利用超导量子比特一维链模拟Kitaev模型及环境效应对拓扑态的影响

Yang Zhang, [1, 2, *] Yun-Qiu Ge, [1, 2, *] 和 Yu-xi Liu[1, 2, †]

[1] *School of integrated circuits, Tsinghua University, Beijing 100084, China*

[2] *Frontier Science Center for Quantum Information, Beijing, China*

Kitaev 费米子链是研究拓扑物理和量子计算的重要物理模型之一。本文提出了一种利用超导量子比特电路链模拟一维Kitaev模型的方法。此外，我们还研究了环境对Kitaev模型拓扑量子态的影响。除了环绕每个量子比特的独立环境外，我们还考虑了两个最近邻量子比特共享的共同环境。这种共同环境会在两个量子比特之间产生有效的非厄米耗散耦合。通过理论分析和数值计算，我们表明，与独立环境相比，共同环境能够显著改变拓扑态的性质。此外，我们还发现，与链上其他位置的耗散耦合相比，链边缘处的耗散耦合可以更容易地调控系统的拓扑性质。我们的研究或可开辟一条新途径，利用超导量子比特电路探索拓扑量子相变以及环境对拓扑物理的各种影响。

arXiv:2302.03834v1 [quant-ph] 8 Feb 2023

I. 引言

人们认为，拓扑量子态能够免受微小局域缺陷和噪声的影响，因此被视为编码和操控量子信息、实现容错量子计算的理想候选者 [1–6]。近年来，人们对利用单个超导量子电路模拟拓扑量子性质的兴趣日益浓厚。例如，研究人员通过 Berry 相位 [7–11] ，利用单个超导量子比特电路对拓扑不变量和拓扑相变进行了实验模拟 [12–15]。时空反演对称拓扑半金属 [16]和拓扑麦克斯韦金属能带 [17] 也已在单个三能级超导量子电路中得到实验演示。

还研究了含有多个量子比特的超导量子电路中的拓扑物理。例如，利用约瑟夫森结阵列 [18]和超导量子比特 [19]提出了拓扑保护量子比特和量子相干性。通过两条电容耦合的超导量子电路链 [20]构建了具有任意子激发的双分量费米子模型。人们还研究了具有拓扑保护基态的自旋系统的量子模拟 [21]。在通过量子化微波场耦合的四个量子比特构成的超导电路中，模拟了任意子分数统计行为 [22]。此外，还在由五个超导量子比特组成的 Bose-Hubbard 链 [23]以及由三个超导量子比特构成晶胞的结构中 [24]，观测到光子输运，其中合成拓扑材料由光子构成。涡旋-迈斯纳相变的研究对象是通过双音驱动人为设计规范势的超导量子比特系统 [25] 。利用超导量子比特链 [27]，模拟了 Su-Schrieffer-Heeger（SSH） [26] 模型；超导量子比特电路中也研究了广义 SSH [28]模型，并实验观测到了含有五个量子比特的 SSH 链中的边缘态 [29]。

众所周知，马约拉纳零能模在研究拓扑物理和拓扑量子计算方面发挥着非常重要的作用。理想情况下，这些模应局域于系统的边缘，作为 SSH 模型中的边缘态 [26]。在凝聚态物质系统中，寻找马约拉纳模和马约拉纳费米子的研究引起了广泛关注 [30–48]。具有马约拉纳模的一个基本模型是 Kitaev费米子链 [49]。在此模型中，拓扑由两个简并零能模的存在来表征，这两个模称为马约拉纳模 [50]。这些模受到拓扑保护，且被认为能够抵御缺陷和噪声 [51–54]。Kitaev 链已在多种物理系统中得到模拟，例如囚禁离子 [55]，、光机械系统 [56] 和光子系统 [57]。在超导量子比特系统中，马约拉纳模的数字模拟已得到实验演示 [58]。然而，超导量子比特电路尚未实现Kitaev费米子链模型哈密顿量的构造 [49]。主要挑战在于如何获得包含表征超导能隙的项的哈密顿量。这些项对应于自旋-自旋耦合中的反旋转部分，并在旋转波近似中被忽略。借助灵活的设计，我们在此解决反旋转项这一问题，并提出一种通过超导量子电路构造 Kitaev 链的方法 [59–62]。

此外，拓扑态和相所受的环境效应近来再次受到关注，并引起了越来越多的兴趣 [63–67]。许多研究工作

* 这些作者对本项工作的贡献相同

† yuxiliu@mail.tsinghua.edu.cn

致力于研究由非关联局域环境引起的耗散效应 [67–72]。然而，值得注意的是，共同环境广泛存在于多体系统中 [73, 74]。这种环境效应等价于一种有效哈密顿量描述，其中包含非厄米局域耗散势以及格点间的非厄米耗散耦合 [75]。不同于传统的相干耦合，非厄米耗散耦合具有不同的物理性质，并已被用于研究能级吸引 [76–79]，光放大和吸收 [80–82]。然而，目前尚未研究共同环境对Kitaev模型中拓扑态的影响，因此，在利用超导量子比特电路构建Kitaev模型后，我们还将研究共同环境如何影响拓扑态。

本文组织如下：在第II节中，我们首先设计一种可控的超导量子电路，该电路通过自旋-自旋相互作用进行描述；随后利用Jordan-Wigner变换将自旋模型映射为Kitaev费米子链。在第III节中，我们在引入共同环境后推导有效哈密顿量。共同环境产生的有效哈密顿量等价于在传统Kitaev模型中加入一个非厄米耗散耦合项。在第IV节中，我们研究系统的拓扑性质。首先，在第IV A节中研究忽略环境效应时的Kitaev模型；随后，我们考虑耗散耦合的影响，并研究由三种不同耗散机制产生的以下三种非厄米模型：(i) 当跃迁参数的相位因子为 $\theta = 0$ 时，在第IV B 1节中研究所有相邻量子比特之间均存在耗散耦合的情形；或当其为 $\theta \neq 0$ 时，在第IV B 2节中研究相应情形；(ii) 当 $\theta = 0$ 时，在第IV B3节中研究部分相邻量子比特之间存在耗散耦合的情形。在第IV B 4节中，我们讨论由独立环境和共同环境诱导的位点耗散势，并比较耗散耦合与位点耗散势。最后，在第V节中，我们总结主要结果，并进一步讨论其在超导量子电路中的实验可行性。

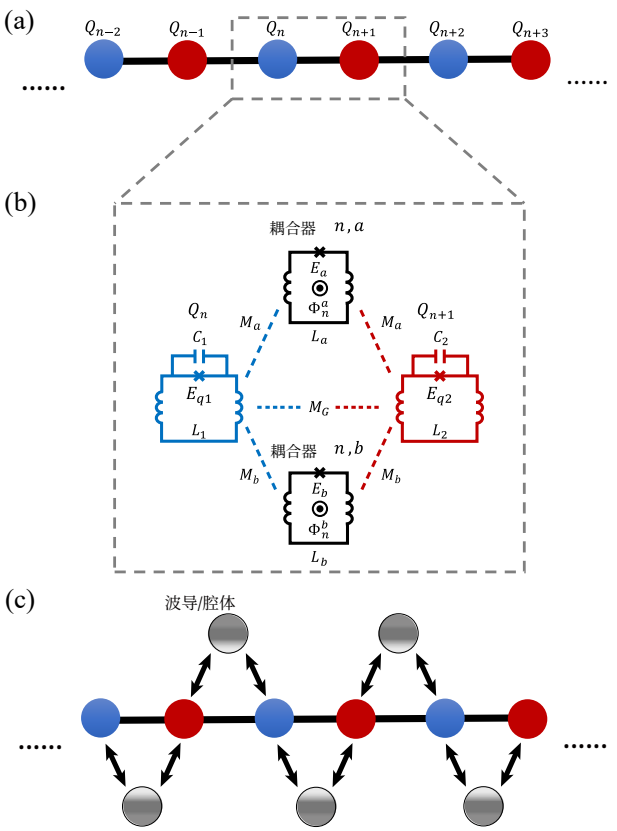

图1。（a）拓扑量子比特链的示意图，该链由两种量子比特交替排列组成，分别以蓝色和红色球体表示。（b）利用超导量子比特电路实现上述量子比特链基本结构的示意图。（c）带有耗散耦合的量子比特链示意图，最近邻量子比特与其共同环境相耦合；共同环境可由微波腔或波导模拟，以灰色球体表示。

II. 基于超导量子电路的Kitaev模型

如图所示 1(a)，一维拓扑链由耦合器和超导量子比特构成，分别用黑色线段和带有标签 $Q_n (n = 1、2、\cdots、N)$ 的彩色球表示。我们假设相同颜色的球所代表的量子比特具有相同的参数。也就是说，蓝色球所代表的所有量子比特，其电容为C_1，约瑟夫森能为 E_{q1}，线性电感为 L_1； Q_n 的下标为奇数 n。对于量子比特由红色球表示的量子比特，其电容为 C_2，约瑟夫森能为 E_{q2}，线性电感为 L_2； 的下标为偶数 n。为便于开展以下研究，我们假设该链由相位量子比特通过射频超导量子干涉器件耦合器 [83–85]耦合而成。值得注意的是，文献 [83–85] 中两个相位量子比特之间的单个射频超导量子干涉器件耦合器已被替换为两个射频超导量子干涉器件，以实现我们的目标。还应指出，该链也可以由其他超导量子比特构成。

实际上，最近邻量子比特，例如 Q_n 和Q_{n+1} 图 1（b）中的量子比特，存在两种耦合方式：(i) 由 a 和 b 类型的射频超导量子干涉器件耦合器 n、a 和 n引起的 b间接耦合；(ii) 通过它们之间的几何互感实现的直接耦合。为简单起见，假设索引为 a（b）的射频超导量子干涉器件耦合器彼此相同，并具有约瑟夫森能 E_a（E_b）和线性电感 L_a（L_b）。原则上，量子比特链中任意两个量子比特之间都存在几何互感

然而，考虑到互感会随着量子比特之间的几何距离增加而迅速减小，这里我们仅考虑M_G 最近邻量子比特之间的互感。

采用正则量子化方法，将磁通量，即 $\{\Phi_n\}$，视为正则坐标，相应的正则动量记为 $\{P_n\}$，二者满足正则对易关系 $[\hat{}P_n, \hat{}\Phi_n] = -i\hbar$。量子比特链的总哈密顿量为

$$\hat{H}_{\rm tot} = \sum_{n=1}^{N}\Big[\frac{\hat{P}_n^2}{2C_n} + \frac{\hat{\Phi}_n^2}{2L_n} - E_{qn}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\hat{\Phi}_n\right) + M_n^{\rm tot}\frac{\hat{\Phi}_n\hat{\Phi}_{n+1}}{L_1L_2}\Big], \tag{1}$$

其中 $\Phi_0 = h/2e$ 为磁通量子。需要强调的是，当n 为奇数时，$C_n = C_1$、$L_n = L_1$ 和 $E_{qn} = E_{q1}$。而当 n为偶数时，$C_n = C_2$、$L_n = L_2$ 和$E_{qn} = E_{q2}$。总互感由两部分组成：$M^{\rm tot}_n = M_G + M^{\rm eff}_n$。其中，$M_n^{\rm eff}$表示由耦合器介导的量子比特 Q_n 与 Q_{n+1} 之间的有效互感，可在较大范围内连续调节 [83–85]。以图 1(b) 所示的耦合器为例，可得施加于耦合器 n、ξ 的总磁通偏置为

$$\Phi_n^\xi = \Phi_0^\xi + \delta\Phi^\xi\cos\left(\Omega_\xi\tau + \theta_n^\xi\right), \quad \xi = a, b, \tag{2}$$

其中，Φ_0^ξ 和 $\delta\Phi^\xi\cos(\Omega_\xi\tau + \theta_n^\xi)$分别为直流磁通和交流磁通。$\Omega_\xi$ 和 θ_n^ξ 分别为交流磁通的频率和初始相位。于是，耦合器 n，ξ 中的电流可表示为

$$I_n^\xi = I_0^\xi\sin\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\Phi_n^\xi - L_\xi I_n^\xi\right)\right], \tag{3}$$

其中，I_0^ξ 是耦合器 n，ξ中约瑟夫森结的临界电流。因此，由耦合器介导的有效互感为:

$$\begin{aligned} M_n^{\rm eff} &= \sum_{\xi=a,b} M_\xi^2\frac{\partial I_n^\xi}{\partial\Phi_n^\xi} \\ &= \sum_{\xi=a,b}\frac{M_\xi^2}{L_\xi}\frac{\alpha_\xi\cos[2\pi(\Phi_n^\xi - L_\xi I_n^\xi)/\Phi_0]}{1+\alpha_\xi\cos[2\pi(\Phi_n^\xi - L_\xi I_n^\xi)/\Phi_0]}, \\ \alpha_\xi &= \frac{2\pi I_0^\xi L_\xi}{\Phi_0}. \end{aligned} \tag{4}$$

这里，我们假设相邻量子比特与耦合器 n，ξ 之间的互感相同，并记为 M_ξ。

在弱交流磁通偏置条件下，即 $\delta\Phi^\xi \ll \Phi_0^\xi$，方程（4）可在$\Phi_0^\xi$ 处展开为泰勒级数，写作

$$M_n^{\rm eff} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\frac{\partial^r M_n^{\rm eff}}{\partial(\Phi_n^\xi)^r}\Big|_{\Phi_n^\xi=\Phi_0^\xi}(\Phi_n^\xi - \Phi_0^\xi)^r. \tag{5}$$

将参数 $\delta\Phi^\xi$ 截断到一阶项，可得

$$\begin{aligned} M_n^{\rm eff} &\approx \sum_{\xi=a,b}\Big[M_\xi^0 + \delta M_\xi\cos(\Omega_\xi\tau + \theta_n^\xi)\Big], \\ M_\xi^0 &= \frac{M_\xi^2}{L_\xi}\frac{\alpha_\xi\cos(\beta_\xi)}{1+\alpha_\xi\cos(\beta_\xi)}, \\ \delta M_\xi &= -\frac{M_\xi^2}{L_\xi}\frac{2\pi\alpha_\xi\sin(\beta_\xi)}{[1+\alpha_\xi\cos(\beta_\xi)]^3}\frac{\delta\Phi^\xi}{\Phi_0}, \\ \beta_\xi &= \frac{2\pi(\Phi_0^\xi - L_\xi I_n^\xi|_{\Phi_n^\xi=\Phi_0^\xi})}{\Phi_0}. \end{aligned} \tag{6}$$

此外，为避免几何互感 M_G 对系统拓扑性质的影响，我们假设

$$M_G + \sum_{\xi=a,b} M_\xi^0 = 0. \tag{7}$$

基于近期的实验结果 [86, 87], ，上述所有条件都可以得到很好地满足。

现在，我们将式（1）中的哈密顿量投影到量子比特基上。这里可以定义梯算符，即 $\hat{}\sigma_n^+ = |1\rangle_{nn}\langle 0|$, $\hat{}\sigma_n^- = |0\rangle_{nn}\langle 1|$ ，对于 n个量子比特 Q_n ，其基态 $|0\rangle_n$ 和第一激发态 $|1\rangle_n$。于是，式（1）中的量子比特链哈密顿量可以改写为

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\rm tot} = \sum_{n=1}^{N}\Big[&\hbar\Omega_n\hat{\sigma}_n^+\hat{\sigma}_n^- \\ &+ \sum_{\xi=a,b}\hbar J_\xi\cos(\Omega_\xi\tau + \theta_n^\xi)(\hat{\sigma}_n^-\hat{\sigma}_{n+1}^- + \hat{\sigma}_n^-\hat{\sigma}_{n+1}^+ + \text{H.c.})\Big] \end{aligned} \tag{8}$$

在量子比特基中。这里需要指出，当n 为奇数时，$\Omega_n \equiv \Omega_1$ ；当 n 为偶数时，$\Omega_n \equiv \Omega_2$ 。参数Ω_n 和J_ξ 的解析形式近似如下。

量子比特的本征态（例如第 n 个量子比特 Q_n）无法精确求得。不过，我们可以利用微扰理论推导近似解。具体而言，将余弦函数 $\cos(\phi_n)$ 展开至 $\phi_n = 2\pi\Phi_n/\Phi_0$ 的四阶，即 $\cos(\hat{}\phi_n) \approx 1 - \hat{}\phi_n^2/2 + \hat{}\phi_n^4/24$，并将四阶非线性项视为微扰。我们将 $|j\rangle_n^{(0)}$ 定义为忽略量子比特高阶非谐项时第 n 个量子比特的第 j 个激发态，相应的本征能量 $E_{n,j}^{(0)}$ 为

$$\begin{aligned} E_{n,j}^{(0)} &= (j+\frac{1}{2})\hbar\omega_n, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \\ \omega_n &= \begin{cases}\omega_1, & \text{for odd number n,}\\ \omega_2, & \text{for even number n,}\end{cases} \\ \omega_i &= \frac{1}{\sqrt{l_iC_i}}, \quad l_i = \frac{\Phi_0^2L_i}{\Phi_0^2 + 4\pi^2E_{qi}L_i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{9}$$

微扰项 $-E_{qn}\hat{\phi}_n^4/24$ 对 $|j\rangle_n^{(0)}$ 产生的一阶修正为

$$|j\rangle_n^{(1)} = -\frac{E_{qn}}{24}\sum_{f\neq j}\frac{{}_n^{(0)}\langle f|\hat{\phi}_n^4|j\rangle_n^{(0)}}{E_{n,j}^{(0)}-E_{n,f}^{(0)}}|f\rangle_n^{(0)}. \tag{10}$$

然后，在一阶近似下，我们可以得到归一化本征态:

$$\begin{aligned}
|0\rangle_n &= \frac{|0\rangle_n^{(0)}+6\sqrt{2}g_n^i|2\rangle_n^{(0)}+\sqrt{6}g_n^i|4\rangle_n^{(0)}}{\sqrt{1+78(g_n^i)^2}},\\
|1\rangle_n &= \frac{|1\rangle_n^{(0)}+10\sqrt{6}g_n^i|3\rangle_n^{(0)}+\sqrt{30}g_n^i|5\rangle_n^{(0)}}{\sqrt{1+630(g_n^i)^2}},\\
g_n^i &= \begin{cases} g_1, & \text{for odd number n,}\\ g_2, & \text{for even number n,}\end{cases}\\
g_i &= \frac{e^4 l_i E_{qi}}{12\hbar^3\omega_i C_i}, \qquad i=1,2,
\end{aligned} \tag{11}$$

其中，参数的取值 g_i 约为 $g_i \approx 10^{-3}$ [88–90]。对于 transmon量子比特和相位量子比特，式（11）与数值结果 [91]大致一致。此外，在一阶近似下，我们还可以得到式（8）中参数的解析形式:

$$\begin{aligned}
\Omega_i &= \omega_i(1-24g_i),\\
J_\xi &= \prod_{i=1}^{2}\sqrt{\frac{\delta M_\xi \omega_i l_i(1+12g_i+510g_i^2)^2}{2L_i^2(1+78g_i^2)(1+630g_i^2)}},
\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $i=1,2$。如果施加到耦合器上的交流磁通的频率和相满足以下条件

$$\begin{aligned}
\Omega_a &= \Omega_2-\Omega_1, & \theta_n^a &= (-1)^n\theta,\\
\Omega_b &= \Omega_1+\Omega_2+2\frac{\mu}{\hbar}, & \theta_n^b &= 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

其中常数为 μ，那么在旋转参考系中，$\hat{U}(\tau) = \exp(-iH_{\text{free}}\tau/\hbar)$, 其中

$$\hat{H}_{\text{free}} = \sum_{n=1}^{N}\left[\hbar\left(\Omega_n+\frac{\mu}{\hbar}\right)\hat{\sigma}_n^\dagger\hat{\sigma}_n\right], \tag{14}$$

有效哈密顿量可表示为

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{rot}} =& \ \hat{U}^\dagger(\tau)\hat{H}_{\text{tot}}\hat{U}(\tau) - i\hbar\hat{U}^\dagger(\tau)\frac{\partial\hat{U}(\tau)}{\partial\tau}\\
=& \sum_{n=1}^{N}\Big[-\mu\hat{\sigma}_n^\dagger\hat{\sigma}_n^- - t(\hat{\sigma}_{n+1}^\dagger\hat{\sigma}_n^- e^{i\theta}+\text{H.c.})\\
&+\Delta(\hat{\sigma}_n^-\hat{\sigma}_{n+1}^- + \text{H.c.})\Big],
\end{aligned} \tag{15}$$

with

$$t = -\frac{\hbar J_a}{2}, \qquad \Delta = \frac{\hbar J_b}{2}.$$

通过规范变换，我们可以推导出与公式（15）中相同的有效哈密顿量，前提是初始相位$\theta_n^b \neq 0$。显然，参数 μ、$te^{i\theta}$ 和 Δ 可以通过施加于耦合器的磁通独立调节。现在让我们应用Jordan-Wigner变换

$$\hat{\sigma}_n^\dagger = \exp\left(-i\pi\sum_{k=1}^{n-1}\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k\right)\hat{a}_n^\dagger, \quad \hat{\sigma}_n^z = 2\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n - 1. \tag{16}$$

其中，费米子产生（湮灭）算符$\hat{a}_n^\dagger$（$\hat{a}_n$） [92] 代入式（15）后，式（15）可以重写为

$$\begin{aligned}
\hat{H} =& -\mu\sum_{n=1}^{N}\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n - t\sum_{n=1}^{N-1}(e^{i\theta}\hat{a}_{n+1}^\dagger\hat{a}_n + \text{H.c.})\\
&+\Delta\sum_{n=1}^{N-1}(\hat{a}_n\hat{a}_{n+1} + \text{H.c.}),
\end{aligned} \tag{17}$$

这就是 Kitaev费米子链的哈密顿量 [49]。

III. Kitaev模型中的环境效应

上文展示了如何通过理想的超导量子比特电路链推导出等效的Kitaev费米子链哈密顿量。在实际中，任何系统都不可避免地会与其环境相互作用。在本研究中，除了作用于每个量子比特并导致局域能量耗散的局域环境外，耦合器还会在相邻量子比特之间引入共同环境，这通常可通过超导量子比特系统中的微波腔或波导来模拟。这些共同环境既会导致局域能量耗散，也会在相邻量子比特之间产生有效耗散耦合 [82]。Kitaev模型系统中的局域能量耗散已得到广泛研究，因此本文主要关注共同环境诱导的耗散耦合所产生的非局域效应。为简化讨论且不失一般性，如图1(c)所示，我们假设相邻量子比特共享一个共同环境。

因此，当我们仅考虑共同环境时，系统动力学由以下主方程支配

$$\frac{d}{d\tau}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_{\text{rot}},\hat{\rho}\right] + \mathcal{L}\hat{\rho}, \tag{18}$$

其形式为林德布拉德算符 [82, 93]

$$\mathcal{L}\hat{\rho} = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{2\gamma}{\hbar}\mathcal{L}[\hat{\sigma}_n^- + \hat{\sigma}_{n+1}^-]\hat{\rho}. \tag{19}$$

林德布拉德算符 $\mathcal{L}[\hat{o}]\hat{\rho}$ 定义为

$$\mathcal{L}[\hat{o}]\hat{\rho} = \hat{o}\hat{\rho}\hat{o}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{o}^\dagger\hat{o}\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{o}^\dagger\hat{o}. \tag{20}$$

参数 γ 表征相邻量子比特之间的关联衰减。于是，有效的非厄米哈密顿量为

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -(\mu + 2i\gamma)\sum_{n=1}^{N}\hat{\sigma}_n^{\dagger}\hat{\sigma}_n^{-} + \Delta\sum_{n=1}^{N-1}\left(\hat{\sigma}_n^{-}\hat{\sigma}_{n+1}^{-} + \text{H.c.}\right) - \sum_{n=1}^{N-1}\left[\left(te^{i\theta} + i\gamma\right)\hat{\sigma}_{n+1}^{\dagger}\hat{\sigma}_n^{-} + \left(te^{-i\theta} + i\gamma\right)\hat{\sigma}_n^{\dagger}\hat{\sigma}_{n+1}^{-}\right], \tag{21}$$

其中，耗散耦合项和局域耗散势分别记为 $-i\gamma(\hat{\sigma}_{n+1}^{\dagger}\hat{\sigma}_n^{-} + \text{H。c。})$ 和 $-2i\gamma\hat{\sigma}_n^{\dagger}\hat{\sigma}_n^{-}$。需要指出的是，当考虑每个量子比特所处的独立环境时，$\hat{\sigma}_n^{\dagger}\hat{\sigma}_n^{-}$项的局域耗散率 $-2i\gamma$可能会发生变化。此处，为了突出耗散耦合的作用，以下研究首先忽略量子比特的所有局域耗散。因此，经过 Jordan-Wigner 变换后，非厄米哈密顿量可写为

$$\hat{H}_{\text{nonH}} = -\mu\sum_{n=1}^{N}\hat{a}_n^{\dagger}\hat{a}_n + \Delta\sum_{n=1}^{N-1}\left(\hat{a}_n\hat{a}_{n+1} + \text{H.c.}\right) - \sum_{n=1}^{N-1}\left[\left(te^{i\theta} + i\gamma\right)\hat{a}_{n+1}^{\dagger}\hat{a}_n + \left(te^{-i\theta} + i\gamma\right)\hat{a}_n^{\dagger}\hat{a}_{n+1}\right]. \tag{22}$$

IV. 拓扑性质

现在，我们来研究厄米哈密顿量 H 和非厄米哈密顿量 $\hat{H}_{\text{nonH}}$（分别由方程（17）和（22）导出）的拓扑态。对于方程（17）中的厄米哈密顿量 H ，我们主要研究跃迁项中的相位 θ 对系统拓扑性质的影响。对于非厄米哈密顿量 H_{nonH}，我们将研究三种不同情况下，耗散耦合导致的拓扑态变化。

A. 具有厄米哈密顿量的Kitaev模型

本节讨论理想系统的拓扑性质，即忽略环境效应。我们将主要讨论在两种情况下，所有控制场通过耦合器产生的初始相位如何影响拓扑性质。这些初始相位可以通过调节控制场经由耦合器进行改变。

1. *Case I:* $\theta = 0$

如果所有通过耦合器的控制场的初始相均为零，即 $\theta_n^a = (-1)^n\theta = 0$，那么哈密顿量 $\hat{H}$ 在公式（17）中可化简为

$$\hat{H}_0 = -\mu\sum_{n=1}^{N}\hat{a}_n^{\dagger}\hat{a}_n - t\sum_{n=1}^{N-1}\left(\hat{a}_{n+1}^{\dagger}\hat{a}_n + \text{H.c.}\right) + \Delta\sum_{n=1}^{N-1}\left(\hat{a}_n\hat{a}_{n+1} + \text{H.c.}\right), \tag{23}$$

这是标准的Kitaev模型，已经得到广泛研究 [49]。研究表明，当参数满足以下条件时，拓扑相变点出现在 $\mu = 2t$： $t = \Delta$。如果 $\mu < 2t$，系统处于拓扑非平庸相，与马约拉纳束缚态（MBS）对应的两个零能态局域在系统的两端 [94]。对于 $\mu > 2t$的情况，系统处于拓扑平庸相，不存在MBS。然而，正如下一小节所示，当初始相位 θ 非零时，这些结果会发生显著变化，即可以通过控制场的初始相位来调控拓扑性质。

2. *Case II:* $\theta \neq 0$

现在，我们研究所有通过耦合器的控制场的初始相位均非零时系统的拓扑性质，即 $\theta_n^a = (-1)^n\theta \neq 0$。此处，在以下研究中，我们假设 $t = \Delta$ 。如图 2(a)-(d) 所示，相位 θ 的变化会影响能谱和拓扑相变点的位置。当相位 θ 从 0 变为$\pi/2$时，我们发现相变点和能谱逐渐向 $\mu = 2t$的左侧移动，而 $\theta = 0$是 $\theta = 0$对应的相变点。例如，当 $\theta = \pi/5$时，与 $\theta = 0$ [49]的情况相比，相变点向$\mu = 2t$的左侧移动。若 θ 进一步增大，例如增至 $\theta = \pi/3$，相变点则会继续向左移动。当 $\theta = \pi/2$时，相变点移动至原点，也就是说，无论参数 μ 如何变化，都不会发生拓扑相变，且系统处于拓扑平庸相。

为进一步得到拓扑相变点的解析表达式，我们将式（H （17）中的哈密顿量变换到动量空间。在周期性边界条件下，哈密顿量 H 可表示为

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_k \hat{\Phi}_k^{\dagger}H_k\hat{\Phi}_k, \tag{24}$$

其中 $\hat{\Phi}_k^{\dagger} = (\hat{a}_k^{\dagger}, \hat{a}_{-k})$。这里，$\hat{a}_k$ 是$\hat{a}_n$的傅里叶变换，即 $\hat{a}_k = \sum_n e^{-ikn}\hat{a}_n/\sqrt{N}$ 和

$$H_k = h_I(k)I + h_y(k)\sigma_y + h_z(k)\sigma_z, \tag{25}$$

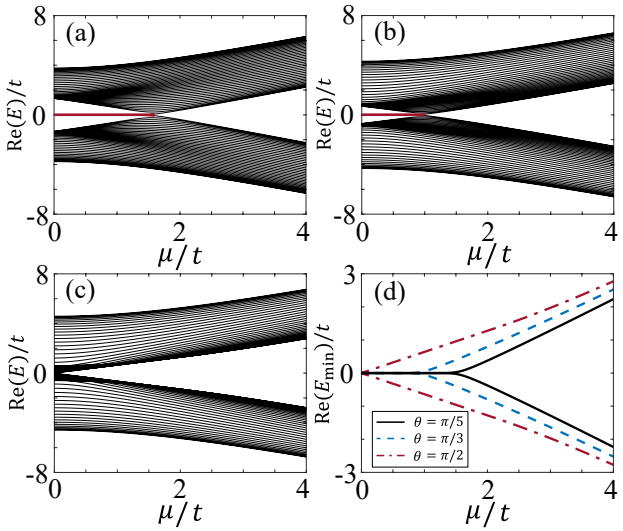

图2. 在开放边界条件下，$\hat{H}$ 的能谱实部随不同情况下的 μ 和 θ 变化。(a)，(b)，(c)。其中，红色实线对应马约拉纳束缚态。这三种情况下的最低能量如(d)所示。此处选取的其他参数为 $\Delta/t=1$、$N=40$ 和 $t=1$。

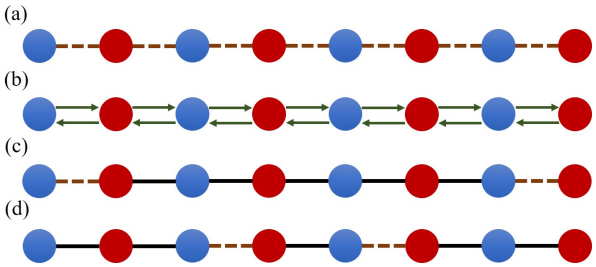

图3. 我们主要研究的几种非厄米 Kitaev 模型的示意图，其中蓝色圆圈表示量子比特。(a) 当 $\theta=0$ 时，在所有相邻量子比特之间引入耗散耦合。(b) 当 $\theta\neq 0$ 时，在所有相邻量子比特之间引入耗散耦合。注意，在这种情况下，量子比特之间的耦合是非互易的。(c) 在量子比特链的边界处引入耗散耦合。(d) 在量子比特链的特定位置引入耗散耦合。黑色实线、深棕色点线、左箭头和右箭头分别表示跃迁参数为 t、$t+i\gamma$、$te^{-i\theta}+i\gamma$ 和 $te^{i\theta}+i\gamma$ 的不同类型相互作用。

分别为单位矩阵 I 和泡利矩阵 $\sigma_{y(z)}$。参数 $h_I(k)$、$h_y(k)$ 和 $h_z(k)$ 是

$$\begin{aligned} h_I(k) &= -2t\sin k\sin\theta, \\ h_y(k) &= 2\Delta\sin k, \\ h_z(k) &= -\mu-2t\cos k\cos\theta. \end{aligned} \tag{26}$$

$E_k^{\pm}$ 的本征值 $E_k^{\pm}$，用于表征体态的色散关系，表示为

$$E_k^{\pm}=h_I(k)\pm\sqrt{h_y(k)^2+h_z(k)^2}. \tag{27}$$

令 $E_k^{+}=E_k^{-}=0$，可得 $\Delta=t$ 时的相变条件，该条件体现了如下关系

$$\mu=2t|\cos\theta|. \tag{28}$$

与第 IVA1 节中标准 Kitaev模型的情况相比，当 μ 且 $\theta\neq 0$ 时，拓扑相变发生所需的 μ 更小。满足条件 $\mu<2t|\cos\theta|$时，系统是拓扑非平庸的；满足条件$\mu>2t|\cos\theta|$时，系统是拓扑平庸的。因此，θ相可视为控制系统拓扑相变的参数。上述结果与图2(d) 相符。对于 $\Delta\neq t$，方程（28）需要进一步修正，但结论仍然成立：当 θ 时，相 θ 也可以控制系统的拓扑性质 $\Delta\neq t$。

B. 带有非厄米耗散耦合的Kitaev模型

本节将研究非厄米耗散耦合对 Kitaev 链拓扑态的影响。这里主要关注以下三种情况：（i）耗散耦合由方程（22）给出的哈密顿量，其中 $\theta=0$；（ii）耗散耦合由方程（22）给出的哈密顿量，其中 $\theta\neq 0$；（iii）仅在 Kitaev 链的特定位置存在耗散耦合的哈密顿量，该哈密顿量由方程（22）推导得到，其中 $\theta=0$。

1. *Topology of the Kitaev model with the dissipative couplings for $\theta=0$*

我们首先研究所有最近邻量子比特之间均存在耗散耦合的情形，其中 θ =0，如图 3(a) 示意所示。该系统的哈密顿量可由式（22）推导得到，其中 $\theta=0$，具体形式为

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \hat{H}_0+\hat{U}_1, \\ \hat{U}_1 &= -i\gamma\sum_{n=1}^{N-1}\left(\hat{a}_{n+1}^{\dagger}\hat{a}_n+\text{H.c.}\right), \end{aligned} \tag{29}$$

其中 H_0 由式（23）给出。显然，式（29）中的哈密顿量是式（H_{nonH} 22）中哈密顿量的一个特例，且具有复能谱。此外，马约拉纳束缚态对量子比特之间的耦合非常敏感，因此耗散耦合项 U_1 必然会影响马约拉纳束缚态。

在开放边界条件（OBC）下，哈密

顿量 $\hat{H}_1$ 可表示为 $\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\hat{\Psi}^\dagger H_1^{(0)}\hat{\Psi}$，其中

$$\hat{\Psi} = \left(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_N, \hat{a}_1^\dagger, \cdots, \hat{a}_N^\dagger\right)^T, \quad H_1^{(0)} = \begin{bmatrix} C & S \\ S^\dagger & -C \end{bmatrix}. \tag{30}$$

这里，矩阵 C 和 S 的具体形式为

$$C = \begin{bmatrix} -\mu & -t' & & & & & & \\ -t' & -\mu & -t' & & & & & \\ & -t' & -\mu & -t' & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -t' & -\mu & -t' & & \\ & & & & -t' & -\mu & -t' & \\ & & & & & -t' & -\mu & \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \Delta & & & & & & \\ -\Delta & 0 & \Delta & & & & & \\ & -\Delta & 0 & \Delta & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -\Delta & 0 & \Delta & & \\ & & & & -\Delta & 0 & \Delta & \\ & & & & & -\Delta & 0 & \end{bmatrix}, \tag{31}$$

其中 $t' = t + i\gamma$。对哈密顿量 $H_1^{(0)}$ 进行对角化，即可得到系统的能谱。如图 4(a)所示，在不存在耗散耦合的情况下，我们发现Kitaev模型的能谱分为两个不同的区域。当参数 μ 满足条件 $0 \leq \mu < 2t$时，系统处于具有两个马约拉纳束缚态的拓扑非平庸相。当 $\mu \geq 2t$时，系统处于拓扑平庸相，这意味着零模不再存在。然而，若考虑耗散耦合项 U_1 ，Kitaev模型的结论将发生变化。

图 4 展示了系统本征能量实部随参数 μ 变化的情况。这里假设 Kitaev 链由 40 个量子比特组成。图 4(a) 和 (c) 中的红色实线分别在图4(b) 和 (d) 中放大显示。我们发现，耗散耦合显著改变了系统的拓扑性质。如图4(a) 和 (b) 所示，若不存在耗散耦合，拓扑非平庸区域中会存在一对零能模，且相应的能量劈裂单调增大。然而，若考虑耗散耦合，如图 4(c) 和 (d) 所示，拓扑相变点会向左偏离数值 $\mu = 2t$；该数值是不存在耗散耦合时的相变点。也就是说，耗散耦合会使拓扑非平庸区域变窄。此外，存在耗散耦合时，零能模的能量劈裂会随 μ 的变化而振荡。若进一步增大耗散耦合强度，则系统的相变点会进一步向左偏离点 $\mu = 2t$，如图 4(e) 和

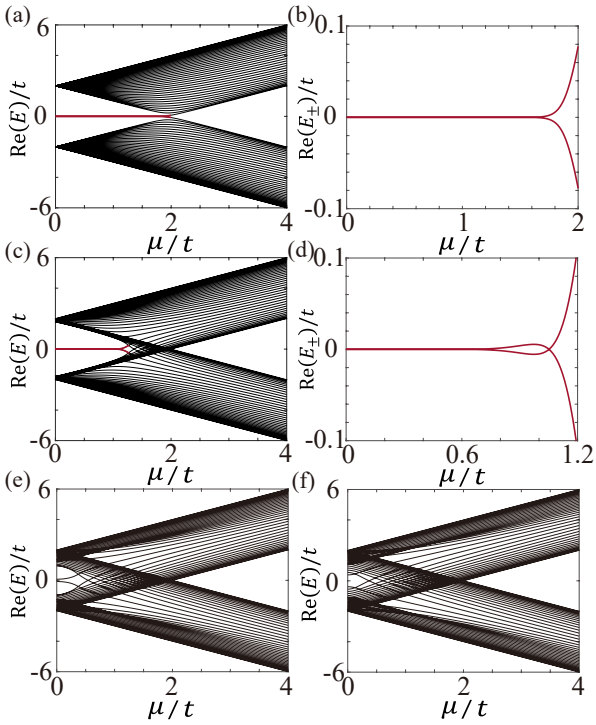

图4. 非厄米 Kitaev模型 H_1 的能谱实部随 μ 变化的关系 γ，采用开放边界条件。(a)和(b) $\gamma/t = 0$，(c)和(d) $\gamma/t = 1$，(e) $\gamma/t = 3$，以及(f) $\gamma/t = 4$。(b)和(d)分别是(a)和(c)中红色实线的放大图。其他参数与图 2相同。

(f) 所示。由于链长有限，图 4(f) 中的相变点未能清晰显示。在热力学极限下，即 $N \to \infty$，拓扑相变点为 $\mu = 2t/\sqrt{1+\gamma^2/t^2}$。这一结果可通过动量空间中的哈密顿量推导得到，稍后将对此进行详细说明。

对于常规 Kitaev模型哈密顿量 H_0 （式（23）），拓扑非平庸区域为 $\mu < 2t$，平庸区为 $\mu > 2t$ ，拓扑相变点为 $\mu = 2t$。为研究耗散耦合对系统拓扑性质的影响，我们绘制了这三个区域中本征值实部和虚部随 γ 变化的曲线。如图5所示，我们选取参数 $\mu = 0$、 $4t$和 $2t$，它们分别对应拓扑非平庸区、平庸区和拓扑相变点。我们发现，耗散耦合对这三个参数区域的能谱实部有不同影响。如图5(a)所示，显然，在拓扑非平庸区域，零能模对应的能量实部随参数 γ 呈振荡变化。此外，随着耗散耦合强度 γ增大，振荡幅度也随之增大。如图5(b)所示，零能模对应的虚部呈现出与实部类似的行为

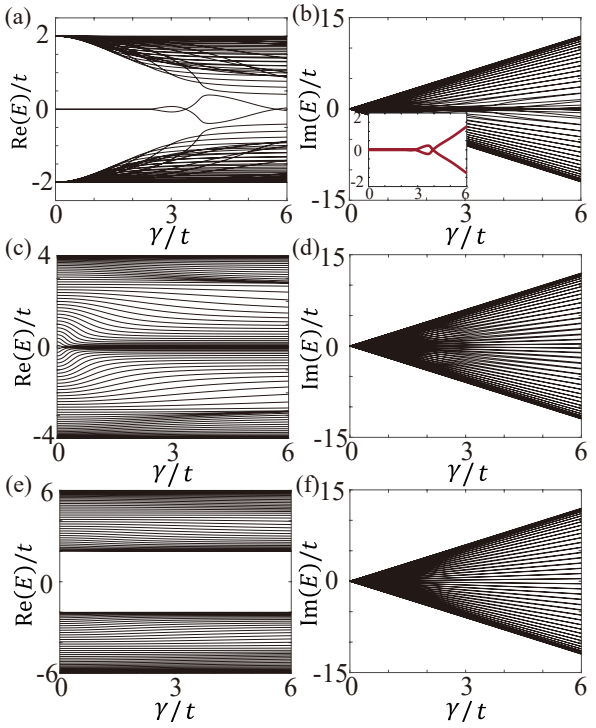

图5. Kitaev模型的能谱 $\hat{}$ H_1 随 γ 变化的情况，开放边界条件下对应三个不同的参数区域。(a)和(b)表示拓扑非平庸区域，其中 $\mu = 0$；(c)和(d)表示拓扑相变点，其中 $\mu/t = 2$；(e)和(f)表示拓扑平庸区域，其中 $\mu/t = 4$。(b)中的插图展示了边缘态本征值虚部的放大图。其他参数与图2相同。

。也就是说，马约拉纳束缚态的本征值为复数，其实部和虚部均呈振荡变化。此外，耗散耦合也会影响系统的局域化。随着 γ增大，马约拉纳束缚态的能量劈裂增大。这意味着耗散耦合会削弱这些态的局域化。然而，耗散耦合对拓扑平庸相和拓扑相变点处 Kitaev 链性质的影响很弱。当 $\mu \geq 2t$时，如图5(c)和(e)所示，我们发现能谱实部几乎没有变化。对于能谱虚部，如图5(b)、(d)和(f)所示，每个态都对应一个唯一的虚部；在这三个参数区域中，虚部没有明显差异。

从图4可以清楚地看出，耗散耦合会改变拓扑相变点。采用第IVA 2节所示的类似步骤，可以得到存在耗散耦合时相变点的解析表达式。在周期性边界条件下，式（ H_1 29）中的 $\hat{}$ 可以写为

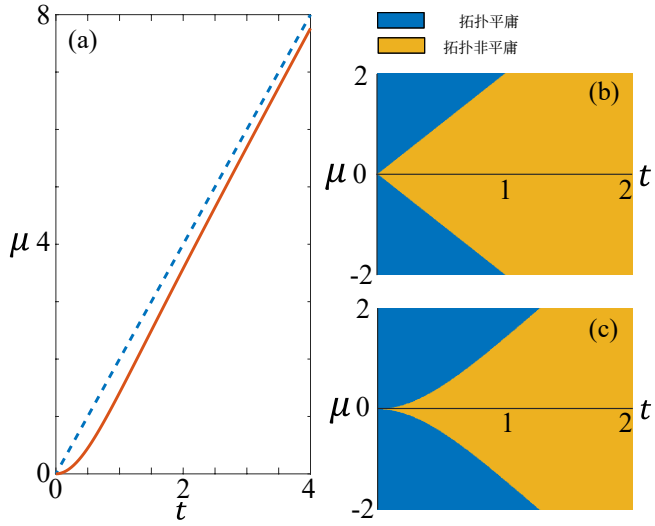

图6。(a) 无耗散耦合（蓝色虚线）和有耗散耦合（橙色实线）时 $\hat{}$ H_1 的拓扑相变点。(b)和(c)分别表示 $\hat{}$ H_1 无耗散耦合和有耗散耦合时的相图。(a)和(c)中的耗散耦合强度固定为 $\gamma/t = 1$。

写作

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\sum_k \hat{\Phi}_k^\dagger H_{k,1} \hat{\Phi}_k, \tag{32}$$

在动量空间中，

$$H_{k,1} = 2\Delta \sin k\, \sigma_y - [\mu + 2(t + i\gamma)\cos k]\sigma_z. \tag{33}$$

令$H_{k,1}$ 的本征值为零，即可得到相变条件

$$\mu = \frac{2t}{\sqrt{1 + \gamma^2/t^2}} \tag{34}$$

当 $\Delta = t$时。显然，在不存在耗散耦合的情况下，该条件可化为常规情形 $\mu = 2t$，如图6(a)中的蓝色虚线所示。引入耗散耦合 γ后，拓扑相变条件由方程（34）确定，其中 μ 和 t 之间呈非线性关系，该关系如图6(a)中的橙色实线所示。从图6(b)和(c)所示的相图可以看出，共同环境诱导的耗散耦合压缩了拓扑非平庸区域。

2. *Topology of the Kitaev model with the dissipative couplings for $\theta \neq 0$*

现在我们研究 $\theta \neq 0$时所有最近邻量子比特之间均存在耗散耦合的 Kitaev模型的拓扑性质，其示意图

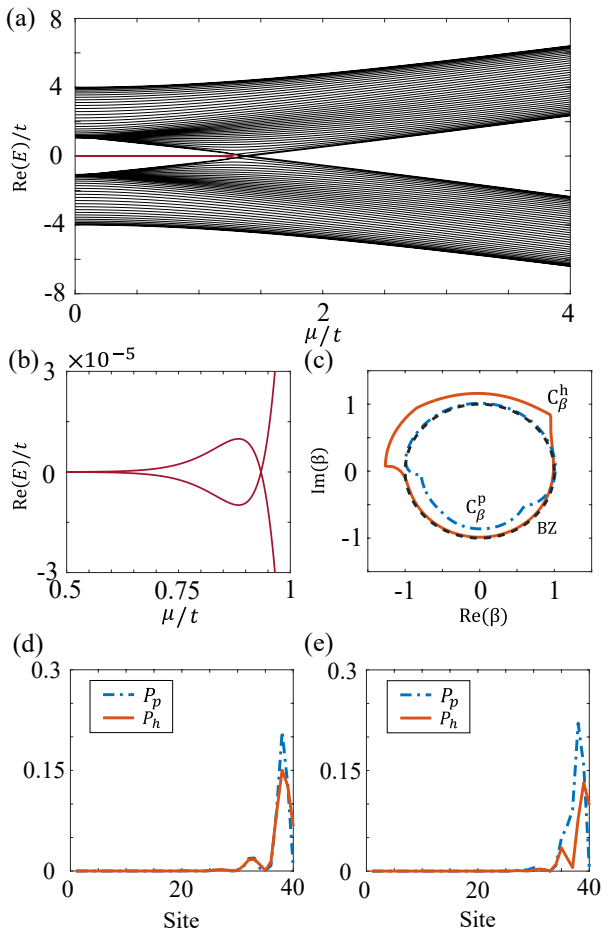

图7. (a) 哈密顿量 H_{nonH} 的能谱实部随参数 μ 的变化，红色实线在 (b) 中放大显示。(c) 为 $\mu/t=0.2$ 时与 (a) 对应的广义布里渊区。(d) 和 (e) 分别表示能量为 Re($E/t=1.13$) 和 Re($E/t=1.07$) $\mu/t=0.2$ 的体态布居分布。蓝色点划线和橙色实线分别对应粒子和空穴。此处选取的其他参数为 $\Delta/t=1.3$、$\gamma/t=0.2$、$\theta=\pi/4$、$N=40$ 和 $t=1$。

如图3(b) 所示。在这种情况下，系统的哈密顿量为 H_{nonH}，如式（22）所示。我们发现，当 $\theta\neq 0$ 或 π时，式（22）中相邻量子比特之间的耦合是非互易的。这种非互易耦合使系统呈现出新的性质。下面，我们主要从能谱和局域化的角度研究边缘态和体态的性质。

对于边缘态，如图 7(a) 所示，耗散耦合对系统的作用与 $\theta=0$ 相同。也就是说，耗散耦合会导致对应边缘态的能量振荡，这在图 7(b) 中清晰可见，而且拓扑相变点也向左移至点 $\mu=2t$。

至于体态，我们使用广义布里渊区（GBZ） [95, 96]来研究系统的体边对应。在这里，GBZ 是布里渊区的扩展。在厄米情形下，它是一个单位圆，这意味着体态的分布遍及整个系统。然而，在非厄米情形下，GBZ 可能不是单位圆。这意味着系统会变得局域化，体态可能集中在系统的边缘，并呈现趋肤效应。

对于一般情况，即 $\Delta\neq t$，我们可以在动量空间中将ˆ HamiltonianH_{nonH} 重写为

$$\hat{H}_{\mathrm{nonH}}=\frac{1}{2}\sum_{k}\hat{\Phi}_{k}^{\dagger}H_{k,2}(e^{ik})\hat{\Phi}_{k}, \tag{35}$$

其布洛赫哈密顿量为

$$H_{k,2}(e^{ik})=h_{I,2}(e^{ik})I+h_{y,2}(e^{ik})\sigma_{y}+h_{z,2}(e^{ik})\sigma_{z}, \tag{36}$$

其中

$$\begin{aligned}
h_{I,2}(e^{ik})&=it\sin\theta(e^{ik}-e^{-ik}),\\
h_{y,2}(e^{ik})&=-i\Delta(e^{ik}-e^{-ik}),\\
h_{z,2}(e^{ik})&=-\mu-t\cos\theta(e^{ik}+e^{-ik})-i\gamma(e^{ik}+e^{-ik}).
\end{aligned} \tag{37}$$

将实波数 k 扩展到复平面，例如将 e^{ik} 替换为 β，我们可以将非布洛赫哈密顿量$H_{k,\ 2}(\beta)$视为布洛赫哈密顿量的推广。于是，式（36）中的哈密顿量变为

$$H_{k,2}(\beta)=h_{I,2}(\beta)I+h_{y,2}(\beta)\sigma_{y}+h_{z,2}(\beta)\sigma_{z}, \tag{38}$$

其本征值为

$$E_{\pm}=h_{I,2}(\beta)\pm\sqrt{h_{y,2}^{2}(\beta)+h_{z,2}^{2}(\beta)}. \tag{39}$$

这里，式（39）中的参数给定为

$$\begin{aligned}
h_{I,2}(\beta)&=it\sin\theta(\beta-\beta^{-1}),\\
h_{y,2}(\beta)&=-i\Delta(\beta-\beta^{-1}),\\
h_{z,2}(\beta)&=-\mu-t\cos\theta(\beta+\beta^{-1})-i\gamma(\beta+\beta^{-1}).
\end{aligned} \tag{40}$$

广义布里渊区可以通过特征方程获得

$$f(\beta,E_{\pm})=\det[H_{k,2}(\beta)-E_{\pm}]=0. \tag{41}$$

该方程有四个解 $|\beta_1|\leq|\beta_2|\leq|\beta_3|\leq|\beta_4|$。选取 β 所对应的解，其表现出 $|\beta_2|=|\beta_3|$，β_2 和 β_3 的轨迹共同构成广义布里渊区。图 7（c）ˆ展示了非互易基塔耶夫模型的广义布里渊区 H_{nonH}，其中两个回路分别对应粒子和空穴，并满足 $\beta_h=\beta_p^{-1}$。显然，这两个回路都不是单位圆。这意味着粒子和空穴的布居主要集中在系统边缘，即出现趋肤效应；图7（d）和（e）所示的部分体态的布居分布也证实了这一结论。在开放边界条件下，这些态表明粒子和空穴都局域在边界处。同样，其他体态也会发生局域化，并主要集中在系统边缘。

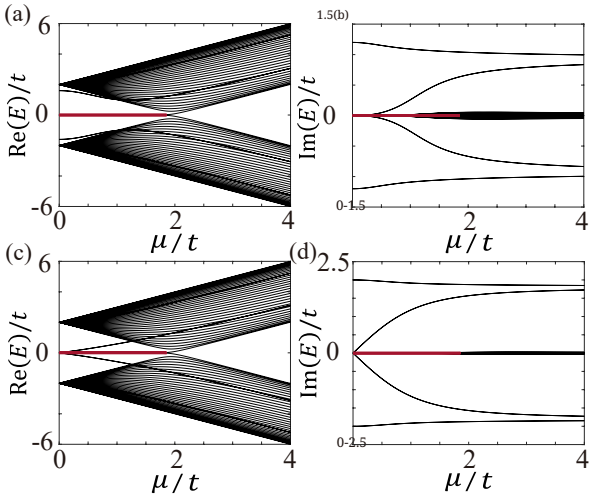

图8. 哈密顿量 $\hat{}$ H_2（1）作为参数 μ 在不同 γ下的能谱，采用开放边界条件。（a）和（b） $\gamma/t = 1.2$，（c）和（d）$\gamma/t = 2$。红色实线表示边缘态的能量。其他参数与图2中的相同。

3. Topology of the Kitaev model with the dissipative couplings for special positions of the chain when $\theta = 0$

本节讨论耗散耦合仅存在于两对量子比特中的情况，如图3（c）和（d）所示。我们首先假设耗散耦合仅存在于 Kitaev 链两端的量子比特对中，则可由式（29）推导出有效哈密顿量：

$$\hat{H}_2(1) = \hat{H}_0 - i\gamma\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_N^\dagger \hat{a}_{N-1} + \text{H.c.}\right). \qquad (42)$$

不同耗散耦合强度下，能谱随参数 μ的变化如图8所示。在本小节余下部分，我们取 $N = 40$。

对于 $\mu < 2t$，如图8（a）所示，在耗散耦合相对较弱的情况下，我们发现能谱的实部与图4（a）所示的厄米情形相似。存在一对可视为边界态的零能态，尽管存在非厄米耗散耦合，它们的能量仍为实数。然而，从图8（b）中可以发现，与这些体态对应的能量出现了虚部，这表明一些体态因这种耗散耦合而发生了改变。进一步增大耗散耦合强度后，我们可以从图8（c）和（d）中看到，在拓扑非平庸相中存在另外四个能量位于零附近的模。这些模具有复本征值，这意味着这些态在拓扑非平庸相中是不稳定的。

对于 $\mu > 2t$，如图 8所示，耗散耦合几乎不会影响能谱的实部。此外，能谱的虚部

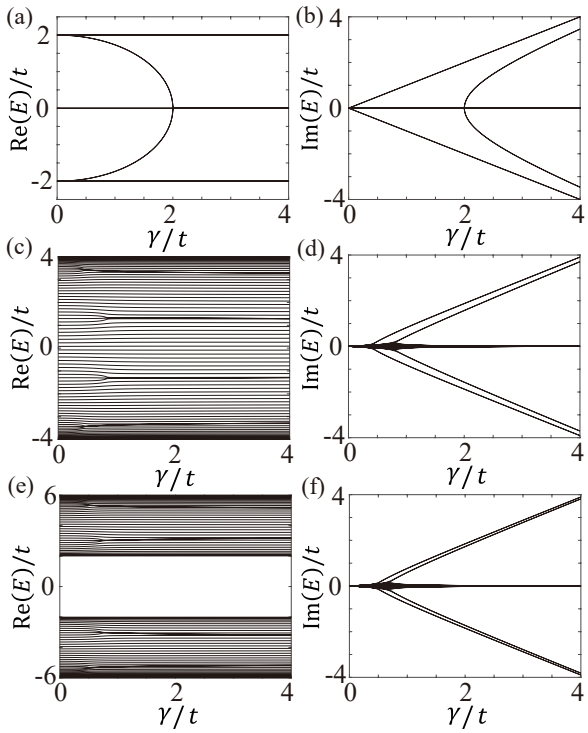

图 9. Kitaev模型ˆ的能谱 H_2(1) 随 γ 变化的情况，不同 μ下的开放边界条件。(a) 和 (b) $\mu/t = 0$，(c) 和 (d) $\mu/t = 2$，(e) 和 (f) $\mu/t = 4$。其他参数与图2中相同。

尽管存在耗散耦合，大多数态的虚部仍接近于零。

显然，耗散耦合在不同参数区域对能谱有不同影响。如图9(a) 和 (b) 所示，当 $\mu = 0$时，存在四个态，其能量始终为复数值；当 $\gamma \neq 0$时，这些能量的实部等于 $2t$。此外，当 $0 \leq \gamma < 2t$ 时，存在四个能量为纯实数且单调趋近于零的态。当 $\gamma \geq 2t$时，与这四个体态对应的能量变为纯虚数。也就是说，这四个体态的能量是实数还是虚数，取决于耗散耦合 γ的强度。对于边缘态，我们发现，拓扑非平庸相中的马约拉纳束缚态能量始终为纯实数。这意味着，位于系统两端的共同环境无法轻易破坏边缘态。对于 $\mu = 2t$ 和 $\mu = 4t$，如图9(c)-(f) 所示，我们发现耗散耦合几乎不会改变能谱的实部。然而，几乎所有态的本征值都具有虚部，其中大多数接近于零。因此，我们得出结论：两端的耗散耦合会改变系统的能谱，尤其是在拓扑非平庸区。

耗散耦合也可以存在于另外两对最近邻量子比特之间，例如第 m 个与第 $(m+1)$ 个量子比特之间的一对，以及

第 $(N-m)$ 个与第 $(N-m+1)$ 个量子比特之间的一对。这里，我们考虑 $\theta = 0$ 的情况。在这种情况下，相应的有效哈密顿量可以写为

$$\hat{H}_2(m) = \hat{H}_0 + \hat{U}_2(m),$$
$$\hat{U}_2(m) = -i\gamma\left(\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_{m+1} + \hat{a}_{N-m}^\dagger \hat{a}_{N-m+1} + \text{H.c.}\right). \tag{43}$$

这里，为方便起见，我们将 m 称为耗散耦合位置。

下面，我们研究耗散耦合位置 m 对系统拓扑性质的影响。如图 10(a)-(f) 所示，耦合位置主要改变拓扑非平庸相中的能谱结构，尤其是体态。对于能谱的实部，耗散耦合主要改变体态上带中最低能态和下带中最高能态的能量。图 8(c) 对应于 $m = 1$的情形；除边缘态外，还存在至少四个本征能量实部接近零的模。随着 m增大，这四个模对应的本征能量实部逐渐远离零，如图 10 (a)、(c) 和 (e) 所示。当耗散耦合分布在量子比特链中心附近时，更多本征能量具有非零虚部，但边缘态对应的能量始终为纯实数。因此，我们可以得出结论：边缘态对˜耗散耦合具有鲁棒性 $U_2(m)$。

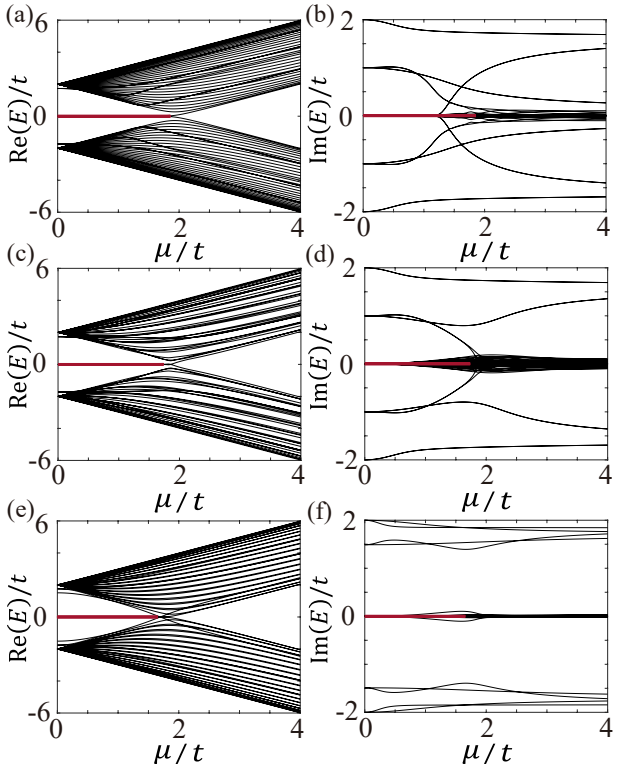

图10. 开放边界条件下，不同耦合位置 m时，Kitaev模型˜ $H_2(m)$的能谱随 μ 的变化。(a)和(b) $m = 2$，(c)和(d) $m = 10$，(e)和(f) $m = 19$。红色实线表示边缘态的能量。其他参数取为$\gamma/t = 2$、 $\Delta/t = 1$、 $N = 40$ 和 $t = 1$。

此外，我们发现，系统的局域化程度以及边缘态与体态上能带中的最低（最高）能态之间的能量差，均与耗散耦合位置有关。当 $\mu = 0$时，位置 $m = 1$对应的能量差最小，且体态上能带中的最低能态具有最强的局域化，如图 11(a) 所示，体态上能带中最低能态的布居分布集中在左边缘的两个格点上。当耗散耦合位置靠近量子比特链中心时，相应的能量差增大，体态上能带中最低能态的局域化程度减弱。图 11(b) 和 (c) 分别显示了在 $m = 2$和 $m = 10$时，体态上能带中最低能态的布居分布。四个相邻格点具有相同的布居，并分布在第 2 和第 10 个格点附近。由于系统具有对称性，存在一个特殊的耗散耦合位置，即 $m = 19$。在这种情况下，与除 $m = 1$之外的其他耗散耦合位置相比，体态局域化增强了。如图11(d)所示，布居分布在第18和第23个格点处出现两个峰。

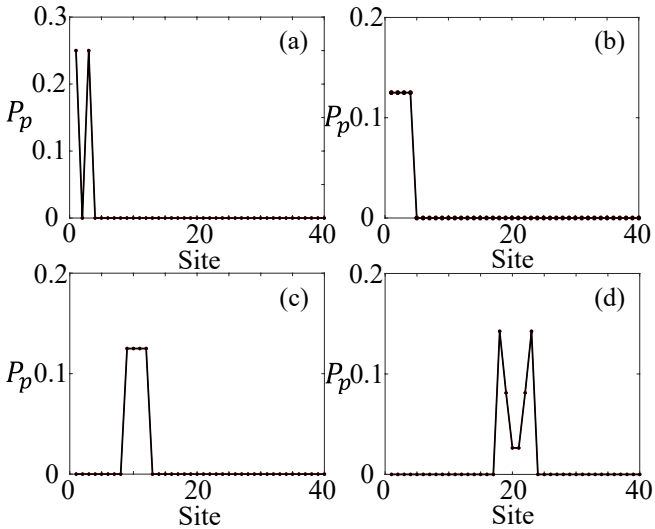

图11. 开放边界条件下，当 $H_2(m)$时˜ $\mu/t = 0$ 的体态布居分布。(a) $m = 1$，(b) $m = 2$，(c) $m = 10$，以及(d) $m = 19$。其他参数与图10相同。

最后，我们考虑 $m = 20$ 的情况。在这种情况下，耗散耦合仅存在于第 20 个和第 21 个量子比特之间。我们发现，这种耗散耦合

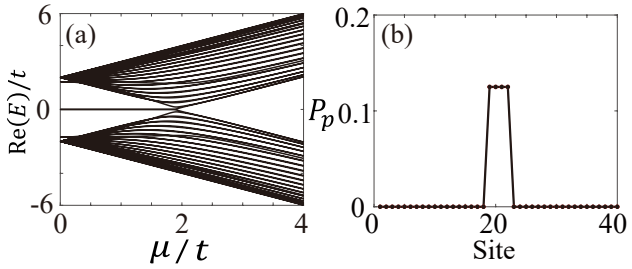

图 12。（a）能谱实部 $\hat{}$ H_2（20）随 μ 的变化。（b）当 $\mu/t = 0$ 时，H_2（20）的体态布居分布。其他参数与图 10相同。

与 $m = 2$和 10 的情况相比，不会产生任何特殊效应。图 12(a) 中的能谱结构与图 10(a) 和 (c) 中的相同。体态上能带中最低能态对应的布居分布如图 12(b) 所示，也与图 11(b) 和 (c) 中的相似。该态仅在格点 19、20、21 和 22 上有布居。

4. Local environmental effect

我们上面讨论的内容都集中于耗散耦合的影响，但位点耗散势同样会影响系统的拓扑性质。下面将讨论位点耗散势的影响，并比较耗散耦合与位点耗散势。为了区分位点耗散势和耗散耦合，我们使用 δ 表示该势。

位点耗散势同样可以非平凡地改变系统的拓扑相 [63]。如果只考虑位点耗散势，哈密顿量可以写成

$$\begin{aligned}\hat{H}_3 &= \hat{H}_0 + \hat{U}_3,\\ \hat{U}_3 &= -i\delta\sum_{n=1}^{N}\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n,\end{aligned} \tag{44}$$

其中 $\hat{}$ H_0 由式（23）给出，拓扑相变点为

$$\mu = 2t\sqrt{1-\frac{\delta^2}{4\Delta^2}}. \tag{45}$$

该方程表明，位点耗散势会影响拓扑相变。当 $\delta < |2\Delta|$时，存在拓扑非平庸相，并伴随边缘态；而当 $\delta > |2\Delta|$时，无论参数 μ 如何变化，拓扑非平庸相都会消失。

如图13(a)-(d)所示，当位点耗散势 δ 较弱时，例如 $\delta/t = 0.5$ 和 1，我们可以发现

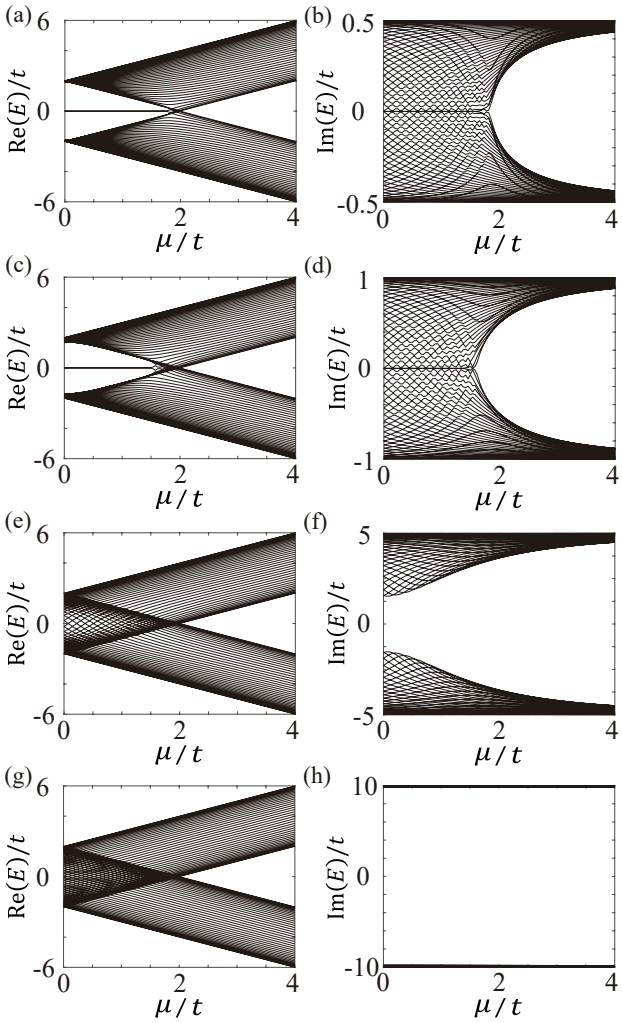

图 13. 开放边界条件下，哈密顿量 $\hat{}$ H_3 的能谱随参数 μ 在不同 δ下的变化。(a) 和 (b) $\delta/t = 0.5$，(c) 和 (d) $\delta/t = 1$，(e) 和 (f) $\delta/t = 2$，(g) 和 (h) $\delta/t = 10$。其他参数与图 2相同。

存在零能态，这些态的能量虚部为零，这意味着当系统处于拓扑非平庸相时，这些态的能量是纯实数。然而，在拓扑平庸相中，所有态的能量都是复数。进一步增大位点耗散势，例如 $\delta/t = 2$ 和 10，在这些情况下，如图13(e)-(h)所示，边缘态不再存在，拓扑非平庸区域也随之消失。此外，所有态的能量都有虚部，这意味着所有态的能量都是复数。

比较方程（34）与方程（45）可知，位点耗散势和耗散耦合都能非平庸地改变拓扑相，这两种机制都会使拓扑非平庸区域变窄。此外，在这两种情况下，零能态的能量都为纯实数。然而，对于非零

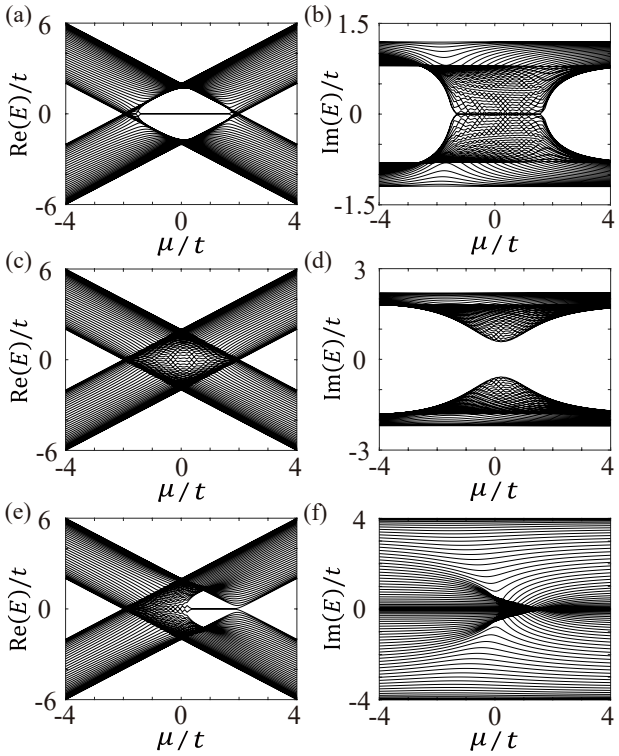

图14. 哈密顿量 $\hat{H}_4$ 随参数 μ 变化的能谱，针对不同的 δ 和 γ，在开放边界条件下。(a) 和 (b) $\gamma/t = 0.1$，$\delta/t = 1$，(c) 和 (d) $\gamma/t = 0.1$，$\delta/t = 2$，(e) 和 (f) $\gamma/t = 1$，$\delta/t = 2$。其他参数与图 2 中相同。

耗散耦合，当位点耗散势为零时，无论参数 μ变得多大，拓扑非平庸区域始终存在。对于非零位点耗散势，当耗散耦合为零时，这一结果会发生改变：一旦 $\delta > |2\Delta|$，拓扑非平庸区域便会消失，这意味着对于任意 μ，系统都处于拓扑平庸相。

此外，我们考虑一种更一般的模型，同时纳入位点耗散势和耗散耦合。在这种情况下，哈密顿量为

$$\hat{H}_4 = \hat{H}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_3. \tag{46}$$

如图所示14，如果将位点耗散势和耗散耦合一并纳入哈密顿量$\hat{H}_0$，系统的能谱将发生很大变化。首先，能谱的对称性不复存在。从实部来看，对于位点耗散势，当参数 μ 表现为 $-2t\sqrt{1-\delta^2/4\Delta^2} < \mu < 2t\sqrt{1-\delta^2/4\Delta^2}$时，会出现能隙；此时，显然能隙关于原点对称分布。对于耗散耦合，当参数 μ表现为 $-2t/\sqrt{1+\gamma^2/t^2} < \mu < 2t/\sqrt{1+\gamma^2/t^2}$时，~~会出现能隙；~~此时，显然能隙也呈对称分布

于原点两侧。将位点耗散势和耗散耦合一并考虑，如图 14(a)、(c) 和 (e) 所示，存在能隙的区间变小，且不再关于原点对称分布，但此时会出现能级劈裂振荡。对于虚部，如图 14(b)、(d) 和 (f) 所示，对称性也遭到破坏，能谱不再关于原点对称。此外，耗散耦合扩大了拓扑非平庸相的存在条件。如仅包含位点耗散势的式（45）所示，若 $\delta \geq |2\Delta|$，则无论μ为何值，系统始终处于拓扑平庸区域。然而，耗散耦合的存在打破了这一限制；即使 $\delta \geq |2\Delta|$，也可能出现拓扑非平庸区域。如图 13(e) 所示，若不存在耗散耦合，则不会出现拓扑非平庸区域；而将该耦合考虑在内后，如图 14(c) 和 (e) 所示，只要耗散耦合足够大，拓扑非平庸区域就会再次出现。

V. 总结与讨论

我们从理论上提出并构建了一种基于超导量子比特的 Kitaev 链模型，其中量子比特通过射频超导量子干涉器件耦合器耦合，这得益于超导量子器件的灵活设计。利用相邻量子比特之间的两种耦合器，我们可以实现复数跃迁参数 $te^{i\theta}$。Kitaev模型所必需的配对耦合参数 Δ，在量子光学研究中通常作为反旋转项而被忽略；通过使耦合器中的时变磁通与量子比特的耦合对进行频率匹配，即可获得该参数。此外，还可以通过调节射频超导量子干涉器件耦合器回路中的磁通来调节量子比特之间的耦合强度。最终，通过 Jordan-Wigner 变换将量子比特算符映射为费米子产生与湮灭算符，从而得到以费米子算符描述的 Kitaev模型。

实际上，环境对于所有量子系统而言都无法避免。因此，本文研究了环境效应。尤其是，最近邻量子比特或格点通常会受到共同环境的影响；在超导量子电路和其他固态量子器件中，微波腔或波导可以模拟这种环境。因此，我们主要研究共同环境对Kitaev模型拓扑态的影响。我们发现，共同环境的影响等效于最近邻量子比特之间的非厄米耗散耦合，并伴有位点耗散势。我们还比较了位点耗散势与耗散耦合对拓扑性质的影响。

通过分析系统有效哈密顿量对应本征态的能谱和布居分布，

我们发现，耗散耦合会显著影响Kitaev模型的拓扑性质。如果所有相邻格点之间都存在耗散耦合，那么它们会非平凡地改变本征态的布居分布和拓扑相变点。如果耗散耦合仅存在于特定格点，那么近零能态的数量和能谱的虚部会随耗散耦合格点的变化而变化。我们还发现，边缘处的耗散耦合会显著影响体态上带中的最低能态（下带中的最高能态）。此外，我们发现，零能马约拉纳束缚态对共同环境造成的扰动具有很强的鲁棒性。我们指出，可以通过超导量子比特电路测量能谱和布居分布，例如测量腔体或波导的反射谱。

与其他系统相比，超导量子比特系统具有成熟的制造工艺、良好的可扩展性，并且能够轻松控制量子比特之间的耦合以及量子比特的能级结构 [62, 97, 98]。因此，超导量子比特系统可以作为拓扑研究最具潜力的平台之一。为使我们的研究更加具体，我们以相位量子比特为例构建Kitaev模型；不过，该方法也可以应用于其他种类的超导量子比特。在我们的研究中，量子比特的相干性并不十分重要，而量子比特频率以及量子比特之间耦合的可调性至关重要。我们知道，对于各种超导量子比特电路而言，实现可调性并不是一项困难的任务。我们的工作或许能够启发研究人员利用这一高质量平台，在拓扑领域开展更多研究。我们也希望，关于共同环境对拓扑影响的研究能够进一步促使人们开展更多关于环境与拓扑之间关系的研究。

VI. 致谢

Y.X.L. 获国家自然科学基金委员会资助（项目编号：11874037），并获广东省重点研发计划资助（项目编号：2018B030326001）。

[1] M. Z. Hasan 和 C. L. Kane, *Colloquium: Topological insulators* **82**, 3045 2010 , 《现代物理评论》 （）。[2] X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang, *Topological insulators and superconductors* **83**, 1057 2011 , 《现代物理评论》 （）。[3] B. A. Bernevig 和 T. L. Hughes, *Topological Insulators and Topological Superconductors*（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2013年）。[4] A. Y. Kitaev, *Fault-tolerant quantum computation by anyons* **303**, 2 2003 , 《物理学年鉴》 （）。[5] C. Nayak、S. H. Simon、A. Stern、M. Freedman 和 S. Das Sarma, *Non-Abelian anyons and topological quantum computation* **80**, 1083 2008 , 《现代物理评论》 （）。[6] S. Das Sarma、M. Freedman 和 C. Nayak, *Majoranazero modes and topological quantum computation*, 《量子信息》**1**，15001（2015年）。[7] P. Roushan、C. Neill、Y. Chen、M. Kolodrubetz、C. Quintana、N. Leung、M. Fang、R. Barends、B. Campbell、Z. Chen、B. Chiaro、A. Dunsworth、E. Jeffrey、J. Kelly、A. Megrant、J. Mutus、P. J. J. O'Malley、D. Sank、A. Vainsencher、J. Wenner、T. White、A. Polkovnikov、A. N. Cleland 和 J. M. Martinis, *Observation of topological transitions in interacting quantum circuits* **515**, , 《自然》241 2014 （）。[8] E. Flurin、V. V. Ramasesh、S. Hacohen-Gourgy、L. S. Martin、N. Y. Yao 和 I. Siddiqi, *Observing Topological Invariants Using Quantum Walks in Superconducting Circuits* **7**, 031023 2017 , Physical Review X（）。[9] V. V. Ramasesh、E. Flurin、M. Rudner、I. Siddiqi 和 N. Y. Yao, *Direct Probe of Topological Invariants Using Bloch Oscillating Quantum Walks* , 《物理评论快报》**118**，130501 2017年（）。[10] X. S. Tan、D. W. Zhang、Z. Yang、J. Chu、Y. Q. Zhu、D. Y. Li、X. P. Yang、S. Q. Song、Z. K. Han、Z. Y. Li、Y. Q. Dong、H. F. Yu、H. Yan、S. L. Zhu 和 Y. Yu, *Experimental Measurement of the Quantum Metric Tensor and Related Topological Phase Transition with a Superconducting Qubit* **122**, 210401 , 《物理评论快报》（2019年）。[11] Z. Y. Tao、T. X. Yan、W. Y. Liu、J. J. Niu、Y. X. Zhou、L. B. Zhang、H. Jia、W. Q. Chen、S. Liu、Y. Z. Chen 和 D. P. Yu, *Simulation of a topological phase transition in a Kitaev chain with long-range coupling using a superconducting circuit* , 《物理评论B》**101**，035109 2020( )。[12] P. J. Leek、J. M. Fink、A. Blais、R. Bianchetti、M. G¨oppl、J. M. Gambetta、D. I. Schuster、L. Frunzio、R. J. Schoelkopf 和 A. Wallraff, *Observation of Berry's Phase in a Solid-State Qubit* **318**, 1889 2007 , 《科学》（）。[13] S. Berger、M. Pechal、S. Pugnetti、A. A. Abdumalikov, Jr、L. Steffen、A. Fedorov、A. Wallraff 和 S. Filipp, *Geometric phases in superconducting qubits beyond the two-level approximation* **85**, 220502 , 《物理评论B》（R）（2012年）。[14] M. D. Schroer、M. H. Kolodrubetz、W. F. Kindel、M. Sandberg、J. Gao、M. R. Vissers、D. P. Pappas、A. Polkovnikov 和 K. W. Lehnert, *Measuring a topological transition in an artificial spin-1/2 system* , 《物理评论快报》**113**，050402（2014年）。[15] Z. X. Zhang、T. H. Wang、L. Xiang、J. D. Yao、J. L. Wu 和 Y. Yin, *Measuring the Berry phase in a superconducting phase qubit by a shortcut to adiabaticity*, 《物理评论A》**95**，042345（2017年）。[16] X. S. Tan、Y. X. Zhao、Q. Liu、G. M. Xue、H. F. Yu、Z. D. Wang 和 Y. Yu, *Realizing and manipulating space-time inversion symmetric topological semimetal bands with superconducting quantum circuits*, npj Quantum Mater. **2**，60（2017年）。

[17] X. S. Tan、D. W. Zhang、Q. Liu、G. M. Xue、H. F. Yu、Y. Q. Zhu、H. Yan、S. L. Zhu 和 Y. Yu, *Topological Maxwell Metal Bands in a Superconducting Qutrit*，《物理评论快报》120，130503（2018年）。[18] L. B. Ioffe、M. V. Feigel'man、A. Ioselevich、D. Ivanov、M. Troyer 和 G. Blatter, *Topologically protected quantumbits using Josephson junction arrays*，《自然》415，503（2002年）。[19] W. Nie、Z. H. Peng、F. Nori 和 Y. X. Liu, *Topologically protected quantum coherence in a superatom*，《物理评论快报》124，023603（2020年）。[20] Z. Y. Xue、S. L. Zhu、J. Q. You 和 Z. D. Wang, *Implementing topological quantum manipulation with superconducting circuits* **79**, 040303 ，《物理评论A》（R）（2009年）。[21] J. Q. You、X. F. Shi、X. D. Hu 和 F. Nori, *Quantum emulation of a spin system with topologically protected ground states using superconducting quantum circuits*，《物理评论B》81，014505（2010年）。[22] Y. P. Zhong、D. Xu、P. Wang、C. Song、Q. J. Guo、W. X. Liu、K. Xu、B. X. Xia、C.-Y. Lu、S. Y. Han、J. W. Pan 和 H. Wang, *Emulating Anyonic Fractional Statistical Behavior in a Superconducting Quantum Circuit*，《物理评论快报》117，110501（2016年）。[23] G. P. Fedorov、S. V. Remizov、D. S. Shapiro、W. V. Pogosov、E. Egorova、I. Tsitsilin、M. Andronik、A. A. Dobronosova、I. A. Rodionov、O. V. Astafiev 和 A. V. Ustinov, *Photon Transport in a Bose-Hubbard Chain of Superconducting Artificial Atoms*，《物理评论快报》126，180503 2021( )。[24] P. Roushan、C. Neill、A. Megrant、Y. Chen、R. Babbush、R. Barends、B. Campbell、Z. Chen、B. Chiaro、A. Dunsworth、A. Fowler、E. Jeffrey、J. Kelly、E. Lucero、J. Mutus、P. J. J. O'Malley、M. Neeley、C. Quintana、D. Sank、A. Vainsencher、J. Wenner、T. White、E. Kapit、H. Neven 和 J. Martinis, *Chiral ground-state currents of interacting photons in a synthetic magnetic field*，《自然·物理》13，146（2017年）。[25] Y. J. Zhao、X. W. Xu、H. Wang、Y. X. Liu 和 W. M. Liu, *Vortex-Meissner phase transition induced by a two-tone-drive-engineered artificial gauge potential in the fermionic ladder constructed by superconducting qubit circuits* **102**, 053722 2020 ，《物理评论A》（）。[26] W. P. Su、J. R. Schrieffer 和 A. J. Heeger, *Solitons in Polyacetylene* **42**, 1698 1979 ，《物理评论快报》（）。[27] X. Gu、S. Chen 和 Y.X. Liu, *Topological edge states and pumping in a chain of coupled superconducting qubits*, arXiv: 1711, 06829（2017年）[28] F. Mei、G. Chen、L. Tian、S. L. Zhu 和 S. T. Jia, *Topology-dependent quantum dynamics and entanglement-dependent topological pumping in superconducting qubit chains* **98**, 032323 2018 ，《物理评论A》（）。[29] W. Cai、J. Han、F. Mei、Y. Xu、Y. Ma、X. Li、H. Wang、Y. P. Song、Z. Y. Xue、Z. Q. Yin、S. T. Jia 和 L. Y. Sun, *Observation of Topological Magnon Insulator States in a Superconducting Circuit* **123**, 080501 ，《物理评论快报》（2019年）。[30] L. Fu、C. L. Kane, *Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator* **100**, 096407 2008 ，《物理评论快报》（）。[31] R. M. Lutchyn、J. D. Sau、S. Das Sarma, *Majorana Fermions and a Topological Phase Transition in Semiconductor-Superconductor Heterostructures*，《物理评论快报》105，077001（2010年）。[32] Y. Oreg、G. Refael 和 F. von Oppen, *Helical Liquids and Majorana Bound States in Quantum Wires*，《物理评论快报》105，177002（2010年）。[33] V. Mourik、K. Zuo、S. M. Frolov、S. R. Plissard、E. P. A. M. Bakkers 和 L. P. Kouwenhoven, *Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices* **336**, 1003 2012 ，《科学》（）。[34] M. T. Deng、C. L. Yu、G. Y. Huang、M. Larsson、P. Caroff 和 H. Q. Xu, *Anomalous zero-bias conductance peak in a Nb-InSb nanowire-Nb hybrid device*，《纳米快报》12，6414（2012年）。[35] A. Stern, *Non-Abelian states of matter*，《自然》464，187（2010年）。[36] P. Krogstrup、N. L. B. Ziino、W. Chang、S. M. Albrecht、M. H. Madsen、E. Johnson、J. Nygård、C. M. Marcus 和 T. S. Jespersen, *Epitaxy of semiconductor-superconductor nanowires* **14**, 400 2015 ，《自然·材料》（）。[37] M. Cheng、R. M. Lutchyn、V. Galitski 和 S. Das Sarma, *Tunneling of anyonic Majorana excitations in topological superconductors* **82**, 094504 2010 ，《物理评论B》（）。[38] S. Das Sarma、J. D. Sau 和 T. D. Stanescu, *Splitting of the zero-bias conductance peak as smoking gun evidence for the existence of the Majorana mode in a superconductor-semiconductor nanowire*，《物理评论B》86，220506(R)（2012年）。[39] C. Fleckenstein、F. Domínguez、N. T. Ziani 和 B. Trauzettel, *Decaying spectral oscillations in a Majorana wire with finite coherence length* **97**, 155425 ，《物理评论B》（2018年）。[40] T. D. Stanescu、R. M. Lutchyn 和 S. Das Sarma, *Dimensional crossover in spin-orbit-coupled semiconductor Di-nanowires with induced superconducting pairing*，《物理评论B》87，094518（2013年）。[41] Z. Cao、H. Zhang、H.-F. Lü、W.-X. He、H. Z. Lu 和 X. C. Xie, *Decays of Majorana or Andreev Oscillations Induced by Steplike Spin-Orbit Coupling*，《物理评论快报》122，147701（2019年）。[42] D. Rainis、L. Trifunovic、J. Klinovaja 和 D. Loss, *Towards a realistic transport modeling in a superconducting nanowire with Majorana fermions*，《物理评论B》87，024515 2013（）。[43] S. M. Albrecht、A. P. Higginbotham、M. Madsen、F. Kuemmeth、T. S. Jespersen、J. Nygård、P. Krogstrup 和 C. M. Marcus, *Exponential protection of zero modes in Majorana islands* **531**, 206 2016 ，《自然》（）。[44] Q. L. He、L. Pan、A. L. Stern、E. C. Burks、X. Y. Che、G. Yin、J. Wang、B. Lian、Q. Zhou、E. S. Choi、K. Murata、X. F. Kou、Z. J. Chen、T. X. Nie、Q. M. Shao、Y. B. Fan、S.-C. Zhang、K. Liu、J. Xia 和 K. L. Wang, *Chiral Majorana fermion modes in a quantum anomalous Hall insulator-superconductor structure*，《科学》357，294（2017年）。[45] J. Shen、S. Heedt、F. Borsoi、B. van Heck、S. Gazibegovic、R. L. M. Op het Veld、D. Car、J. A. Logan、M. Pendharkar、S. J. J. Ramakers、G. Z. Wang、D. Xu、D. Bouman、A. Geresdi、C. J. Palmstrøm、E. P. A. M. Bakkers 和 L. P. Kouwenhoven, *Parity transitions in the superconducting ground state of hybrid InSb-Al Coulomb islands* **9**, 4801 2018 ，《自然·通讯》（）。[46] S. Heedt、N. T. Ziani、F. Crépin、W. Prost、S. Trellenkamp、J. Schubert、D. Grüetzmacher、B. Trauzettel 和 T. Schäpers, , *Signatures of interaction-induced helical gaps in nanowire quantum point contacts*，《自然·物理》13，563 2017（）。

[47] C. H. L. Quay、T. L. Hughes、J. A. Sulpizio、L. N. Pfeiffer、K. W. Baldwin、K. W. West、D. Goldhaber-Gordon 和 R. de Picciotto, *Observation of a one-dimensional spin-orbit gap in a quantum wire* **6**, 336 2010 , 《自然·物理》（）。[48] R. M. Lutchyn、E. P. A. M. Bakkers、L. P. Kouwenhoven、P. Krogstrup、C. M. Marcus 和 Y. Oreg, *Majorana zero modes in superconductor-semiconductor heterostructures*, 《自然综述: 材料》3，52（2018年）。[49] A. Y. Kitaev, *Unpaired Majorana fermions in quantum wires* **44**, 131 2001 , 《物理学进展》（）。[50] E. Majorana, *Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone* **14**, 171 1937 , 《新物理学》（）。[51] L.-J. Lang 和 S. Chen, *Majorana fermions in density-modulated p-wave superconducting wires* , 《物理评论B》86，205135（2012年）。[52] Y. Z. Niu、S. B. Chung、C.-H. Hsu、I. Mandal、S. Raghu 和 S. Chakravarty, *Majorana zero modes in a quantum Ising chain with longer-ranged interactions* , 《物理评论B》85，035110（2012年）。[53] W. DeGottardi、D. Sen 和 S. Vishveshwara, *Topological phases Majorana modes and quench dynamics in a spin ladder system* **13**, 065028 2011 , 《新物理学杂志》（）。[54] A. A. Zyvagin, *Dynamics of the Kitaev chain model under parametric pumping* **90**, 014507 , 《物理评论B》（2014年）。[55] R. Schmied、J. H. Wesenberg 和 D. Leibfried, *Quantum simulation of the hexagonal Kitaev model with trapped ions* **13**, 115011 2011 , 《新物理学杂志》（）。[56] Y. Xing、L. Qi、J. Cao、D.-Y. Wang、C.-H. Bai、W.-X. Cui、H.-F. Wang、A.-D. Zhu 和 S. Zhang, *Controllable photonic and phononic edge localization via optomechanically induced Kitaev phase* , 《光学快报》26，16250 2018（）。[57] J.-S. Xu、K. Sun、Y.-J. Han、C.-F. Li、J. K. Pachos 和 G.-C. Guo, *Simulating the exchange of Majorana zero modes with a photonic system* **7**, 13194 , 《自然·通讯》（2016年）。[58] H. L. Huang、M. Naro˙zniak、F. T. Liang、Y. W. Zhao、A. D. Castellano、M. Gong、Y. L. Wu、S. Y. Wang、J. Lin、Y. Xu、H. Deng、H. Rong、J. P. Dowling、C. Z. Peng、T. Byrnes、X. B. Zhu 和 J. W. Pan, *Emulating quantum teleportation of a Majorana zero mode qubit* , 《物理评论快报》126，090502（2021年）。[59] J. Clarke 和 F. K. Wilhelm, *Superconducting quantum bits* **453**, 1031 2008 , 《自然》（伦敦）（）。[60] J. Q. You 和 F. Nori, *Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits*, 《自然》（伦-敦）474，589（2011年）。[61] M. H. Devoret 和 R. J. Schoelkopf, *Superconducting circuits for quantum information: an outlook*, 《科学》339，1169（2013年）。[62] X. Gu、A. F. Kockum、A. Miranowicz、Y. X. Liu 和 F. Nori, *Microwave photonics with superconducting quantum circuits* **718 719**, 1 2017 , 《物理报告》-（）。[63] Q.-B. Zeng、B.-G. Zhu、S. Chen、L. You 和 R. L¨u, *Non-Hermitian Kitaev chain with complex on-site potentials*, 《物理评论A》94，022119（2016年）。[64] M. Klett、H. Cartarius、D. Dast、J. Main 和 G. Wunner, *Relation between $\mathcal{PT}$-symmetry breaking and topologically nontrivial phases in the Su-Schrieffer-Heeger and Kitaev models* **95**, 053626 , 《物理评论A》（2017年）。[65] C. Li、L. Jin 和 Z. Song, *Coalescing Majorana edge modes in non-Hermitian $\mathcal{PT}$-symmetric Kitaev chain* ,《科学报告》10, 6807 (2020年)。[66] X. H. Wang, T. T. Liu, and Y. Xiong, and P. Q. Tong, *Spontaneous $\mathcal{PT}$-symmetry breaking in non-Hermitian Kitaev and extended Kitaev models* ,《物理评论A》92, 012116 2015( )。[67] J. M. Zeuner, M. C. Rechtsman, Y. Plotnik, Y. Lumer, S. Nolte, M. S. Rudner, M. Segev, and A. Szameit, *Observation of a Topological Transition in the Bulk of a Non-Hermitian System* **115**, 040402 ,《物理评论快报》(2015年)。[68] R. Hamazaki, K. Kawabata, and M. Ueda, *Non-Hermitian Many-Body Localization* ,《物理评论快报》123, 090603 (2019年)。[69] F. Dangel, M. Wagner, H. Cartarius, J. Main, and G. Wunner, *Topological invariants in dissipative extensions of the Su-Schrieffer-Heeger model* ,《物理评论A》98, 013628 2018( )。[70] M. S. Rudner and L. S. Levitov, *Topological Transition in a Non-Hermitian Quantum Walk* ,《物理评论快报》102, 065703 2009年( )。[71] L. Xiao, X. Zhan, Z. H. Bian, K. K. Wang, X. Zhang, X. P. Wang, J. Li, K. Mochizuki, D. Kim, N. Kawakami, W. Yi, H. Obuse, B. C. Sanders, and P. Xue, *Observation of topological edge states in parity-time-symmetric quantum walks* **13**, 1117 2017 ,《自然·物理》( )。[72] D. Leykam and D. A. Smirnova, *Probing bulk topological invariants using leaky photonic lattices* ,《自然·物理》17, 632 2021( )。[73] W. Nie, M. Antezza, Y. X. Liu, and F. Nori, *Dissipative Topological Phase Transition with Strong System-Environment Coupling* ,《物理评论快报》127, 250402 2021( )。[74] W. Nie, T. Shi, F. Nori, and Y. X. Liu, *Enhanced Nonreciprocal Scattering and Photon Absorption Topology-tion in a Waveguide* **15**, 044041 2021 , Physical Review Applied( )。[75] C. D. Wilen, S. Abdullah, N. A. Kurinsky, C. Stanford, L. Cardani, G. D'lmperio, C. Tomei, L. Faoro, L. B. Ioffe, C. H. Liu, A. Opremcak, B. G. Christensen, J. L. DuBois, and R. McDermott, *Correlated charge noise and relaxation errors in superconducting qubits* **594**, ,《自然》( )。369 2021[76] M. Harder, Y. Yang, B. M. Yao, C. H. Yu, J. W. Rao, Y. S. Gui, R. L. Stamps, and C.-M. Hu, *Level Attraction Due to Dissipative Magnon-Photon Coupling* ,《物理评论快报》121, 137203 (2018年)。[77] J. Zhao, Y. L. Liu, L. H. Wu, C. K. Duan, Y. X. Liu, and J. F. Du, *Observation of Anti-PT-Symmetry Phase Transition in the Magnon-Cavity-Magnon Coupled System* **13**, 014053 2020 ,Physical Review Applied( )。[78] Z. H. Peng, C. X. Jia, Y. Q. Zhang, J. B. Yuan, and L. M. Kuang, *Level attraction and PT symmetry in indirectly coupled microresonators* ,《物理评论A》102, 043527 2020年( )。[79] C. Jiang, Y. L. Liu, and M. A. Sillanp¨a¨a, *Level attraction and heating resistant cooling of mechanical Energy-levelresonators with exceptional points* , 《物理评论A》104, 013502 2021( )。[80] D. Porras, and S. Fern´andez-Lorenzo, *Topological Amplification in Photonic Lattices* ,《物理评论快报》122, 143901 2019( )。[81] C. C. Wanjura, M. Brunelli, A. Nunnenkamp, *Topological framework for directional amplification in driven-dissipative cavity arrays* **11**, 3149 2020 ,《自然·通讯》( )。

,

[82]A. Metelmann and A. A. Clerk, *Nonreciprocal Photon Transmission and Amplification via Reservoir Engineering* **5**, 021025 2015 ,Physical Review X( )。[83] M. S. Allman, F. Altomare, J. D. Whittaker, K. Cicak, D. Li, A. Sirois, J. Strong, J. D. Teufel, and R. W. Simmonds, *rf-SQUID-Mediated Coherent Tunable Coupling between a Superconducting Phase Qubit and a Lumped-Element Resonator* ,《物理评论快报》**104**, 177004 2010年( )。[84] M. S. Allman, J. D. Whittaker, M. Castellanos-Beltran, K. Cicak, F. da Silva, M. P. DeFeo, F. Lecocq, A. Sirois, J. D. Teufel, J. Aumentado, and R. W. Simmonds, *Tunable Resonant and Nonresonant Interactions between a Phase Qubit and LC Resonator* **112**, ,《物理评论快报》( )。[85] R. Harris, A. J. Berkley, M. W. Johnson, P. Bunyk, S. Govorkov, M. C. Thom, S. Uchaikin, A. B. Wilson, J. Chung, E. Holtham, J. D. Biamonte, A. Yu. Smirnov, M. H. S. Amin, and Alec Maassen van den Brink, *Sign- and Magnitude-Tunable Coupler for Superconducting Flux Qubits* **98**, 177001 2007 ,《物理评论快报》( )。[86] R. Harris, T. Lanting, A. J. Berkley, J. Johansson, M. W. Johnson, P. Bunyk, E. Ladizinsky, N. Ladizinsky, T. Oh, and S. Han, *Compound Josephson-junction coupler for flux qubits with minimal crosstalk* ,《物理评论B》**80**, 052506 2009年( )。[87] I. Ozfidan, C. Deng, A. Y. Smirnov, T. Lanting, R. Harris, L. Swenson, J. Whittaker, F. Altomare, M. Babcock, C. Baron, A. J. Berkley, K. Boothby, H. Christiani, P. Bunyk, C. Enderud, B. Evert, M. Hager, A. Hajda, J. Hilton, S. Huang, E. Hoskinson, M. W. Johnson, K. Jooya, E. Ladizinsky, N. Ladizinsky, R. Li, A. MacDonald, D. Marsden, G. Marsden, T. Medina, R. Molavi, R. Neufeld, M. Nissen, M. Norouzpour, T. Oh, I. Pavlov, I. Perminov, G. Poulin-Lamarre, M. Reis, T. Prescott, C. Rich, Y. Sato, G. Sterling, N. Tsai, M. Volkmann, W. Wilkinson, J. Yao, and M. H. Amin, *Demonstration of a Nonstoquastic Hamiltonian in Coupled Superconducting Flux Qubits* ,Physical Review Applied **13**, 034037 (2020年)。

[88] K. Serniak、M. Hays、G. de Lange、S. Diamond、S. Shankar、L. D. Burkhart、L. Frunzio、M. Houzet 和 M. H. Devoret, *Hot Nonequilibrium Quasiparticles in Transmon Qubits* **121**, 157701 2018 ,《物理评论快报》( )。[89] M. J. Peterer、S. J. Bader、X. Y. Jin、F. Yan、A. Kamal、T. J. Gudmundsen、P. J. Leek、T. P. Orlando、W. D. Oliver 和 S. Gustavsson, *Coherence and Decay of Higher Energy Levels of a Superconducting Transmon Qubit* **114**, 010501 2015 ,《物理评论快报》( )。[90] M. Houzet 和 L. I. Glazman, *Critical Fluorescence of a Transmon at the Schmid Transition* ,《物理评论快报》**125**，267701（2020年）。[91] J. Koch、T. M. Yu、J. Gambetta、A. A. Houck、D. I. Schuster、J. Majer、A. Blais、M. H. Devoret、S. M. Girvin 和 R. J. Schoelkopf, *Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box* ,《物理评论A》**76**，042319 2007年（ ）。[92] P. Coleman, *Introduction to Many-Body Physics*,（剑桥大学出版社，剑桥，英国，2015年）。[93] Y.-P. Wang、J.-W. Rao、Y. Yang、P.-C. Xu、Y.-S. Gui、B.-M. Yao、J.-Q. You 和 C.-M. Hu, *Nonreciprocity and Unidirectional Invisibility in Cavity Magnonics* ,《物理评论快报》**123**，127202（2019年）。[94] E. Prada、P. San-Jose、M. W. A. de Moor、A. Geresdi、E. J. H. Lee、J. Klinovaja、D. Loss、J. Nygård、R. Aguado 和 L. P. Kouwenhoven, *From Andreev to Majorana bound states in hybrid superconductor–semiconductor nanowires* **2**, 575 2020 ,《自然综述：物理》（ ）。[95] S. Y. Yao 和 Z. Wang, *Edge States and Topological Invariants of Non-Hermitian Systems* ,《物理评论快报》**121**，086803（2018年）。[96] F. Song, S. Y. Yao 和 Z. Wang, *Non-Hermitian Topological Invariants in Real Space* **123**, 246801 ,《物理评论快报》（2019年）。[97] A. F. Kockum、A. Miranowicz、S. De Liberato、S. Savasta 和 F. Nori, *Ultrastrong coupling between light and matter* **1**, 19 2019 ,《自然综述：物理》( )。[98] Z. L. Xiang, S. Ashhab, J. Q. You 和 F. Nori, *Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems* **85**, 623 ,《现代物理评论》（2013年）。