\mathcal{C}$ 具有常曲率 k_0，并且在可能重新排序后，点 p_1、p_2 和 p_3 分别是 $\mathcal{C}$ 的起点、中点和终点。

证明。令 p_0 为 $\mathcal{C}$ 的中点，并构造以 p_0为中心的 $\mathcal{C}$ 的仿射适配坐标 ξ、η。将点 p_1、p_2 和p_3 标记为沿着 $\mathcal{C}$递增排列。如图 7 所示，根据定理 5.5，曲线位于由 $-x_{k_0}(L) \le \xi \le x_{k_0}(L)$ 和 $0 \le \eta \le y_{k_0}(L)$ 确定的矩形内。该矩形内的任意三角形面积至多为矩形面积的一半，因此面积

至多为 $\overline{x}_{k_0}(L)$ $y_{k_0}(L)$。等号成立的唯一可能情形是，p_1 为 $\mathcal{C}$ 的起点，且 p_1 的坐标为 $(-x_{k_0}(L)\ y_{k_0}(L))$；$p_2 = \overline{p_0}$为 $\mathcal{C}$ 的中点，而 p_3 为 $\mathcal{C}$的终点，其坐标为 $(-x_{k_0}(L)\ y_{k_0}(L))$。这意味着定理 5.5 中的上界取等号，因此 $\mathcal{C}$ 具有常曲率 k_0。□

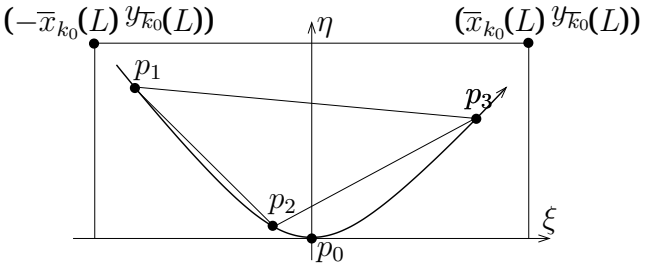

图 7. 设 $L = \Lambda(\mathcal{C})/2$。那么定理 5.5 意味着 $\mathcal{C}$ 位于图示矩形内。因此，$\triangle p_1p_2p_2$ 的面积至多为该矩形面积的一半，且仅当 p_1 位于左上角、p_3 位于右上角且 $p_1 = p_0$ 位于 ξ 轴上时取等号。

6. Bounds for the number of lattice points on curve.

定义 6.1。令 v_0，v_1，$v_2 \in \mathbb{R}^2$ 满足 v_1 且 v_2 线性无关。以 v_0 为原点、由 v_1 和 v_2 生成的格是集合

$$\mathcal{L}(v_0, v_1, v_2) := \{v_0 + mv_1 + nv_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

格最基本的不变量是其基本域的面积，$A_{\mathcal{L}}$。若 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v_0,\ v_1,\ v_2)$，则它由下式给出

$$A_{\mathcal{L}} = |v_1 \wedge v_2|.$$

命题 6.2。若 p_1、p_2、p_3 是 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v_0$、$v_1$、$v_2)$中的三个非线性点，则三角形 $\triangle p_1p_2p_3$ 的面积满足

$$\mathrm{Area}(\triangle p_1p_2p_3) = \frac{\mathfrak{m}}{2}A_{\mathcal{L}}.$$

对于某个正整数 $\mathfrak{m}$，因此 $\triangle p_1p_2p_3 \geq A_{\mathcal{L}}/2$。

证明。若 $p_j = v_0 + m_jv_1 + n_jv_2$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(\triangle p_1p_2p_3) &= \frac{1}{2}|(p_2 - p_1) \wedge (p_3 - p_1)| \\ &= \frac{1}{2}|(m_2 - m_1)(n_3 - n_1) - (n_2 - n_1)(m_3 - m_1)||v_1 \wedge v_2| \\ &= \frac{\mathfrak{m}}{2}A_{\mathcal{L}}\end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{m} = |(m_2 - m_1)(n_3 - n_1) - (n_2 - n_1)(m_3 - m_1)|$ 是一个正整数。 □

作为激发下面定义的一个例子，考虑由 $ax^2 + bxy + cy^2 = R$ 定义的椭圆，其中 a、c、R 是奇整数，而 b 是偶整数。令 $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^2$ 为标准整数格。若 $p = (x, y) \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}$，则将 $ax^2 + bxy + cy^2 = R^2$ 模 2 化简（并利用 $x^2 \equiv x$ 模 2）可得 $x + y \equiv 1$ 模 2。因此，模 2 下 $p \equiv (1, 0)$ 或 $p \equiv (0, 1)$。于是，若对于 $j = 1$、2、3，$p_j = (x_j, y_j) \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}$，那么从 $\{p_1, p_2, p_3\}$ 中至少有一对（例如 p_1、p_2）满足 $p_1 \equiv p_2$ 模 2。这意味着 $(p_2 - p_1) \wedge (p_3 - p_1)$ 是偶数，因此面积 $\operatorname{Area}(\triangle p_1 p_2 p_3) = \frac{1}{2}|(p_2 - p_1) \wedge (p_3 - p_1)|$ 是整数，故其面积是 $1/2$ 的两倍；$1/2$ 是顶点位于 $\mathbb{Z}^2$ 中的一般三角形的最小面积。

定义 6.3。设 $\mathcal{L}$ 为一个格，$\mathcal{C}$ 为一条曲线。那么，$\mathfrak{m}(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ 是满足下述条件的最大正整数：

$$\operatorname{Area}(\triangle p_1 p_2 p_2) \geq \frac{\mathfrak{m}(\mathcal{C}, \mathcal{L})}{2} A_{\mathcal{L}}$$

对所有互不相同的点 $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}$，

定义并使用整数 $\mathfrak{m}(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ 来改进格点估计，是对 Ramana 的论文 [12] 中一个思想的抽象。在该论文中，他针对整数格、形如 $ax^2 + dy^2 = R$ 的整数二次曲线以及格 $\mathbb{Z}^2$，定义了一个相关的整数 m_{ad}。

定义 6.4。对每个 $k \in \mathbb{R}$，令 F_k 为函数 A_k 的反函数。（函数 A_k 严格递增，因此该反函数存在。）

定理 6.5。设 $\mathcal{C}$ 为凸的，C^4，且仿射长度为 $\Lambda(\mathcal{C})$，其仿射曲率的下界为 $\varkappa \geq k_0 > 0$。令 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\mathcal{C}, \mathcal{L})$。若

$$\overline{A}_{k_0}(\Lambda(\mathcal{C})) \leq \frac{\mathfrak{m} A_{\mathcal{L}}}{2} \tag{6.1}$$

那么，$\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{C}$ 上至多有两个点。

证明。如果 c上有三个或更多 $\mathcal{L}$ 点，设 p_1、p_2和 p_3是其中三个。由命题 6.2 和 4.3 以及$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\mathcal{C}, \mathcal{L})$的定义可知

$$\frac{\mathfrak{m} A_{\mathcal{L}}}{2} \leq \operatorname{Area}(\triangle p_1 p_2 p_3) < \overline{A}_{k_0}(\Lambda(\mathcal{C}))$$

这与 (6.1) 矛盾。 □

定理 6.6。 设 $\mathcal{L}$ 为一个格， $\mathcal{C}$ 为一条仿射曲率具有下界 $\varkappa \geq k_0$ 的 C^4 曲线，且 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ 如定义 *6.3* 所述。假设 $\mathcal{C}$ 是凸的，或者更一般地，任意仿射长度不超过 $F_{k_0}(A_{\mathcal{L}}/2)$的子弧都是凸的。那么

$$\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) \leq 2 \left\lceil \frac{\Lambda(\mathcal{C})}{F_{k_0}(\mathfrak{m} A_{\mathcal{L}}/2)} \right\rceil .$$

证明。根据定理 6.5， $\mathcal{C}$ 中任意仿射长度至多为$F_{k_0}(\mathfrak{m}A_{\mathcal{L}}/2)$的子弧至多包含两个 $\mathcal{L}$点。令 $m = \lceil \Lambda(\mathcal{C})/F_{k_0}(\mathfrak{m}A_{\mathcal{L}}/2) \rceil$。将 $\mathcal{C}$ 分成 m 个仿射长度为 L/m 的子弧，即可用 m个仿射长度为 $\leq F_{k_0}(\mathfrak{m}A_{\mathcal{L}}/2)$的子弧覆盖 c 。由于这些子弧中的每一条至多包含两个 $\mathcal{L}$点， $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}$中的点总数至多为 $2m$。□

定理 6.7。 设 $\mathcal{C}$ 的仿射曲率界为 $k_0 \leq \varkappa \leq k_1$ ，其中$k_1 \leq (\pi/\Lambda(\mathcal{C}))^2$。设 $\mathcal{L}$ 为一个格，且令 $L = \Lambda(\mathcal{C})/2$ 以及 $\mathfrak{m}$ =$\mathfrak{m}(\mathcal{C}, \mathcal{L})$。如果

$$\overline{x}_{k_0}(L)\overline{y}_{k_0}(L) \leq \frac{\mathfrak{m} A_{\mathcal{L}}}{2}, \tag{6.2}$$

then

$$\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) \leq 3.$$

等式$\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) = 3$ 成立，当且仅当 $\mathcal{C}$ 具有常曲率k_0，且(6.2) 中等号成立，并且 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{C}$ 上的三个点是 $\mathcal{C}$ 的两个端点以及 $\mathcal{C}$的中点。

证明。 如果 $\mathcal{C}$ 上的 $\mathcal{L}$ 有多于两个点，设 p_1、 p_2、 p_3 是其中三个点。根据定理 5.5，这些点位于一个凸图像上，因此不共线。于是根据命题 6.2、定理 5.8、 $\mathfrak{m}$ 的定义以及不等式 (6.2)

$$\frac{\mathfrak{m} A_{\mathcal{L}}}{2} \leq \mathrm{Area}(\triangle p_1 p_2 p_3) \leq \overline{x}_{k_0}(L)\overline{y}_{k_0}(L) \leq \frac{\mathfrak{m} A_{\mathcal{L}}}{2}.$$

因此，定理 5.8 中等号成立；当且仅当这三个点是 $\mathcal{C}$ 的中点，且 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}$ 的终点处具有常仿射曲率 k_0 时，才会出现这种情况。这表明， $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}$ 的任意一个三元素子集都由 $\mathcal{C}$ 的终点和中点组成，因此 $\mathcal{C}$ 至多有三个点。□

引理 6.8。 设 $k \in \mathbb{R}$ ，并定义区间 I_k 和 J_k 如下

$$I_k := \begin{cases} [0, \infty), & k \leq 0; \\ [0, \pi/2\sqrt{k}\,], & k > 0. \end{cases} \qquad J_k := \begin{cases} [0, \infty), & k \leq 0; \\ [0, 1/k^{3/2}], & k > 0. \end{cases}$$

并令 H_k 在 I_k 上由 $H_k(s) = x_k(s)y_k(s)$定义。则H_k 是 I_k 与 J_k之间的同胚。

证明。容易验证， x_k 和 y_k 在 I_k上均严格递增，因此 H_k 也严格递增。此外，当 $k \le 0$ 时，$\lim_{s\to\infty} H_k(s) = \infty$；当 $k > 0$时， $H_k(\pi/2\sqrt{k}) = 1/k^{3/2}$。这表明 H_k 是区间之间的双射连续映射，因而是一个同胚。□

定义 6.9. 令 $G_k\colon J_k \to I_k$ 为引理 6.8 中映射 H_k 的反函数

定理 6.10. 设 $\mathcal{C}$ 是一条仿射曲率界为 $k_0 \le \varkappa \le k_1$的曲线。令 $\mathcal{L}$ 为一个格，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\mathcal{C},\mathcal{L})$，并设 $L = G_{k_0}(\mathfrak{m}A_{\mathcal{L}}/2)$ 和$m = \lfloor \Lambda(\mathcal{C})/(2L)\rfloor$。若 $k_1 > 0$ 还假设 $k_1 \le (\pi/(2L))^2$。则

$$\#(\mathcal{L}\cap\mathcal{C}) \le 2m+2.$$

证明。 并令 $c\colon [0,\Lambda(\mathcal{C})] \to \mathbb{R}^2$ 为 $\mathcal{C}$的仿射单位速度参数化。对于 $j = 1, 2, \dots, m$，定义 $\mathcal{C}$ 的子弧如下

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_j &:= \{c(s) : 2(j-1)L \le s < 2jL\}\\ \mathcal{C}_j^* &:= \{c(s) : 2(j-1)L \le s \le 2jL\}\\ \mathcal{C}_{m+1} &:= \{c(s) : 2mL \le s \le \Lambda(\mathcal{C})\}.\end{aligned}$$

那么 $\mathcal{C}_j$ 就是去掉右端点后的 $\mathcal{C}_j^*$。$\mathcal{C}_j^*$的仿射长度为 $2L = G_{k_0}(\mathfrak{m}A_{\mathcal{L}}/2)$，根据定义 G_{k_0}，我们有 $x_{k_0}(L)^{y_{k_0}}(L) = \mathfrak{m}A_{\mathcal{L}}/2$。因此，根据定理 6.7，¯弧 $\mathcal{C}_j^*$ 至多包含 $\mathcal{L}$ 的 3 个点；如果它确实包含 3 个点，那么其中两个点是 $\mathcal{C}_j^*$的端点。因此， $\mathcal{C}_j$ 至多包含 $\mathcal{L}$的两个点。弧 $\mathcal{C}_{m+1}$的仿射长度小于 $2L$；再次使用定理 6.7，它至多包含 $\mathcal{L}$的两个点。由于 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{m+1}$，这意味着 $\mathcal{C}\cap\mathcal{L}$至多包含 $2(m+1)$ 个点。□

该结果还有一个刚性版本。

定理 6.11。 设 $\mathcal{C}$ 满足定理 *6.10* 的假设，并额外假设

$$m = \frac{\Lambda(\mathcal{C})}{2L}$$

是一个整数。那么，如果 $\mathcal{C}$ 是开集（即不是有界凸域的边界），则

$$\#(\mathcal{L}\cap\mathcal{C}) \le 2m+1.$$

当且仅当 $\mathcal{C}$ 具有常曲率 k_0，且 $\mathcal{L}\cap\mathcal{C}$ 上的点相对于仿射弧长沿 $\mathcal{C}$ 均匀分布，相邻点之间的距离为 $L = G_{k_0}(\mathfrak{m}A_{\mathcal{L}}/2)$ 时，等号成立。特别地， $\mathcal{C}$ 的端点位于 $\mathcal{L}$中。

证明。 由于 m 是整数，在定理 6.10 的证明中，$\mathcal{C}_{m+1}$ 恰好是单点集 $\{c(\Lambda(\mathcal{C}))\}$。因此，对于 $j = 1, 2, \ldots, m$，每个 $\mathcal{C}_j$ 至多包含 $\mathcal{L}$ 中的两个点，而 $\mathcal{C}_{m+1}$ 至多包含 $\mathcal{L}$中的一个点。因此，$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{m+1}$ 至多包含 $\mathcal{L}$中的 $2m+1$个点。

我们通过对 m 作归纳，证明等号成立时，$\mathcal{C}$ 具有常曲率，且 $\mathcal{C} \cap \mathcal{L}$ 上的点等间距分布。若 $m = 1$，则由定理 6.7 可得结论，因为 $x_{k_0}(L)^{y_{k_0}(L)} = \mathfrak{m} A_{\mathcal{L}}/2$。

假设结论对 m 成立，并设 $\mathcal{C}$ 是一条曲线，满足 $\Lambda(\mathcal{C}) = (m+1)G_{k_0}(\mathfrak{m} A_{\mathcal{L}}/2)$ 且 $\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) = 2m+3$。设 $c\colon [0, \Lambda(\mathcal{C})] \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 的仿射单位速度参数化，并设 $\mathcal{C}' := \{c(s) : 0 \le s \le 2L\}$ 以及 $\mathcal{C}'' := \{c(s) : 2L \le s \le (m+1)L = \Lambda(\mathcal{C})\}$。于是 $\mathcal{C}'$ 至多有 3 个点，而 $\mathcal{C}''$ 至多有 $2m+1$ 个点。交集 $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$ 只有一个点 $c(2L)$。若此点不在 $\mathcal{L}$ 中，则由归纳假设，$\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}') \le 2$ 且 $\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}'') \le 2m$，并且集合 $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}'$ 与 $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}''$ 没有公共点。因此 $\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) = \#(\mathcal{L} \cap (\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}'')) \le 2 + 2m$，这与 $\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) = 2m + 3$ 矛盾。因此 $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}'$ 与 $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}''$ 有一个公共点，由此

$$\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) = \#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}') + \#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}'') - 1 \le 3 + 2m + 1 - 1 = 2m + 3.$$

因此，假设 $\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) = 2m + 3$，即可推出 $\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}') = 3$ 和 $\#(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}'') = 2m+1$。因此，归纳假设表明 $\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{C}''$，以及 $\mathcal{C}$，具有常仿射曲率 k_0，且这些点等距分布，相邻两点之间的距离为 L。□

7. Examples.

本节给出一些例子，以说明我们关于曲线上格点数量上界的定理是尖锐的。为简化讨论，以下所有例子均取 $\mathfrak{m}(\mathcal{L}, \mathcal{C}) = 1$。

7.1. 当 $k_0 = 0$ 时的例子。 在此情形下，引理 6.8 中的函数 $H_{k_0} = H_0$ 由 $H_0(s) = s^3/2$ 给出，因此其反函数（参见定义 6.9）为

$$G_0(s) = (2s)^{1/3}.$$

设 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v_0, v_1, v_2)$ 是一个格。通过在必要时将 v_2 替换为 $-v_2$，我们可以假设 $v_1 \wedge v_2 > 0$。令 $\alpha = (v_1 \wedge v_2)^{-1/3}$，并令 $\mathcal{C}$ 为由下式参数化的抛物线

$$c(s) = v_0 + (\alpha s) v_2 + \frac{(\alpha s)(\alpha s + 1)}{2} v_2.$$

经过一些计算可得

$$c'(s) \wedge c''(s) = \alpha^3 v_1 \wedge v_2 = 1.$$

因此， c 是 $\mathcal{C}$的仿射单位速度参数化。令 $s_j = j/\alpha$。那么

$$p_j := c(s_j) = v_0 + jv_1 + \frac{j(j+1)}{2} v_2 \in \mathcal{L}$$

p_{j+1} 与 p_j 之间的仿射距离为 $s_{j-1} - s_j = 1/\alpha$。定理 6.10 和 6.11 中的 L由下式给出

$$L = G_0(A_{\mathcal{L}}/2) = (A_{\mathcal{L}})^{1/3} = (v_1 \wedge v_2)^{1/3} = 1/\alpha,$$

这是 $\mathcal{C}$上 p_j 与 p_{j+1} 之间的仿射距离。

令 $k_0 = 0$ 和 $k_1 > 0$ 满足 $k_1 \leq (\pi/2L)^2$ ，则限制$\mathcal{C}\big|_{p_1}^{p_{2m+1}}$ ，即 $\mathcal{C}$ 上 p_1 与 p_{2m+1}之间的弧，是定理 6.11 中等号成立的一个例子，因此也是定理 6.7 中等号成立的例子。曲线$\mathcal{C}\big|_{p_0}^{p_{m+1}}$ 是定理 6.10 中等号成立的一个例子。

7.2. **构造圆锥曲线上间距很近的格点**。

引理 7.1. 设 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v_0, v_1, v_2)$ 和 $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(v_0', v_1', v_2')$ 假设 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ 且 $A_{\mathcal{L}} = A_{\mathcal{L}'}$。那么 $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$。

证明.由于 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ ，我们有 $v_0' \in \mathcal{L}$ ，因此可将 $\mathcal{L}$ 写成$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v_0', v_1, v_2)$。于是 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$意味着存在整数 a_{ij}，使得

$$\begin{aligned} v_0' + v_1' &= v_0' + a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ v_0' + v_2' &= v_0' + a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{aligned}$$

等式 $A_{\mathcal{L}} = A_{\mathcal{L}'}$意味着 $v_1 \wedge v_2 = \pm v_1' \wedge v_2'$。因此

$$\begin{aligned} v_1' \wedge v_2' &= (a_{11}v_1 + a_{12}v_2) \wedge (a_{21}v_1 + a_{22}v_2) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) v_1 \wedge v_2 \\ &= \pm(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) v_1' \wedge v_2' \end{aligned}$$

因此 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm 1$。由此，若 $[b_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}$ 是矩阵 $[a_{ij}]$的反函数，则利用克莱姆法则求反函数，可知数 b_{ij} 是整数。于是

$$\begin{aligned} v_0' + v_1 &= v_0' + b_{11}v_1' + b_{12}v_2' \\ v_0' + v_2 &= v_0' + b_{21}v_1' + b_{22}v_2' \end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ ，因此 $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$。 □

引理 7.2. 设 $\mathcal{L}$ 是一个格，φ 是 $\mathbb{R}^2$ 的仿射运动，使得对于某些点 p_0、p_1、$p_2 \in \mathcal{L}$，有 $\varphi(p_0)\ \varphi(p_1)\ \varphi(p_2) \in \mathcal{L}$ 并且

$$\mathrm{Area}(\triangle\varphi(p_0)\varphi(p_1)\varphi(p_2)) = \frac{A_{\mathcal{L}}}{2.}$$

那么 φ 保持格 $\mathcal{L}$不变。

证明。 由于 φ 是仿射运动，它保持面积不变。因此

$$\mathrm{Area}(\triangle p_0p_1p_2) = \mathrm{Area}(\triangle\varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3)) = A_{\mathcal{L}}/2.$$

由于 $p_0, p_1, p_2 \in \mathcal{L}$，我们有 $\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}(p_0, p_1 - p_0, p_2 - p_0) \subseteq \mathcal{L}$。于是 Area($\triangle p_0p_1p_2$) $= A_{\mathcal{L}}/2$ 推出 $A_{\mathcal{L}_1} = A_{\mathcal{L}}$，由引理 7.1 可得$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$。同样的论证表明 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(p_0)\ \varphi(p_1)-\varphi(p_0)\ \varphi(p_2)-\varphi(p_0)) = \mathcal{L}$。因此，$\mathcal{L}$ 在 φ 下的像为

$$\begin{aligned}\varphi[\mathcal{L}] &= \varphi[\mathcal{L}(p_0, p_1 - p_0, p_2 - p_0)]\\ &= \mathcal{L}(\varphi(p_0), \varphi(p_1) - \varphi(p_0), \varphi(p_2) - \varphi(p_0))\\ &= \mathcal{L}\end{aligned}$$

如所需。 □

命题 7.3。 设 $\mathcal{C}$ 是一个圆锥曲线的连通分支，其仿射曲率为常数 k_0，且设 $\mathcal{L}$ 为一个格。假设存在互不相同的点 *let* p_1, p_2, p_3, p_4，它们按照 $\mathcal{C}$ 上的自然定向依次排列，p_j 与$p_{j+1} = L$ 之间的仿射距离为某个常数 L，并且 $j = 1$、2、3 以及满足

$$\mathrm{Area}(p_2, p_3, p_4) = \frac{A_{\mathcal{L}}}{2}.$$

那么，存在唯一的特殊仿射运动 φ，它同时保持曲线 $\mathcal{C}$和格 $\mathcal{L}$不变，并且对于 $j = 1$、2、3，有 $\varphi(p_j) = p_{j+1}$。此外

(a) 对所有整数 j，都有 $\varphi^j(p_1) \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}$；并且对于所有 j，$p_j := \varphi^{j-1}(p_1)$ 与 $p_{j+1} := \varphi^j(p_1)$ 之间的仿射距离为 L。*(b)* 若 k_0 是 $\mathcal{C}$ 的曲率，则 k_0、L 和 $A_{\mathcal{L}}$ 之间满足关系

$$\frac{A_{\mathcal{L}}}{2} = H_{k_0}(L). \tag{7.1}$$

其中 H_{k_0} 如引理 *6.8* 所述。

证明。令 $c_1\colon\ \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ 为$\mathcal{C}$的仿射单位速度参数化，且满足 $c_1(0) = p_1$。则对于 $j = 1, 2, 3, 4$，有 $p_j = c((j-1)L)$。令$c_2(s) = c_1(s + L)$。则 c_2 是$\mathcal{C}$的仿射单位速度参数化。由于 $\mathcal{C}$ 具有常仿射曲率，定理 2.1 给出了唯一的

仿射运动 φ 满足 $c_2(s) = \varphi(c_1(s))$。于是，对于所有 s， $\varphi(c_1(s)) = c_1(s + L)$，因此 φ 保持 $\mathcal{C}$，并且对于 $j = 1, 2, 3$，有 $\varphi(p_j) = p_{j+1}$。此外

$$\operatorname{Area}(\triangle\varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3)) = \operatorname{Area}(\triangle p_2p_3p_4) = \frac{A_{\mathcal{L}}}{2}.$$

因此，根据引理 7.2， φ 保持 $\mathcal{L}$。对于所有整数 j，有 $\varphi^j(p_1) = c_1(jL) \in \mathcal{L}$，且 φ 保持仿射距离，因此 p_j 与 p_{j+1} 之间的仿射距离为 L。最后，由定理 6.7，等式（7.1）成立。□

7.3. 当 $k_0 < 0$时的例子。 我们首先考虑格为 $\mathcal{L} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 平面中整数点格的情形。设 $\mathcal{C}_0$ 为双曲线方程所确定的连通分支

$$x^2 - xy - y^2 = 1$$

它包含点 $(1,0)$。设

$$\alpha := 2^{-1/3}5^{1/6}$$

那么，经过计算可得 $c\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 由下式给出

$$c(s) = \left(\cosh(\alpha s) - \frac{1}{\sqrt{5}}\sinh(\alpha s), -\frac{2}{\sqrt{5}}\sinh(\alpha s)\right)$$

是 $\mathcal{C}_0$ 的仿射单位速度参数化，其中

$$c(0) = (1, 0).$$

不难看出

$$c'''(s) = \alpha^2 c'(s)$$

因此， $\mathcal{C}$ 具有常曲率 $k_0 = -\alpha^2$。令

$$L = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arcsinh}(\sqrt{5}/2).$$

那么，$\sinh(\alpha L) = \sqrt{5}/2$ 和 $\cosh(\alpha L) = \sqrt{(1 + (\sqrt{5}/2)^2)} = 3/2$。因此

$$c(L) = (1, -1).$$

为了在 $\mathcal{C}$ 上找到更多整数点，令 φ 为线性映射 $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，其定义为

$$\varphi(x, y) := (x - y, -x + 2y).$$

那么 φ 是仿射运动，并保持 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{L}$ 不变。定义 $p_1 := c(0) = (1, 0)$ 和 $p_2 := c(L) = (1, -1)$，则 $\varphi(p_1) = p_2$。由此可知，对于所有 $j \in \mathbb{Z}$，点[1]。 $p_j := c((j-1)L) = \varphi^{j-1}(p_1)$ 都在 $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}$ 中。于是

[1]对于 $j > 0$，不难验证：若 $f_0, f_1, f_2 \ldots$ 是由 $f_{j+2} = f_{j+1} + f_j$、 $f_0 = 0$、 $f_1 = 1$定义的斐波那契数列，则当 $j \geq 2$ 时，这些点为 $p_j = (f_{2j-3}, -f_{2j-2})$

$p_2 = (2, -3)$ 和 $p_4 = (5, -8)$，则 $\mathrm{Area}(\triangle p_2 p_3 p_4) = 1/2 = A_{\mathcal{L}}/2$（见图 8）。因此，命题 7.3 推出 $H_{k_0}(L) = A_{\mathcal{L}}/2$，或者说，同样也可以写作 $G_{k_0}(A_{\mathcal{L}}/2) = L$。

例 7.4。若 $\mathcal{C}_1 := \{c(s) : 0 \le s \le (2m+1)L\}$，则这是定理 6.10 中等号成立的一个例子。令 $\mathcal{C}_2 := \{c(s) : L \le s \le (2m+1)L\}$，则得到定理 6.11 中等号成立的一个例子。

例 7.5。前一个例子可以推广到其他格。令 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v_0,\ v_1,\ v_2)$。我们可以假设 $v_1 \wedge v_2 > 0$（否则将 v_2 替换为 $-v_2$）。令 α 和 L 如前例所示，则

$$\beta = (v_1 \wedge v_2)^{1/3}$$

and

$$\widehat{c}(s) = v_0 + \left(\cosh(\alpha\beta s) - \frac{1}{\sqrt{5}}\sinh(\alpha\beta s)\right) v_1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sinh(\alpha\beta s)\right) v_2.$$

令 $\widehat{L} = L/\beta$。那么曲线 $\{\widehat{c}(s) : L \le s \le (2m+1)L\}$ 是定理 6.11 中等号成立的一个例子；对于曲线 $\{\widehat{c}(s) : 0 \le s \le \widehat{(2m+1)L}\}$，定理 6.10 中等号成立。

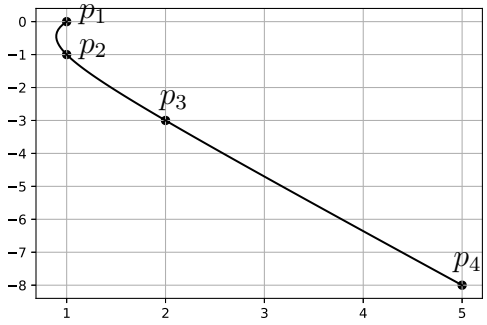

图 8。经过 $(1,\ 0)$ 的 $x^2 - xy - y^2 = 1$ 分支，展示了该曲线上的格点，其 y 坐标满足 $-8 \le y \le 0$。此处 $p_1 = (1,\ 0)$、$p_2 = (1,\ -1)$、$p_3 = (2,\ -3)$ 和 $p_4 = (5,\ -8)$。

7.4. 当 $k_0 > 0$ 时的例子。 在寻找例子时，若曲率下界 k_0 为正，我们的结果是尖锐的；因此需要在一条曲线 $\mathcal{C}$ 上找到等间距的点，且该曲线的曲率 k_0 为常数。这样的曲线是椭圆，经过仿射运动后，我们可以不失一般性地假设它是一个圆

以原点为圆心，半径为 $r = k_0^{-3/2}$ ，并具有单位仿射速度参数化

$$c(s) = (r\cos(k_0^{1/2}s), r\sin(k_0^{1/2}s)).$$

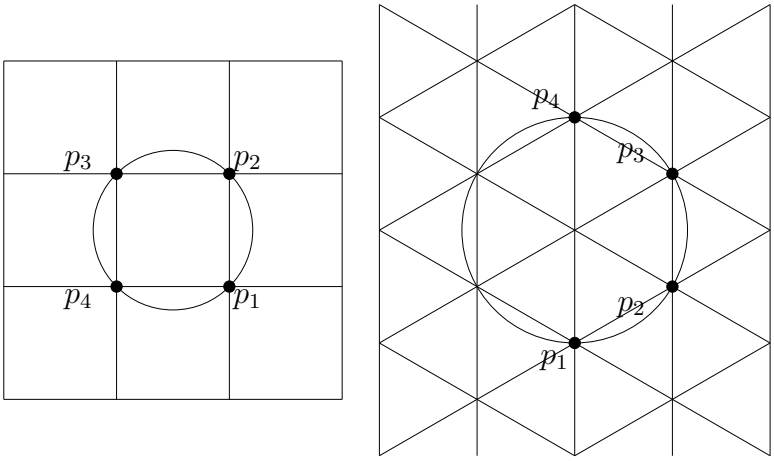

图9. 对于具有正的恒定仿射曲率的曲线，在经过仿射运动后，满足以下条件的格点构型仅有图示这些：曲线上有四个点，它们相对于仿射弧长等距分布，且面积($\triangle p_1p_2p_2$)为该格基本区域面积的一半。（请注意，在第二幅图中，格的基本区域并非其中一个三角形，而是由两个三角形组成的平行四边形。）

设 $\mathcal{L}$ 是一个格，使得存在四个点 p_1、p_2、p_3、$p_4 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}$，它们关于仿射弧长等距分布，并且 $H_{k_0}(L) = A_{\mathcal{L}}/2$ ，其中 L 是 p_j 与 p_{j+1} 之间的仿射距离。若 $m \geq 2$ 时定理 6.11 中等号成立，则这样的四个点存在。命题 7.3 给出了一个仿射运动 φ ，它同时保持 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{C}$ 不变。由于 $\mathcal{C}$ 是以原点为圆心的圆，这意味着 φ 是绕原点旋转。（该旋转是相对于使 $\mathcal{C}$ 成为半径为 r 的圆的欧几里得结构而言的。）若 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v_0, v_1, v_2)$ 且 $\varphi(v) = Mv$ （它是线性的，因为它固定原点），那么 M 关于基 v_1、v_2 的矩阵具有整数项，因此其迹为整数。由于 M 是旋转，它关于标准基的矩阵为 $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ ，其中 θ 是旋转角。该矩阵的迹为 $2\cos(\theta)$，因此 $2\cos(\theta)$ 是整数。这意味着 θ 是 $\pi/3$ 或 $\pi/2$ 的整数倍。唯一的

能够在圆上得到四个等距点，且使 Area($\triangle p_2p_3p_4$) 等于格的一个基本区域面积一半的格如图9所示。因此，定理6.10和6.11只有在 #($\mathcal{L} \cap \mathcal{C}$) 较小时才能取等，具体而言，#($\mathcal{L} \cap \mathcal{C}$) ≤ 6。

Acknowledgments

本文是在与 Oggie Trionov 合作的基础上进一步发展而来的；与他的交流促使我将仿射几何应用于格点估计。关于第3节中的结果，我与 Dan Dix 和 Grant Gustafson 进行了有益的交谈和通信。本文大部分工作是在作者从南卡罗来纳大学休学休假期间完成的。

References

[1]W. Blaschke。讲座¨论微分几何及爱因斯坦相对论的几何基础 ¨。第二卷：仿射微分几何。数学科学基础丛书。施普林格，柏林，1923。[2] E. Bombieri 和 J. Pila。弧和卵形线上的整数点数目。《杜克数学杂志》，59(2):337–357，1989。[3] S. S. Chern。欧几里得空间中的曲线与曲面。载于《整体几何与分析研究》，第16–56页。美国数学协会，纽约州布法罗；由普伦蒂斯-霍尔发行，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1967。[4] E. A. Coddington 和 N. Levinson。常微分方程理论。麦格劳-希尔图书公司，纽约—多伦多—伦敦，1955。[5] C. L. Epstein。双曲空间中的 A. Schur 定理。http://www. math.upenn.edu/~cle/papers/SchursLemma.pdf，1985。预印本，共46页。[6] H. W. Guggenheimer。微分几何。多佛高级数学丛书。多佛出版社，纽约，1977。1963年版的修订重印本。[7] G. B. Gustafson。微分方程与线性代数。http://www.math. utah.edu/~gustafso/debook/deBookGG.pdf，1999—2022。[8] R. Howard 和 O. Trifonov。根据曲率估计凸曲线附近格点的数量。《函数与逼近：数学评论》，28页，即将出版。.[9] V. Jarn´ık。凸曲线上的格点。《数学杂志》，24(1):500–518，1926。[10] D. L. Kreider、R. G. Kuller、D. R. Ostberg 和 F. W. Perkins。线性分析导论。艾迪生-韦斯利出版公司，马萨诸塞州雷丁—安大略省唐米尔斯，1966。[11] R. L´opez。闵可夫斯基平面中的 Schur 定理。《几何与物理杂志》，61(1):342–346，2011。[12] D. S. Ramana。圆锥曲线上至多含有两个整数点的弧。《算术学报》，143(3):197–210，2010。.[13] A. Schur。关于常曲率曲线中圆的施瓦茨极值性质。《数学年刊》，83(1-2):143–148，1921。

[14] M. Spivak。微分几何综合导论。第二卷。出版或灭亡出版社，特拉华州威尔明顿，第二版，1979。[15] J. M. Sullivan。有限总曲率曲线。载于离散微分几何，第38卷奥伯沃尔法赫研讨会，第137–161页。比克豪泽出版社，巴塞尔，2008。[16] H. P. F. Swinnerton-Dyer。凸曲线上的格点数目。《数论杂志》，6:128–135，1974。

Department of Mathematics, University of South Carolina, Columbia,SC 29208电子邮件地址: howard@math.sc.edu网址: www.math.sc.edu/∼howard