arXiv:2302.03835v1 [math.NT] 8 Feb 2023

分拆函数的拉德马赫公式

ZE-YONG KONG 和 LEE-PENG TEO

摘要。设 n 为正整数， $p(n)$ 表示将 n 表示为若干正整数之和的方法数。本文以循序渐进的方式重新推导 $p(n)$ 的拉德马赫收敛级数，并给出所有细节。我们还推导了当 n趋于无穷大时， $p(n)$ 的主导渐近行为。文中列出了一些数值结果。

1. 引言

给定正整数 n，设 $p(n)$ 表示将 n 表示为若干正整数之和的方法数。例如，当 $n = 7$ 时，以下是将 7 表示为若干正整数之和的不同方法。

$$7$$
$$6+1,\ 5+2,\ 4+3$$
$$5+1+1,\ 4+2+1,\ 3+3+1,\ 3+2+2$$
$$4+1+1+1,\ 3+2+1+1,\ 2+2+2+1$$
$$3+1+1+1+1,\ 2+2+1+1+1$$
$$2+1+1+1+1+1$$
$$1+1+1+1+1+1+1$$

共有 15 种。因此， $p(7) = 15$。

令 $p(0) = 1$。那么数列 $\{p(n)\}$ 的生成函数为

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)^{-1}. \tag{1.1}$$

使用生成函数计算 $p(n)$ 的效率不高。一种更高效的方法是利用欧拉五边形数定理，该定理指出

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\omega_1(n)} + x^{\omega_2(n)}\right),$$

其中

$$\omega_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1}(1+3k) = \frac{3n^2-n}{2}$$

是五边形数，并且

$$\omega_2(n) = \omega_1(-n) = \frac{3n^2+n}{2}.$$

由此可以推导出以下用于计算 $p(n)$的递推公式:

$$p(n) = \sum_{\substack{k\geq 1 \\ w_2(k)\leq n}} (-1)^{k+1} \left\{p(n-\omega_1(k)) + p(n-\omega_2(k)\right\}. \tag{1.2}$$

注意，对于所有 $n \geq 1$,

$$\omega_2(n) - \omega_1(n) = n, \qquad \omega_1(n+1) - \omega_2(n) = 2n+1.$$

这意味着

$$\omega_1(n) < \omega_2(n) < \omega_1(n+1).$$

右端的和式（1.2）仅涉及约 $2\sqrt{2n/3}$ 项。因此，这是一个用于计算 $\overline{p\ (n}$）的有效公式。利用截至 ω_1（k）和 ω_2（k），可以计算出所有 $k = 100$，从而得到全部 p（n）（其中 $1 \leq n \leq 15050$）。在该范围内， p（n）的部分取值列于表 1中。

在 191 8 年，哈代和拉马努金 [HR18] 证明了 p（n）满足渐近公式 :

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \qquad \text{when } n \to \infty.$$

更确切地说，若令

$$P_1(n) = \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right), \tag{1.3}$$

then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{P_1(n)} = 1.$$

这是乌斯宾斯基独立发现的 [Usp20] ，时间是1920年。

I事实上，在 [HR18], 哈代和拉马努金得到了以下渐近公式

$$p(n) = \sum_{k<\alpha\sqrt{n}} P_k(n) + O\left(n^{-1/4}\right), \tag{1.4}$$

其中 α 是一个正常数，而 $P_1(n)$ 是由（1.3）给出的首项。各项 $P_2(n)$、$P_3(n)$、 $\cdots$具有相似的形式，但指数项中的常数小于 $\pi\sqrt{2/3}$。

渐近公式（1.4）的一个缺点是无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(n)$$

是发散的，这一点已由Lehmer证明 [Leh37]。

1937年，Rademacher 在为哈代和拉马努金的工作编写讲义时，改进了渐近公式（1.4）。他得到了以下令人瞩目的公式。

定理 1.1。 [拉德马赫公式 [Rad37]]

若 $n \geq 1$，分拆函数 $p(n)$ 可表示为收敛级数

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\sqrt{2}} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left\{ \frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}\left(n - \frac{1}{24}\right)} \right\}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right),$$

其中 $A_k(n)$ 在定理 3.1中定义。

与哈代–拉马努金公式相比，拉德马赫公式是一个收敛级数。在 [Rad37], Rademacher 还证明，若 N 的阶为 $\sqrt{n}$，则 N项之后的余项阶为 $n^{-1/4}$。

拉德马赫公式体现了哈代、拉马努金和李特尔伍德的圆法所取得的成果。这种方法在加法数论问题中取得了巨大成功 [Rad40, Rad43, Vau81]。

分拆函数及其推广一直受到积极研究 [Gro58,Gro60a,Gro60b, Gr o62,Gro63,Gro84,Hag62,Hag63,Hag64a,Hag64b,Hag63,Hag65a,Hag65b,Hag65c,Hag66, Hag70,Hag71a, Hag71b,Hua42,Ise59,Ise60, Liv45,Niv40,RS76,Rob76, Rob77,Sel89,Spe73, Sub72, VSS82, Van82], , 尤其是近年来 [AW95, BL13, BM20, Bri06, Cra22, DM13, IJT20, JS15, Joh12, KMT19, KY99, MLP12, O'S20, PW19, Sel89, Sil10b, Sil10a, Sil10c, SZ12, dAP00,Pri09,PW19,BTB11,Zag21]。证明拉德马赫公式的现代方法通常涉及模形式或 Poincar´ é 级数等高级数学工具 [DM13, dAP00, Pri09, PW19]。

本注的目的是详细证明拉德马赫分拆函数公式所需的全部内容。我们紧密遵循 [Apo 90] 中的方法。

2. 预备知识

2.1. 戴德金 Eta 函数。戴德金 eta 函数由戴德金于 1877年 引入，并在上半平面 $\mathbb{H} = \{\tau \,|\, \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ 中由下式定义

$$\eta(\tau) = e^{\pi i \tau/12} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i n \tau}\right). \tag{2.1}$$

生成函数 $F(x)$ (1.1) 对应于数列 $\{p(n)\}$ 与 $\eta(\tau)$ 之间的关系为

$$\eta(\tau) = e^{\pi i \tau/12} F(e^{2\pi i \tau}). \tag{2.2}$$

eta 函数 $\eta(\tau)$ 与模形式理论密切相关 [Apo90]。它的24次幂，$\eta(\tau)^{24}$, 是一个权为12的模形式。

要证明拉德马赫公式，需要戴德金 eta 函数在分式线性变换下的变换公式

由模群 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 的一个元素 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 定义 $\tau \mapsto \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$。

在陈述变换公式之前，我们先定义戴德金和。

定义 2.1。 若 h 是整数， k 是大于 1 的正整数，则戴德金和 $s(h,k)$ 定义为

$$s(h,k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k} - \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2}\right). \tag{2.3}$$

当 $k = 1$ 时，对于任意整数 h， $s(h,1)$ 定义为 0。

定理 2.2（戴德金函数方程）。
设 a、 b、 c、 d 为整数，且 $ad - bc = 1$ 和 $c > 0$成立。在分式线性变换下

$$\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d},$$

戴德金 eta 函数满足变换公式。

$$\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \exp\left\{\pi i\left(\frac{a+d}{12c} + s(-d,c)\right)\right\}\{-i(c\tau+d)\}^{1/2}\eta(\tau). \tag{2.4}$$

该定理的证明见 [Apo90] ，其中使用了 Iseki 证明的一个更一般的公式[Ise57]。在 [KT23], 中，我们采用一种更简单的方法来推导该公式。

2.2. **修正贝塞尔函数**。 设 ν 为一个复数。修正贝塞尔函数$I_\nu(x)$定义为

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\,\Gamma(\nu+j+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \tag{2.5}$$

$I_\nu(x)$有如下围道积分表示:

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\nu-1}\exp\left(t + \frac{x^2}{4t}\right)dt,$$

其中 c 为正数。为证明这一点，我们需要汉克尔公式。

令 K 为一条环绕负实轴的围道。如图 1所示，它由三部分组成： K_1、 K_2 和 K_3，其中 K_1 和 K_3 是 z-平面中沿负实轴切口的下边缘和上边缘，而 K_2 是一个以原点为中心、半径为$c < 2\pi$ 的正向圆周。

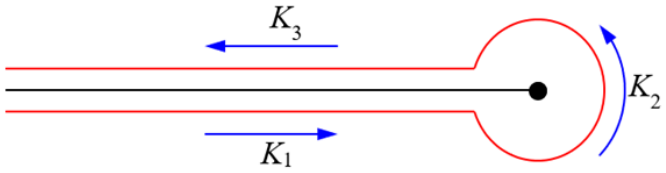


图1. 围道 K。

引理 2.3（汉克尔公式）。 当 $s \in \mathbb{C}$ 时，有

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_K z^{-s}e^z dz.$$

证明。 该积分对所有 $s \in \mathbb{C}$都定义了一个解析函数。只需证明 s 且 $s < 0$时的公式即可。随后由解析延拓可得结论。当 $s < 0$时，沿 K_2 的积分在 $c \to 0^+$时趋于0。在此极限下，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_K z^{-s}e^z dz &= -e^{-\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty (e^{-\pi i}t)^{-s}e^{-t}dt + e^{\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty (e^{\pi i}t)^{-s}e^{-t}dt \\ &= \frac{e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}}{2\pi i}\int_0^\infty t^{-s}e^{-t}dt \\ &= \frac{\sin \pi s}{\pi}\Gamma(1-s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}.\end{aligned}$$

□

利用此引理，我们可以证明修正贝塞尔函数$I_\nu(x)$的围道积分公式。

命题 2.4. 设 ν 是一个复数，且 c 是一个正数。若 x 为实数，则

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\nu-1}\exp\left(t + \frac{x^2}{4t}\right)dt. \tag{2.6}$$

证明。 被积函数

$$t^{-\nu-1}\exp\left(t + \frac{x^2}{4t}\right)$$

是在区域 $\mathbb{C} - \{t \,|\, \mathrm{Im}\ t = 0, \mathrm{Re}\ t \le 0\}$ 上关于 t 的解析函数。当 $|t| \to \infty$ 时，它在区域 $\mathrm{Re}\, t \le c$ 中呈指数级快速衰减。利用柯西留数定理，我们可以取极限 $c \to 0^+$，并将围道改为 K。也就是说，

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\nu-1}\exp\left(t + \frac{x^2}{4t}\right)dt \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{2\pi i}\int_K t^{-\nu-1}\exp\left(t + \frac{x^2}{4t}\right)dt.\end{aligned}$$

现在，利用指数函数的泰勒级数，我们有

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \frac{1}{2\pi i} \int_K t^{-\nu-j-1} e^t dt$$
$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \frac{1}{\Gamma(\nu+j+1)},$$

其中我们用到了引理 2.3。由式（2.5）可得

$$f(x) = I_\nu(x).$$

□

对于我们的应用，我们关注 $\nu = 3/2$的情形。

命题 2.5。 $I_{\frac{3}{2}}(x)$有一个显式公式：

$$I_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{d}{dx} \frac{\sinh x}{x}.$$

证明。 这是利用式（2.5）进行的直接计算。利用以下事实

$$\Gamma\left(j+\frac{5}{2}\right) = \frac{(2j+3)(2j+1)\ldots\times 1}{2^{j+2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2j+3)(2j+1)\ldots\times 1}{2^{j+2}},$$

我们有

$$I_{\frac{3}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\,\Gamma(j+\frac{5}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j+2}{(2j+3)!} x^{2j+1}$$
$$= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+3)!} x^{2j+2}$$
$$= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} x^{2j}$$
$$= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{d}{dx} \frac{\sinh x}{x}.$$

□

2.3. 法雷级数与福特圆。 设 n 为正整数。阶数为 n 的法雷分数集合，记作 F_n，是闭区间 $[0,1]$ 内分母不大于 n的所有既约分数，按大小递增排列而成的集合。

例 2.6. 集合 F_n、 $1 \leq n \leq 10$由下列各项给出:

F_1 : 0 1 , 1 1F_2 : 0 1 , 1 2 , 1 1F_3: 0 1 , 1 3 , 1 2 , 2 3 , 1 1F_4: 0 1 , 1 4 , 1 3 , 1 2 , 2 3 , 3 4 , 1 1F_5: 0 1 , 1 5 , 1 4 , 1 3 , 2 5 , 1 2 , 3 5 , 2 3 , 3 4 , 4 5 , 1 1F_6: 0 1 , 1 6 , 1 5 , 1 4 , 1 3 , 2 5 , 1 2 , 3 5 , 2 3 , 3 4 , 4 5 , 5 6 , 1 1F_7: 0 1 , 1 7 , 1 6 , 1 5 , 1 4 , 2 7 , 1 3 , 2 5 , 3 7 , 1 2 , 4 7 , 3 5 , 2 3 , 5 7 , 3 4 , 4 5 , 5 6 , 6 7 , 1 1F_8: 0 1 , 1 8 , 1 7 , 1 6 , 1 5 , 1 4 , 2 7 , 1 3 , 3 8 , 2 5 , 3 7 , 1 2 , 4 7 , 3 5 , 5 8 , 2 3 , 5 7 , 3 4 , 4 5 , 5 6 , 6 7 , 7 8 , 1 1F_9: 0 1 , 1 9 , 1 8 , 1 7 , 1 6 , 1 5 , 2 9 , 1 4 , 2 7 , 1 3 , 3 8 , 2 5 , 3 7 , 4 9 , 1 2 , 5 9 , 4 7 , 3 5 , 5 8 , 2 3 , 5 7 , 3 4 , 7 9 , 4 5 , 5 6 , 6 7 , 7 8 , 8 9 , 1 1F_{10}: 0 1 , 1 10 , 1 9 , 1 8 , 1 7 , 1 6 , 1 5 , 2 9 , 1 4 , 2 7 , 3 10 , 1 3 , 3 8 , 2 5 , 3 7 , 4 9 , 1 2 , 5 9 , 4 7 , 3 5 , 5 8 , 2 3 , 7 10 , 5 7 , 3 4 , 7 9 , 4 5 , 5 6 , 6 7 , 7 8 , 8 9 , 9 10, 1 1

– – – – – – – – – – – – – –

– –

– –

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

因此，

$$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{b(b+d)}>0,$$
$$\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{bc-ad}{d(b+d)}>0.$$

这就证明了该断言。 □

引理 2.8. 若 a, b, c, d, h 和 k 均为正整数，使得

$$\frac{a}{b}<\frac{h}{k}<\frac{c}{d} \tag{2.7}$$

且 $bc-ad=1$，则

$$k\geq b+d.$$

证明。 (2.7) 中的不等式意味着

$$bh-ak\geq 1,$$
$$ck-dh\geq 1.$$

因此，

$$\begin{aligned}k&=k(bc-ad)\\&=b(ck-dh)+d(bh-ak)\\&\geq b+d.\end{aligned}$$

□

由此，我们可以推导出以下定理。

定理 2.9. 设 a, b, c, d为正整数，使得

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d},$$

且 $bc-ad=1$。若

$$\max\{b,d\}\leq n\leq b+d-1,$$

则 a/b 和 c/d 是 F_n中的相邻项。

证明。 由于 最大值$\{b,d\}\leq n$， b 和 d 都小于或等于 n。因此， a/b 和 c/d 属于 F_n。根据引理 2.8，没有分数 h/k 满足 $k\leq b+d-1$ 的情形

$$\frac{a}{b}<\frac{h}{k}<\frac{c}{d}.$$

由于 F_n 仅包含分母不超过 n 和 $n\leq b+d-1$ 的既约分数，这表明 a/b 和 c/d 是 F_n 中的相邻项。□

现在我们可以给出从 F_{n-1} 构造 F_n 的精确算法。首先注意，对于这两项

$$\frac{a}{b}=\frac{0}{1} \quad \text{and} \quad \frac{c}{d}=\frac{1}{1}$$

在 $F_1, a=0, b=c=d=1$ 中，因此

$$bc-ad=1.$$

现在，为了构造 F_2，我们插入项

$$\frac{h}{k}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{1}{2}$$

在它们之间。容易验证，若 $bc-ad=1, h=a+c$ 和 $k=b+d$，则

$$bh-ak=1 \quad \text{and} \quad ck-dh=1.$$

一般而言，假设 F_{n-1} 已经构造完成，并且对于 F_{n-1}, $bc-ad=1$ 中任意两个相邻项 a/b 和c/d。为了构造 F_n，我们需要将 $\varphi(n)$ 个分数 h/n （满足$1 \le h \le n$ 且 $(h, n)=1$ ）插入 F_{n-1} 中。为此，我们在 F_{n-1} 中寻找满足 $a/b<c/d$ 和 $b+d=n$ 的相邻既约分数对 a/b 和 c/d。令 $h=a+c$。由于$0 \le a \le b$ 且 $0 \le c \le d$，我们有

$$0 \le h=a+c \le b+d.$$

引理2.7 蕴含

$$\frac{a}{b}<\frac{h}{n}<\frac{c}{d}.$$

根据归纳假设， $bc-ad=1$。如我们所证明的，这意味着

$$bh-an=1 \quad \text{and} \quad cn-dh=1.$$

还需证明，我们可以找到恰好 $\varphi(n)$ 对相邻项 a/b 和 c/d，使得它们满足 $b+d=n$，且属于 F_{n-1}。

对于 $n \ge 2$，恰有 $\varphi(n)$ 个正整数 b，满足 $1 \le b \le n$ 和 $(b, n)=1$。事实上，我们还必须有 $b \le n-1$。对于这些整数中的每一个 b， $d=n-b$ 也与n 互素，且 $1 \le d \le n-1$。由于 $b+d=n$， b 和 d 也必须互素。存在 s_0和 t_0，使得

$$bs_0-dt_0=1.$$

任何满足 $bs-dt=1$ 的整数对 (s, t) 都可以写成

$$s=s_0+du, \quad t=t_0+bu$$

对于某个整数 u。令 u_0 为满足 $c=s_0+du_0 \ge 1$ 的最小整数。于是 $c \le d$。如果 $a=t_0+bu_0$，那么 $bc-ad=1$。由于

$$ad=bc-1<bc \le bd,$$

我们发现 $a<b$。由于 $b \ge 1$， $c \ge 1$，我们有 $ad \ge 0$，因此 $a \ge 0$。换言之，我们已经证明，对于每个满足 $1 \le b \le n$ 且满足 $(b, n)=1$ 的 $\varphi(n)$ 个正整数 b，都存在唯一的整数 a， c 和 d，使得

$$0 \le \frac{a}{b}<\frac{c}{d} \le 1$$

并且 $bc - ad = 1$。这表明，我们可以在 F_{n-1} 中恰好找到 $\varphi(n)$ 个连续的数对，以便插入满足 $1 \leq h \leq n$ 且满足 $(h,\ n) = 1$ 的分数 h/n。

给定一个既约分数 h/k，Ford圆 $C(h,\ k)$（图 2）是复平面中圆心位于

$$c_{h,k} = \frac{h}{k} + \frac{i}{2k^2}$$

且半径为

$$r_{h,k} = \frac{1}{2k^2}.$$

显然，每个福特圆 $C(h,\ k)$ 都与 x 轴相切于点 $(h/k,\ 0)$。

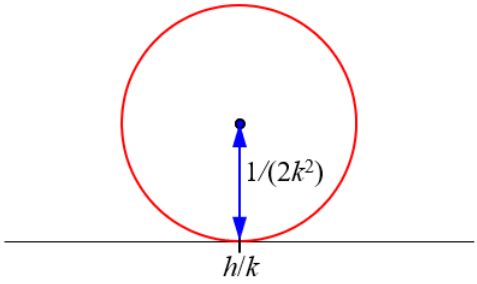


图 2. Ford圆 $C(h,\ k)$。

定理 2.10. 两个不同的福特圆 $C(a,\ b)$ 和 $C(c,\ d)$ 要么彼此相切，要么互不相交。当且仅当 $bc - ad = \pm 1$ 时，它们才相切。特别地，若 a/b 和 c/d 是两个相邻的法雷分数，则两个福特圆 $C(a,\ b)$ 和 $C(c,\ d)$ 彼此相切。

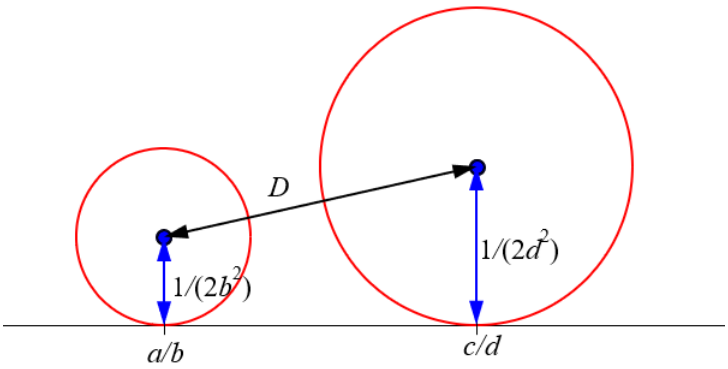


图 3. 圆 $C(a, b)$ 和 $C(c, d)$。

证明。 设 D 为圆 $C(a, b)$ 和 $C(c, d)$ 的圆心之间的距离。那么

$$D^2 = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2.$$

两个圆的半径之和为

$$S = \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}.$$

注意，两个圆不相交当且仅当 $D > S$，两个圆相切当且仅当 $D = S$。通过直接计算可得

$$D^2 - S^2 = \frac{(bc - ad)^2 - 1}{b^2 d^2}.$$

The 这两个圆彼此不同，因此 $bc - ad \neq 0$。所以，$(bc - ad)^2 \geq 1$。这表明 t

$$D^2 \geq S^2$$

因此 $D \geq S$。此外，$D = S$ 当且仅当 $(bc-ad)^2 = 1$，当且仅当 $bc-ad = \pm 1$。 □

现在我们研究两个彼此相切的福特圆的切点 er.

定理2.11。设

$$\frac{h_1}{k_1} < \frac{h}{k} < \frac{h_2}{k_2}$$

是三个连续的法雷分数。$C(h,\ k)$与 $C(h_1,\ k_1)$以及$C(h_2,\ k_2)$的切点为

$$\alpha_1(h,k) = \frac{h}{k} - \frac{k_1}{k(k^2+k_1^2)} + \frac{i}{k^2+k_1^2}, \tag{2.8a}$$

$$\alpha_2(h,k) = \frac{h}{k} + \frac{k_2}{k(k^2+k_2^2)} + \frac{i}{k^2+k_2^2}. \tag{2.8b}$$

证明。 注意，相切条件意味着

$$hk_1 - kh_1 = 1, \quad kh_2 - hk_2 = 1.$$

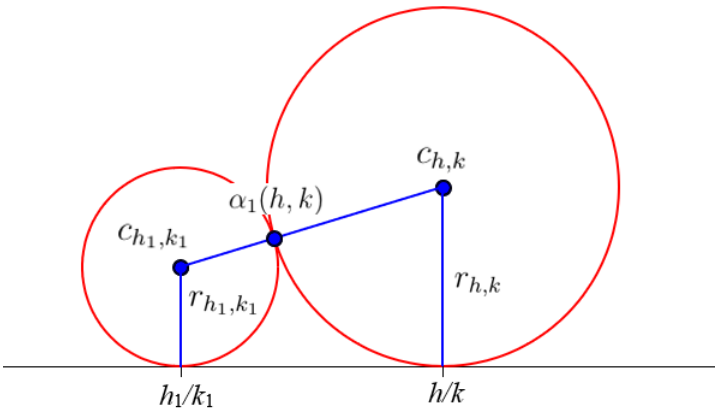


图4. 圆 $C(a,b)$ 和 $C(c,d)$。

如图 4所示，$C(h_1,k_1)$ 与 $C(h,k)$ 的切点 $\alpha_1(h,k)$ 是连接 c_{h_1,k_1} 和 $c_{h,k}$ 的线段上的唯一一点，满足

$$\frac{c_{h,k} - \alpha_1(h,k)}{c_{h,k} - c_{h_1,k_1}} = \frac{r_{h,k}}{r_{h_1,k_1} + r_{h,k}}.$$

直接计算可证明（2.8a）。同样， $\alpha_2(h,k)$ 是连接 $c_{h,k}$ 与 c_{h_2,k_2} 的线段上的唯一一点，满足

$$\frac{\alpha_2(h,k)-c_{h,k}}{c_{h_2,k_2}-c_{h,k}}=\frac{r_{h,k}}{r_{h_2,k_2}+r_{h,k}}.$$

这就得到（2.8b）。 □

对每个正整数 N，我们按如下方式构造一条路径 $P(N)$，连接复平面中的点 i和 $1+i$。令

$$0,\frac{h_1}{k_1},\ldots,\frac{h_{m_N-1}}{k_{m_N-1}},1$$

为 F_N 中按递增顺序排列的法雷分数。令

$$\frac{h_0}{k_0}=0 \quad \text{and} \quad \frac{h_{m_N}}{k_{m_N}}=1.$$

对每个 $1\le j\le m_N-1$，令 A_j为 $C(h_{j-1},k_{j-1})$ 与 $C(h_j,k_j)$ 的切点；并令 B_j 为 $C(h_j,k_j)$ 与 $C(h_{j+1},k_{j+1})$ 的切点。则 $B_j=A_{j+1}$ 对$1\le j\le m_N-2$成立。 A_j 和 B_j 将圆 $C(h_j,k_j)$ 分成两段弧，即上弧和下弧。令 U_j 为上弧。最后，令 U_0 为圆 $C(h_0,k_0)$ 上连接点 i 与位于右半平面 $\mathrm{Re}\,z\ge 0$的点 A_1 的弧；令 U_{m_N} 为圆$C(h_{m_N},k_{m_N})$ 上连接 B_{m_N-1}与位于左半平面 $\mathrm{Re}\ z\le 1$的点 $1+i$的弧。路径 $P(N)$ 定义如下

$$P(N)=\bigcup_{j=0}^{m_N}U_j, \tag{2.9}$$

沿着从点 i 到点 $1+i$ 的方向。

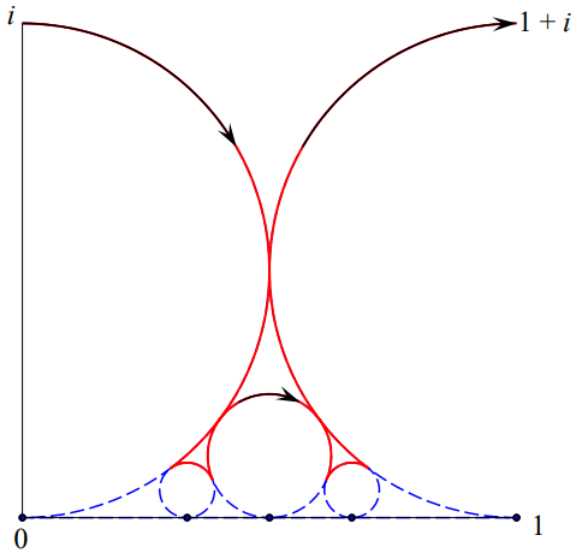


图 5。法雷级数 F_3 的路径 $P(3)$：0 1，1 3，1 2，2 3，1 1。

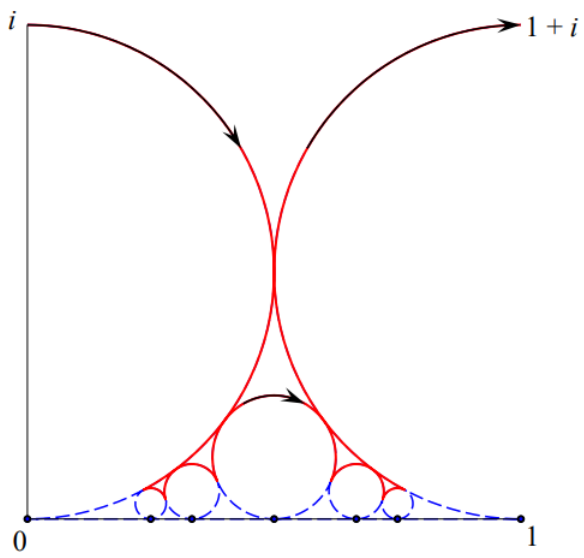


图 6. 法雷级数 F_4 的路径 $P(4)$：0 1，1 4，1 3，$\underline{1\ 2}$，$\underline{2\ 3}$，$\underline{3\ 4}$，$\underline{1\ 1}$。

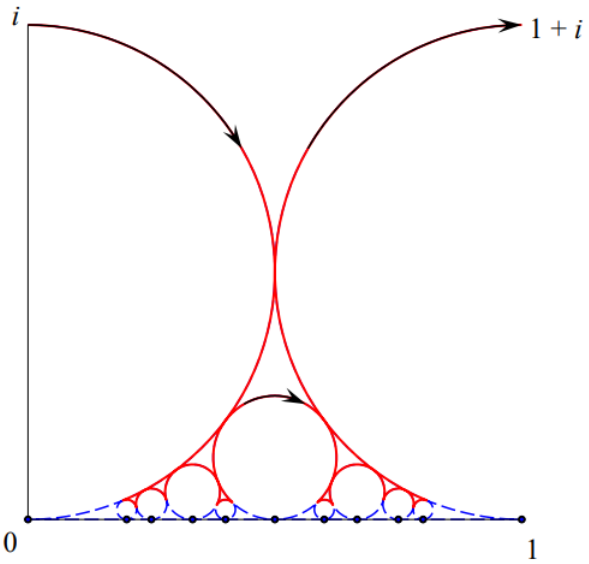


图7。法雷级数 F_5 的路径 $P(5)$：0 1，1 5，1 4，$\underline{1\ 3}$，$\underline{2\ 5}$，$\underline{1\ 2}$，$\underline{3\ 5}$，$\underline{2\ 3}$，$\underline{3\ 4}$，4 5，$\underline{1\ 1}$。

让我们研究 $P(N)$ 在映射 $z = e^{2\pi i\tau}$ 下的像。

引理 2.12。设

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$$

为复平面上的单位圆盘，并设

$$\mathcal{S} = \{\tau \in \mathbb{C} \,|\, 0 \le \operatorname{Re}\tau \le 1, \operatorname{Im}\tau > 0\}$$

是上半平面中的一条无限垂直条带。该变换

$$z = e^{2\pi i\tau}$$

是一个保角映射，它将 τ 平面中的垂直条带 $\mathcal{S}$ 映射到 z 平面中挖去原点的单位圆盘 $\mathbb{D} \setminus \{0\}$。该映射在 $\mathcal{S}$ 的内部是一一映射。在此映射下，P（N）的像是一条包围原点的简单闭曲线 $\mathcal{C}$。

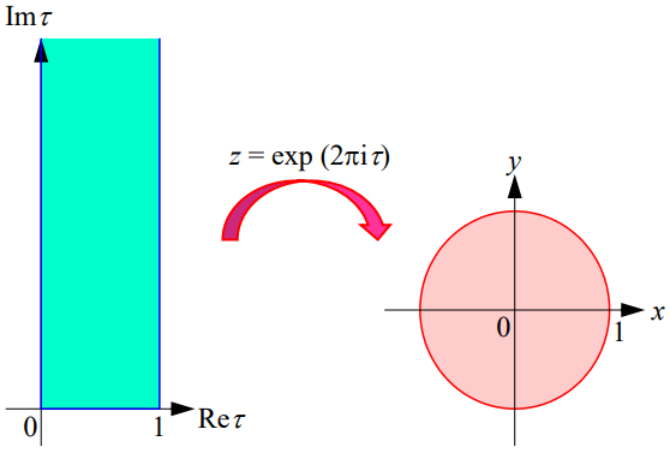


图8. 映射 $z = e^{2\pi i\tau}$。

证明。 映射

$$z = e^{2\pi i\tau}$$

显然是解析的，因此它是一个保角映射。设 $z = x + iy = re^{i\theta}$ 和 $\tau = \sigma + i\lambda$。于是我们得到

$$re^{i\theta} = e^{2\pi i\sigma}e^{-2\pi\lambda}.$$

当 $\lambda > 0$时，我们得到

$$0 < e^{-2\pi\lambda} < 1.$$

另一方面，当 σ 从 0 变化到 1 时， $\theta = 2\pi\sigma$ 从 0 变化到 2π。因此，我们看到该映射将 $\mathcal{S}$ 映射到 $\mathbb{D} \setminus \{0\}$，并且除两条竖直线 $\sigma = 0$ 和 $\sigma = 1$ 外，它是一一映射。

$\mathcal{C}$是 $P(N)$在映射 $z = e^{2\pi i\tau}$下的像。由于 $P(N)$的起点和终点分别为 i 和 $1 + i$，而它们在单位圆盘 $\mathbb{D}$中映射到同一点，因此 $\mathcal{C}$ 是一条闭曲线。除起点和终点外， $P(N)$的其余部分都位于 $\mathcal{S}$的内部。由于$P(N)$是一条简单曲线，且映射 $z = e^{2\pi i\tau}$在 $\mathcal{S}$的内部是一一映射，因此 $\mathcal{C}$是一条简单闭曲线。□

为了推导拉德马赫公式，我们从生成函数 $F(z) = F(e^{2\pi i\tau})$中提取系数 $p(n)$。作为 τ的函数， $F(e^{2\pi i\tau})$模1周期。因此，我们可以将路径 $P(N)$按模1周期延拓。

F_N 中的法雷分数为

$$\frac{h_0}{k_0}, \frac{h_1}{k_1}, \ldots, \frac{h_{m_N-1}}{k_{m_N}-1}, \frac{h_{m_N}}{k_{m_N}},$$

其中

$$\frac{h_0}{k_0}=\frac{0}{1},\quad \frac{h_1}{k_1}=\frac{1}{N},\quad \frac{h_{m_N-1}}{k_{m_N}-1}=\frac{N-1}{N},\quad \frac{h_{m_N}}{k_{m_N}}=\frac{1}{1}.$$

定义

$$\frac{h_{m_N+1}}{k_{m_N}+1}=\frac{h_1}{k_1}+1=\frac{N+1}{N}.$$

根据（2.8），U_0 是一段连接点 i 与

$$u_1=\frac{N+i}{N^2+1};$$

并且U_{m_N}是一段连接点

$$u_2=\frac{N^2-N+1+i}{N^2+1}$$

至 $1+i$。将 U_0 平移 1 个单位，并与U_{m_N}合并，我们得到圆$|z-1-i|=1/2$上一段连接 u_2 与 u_1+1的弧。

今后，我们将路径 $P(N)$ 视为由 m_N段弧 U_1、……、U_{m_N}组成的路径，这些弧对应于满足 $1\le j\le m_N$的分数 h_j/k_j。

$$P(N)=\bigcup_{j=1}^{m_N}\widetilde{U}_j, \tag{2.10}$$

对于 $1\le j\le m_N-1, U_j=U_j$；而 U_{m_N} 是我们刚才描述的 U_{m_N} 和 U_0+1 的并集。若取 h_{m_N-1}/k_{m_N-1}, h_{m_N}/k_{m_N} 和 h_{m_N+1}/k_{m_N+1} 为连续的 Farey 分数，则 U_{m_N} 是圆 $C(h_{m_N},k_{m_N})$ 的上弧，它连接点 $\alpha_1(h_{m_N},k_{m_N})$ 与由 (2.8) 给出的 $\alpha_2(h_{m_N},k_{m_N})$。

在结束本节之前，我们进一步研究 Ford 圆 $C(h_j,\ k_j)$ 中的弧 U_j 在分式线性变换下的性质：

$$w=-ik^2\left(\tau-\frac{h}{k}\right).$$

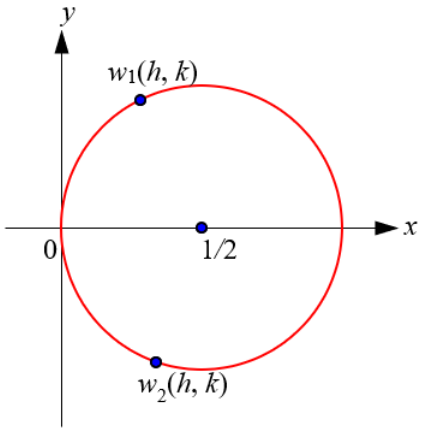
定理 2.13. 映射

$$w=-ik^2\left(\tau-\frac{h}{k}\right) \tag{2.11}$$

将 τ 平面上的 Ford 圆 $C(h,k)$ 映射到 w 平面上的圆 C。C 的圆心为点 $w=1/2$，半径为 $1/2$。若 h_1/k_1、h/k、h_2/k_2 是 F_N 中三个连续的法雷分数，则 $\alpha_1(h,k)$ 是 $C(h_1,k_1)$ 与 $C(h,k)$ 的切点，$\alpha_2(h,k)$ 是 $C(h,k)$ 与 $C(h_2,k_2)$ 的切点。$\alpha_1(h,k)$ 和 $\alpha_2(h,k)$ 经映射 (2.11) 后的像分别为 $w_1(h,k)$ 和 $w_2(h,k)$，其表达式如下

$$\begin{aligned} w_1(h,k)&=\frac{k^2}{k^2+k_1^2}+i\frac{kk_1}{k^2+k_1^2},\\ w_2(h,k)&=\frac{k^2}{k^2+k_2^2}-i\frac{kk_2}{k^2+k_2^2}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

˜$C(h,k)$ 上连接 $\alpha_1(h,k)$ 与 $\alpha_2(h,k)$ 的上弧，被映射为 C 上连接 $w_1(h,k)$ 与 $w_2(h,k)$ 的弧，且该弧不与虚轴相交。



˜图 9。 w平面中的圆 C，它是变换 $w = -ik^2\left(\tau - \dfrac{h}{k}\right)$ 下 τ平面中 $C(h,\ k)$ 的像。

证明。映射 (2.11) 是一个分式线性变换，因此它将圆映射为圆。定理中的断言很容易验证。特别地，由于该映射将实轴映射到虚轴，连接 $\alpha_1(h,k)$ 和 $\alpha_2(h,k)$ 的 $C(h,k)$ 上弧的像，是 C 上连接 $w_1(h,k)$ 和 $w_2(h,k)$ 且远离虚轴的那段弧。□

˜命题 2.14。 </style}设 C 为复平面上的圆，其圆心为 $1/2$，半径为 $1/2$。˜对于任意 $z \in C$，$\operatorname{Re} z \geq 0$ 和

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1.$$

˜证明。 若 $z = x + iy$ 是 C上的一个点，

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

这意味着

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

因此

$$x \geq 0.$$

另一方面， z 可以写成

$$z = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})$$

对于某个 $\theta \in [0, 2\pi]$。由此可得

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\} = \frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 1.$$

□

定理 2.15。 设 h_1/k_1、 h/k、 h_2/k_2 是 F_N中的三个连续法雷分数，并设$w_1(h,k)$ 和 $w_2(h,k)$ 是定理 2.12中的（2.13）所给出的点。这些点的模为

$$|w_1(h,k)| = \frac{k}{\sqrt{k^2+k_1^2}}, \qquad |w_2(h,k)| = \frac{k}{\sqrt{k^2+k_2^2}}. \tag{2.13}$$

对于位于连接 $w_1(h,k)$ 与 $w_2(h,k)$ 的弦上的任意点 w，

$$|w| \le \frac{\sqrt{2}k}{N+1}.$$

因此，该弦的长度不大于 $2\sqrt{2}k/(N+1)$。另一方面， w 的实部有下界 $k^2/(2N^2)$，因此，

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{w}\right\} > \frac{1}{4}.$$

证明。 式（2.13）很容易验证。为证明第二个断言，注意如果 $k+k_1 \le N$，则 $(h+h_1)/(k+k_1)$ 是 F_n 中的一个 Farey 分数，并且它位于 h_1/k_1 与 h/k之间。这与 h_1/k_1和 h/k在 F_N中相邻矛盾。因此，必有 $k+k_1 \ge N+1$。同理， $k+k_2 \ge N+1$。因此，

$$k^2+k_1^2 \ge \frac{(k+k_1)^2}{2} \ge \frac{(N+1)^2}{2}.$$

同理，

$$k^2+k_2^2 \ge \frac{(N+1)^2}{2}.$$

如果 w 位于连接 $w_1(h,k)$ 与 $w_2(h,k)$ 的弦上，则存在区间 $[0,1]$ 中的实数 t，使得

$$w = tw_1(h,k) + (1-t)w_2(h,k).$$

由此可得

$$\begin{aligned} |w| &\le t|w_1(h,k)| + (1-t)|w_2(h,k)| \\ &= t\frac{k}{\sqrt{k^2+k_1^2}} + (1-t)\frac{k}{\sqrt{k^2+k_2^2}} \\ &\le \frac{\sqrt{2}tk}{N+1} + \frac{\sqrt{2}(1-t)k}{N+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}k}{N+1}. \end{aligned}$$

根据三角不等式，弦的长度不大于 $|w_1|+|w_2|$，因此也不大于 $2\sqrt{2}k/(N+1)$。

现在，对于关于实部的断言，我们利用这样一个事实： k， k_1， k_2 都不大于N。于是

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} w &= t\operatorname{Re} w_1(h,k) + (1-t)\operatorname{Re} w_2(h,k)\\ &= \frac{tk^2}{k^2+k_1^2} + \frac{(1-t)k^2}{k^2+k_2^2}\\ &\geq t\frac{k^2}{2N^2} + (1-t)\frac{k^2}{2N^2}\\ &= \frac{k^2}{2N^2}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{w}\right\} = \frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2} > \frac{k^2}{2N^2}\times\frac{N^2}{2k^2} = \frac{1}{4}.$$

□

最后，我们有以下初等命题。

命题 2.16. 设 C 为一个圆，其圆心为 $1/2$，半径为 $1/2$。给定圆 C上的一点 w，设 $\mathcal{W}$ 为连接点 0 与点 w的小弧。那么， $\mathcal{W}$的弧长 $\ell(\mathcal{W})$ 的上界为 $\pi|w|/2$. 对于 $\mathcal{W}$上的任意 z， $|z| \leq |w|$。

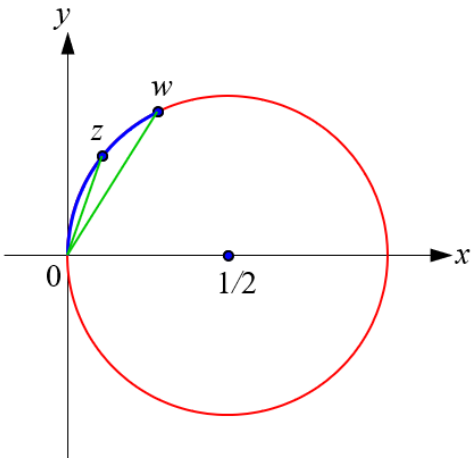


图 10。圆 C。

证明。 </style} C 上的任意点 z 都可以写成

$$z = \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\theta}\right) \tag{2.14}$$

对于某个 $\theta \in [0, 2\pi]$。设

$$w = \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\theta_w}\right).$$

根据 C的对称性，我们可以假设 $\theta_w \in [0, \pi)$ 。然后

$$|w| = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\cos\theta_w)^2 + \sin^2\theta_w} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos\theta_w} = \cos\frac{\theta_w}{2}.$$

$\mathcal{W}$ 的弧长为

$$\ell(\mathcal{W}) = \frac{1}{2}\alpha,$$

其中 $\alpha = \pi - \theta_w$ 是 $\mathcal{W}$的圆心角。容易证明，若 $0 < t \leq \pi/2$,

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1.$$

因此,

$$\frac{\ell(\mathcal{W})}{|w|} = \frac{\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}} \leq \frac{\pi}{2}.$$

这证明了第一个断言。

Now, 如果 z 是 $\mathcal{W}$上的一点，那么 z 由（2.14）给出，其中 $\theta \in [\theta_w, \pi]$。由此可得

$$|z| = \cos\frac{\theta}{2} \leq \cos\frac{\theta_w}{2} \leq |w|.$$

□

3. 拉德马赫收敛级数

本节将证明拉德马赫定理 1.1，并在此重述该定理。

定理 3.1。 [拉德马赫公式 [Rad37]]

若 $n \geq 1$，分拆函数 $p(n)$ 可表示为收敛级数

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(n), \tag{3.1}$$

其中

$$R_k(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left\{\dfrac{\pi}{k}\sqrt{\dfrac{2}{3}\left(n-\dfrac{1}{24}\right)}\right\}}{\sqrt{n-\dfrac{1}{24}}}\right),$$

$$A_k(n) = \sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}} \exp\left(\pi i s(h,k) - \frac{2\pi i n h}{k}\right),$$

且 $s(h,\ k)$ 是由下式定义的戴德金和

$$s(h,k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k} - \left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor - \frac{1}{2}\right). \tag{3.2}$$

我们将证明分解为几个引理。

引理 3.2。设

$$F(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^m}, \tag{3.3}$$

并令 $\mathcal{C}$ 为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中围绕点$z=0$的任意正向简单闭曲线。给定一个正整数 n,

$$p(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\frac{F(z)}{z^{n+1}}dz.$$

证明。(3.3) 中的无穷乘积在 $|z|<1$ 时绝对收敛。因此， $F(z)$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$上的解析函数。由于 $F(z)$ 的泰勒级数为

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)z^n.$$

由柯西积分公式,

$$p(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\frac{F(z)}{z^{n+1}}dz.$$

□

正如我们在引理 3.2 的证明中提到的，函数 $F(z)$ 在单位圆盘$\mathbb{D}$内解析。由乘积展开可知，它在点 $e^{2\pi ih/k}$处有奇点，其中 h 和k 是正整数。在下面的定理中，我们给出 $F(z)$ 在奇点 $e^{2\pi ih/k}$附近的变换公式。

定理 3.3。设

$$F(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^m}, \tag{3.4}$$

并令 h 和 k 为整数，使得 $1\leq h\leq k$ 且 $(h,\ k)=1$。令 H 为不大于 k 的正整数，使得 $hH\equiv -1$ 模 k。最后，令 z 为满足 $\mathrm{Re}\,(z)>0$的复数。定义

$$w=\exp\left(\frac{2\pi ih}{k}-\frac{2\pi z}{k^2}\right),\qquad w'=\exp\left(\frac{2\pi iH}{k}-\frac{2\pi}{z}\right).$$

Then

$$F(w)=e^{\pi is(h,k)}\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\pi}{12z}-\frac{\pi z}{12k^2}\right)F(w'), \tag{3.5}$$

其中 $s(h,\ k)$ 由式（3.2）给出。

当 $|z|$ 较小时， w 是一个靠近点 $e^{2\pi ih/k}$的点，而 w' 是一个靠近原点的点。由于 $F(0)=1$，该定理表明，当 w 靠近奇点 $e^{2\pi ih/k}$时，

$$F(w)\sim e^{\pi is(h,k)}\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\pi}{12z}\right).$$

证明。回顾一下，$F(e^{2\pi i\tau}) = e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\eta(\tau)^{-1}$，其中 $\eta(\tau)$ 是戴德金 eta 函数（2.1）。由此可得

$$F(w) = \frac{e^{\frac{\pi i\tau}{12}}}{\eta(\tau)}, \qquad \text{where } \tau = \frac{h}{k} + i\frac{z}{k^2}.$$

由于

$$hH = -1 \mod k,$$

存在一个整数 K，使得

$$kK - hH = 1.$$

这意味着

$$\begin{bmatrix} H & -K \\ k & -h \end{bmatrix}$$

是模群 $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 的一个元素。注意，

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{H\tau - K}{k\tau - h} \\ &= \frac{\frac{Hh - Kk}{k} + i\frac{Hz}{k^2}}{\frac{iz}{k}} \\ &= \frac{H}{k} + \frac{i}{z}. \end{aligned}$$

因此，$w' = e^{2\pi i\tau'}$。戴德金 eta 函数的变换公式定理 2.2指出

$$\eta(\tau)^{-1} = \eta(\tau')^{-1}\{-i(k\tau - h)\}^{1/2} \exp\left\{\pi i\left(\frac{H-h}{12k} + s(h,k)\right)\right\}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} F(w) &= e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\{-i(k\tau - h)\}^{1/2} \exp\left\{\pi i\left(\frac{H-h}{12k} + s(h,k)\right)\right\} e^{-\frac{\pi i\tau'}{12}} F(w') \\ &= \left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\pi i\left(\frac{H-h}{12k} + s(h,k) + \frac{h-H}{12k} + \frac{iz}{12k^2} - \frac{i}{12z}\right)\right\} F(w') \\ &= e^{\pi i s(h,k)}\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{12z} - \frac{\pi z}{12k^2}\right) F(w'). \end{aligned}$$

□

定理 *3.1* 的证明。固定一个正整数 N。令 $\mathcal{C}$为路径 $P(N)$在映射 $z = e^{2\pi i\tau}$.下的像，其中该路径由（2.10）定义。

根据引理3.2,

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz.$$

作变量替换 $z = e^{2\pi i\tau}$，得

$$\begin{aligned} p(n) &= \int_{P(N)} F(e^{2\pi i\tau})e^{-2\pi in\tau}d\tau \\ &= \sum_{j=1}^{m_N} \int_{\widetilde{U}_j} F(e^{2\pi i\tau})e^{-2\pi in\tau}d\tau. \end{aligned}$$

~每个 U_j 都是圆 $C(h_j, k_j)$ 的上弧，其起点为 $\alpha_1(h_j, k_j)$，终点为$\alpha_2(h_j, k_j)$，其中

$$\begin{aligned} \alpha_1(h_j, k_j) &= \frac{h_j}{k_j} - \frac{k_{j-1}}{k_j(k_j^2 + k_{j-1}^2)} + \frac{i}{k^2 + k_{j-1}^2}, \\ \alpha_2(h_j, k_j) &= \frac{h_j}{k_j} + \frac{k_{j+1}}{k(k^2 + k_{j+1}^2)} + \frac{i}{k^2 + k_{j+1}^2}. \end{aligned}$$

~对于沿弧 U_j的积分，我们作变量替换

$$z = -ik_j^2\left(\tau - \frac{h_j}{k_j}\right)$$

从而

$$\tau = \frac{h_j}{k_j} + i\frac{z}{k_j^2}.$$

Then

$$\int_{\widetilde{U}_j} F(e^{2\pi i\tau})e^{-2\pi in\tau}d\tau = \frac{i}{k^2}\int_{V_j} F\left(\exp\left(\frac{2\pi ih_j}{k_j} - \frac{2\pi z}{k_j^2}\right)\right) e^{-\frac{2\pi inh_j}{k_j}} e^{\frac{2\pi nz}{k_j^2}} dz. \tag{3.6}$$

~这里， V_j 是圆 C 的一段弧，其圆心为 $1/2$ ，半径为 $1/2$；该弧不与虚轴相交，并连接点 $w_1(h_j, k_j)$ 和 $w_2(h_j, k_j)$，由下式给出

$$\begin{aligned} w_1(h_j, k_j) &= \frac{k_j^2}{k_j^2 + k_{j-1}^2} + i\frac{k_jk_{j-1}}{k_j^2 + k_{j-1}^2}, \\ w_2(h_j, k_j) &= \frac{k_j^2}{k_j^2 + k_{j+1}^2} - i\frac{k_jk_{j+1}}{k_j^2 + k_{j+1}^2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

现在我们使用定理 3.3给出的变换公式,

$$F\left(\exp\left(\frac{2\pi ih}{k} - \frac{2\pi z}{k^2}\right)\right) = e^{\pi is(h,k)}\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{12z} - \frac{\pi z}{12k^2}\right) F\left(\exp\left(\frac{2\pi iH}{k} - \frac{2\pi}{z}\right)\right), \tag{3.8}$$

其中， H 是一个不大于 k 且满足 $hH \equiv -1$ 模 k的正整数。

Let

$$G(z) = F(z) - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} p(m)z^m. \tag{3.9}$$

于是，3.6）和（3.8）可推出

$$\int_{\widetilde{U}_j} F(e^{2\pi i\tau})e^{-2\pi in\tau}d\tau = \mathcal{A}_{h_j,k_j} + \mathcal{B}_{h_j,k_j},$$

其中

$$\mathcal{A}_{h,k} = \frac{i}{k^{5/2}} \int_V e^{\pi i s(h,k) - \frac{2\pi i n h}{k}} z^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{12z} + \frac{2\pi n z}{k^2} - \frac{\pi z}{12k^2}\right) dz,$$

$$\mathcal{B}_{h,k} = \frac{i}{k^{5/2}} \int_V e^{\pi i s(h,k) - \frac{2\pi i n h}{k}} z^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{12z} + \frac{2\pi n z}{k^2} - \frac{\pi z}{12k^2}\right) G\left(\exp\left(\frac{2\pi i H}{k} - \frac{2\pi}{z}\right)\right) dz.$$

当 j 从 1 递增到 m_N 时，$(h,\ k)$ 遍历所有满足 $1 \le h \le k \le N$且 $(h,\ k) = 1$ 的正整数对。因此，

$$p(n) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{1 \le h \le k \\ (h,k)=1}} \left(\mathcal{A}_{h,k} + \mathcal{B}_{h,k}\right).$$

我们先估计 $\mathcal{B}_{h,\ k}$。给定 h/k 属于 F_N，令 W 为连接点 $w_1(h,\ k)$ 与点 $w_2(h,\ k)$ 的弦。那么 $V - W$ 是一条不围绕原点的闭曲线。由于被积函数

$$\mathcal{G}(z,h,k,n) = \frac{i}{k^{5/2}} e^{\pi i s(h,k) - \frac{2\pi i n h}{k}} z^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{12z} + \frac{2\pi n z}{k^2} - \frac{\pi z}{12k^2}\right) G\left(\exp\left(\frac{2\pi i H}{k} - \frac{2\pi}{z}\right)\right) \tag{3.10}$$

在包含闭曲线 $V_j - W_j$ 所围区域的开集上解析，根据留数定理，我们有

$$\oint_{V-W} \mathcal{G}(z,h,k,n) dz = 0.$$

因此，

$$\mathcal{B}_{h,k} = \int_W \mathcal{G}(z,h,k,n) dz.$$

对于任意 $z \in W$，定理 2.15 指出

$$|z| \le \frac{\sqrt{2}k}{N+1}, \tag{3.11}$$

且 W, $\ell(W)$ 的弧长不大于 $2\sqrt{2k}/(N+1)$。如果我们能够找到一个 M，使得 at

$$|\mathcal{G}(z,h,k,n)| \le M \qquad \text{for all } z \in W, \tag{3.12}$$

then

$$|\mathcal{B}_{h,k}| \le M\ell(W) \le \frac{2\sqrt{2}k}{N+1} M.$$

现在来求一个 M 使其满足（3.12）。根据定义（3.10），

$$|\mathcal{G}(z,h,k,n)| = \frac{1}{k^{5/2}} |z|^{\frac{1}{2}} \left|\exp\left(\frac{\pi}{12z} + \frac{2\pi n z}{k} - \frac{\pi z}{12k^2}\right)\right| \left|G\left(\exp\left(\frac{2\pi i H}{k} - \frac{2\pi}{z}\right)\right)\right|.$$

对 $|z|$ 的估计由（3.11）给出。现在，

$$\begin{aligned}&\left|\exp\left(\frac{\pi}{12z}+\frac{2\pi nz}{k}-\frac{\pi z}{12k^2}\right)\right|\\&=\exp\left(\mathrm{Re}\left\{\frac{\pi}{12z}+\frac{2\pi nz}{k}-\frac{\pi z}{12k^2}\right\}\right)\\&=\exp\left(\frac{\pi}{12}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\}\right)\exp\left(\mathrm{Re}\left\{\frac{2\pi nz}{k}\right\}\right)\exp\left(-\mathrm{Re}\left\{\frac{\pi z}{12k^2}\right\}\right).\end{aligned}$$

对于 $z\in W$，命题2.14 蕴含 $\mathrm{Re}\ z>0$。因此，

$$\exp\left(-\mathrm{Re}\left\{\frac{\pi z}{12k^2}\right\}\right)\leq 1.$$

另一方面，

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{2\pi nz}{k}\right\}\leq\frac{2\pi n}{k}|z|\leq\frac{2\pi n}{k}\leq 2\pi n.$$

因此，

$$\exp\left(\mathrm{Re}\left\{\frac{2\pi nz}{k}\right\}\right)\leq\exp\left(2\pi n\right).$$

接下来，我们估计

$$\left|G\left(\exp\left(\frac{2\pi iH}{k}-\frac{2\pi}{z}\right)\right)\right|.$$

根据定义（3.9）和三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}\left|G\left(\exp\left(\frac{2\pi iH}{k}-\frac{2\pi}{z}\right)\right)\right|&\leq\sum_{m=1}^{\infty}p(m)\left|\exp\left(\frac{2\pi imH}{k}-\frac{2\pi m}{z}\right)\right|\\&=\sum_{m=1}^{\infty}p(m)\exp\left(-2\pi m\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\}\right).\end{aligned}$$

因此，

$$|\mathcal{G}(z,h,k,n)|\leq\frac{2^{1/4}}{k^2\sqrt{N+1}}\exp\left(2\pi n\right)\sum_{m=1}^{\infty}p(m)\exp\left(-2\pi\left[m-\frac{1}{24}\right]\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\}\right).$$

对于点 $z\in W$，定理 2.15 指出

$$x=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\}\geq\frac{1}{4}.$$

利用以下事实：当 $m_1<m_2$ 时，$0<p(m_1)<p(m_2)$，可得

$$\begin{aligned}0&\leq\sum_{m=1}^{\infty}p(m)\exp\left(-2\pi\left[m-\frac{1}{24}\right]\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\}\right)\\&=\sum_{m=1}^{\infty}p(24m-1)\exp\left(-\frac{\pi x}{12}(24m-1)\right)\\&\leq\sum_{k=1}^{\infty}p(k)\exp\left(-\frac{\pi kx}{12}\right)\\&=F\left(\exp\left(-\frac{\pi x}{12}\right)\right)-1.\end{aligned}$$

由于 $F(z)$ 的所有系数均为正，因此当 $0 < a_1 < a_2$ 时，我们有 $0 < F(a_1) < F(a_2)$。因此，

$$F\left(\exp\left(-\frac{\pi x}{12}\right)\right) - 1 \leq F\left(e^{-\frac{\pi}{48}}\right) - 1 = \mathscr{C}_0.$$

由此可得

$$|\mathcal{G}(z,h,k,n)| \leq \mathscr{C}_0 \frac{2^{1/4}}{k^2\sqrt{N+1}} \exp(2\pi n).$$

因此，

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}} \mathcal{B}_{h,k}\right| \leq \mathscr{C}_0 \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}} \frac{2\sqrt{2}k}{N+1} \times \frac{2^{1/4}}{k^2\sqrt{N+1}} \exp(2\pi n)$$

$$\leq \frac{\mathscr{C}_1}{(N+1)^{3/2}} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}} \frac{1}{k},$$

其中

$$\mathscr{C}_1 = 2^{\frac{7}{4}} \mathscr{C}_0 \exp(2\pi n)$$

是一个仅依赖于 n的固定常数。容易看出

$$0 \leq \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{N} 1 = N,$$

因为满足 $1 \leq h \leq k$ 且（h， k）$= 1$ 的正整数 h 的个数不超过 k。

因此，我们已经证明

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}} \mathcal{B}_{h,k}\right| \leq \frac{\mathscr{C}_1}{\sqrt{N+1}},$$

其阶为 $N^{-1/2}$。由此可得

$$p(n) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}} \mathcal{A}_{h,k} + O^*(\mathscr{C}_1 N^{-1/2}).$$

这里我们记

$$f(N) = O^*(g(N))$$

表示

$$|f(N)| \leq |g(N)|.$$

˜为了计算 $\mathcal{A}_{h,\ k}$，我们注意到，当 z 沿着远离虚轴的弧，从 $w_1(h,\ k)$ 到 $w_2(h,\ k)$ 遍历圆 C 时，方向为顺时针。我们可以将这段弧写成 ˜ 整个圆 $-C$ （负号表示顺时针方向）减去两段弧 $-\mathcal{W}_1$ 和

$\mathcal{W}_2$，其中 $\mathcal{W}_1$ 是从 0 到 $w_1(h,\ k)$ 的弧，方向为顺时针；$\mathcal{W}_2$ 是从 0 到 $w_2(h,\ k)$ 的弧，方向为逆时针。由此可得，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{h,k} &= -\frac{i}{k^{5/2}}\int_{\tilde{C}} e^{\pi i s(h,k)-\frac{2\pi i n h}{k}} z^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{12z}+\frac{2\pi n z}{k^2}-\frac{\pi z}{12k^2}\right) dz \\ &\quad -\frac{i}{k^{5/2}}\int_{\mathcal{W}_1} e^{\pi i s(h,k)-\frac{2\pi i n h}{k}} z^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{12z}+\frac{2\pi n z}{k^2}-\frac{\pi z}{12k^2}\right) dz \\ &\quad +\frac{i}{k^{5/2}}\int_{\mathcal{W}_2} e^{\pi i s(h,k)-\frac{2\pi i n h}{k}} z^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{12z}+\frac{2\pi n z}{k^2}-\frac{\pi z}{12k^2}\right) dz \\ &= \mathcal{A}_0(h,k)+\mathcal{A}_1(h,k)+\mathcal{A}_2(h,k).\end{aligned}$$

对于任意 $z\in\mathcal{W}_1\cup\mathcal{W}_2$，命题 2.14 和命题 2.16 可推出

$$\begin{aligned}\left|z^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\pi}{12z}+\frac{2\pi n z}{k^2}-\frac{\pi z}{12k^2}\right)\right| &\le \frac{2^{1/4}k^{1/2}}{\sqrt{N+1}}\exp\left(\frac{\pi}{12}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\}+\frac{2\pi n}{k^2}\mathrm{Re}\,z-\frac{\pi}{12k^2}\mathrm{Re}\,z\right) \\ &\le \frac{2^{1/4}k^{1/2}}{\sqrt{N+1}}\exp\left(\frac{\pi}{12}+2\pi n\right).\end{aligned}$$

定理 2.15 和命题 2.16 表明 $\ell(\mathcal{W}_1)$ 和 $\ell(\mathcal{W}_2)$ 均有上界

$$\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{2}k}{N+1}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}}(\mathcal{A}_1(h,k)+\mathcal{A}_2(h,k))\right| \\ &\le \sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} 2\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{2}k}{N+1}\times\frac{1}{k^{5/2}}\times\frac{2^{1/4}k^{1/2}}{\sqrt{N+1}}\exp\left(\frac{\pi}{12}+2\pi n\right) \\ &\le \frac{\mathscr{C}_2}{\sqrt{N+1}},\end{aligned}$$

其中

$$\mathscr{C}_2 = 2^{3/4}\pi\exp\left(\frac{\pi}{12}+2\pi n\right).$$

这表明

$$p(n)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}}\mathcal{A}_0(h,k)+O^*((\mathscr{C}_1+\mathscr{C}_2)N^{-1/2}). \tag{3.13}$$

取 $N\to\infty$极限后，我们得到

$$\begin{aligned}p(n) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}}\mathcal{A}_0(h,k) \\ &= -i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{5/2}}A_k(n)\int_{\tilde{C}} z^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{\pi}{12z}+\frac{2\pi z}{k^2}\left(n-\frac{1}{24}\right)\right\}dz\end{aligned}$$

其中

$$A_k(n) = \sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k)-\frac{2\pi i n h}{k}}.$$

特别地， $A_1(n) = 1$。进行变量替换

$$w = \frac{1}{z},$$

t ˜圆 C映射到直线 $\mathrm{Re}\, w = 1$，其中 $\mathrm{Im}\ w$从 ∞变化到 $-\infty$。因此，

$$p(n) = -i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{5/2}}A_k(n)\int_{\mathrm{Re}\, w=1} w^{-\frac{5}{2}}\exp\left\{\frac{\pi w}{12}+\frac{2\pi}{k^2}\left(n-\frac{1}{24}\right)\frac{1}{w}\right\}dw.$$

进行变量替换

$$t = \frac{\pi w}{12},$$

我们得到

$$p(n) = -\frac{i\pi^{\frac{3}{2}}}{24\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{5/2}}A_k(n)\int_{\mathrm{Re}\, t=\frac{\pi}{12}} t^{-\frac{5}{2}}\exp\left(t+\frac{x_k^2}{4t}\right)dt,$$

其中

$$x_k = \frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}.$$

由（2.6），我们得到

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(n),$$

其中

$$R_k(n) = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{12\sqrt{3}}\frac{1}{k^{5/2}}A_k(n)\left(\frac{x_k}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} I_{\frac{3}{2}}(x_k).$$

由命题2.5,

$$R_k(n) = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{12\sqrt{3}}\frac{1}{k^{5/2}}A_k(n)\left(\frac{x_k}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2x_k}{\pi}}\frac{1}{\frac{dx_k}{dn}}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left\{\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right\}}{\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{2}}A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left\{\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right\}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right).$$

$_\infty$注意，(3.13) 表明级数 $\sum R_k(n)$ 确实收敛到 $p(n)$。这就完成了$_{k=1}$定理的证明。

□

注记 3.4。 固定一个正整数 n。给定一个正整数 N，定义

$$Q_N(n) = \sum_{k=N+1}^{\infty} R_k(n),$$

以便

$$p(n) = \sum_{k=1}^{N} R_k(n) + Q_N(n).$$

也就是说， $Q_N(n)$ 是将 $p(n)$ 用级数（3.1）中的前 N 项之和近似时的余项。

由（3.13）

$$|Q_N(n)| \leq \frac{\mathscr{C}}{\sqrt{N}},$$

其中

$$\mathscr{C} = 2^{7/4}\left(F(e^{-\frac{\pi}{48}}) - 1\right)e^{2\pi n} + 2^{3/4}\pi \exp\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi n\right).$$

由于 $Q_N(n) \to 0$ 当 $N \to \infty$ 时，级数（3.1）绝对收敛。

4. Leading Asymptotic of the Partition Function

下文中，我们使用上一节得到的 $p(n)$ 的精确公式，求出 $p(n)$ 在 $n \to \infty$ 时关于 n 的首项渐近式。

定理 4.1。 数列 $\{p(n)\}$ 在 $n \to \infty$ 时满足以下渐近公式。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{\frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)} = 1. \tag{4.1}$$

给定一个正整数 n，令

$$L(n) = \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

公式（4.1）断言

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{L(n)} = 1.$$

为证明这一点，令

$$S(n) = \sum_{k=2}^{\infty} R_k(n).$$

根据（3.1），

$$p(n) = R_1(n) + S(n).$$

为证明（4.1），只需证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_1(n)}{L(n)} = 1 \tag{4.2}$$

and

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{L(n)}=0. \tag{4.3}$$

通过直接计算，我们得到

$$R_k(n)=\frac{\pi\sqrt{k}}{3\sqrt{2}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}A_k(n)\frac{\frac{\alpha(n)}{k}\cosh\frac{\alpha(n)}{k}-\sinh\frac{\alpha(n)}{k}}{\alpha(n)^2}, \tag{4.4}$$

其中

$$\alpha(n)=\pi\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}.$$

我们首先证明（4.2）。

引理4.2。 设 n为正整数。则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_1(n)}{L(n)}=1$$

证明。 由（4.4），

$$R_1(n)=\frac{1}{4\sqrt{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\left\{\left(1-\frac{1}{\alpha(n)}\right)e^{\alpha(n)}+\left(1+\frac{1}{\alpha(n)}\right)e^{-\alpha(n)}\right\}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\alpha(n)=\infty,$$

我们发现

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_1(n)}{\frac{1}{4\sqrt{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}e^{\alpha(n)}}=1.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{R_1(n)}{L(n)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4\sqrt{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}e^{\alpha(n)}}{\frac{1}{4n\sqrt{3}}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}-\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}-\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)\\&=\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{24}-n}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}+\sqrt{n}}\\&=0,\end{aligned}$$

我们得出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_1(n)}{L(n)}=1.$$

□

为证明（4.3），我们需要以下结果。

引理 4.3. 对于 $u>0$,

$$\left|\frac{u\cosh u-\sinh u}{u^2}\right|\le\frac{u\cosh u}{2}. \tag{4.5}$$

证明. 令

$$g(u)=u\cosh u-\sinh u,\qquad h(u)=u^2.$$

根据柯西中值定理，存在 $v\in(0,u)$ 使得

$$\frac{u\cosh u-\sinh u}{u^2}=\frac{g(u)}{h(u)}=\frac{g'(v)}{h'(v)}.$$

Now,

$$g'(u)=u\sinh u,\quad h'(u)=2u.$$

因此,

$$\frac{u\cosh u-\sinh u}{u^2}=\frac{\sinh v}{2}$$

根据中值定理，存在 $w\in(0,v)$ 使得

$$\frac{\sinh v}{v}=\cosh w.$$

由于双曲余弦 u 是严格递增函数，双曲余弦 $w\le$ 双曲余弦 $v\le$ 双曲余弦 u。因此,

$$\begin{aligned}\frac{u\cosh u-\sinh u}{u^2}&=\frac{\sinh v}{2}\\&\le\frac{v\cosh w}{2}\\&\le\frac{u\cosh u}{2}.\end{aligned}$$

断言得证。 □

*Pro*定理*4.1*。 为完成定理4.1的证明，还需证明（4.3）。

由（4.5）和（4.4），并利用 $|A_k（n）| \leq k$，可得

$$|R_k(n)| \leq \frac{\pi\alpha(n)}{6\sqrt{2}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\frac{1}{k^{3/2}}\cosh\frac{\alpha(n)}{k}.$$

利用当 $u>0$ 时 $\cosh u < e^u$ 这一事实，可得

$$|R_k(n)| \leq \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}\frac{1}{k^{3/2}}\exp\left(\frac{\alpha(n)}{k}\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}
|S(n)| &\leq \sum_{k=2}^{\infty}|R_k(n)| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}\frac{1}{k^{3/2}}\exp\left(\frac{\alpha(n)}{k}\right) \\
&\leq \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}\exp\left(\frac{\alpha(n)}{2}\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}} \\
&= C\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}\exp\left(\frac{\alpha(n)}{2}\right),
\end{aligned}$$

其中

$$C=\zeta\left(\frac{3}{2}\right)-1.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\left|\frac{S(n)}{L(n)}\right| &\leq \frac{2C\pi^2 n}{3}\exp\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}-\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \\
&\leq \frac{2C\pi^2 n}{3}\exp\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}n}-\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \\
&= \frac{2C\pi^2 n}{3}\exp\left(-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}n}\right).
\end{aligned}$$

容易验证，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2C\pi^2 n}{3}\exp\left(-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}n}\right)=\frac{2C\pi^2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\exp\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}n}\right)}=0.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{L(n)}=0.$$

这就完成了（4.1）的证明。

□

定理 4.1指出，当 n 趋于无穷大时， $p(n)$ 与 $L(n)$ 的比值趋近于 1。这并不意味着当我们使用 $L(n)$ 来近似 $p(n)$时，近似误差（定义为 $p(n) - L(n)$）很小。事实上，当 n 趋于无穷大时，这个误差也趋于无穷大。我们所断言的是，相对误差

$$e(n) = \frac{p(n) - L(n)}{p(n)}$$

趋于 0。百分比相对误差定义为

$$\varepsilon(n) = \frac{p(n) - L(n)}{p(n)} \times 100\%.$$

表 2 展示了 $p(n)$ 的一些取值，以及用 $L(n)$近似 $p(n)$ 时的百分比相对误差。图 11 以图形方式展示了百分比相对误差。

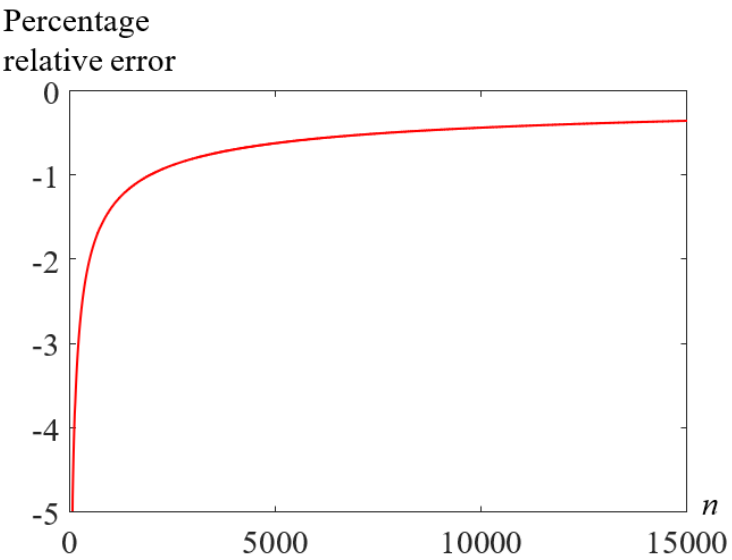


图 11. 使用 $L(n)$近似 $p(n)$时的百分比相对误差。

n	$p(n)$
10	42
50	204226
100	190569292
200	3972999029388
500	2300165032574323995027
1000	2406146786403262247369214972799 1
2000	472081917561941388860143240679995951220034416 6
3000	4960251427975371844103248790549270953344627422316834236 24
4000	1024150064776551375119256307915896842122498030313150910234889093895
5000	1698201688254421218519751016893064313617576830498292333222038246523291443 49
6000	4671727531970209092971024643973690643364629153270037033856605528925072405349246129
7000	3285693080344061578628092563592416686195015157453224065969903215743223639 4 374450791229199
8000	7836026435156834949059314501336459971901076935298586433111860020941782776452445099038840284416 4
9000	7713363811780888490732079142740313496163979832207203426264771369460536797968429694879033559043562645 9
10000	3616725132563629398882047189095369549501603033931565042208186860588795256875406642059231055605290691643514 4
12000	1294107667757322067493842620367467386268131006205640080126511905905017060058126929125027069 9 016236622518091288531806 10
15000	2626337936403790841371023191659066988029320559654372494065885879713751200817910567186390885709131759428161259697092460293516721302 66

表1： $p(n)$ 的部分取值。

n	$p(n)$	百分比相对误差 $\varepsilon(n)$
10	42	-14.53
50	204226	-6.54
100	190569292	-4.57
200	3.97×10^{12}	-3.2
500	2.30×10^{21}	-2.01
1000	2.41×10^{31}	-1.42
2000	4.72×10^{45}	-1
3000	4.96×10^{56}	-0.81
4000	1.02×10^{66}	-0.7
5000	1.70×10^{74}	-0.63
6000	4.67×10^{81}	-0.57
7000	3.29×10^{88}	-0.53
8000	7.84×10^{94}	-0.5
9000	7.71×10^{100}	-0.47
10000	3.62×10^{106}	-0.44
12000	1.29×10^{117}	-0.41
15000	2.63×10^{131}	-0.36

表 2. 使用 $L(n)$ 近似 $p(n)$ 时， $p(n)$ 的值及百分比相对误差。

参考文献

[Apo90] Tom M. Apostol, 《数论中的模函数与狄利克雷级数》, 第2版, 《数学研究生教材》第41卷, Springer-Verlag, 纽约, 1990年。MR 1027834[AW95] Gert Almkvist 和 Herbert S. Wilf, 关于 $p(n)$ 的哈代 – 拉马努金 – 拉德马赫公式中的系数, 《数论杂志》 50 (1995), 第 2 期, 329–334。MR 1316828[BL13] Ben Barber 和 Imre Leader, 带同余条件的分拆正则性, 《组合杂志》4 (2013), 第3期, 293–297。MR 3096137[BM20] Stella Brassesco 和 Arnaud Meyroneinc, 整数分拆数的一个展开, 《拉马努金杂志》51 (2020), 第3期, 563–592。MR 4076172[Bri06] Kathrin Bringmann, 若干受限分拆函数的渐近公式, 《拉马努金杂志》12 (2006), 第2期, 257–266。MR 2286249[BTB11] Nesrine Benyahia Tani 和 Sadek Bouroubi, 将整数分拆为指定数量的不同大小部分, 尤其是两种大小部分的枚举, 《整数数列杂志》14 (2011), 第3期, 文章编号11.3.6, 12。MR 2783952[Cra22] William Craig, 互异部分分拆中同余类内部分数的研究, 《数论研究》8 (2022), 第3期, 论文编号52, 24。MR 4456287[dAP00] Wladimir de Azevedo Pribitkin, 重新探讨分拆函数 $p(n)$ 的拉德马赫公式, 《拉马努金杂志》4 (2000), 第4期, 455–467。MR 1811909[DM13] Michael Dewar 和 M. Ram Murty, 从算术公式推导哈代–拉马努金公式, 《美国数学学会会刊》141 (2013), 第6期, 1903–1911。MR 3034417[Gro58] Emil Grosswald, 关于分拆的若干定理, 《美国数学会汇刊》89 (1958), 113–128。MR 97371[Gro60a] E. Grosswald, 质数幂分拆, 《密歇根数学杂志》7 (1960), 97–122。MR 121348[Gro60b] Emil Grosswald, 对“关于分拆的若干定理”的更正与补充, 《美国数学会汇刊》95 (1960), 190。MR 120212[Gro62] E. Grosswald, 分拆理论中的新旧结果, 《阿根廷数学联合会杂志》20 (1962), 40–57。MR 150119[Gro63] ,分拆理论中的初等证明, 《数学杂志》81 (1963), 52–61。MR 148623[Gro84] Emil Grosswald, 平方数分拆, 《数学教学》（第2辑）30 (1984), 第3–4期, 223–245。MR 767902[Hag62] Peter Hagis, Jr., 一个关于素数模下分拆的问题 $p \geq 3$, 《美国数学会汇刊》102 (1962), 30–62。MR 146166[Hag63] ,奇数加项分拆, 《美国数学杂志》85 (1963), 213–222。MR 153651[Hag64a] , 关于互异加项分拆的一类, 《美国数学会汇刊》112 (1964), 401–415。MR 166177[Hag64b] , 奇且不等的部分分拆, 《美国数学杂志》86 (1964), 317–324。MR 166178[Hag65a] , 关于分拆若干定理的更正, 《美国数学会汇刊》118 (1965), 550。MR 176970[Hag65b] , 将整数分拆为互异奇数加项, 《美国数学杂志》87 (1965), 867–873。MR 188182[Hag65c] , 奇数加项分拆——一些评论与更正, 《美国数学杂志》87 (1965), 218–220。MR 176969[Hag66] , 关于奇数加项分拆的若干定理, 《美国数学杂志》88 (1966), 664–681。MR 200260[Hag70] , 分拆理论中出现的一个单位根, 《美国数学学会会刊》26 (1970), 579–582。MR 265308[Hag71a] , 满足某些同余条件的不等部分分拆, 《数论杂志》3 (1971), 115–123。MR 268145

[Hag71b] ———, 对加数重数有限制的分拆，《美国数学会汇刊》155 (1971)，375–384。MR 272735[HR18] G. H. Hardy 和 S. Ramanujan，《组合分析中的渐近公式》，《伦敦数学会会报》（第2辑）17 (1918)，75–115。MR 1575586[Hua42] 华罗庚，关于将一个数拆分为互不相等部分的分拆数，《美国数学会汇刊》51 (1942)，194–201。MR 6195[IJT20] Jonas Iskander、Vanshika Jain 和 Victoria Talvola，分数分拆函数的精确公式，《数论研究》6 (2020)，第2期，论文编号20，17。MR 4092503[Ise57] Shˆo Iseki，戴德金模函数的变换公式及相关函数方程，《杜克数学杂志》24 (1957)，653–662。MR 91301[Ise59] ，带有某种同余条件的分拆函数，《美国数学杂志》81 (1959)，939–961。MR 108473[Ise60] ,关于若干分拆函数，《日本数学会杂志》12 (1960)，81–88。MR 113861[Joh12] Fredrik Johansson，哈代–拉马努金–拉德马赫公式的高效实现，《伦敦数学会计算数学杂志》15 (2012)，341–359。MR 2988821[JS15] Chris Jennings-Shaffer，带条件的分拆对的同余式，《季刊数学杂志》66 (2015)，第3期，837–860。MR 3396094[KMT19] Narissara Khaochim、Riad Masri 和 Wei-Lun Tsai，分拆函数的一个有效上界，《数论研究》5 (2019)，第1期，论文编号14，25。MR 3903861[KT23] Z.Y. Kong 和 L.P. Teo，戴德金 eta 函数变换公式的一个初等证明，预印本 arXiv:2302.03280 (2023)。[KY99] Dongsu Kim 和 Ae Ja Yee，关于互异部分分拆与奇数部分分拆的注记，《拉马努金杂志》3 (1999)，第2期，227–231。MR 1703261[Leh37] D. H. Lehmer，关于分拆函数的哈代–拉马努金级数，《伦敦数学会杂志》12 (1937)，第3期，171–176。MR 1575064[Liv45] John Livingood，素数模 $P > 3$ 下的一个分拆函数，《美国数学杂志》67 (1945)，194–208。MR 12101[MLP12] James Mc Laughlin 和 Scott Parsell，(r, s)-正则分拆的哈代–拉马努金–拉德马赫型公式，《拉马努金杂志》28 (2012)，第2期，253–271。MR 2925178[Niv40] Ivan Niven，关于某个分拆函数，《美国数学杂志》62 (1940)，353–364。MR 1235[O'S20] Cormac O'Sullivan，拉德马赫猜想与生成受限分拆的乘积在单位根处的展开，《数论杂志》216 (2020)，335–379。MR 4130086[Pri09] Wladimir de Azevedo Pribitkin，分拆函数的简单上界，《拉马努金杂志》18 (2009)，第1期，113–119。MR 2471621[PW19] Wladimir de Azevedo Pribitkin 和 Brandon Williams，分拆的拉德马赫公式的简短证明，《数论研究》5 (2019)，第2期，论文编号17，6。MR 3916267[Rad37] Hans Rademacher，关于分拆函数 p(n)，《伦敦数学学会会报》（第2辑）43 (1937)，第4期，241–254。MR 1575213[Rad40] ，模形式的傅里叶展开与分拆问题，《美国数学学会通报》46 (1940)，59–73。MR 842[Rad43] ，分拆函数的级数展开，《数学年刊》（第2辑）44 (1943)，416–422。MR 8618[Rob76] 带同余条件的分拆，《美国数学学会会刊》57 (1976)，第1期，45–49。MR 404184[Rob77] ，带同余条件的大型多重分拆。II，《数论杂志》9 (1977)，第2期，258–270。MR 444596[RS76] M. M. Robertson 和 D. Spencer，带同余条件的大型多重分拆。I，《美国数学会汇刊》219 (1976)，299–322。MR 401688

[Sel89] Atle Selberg，分拆函数 $p(n)$ 的拉德马赫公式史，Normat 37 (1989)，第 4 期，141–146，176。MR 1042708[Sil10a] Andrew V. Sills，分拆与过分拆的拉德马赫型公式，Int. J. Math. Math. Sci. (2010)，文章编号 630458，21。MR 2606900[Sil10b] , 受限分拆函数和过分拆函数的拉德马赫型公式，《拉马努金杂志》23 (2010)，第 1–3 期，253–264。MR 2739216[Sil10c] ，迈向圆法的自动化，《实验数学瑰宝》，Contemp. Math.，第 517 卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2010，第 321–338 页。MR 2731079[Spe73] D. Spencer，带同余条件的大型多重分拆，ProQuest LLC,– 密歇根州安娜堡，1973，博士论文——萨里大学（英国）。MR 3809911[Sub72] V. V. Subrahmanyasastri，带同余条件的分拆，J. Indian Math. Soc. (N.S.)36 (1972)，177–194（1973）。MR 325560[SZ12] Andrew V. Sills 和 Doron Zeilberger，利用拟多项式假设求不超过 n 个 m 部分的分拆数公式，Adv. in Appl. Math. 48 (2012)，第 5 期，640–645。MR 2920836[Usp20] J.V. Uspensky，《分拆理论中出现的数值函数的渐近公式》*[*俄语*]*, Bull. Acad. Sci. URSS 14 (1920)，199–218。[Van82] S. Vangipuram，带同余条件和颜色限制的分拆，《数论》（迈索尔，1981），Lecture Notes in Math.，第 938 卷，施普林格，柏林—纽约，1982，第 157–169 页。MR 665446[Vau81] R. C. Vaughan，《哈代–李特尔伍德方法》，Cambridge Tracts in Mathematics，第 80 卷，剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1981。MR 628618[VSS82] S. Vangipuram 和 V. V. Subrahmanya Sastri，关于带同余条件的分拆问题，Indian J. Math. 24 (1982)，第 1–3 期，165–174。MR 724333[Zag21] Don Zagier，幂分拆与广义 eta 变换性质，Hardy-Ramanujan J. 44 (2021)，1–18。MR 4400882

马来西亚厦门大学数学系，Sunsuria路，Bandar Sun-Suria，43900，雪邦，雪兰莪州，马来西亚。
电子邮箱地址：MAT2004438@xmu.edu.my，lpteo@xmu.edu.my