arXiv:2302.03865v1 [math.AP] 8 Feb 2023

能量临界情形下带调和势的 Gross-Pitaevskii 方程的基态

DMITRY E. PELINOVSKY 和 SZYMON SOBIESZEK

ABSTRACT. 能量临界 Gross–Pitaevskii 方程带调和势的基态可以通过变分方法构造。它存在于特征值参数的一个有限区间内。基态的上确界范数在该区间的一端趋于零，在另一端则发散至无穷大。我们考察大范数极限下的射击法，以证明基态在近场逐点接近能量临界波动方程的 Aubin–Talenti 解，而在远场逐点接近合流超几何函数。射击法给出了特征值参数与上确界范数之间的精确关系。

1. INTRODUCTION

我 们考虑带调和势的定态 Gross–Pitaevskii 方程,

$$(-\Delta + |x|^2)u - |u|^{2p}u = \lambda u, \tag{1.1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^d$、 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $u \in \mathbb{R}$。其基态（一个正的径向递减解）的存在性已在能量次临界[11, 19] 和临界 [25, 26] 情形下通过变分方法得到研究，其中当 $d \geq 3$时，临界指数为 $p = \frac{2}{d-2}$。基态的唯一性已在能量次临界 [16, 17]和临界 [28]情形下得到证明。

变分方法不适用于能量超临界情形 $p\,(d-2) > 2$（当 $d \geq 3$时），针对该情形，我们在先前的工作中提出了更为有效的射击法 [3, 22]（另见 [8]，其中研究了 Schr¨odinger–Newton–Hooke 模型）。射击法基于在 Emden–Fowler变换 [9, 18]之后对存在性问题进行重新表述，并构造两个解析解族：其中一个解族在 $r = 0$ 附近给出一个有界解，其参数为 $b := u(0) \equiv \|u\|_{L^\infty}$；另一个解族在 $r \to \infty$ 时给出一个衰减解，其参数为

$$c := \lim_{r\to\infty} u(r) e^{\frac{1}{2}r^2} r^{\frac{d-\lambda}{2}}. \tag{1.2}$$

射击法在 $b \to \infty$ 的大范数极限下给出稳健的结果。在渐近区域中，两族解共存，此时匹配条件给出关于 (c, λ) 的条件，该条件以 b 为自变量，并确定解曲线 $\lambda = \lambda(b)$。c 解族是在 [27] 中为 $\lambda = \lambda_\infty \in (0, d)$ 构造的极限奇异解的局部邻域内定义的，并且沿解曲线有 $\lambda(b) \to \lambda_\infty$，当 $b \to \infty$ 时。由

日期：2023年2月9日。关键词和短语。Gross–Pitaevskii 方程，基态，能量临界情形，射击法。

在某些非退化假设下，射击法 [3] 对于 $2+\frac{2}{p}<d<d_*(p)$ 的收敛呈振荡性，而对于 $d>d_*(p)$ 则呈单调性，其中

$$d_*(p) := 6+\frac{2}{p}+2\sqrt{4+\frac{2}{p}}.$$

在 [22] 中，同一种射击法被扩展用于根据极限奇异解的 Morse指标，计算单调情形下基态的 Morse指标。最近， [23] 通过与可用合流超几何函数表示的定态薛定谔方程进行比较（综述见 [1] ），证明了在振荡情形下，极限奇异解的 Morse指标为无穷大；而在单调情形下，当 $d>d_*$（p）取较大值时，该指标等于 1。

含调和势的能量超临界 Gross–Pitaevskii 方程的性质与球域中的能量超临界非线性薛定谔方程非常相似。关于射击法的发展，见 [5, 6, 7] ；关于收敛到极限奇异解，见 [21] ；关于 Morse指标的计算，见 [12, 20] 。

本文旨在将射击法推广到能量临界情形，并获得 $\lambda(b)$ 在 $b\to\infty$ 时的渐近表示。据我们所知，射击法此前尚未应用于能量临界情形，而在该情形下，变分近似更为常见。

对于 $d=2+\frac{2}{p}$ 时能量临界情形下的射击法，我们引入同样的两个解析解族，其中 b-族由参数 $b:=u(0)$ 定义，而 c-族由渐近行为 (1.2) 中的参数 c 定义。与能量超临界情形相反，c-族存在于定态 Schr¨odinger 方程的一个空间衰减解的局部邻域内

$$V''(r)+\frac{d-1}{r}V'(r)-r^2V(r)+\lambda V(r)=0,$$

该方程由 $V(r)=ce^{-\frac{1}{2}r^2}\mathfrak{U}(r^2;\,\alpha,-\beta)$ 满足，其中 $c\in\mathbb{R}$ 为任意值，而 $\mathfrak{U}(z;\,\alpha,\,\beta)$ 是 Tricomi 函数（见 [1]），且

$$\alpha := \frac{p+1}{2p}-\frac{\lambda}{4}, \qquad \beta := 1+\frac{1}{p}. \tag{1.3}$$

此外，与能量超临界情形相反， b族存在于代数孤子的一个局部邻域中

$$U_b(r)=\frac{b}{(1+\alpha_p b^{2p}r^2)^{\frac{1}{p}}}, \qquad \alpha_p := \frac{p^2}{4(1+p)}, \tag{1.4}$$

其中，参数 b 是由条件 $b=U_b(0)$ 引入的。代数孤子（也称为 Aubin-Talenti 解 [2, 29]）对任意 $b>0$ 都满足非线性波动方程$-\Delta U_b=U_b^{2p+1}$ 。在开创性工作 [4] 及后续研究 [10, 13, 14, 15, 24]中，它已被用于有界区域上的诸多能量临界波动方程研究。在定态 Gross–Pitaevskii 方程 (1.1) 的背景下，它

在 [25] 中被用于通过变分方法获得关于依赖关系 $\lambda(b)$ 的下界。最近，[23]，将变分方法和椭圆估计加以扩展，从而得到关于依赖关系 $\lambda(b)$ 的上界。我们将使用射击法来论证代数孤子 (1.4) 对 $\lambda(b)$ 在 $b \to \infty$ 时的渐近行为的重要性。

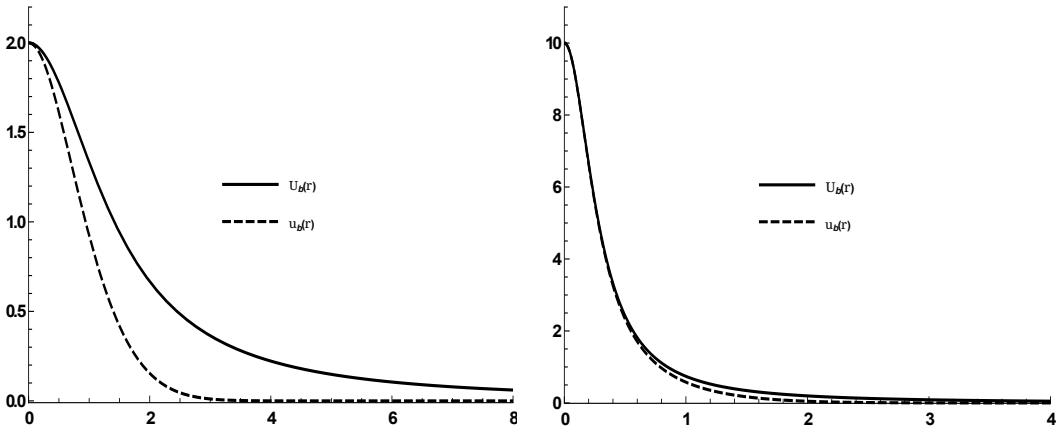

FIGURE 1.1. 定常方程 (1.1) 的基态在 $p = 1$ 和$d = 4$ 条件下，与代数孤子 (1.4) 在 $b = 2$ （左）和 $b = 10$ （右）时的比较。

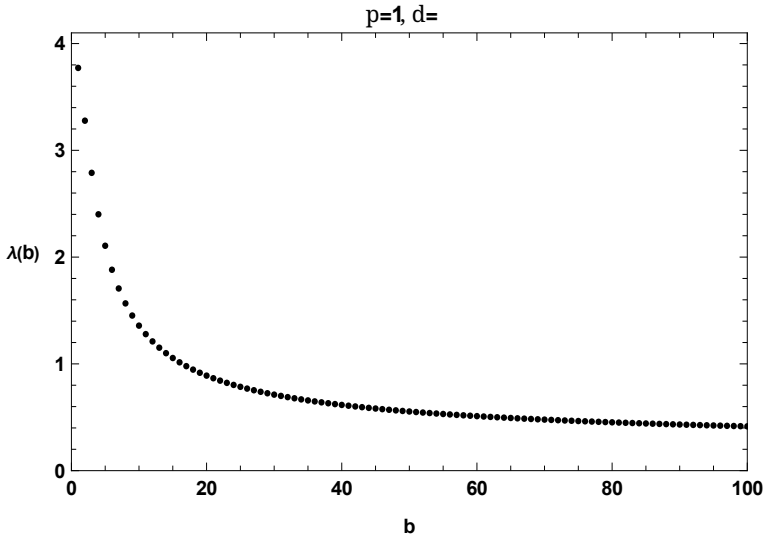

FIGURE 1.2. 对于 $p = 1$ 和 $d = 4$，依赖关系 $\lambda = \lambda(b)$。

图1.1 展示了数值求得的剖面 u_b 相对于 r 的变化，并与 $b = 2$ （左）和 $b = 10$ （右）时的剖面U_b 进行比较。展示了 $p = 1$ 的可视化（对应于

$d = 4$）。对于 $p \in (0,1)$ 的其他取值，结果类似。当 $b = 2$ 时，这两个剖面有所不同；但当 $b = 10$ 时，差异会缩小，而当 b 取较大值时，差异便不可见。沿着曲线 $\lambda = \lambda(b)$，λ 的取值由 b 唯一确定；该曲线在 $p = 1$ 时如图 1.2 所示。

下述定理给出了射击法的结果，这是本文的主要结果。我们采用以下记号：

- $\lambda(b) \sim \lambda_0(b)$ 表示渐近等价，即 $\lim_{b\to\infty} \lambda_0(b)^{-1}\lambda(b) = 1$,
- $\lambda(b) = \mathcal{O}(b^q)$ 表示数量级，即对于某个 $C > 0$ 以及所有充分大的 b，有 $|\lambda(b)| \le Cb^q$ 。

定理 1.1. 对 $p = \frac{2}{d-2} \in (0,1)$ 取定值，令 $d > 4$，并令 $\lambda = \lambda(b)$ 为定态*Gross–Pitaevskii*方程 (1.1) 的基态 $u = u_b$ 对应的解曲线，满足 $u_b(0) = b$，$u_b'(r) < 0$（$r > 0$时），且 $u_b(r) \to 0$（当 $r \to \infty$ 时）。那么，

$$\lambda(b) \sim C_p \begin{cases} b^{-2(1-p)}, & \frac{1}{2} < p < 1, \\ b^{-1}\log b, & p = \frac{1}{2}, \\ b^{-2p}, & 0 < p < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{as} \quad b \to \infty, \tag{1.5}$$

with

$$C_p = \begin{cases} -\dfrac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2p}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{(1+p)\Gamma\left(\frac{p-1}{2p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)}\left[\dfrac{4(1+p)}{p^2}\right]^{\frac{1}{p}}, & \frac{1}{2} < p < 1, \\ 144, & p = \frac{1}{2}, \\ \dfrac{8(1+p)^2}{p^2(1-2p)}, & 0 < p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

此外，对于每一个 $a \in (0, \frac{p}{1+p})$，存在 B_a、$C_a > 0$，使得对于每个 $b \ge B_a$，我们有

$$\sup_{r\in[0,b^{-p(1-a)}]} b^{-1}\left|u_b(r) - U_b(r)\right| \le C_a b^{-2p(1-a)}, \tag{1.6}$$

$$\sup_{r\in[b^{-p(1-a)},1]} r^{\frac{2}{p}}\left|u_b(r) - c(b)e^{-\frac{1}{2}r^2}\mathfrak{U}(r^2;\alpha,\beta)\right| \le C_a|c(b)|^{2p+1}b^{2p(1-a)} \tag{1.7}$$

and

$$\sup_{r\in[1,\infty)}\left|e^{\frac{1}{2}r^2}r^{\frac{d-\lambda(b)}{2}}u_b(r) - c(b)r^{\frac{d-\lambda(b)}{2}}\mathfrak{U}(r^2;\alpha,\beta)\right| \le C_a|c(b)|^{2p+1}, \tag{1.8}$$

其中 $c = c(b) \sim A_p b^{-1}$，当 $b \to \infty$ 时，对某个 $A_p > 0$ 成立。

注 1.1。渐近结果 *(1.5)* 与 [23] 中通过变分理论和椭圆估计得到的定理 *1.1* 一致。由 [23] 中的注 *1.2* 可知，存在C_d 使得

$$\lambda(\varepsilon) \sim C_d \begin{cases} \varepsilon & d = 5, \\ \varepsilon^2|\log\varepsilon| & d = 6, \\ \varepsilon^2 & d \ge 7, \end{cases} \tag{1.9}$$

其中，$\varepsilon = b^{-p}$ 由代数孤子 *(1.4)* 定义。情形 $d \geq 7$ 对应于 *(1.5)* 中的$0 < p < \frac{1}{2}$。对于 $d = 6$，我们有 $p = \frac{1}{2}$，因此 $\varepsilon^2|$对数 $\varepsilon| \sim b^{-1}$ 对数 b，如 *(1.5)* 所示。对于$d = 5$，我们有 $p = \frac{2}{3}$，因此 $\varepsilon \sim b^{-2/3} = b^{-2(1-p)}$，如 *(1.5)* 所示。

注 1.2。由 [23] 中的注 *1.2* 还可推出 $\lambda(\varepsilon) \sim C|$对数 $\varepsilon|^{-1}$ 当 $d = 4$ 时，以及$\lambda(\varepsilon) - 1 \sim C\varepsilon$ 当 $d = 3$时。在我们的记号中，取 $\varepsilon = b^{-p}$时，这对应于 $\lambda(b) \sim C$(对数 $b)^{-1}$ 当 $p = 1$ 时，以及 $\lambda(b) - 1 \sim Cb^{-2}$ 当 $p = 2$ 时。然而，我们发现，基于 b- 族和 c- 族的射击法可用于 $p \in (0,1)$，但对于 $p \geq 1$则需要进一步修改。

注 *1.3*。由于 $\mathfrak{U}(r^2; \alpha, \beta) = \mathcal{O}(r^{-\frac{2}{p}})$ 当 $r \to b^{-p(1-a)}$时，界 *(1.7)* 表明，当 $r \to b^{-p(1-a)}$时，$u_b(r) = \mathcal{O}(b^{1-2a})$。这小于界 *(1.6)* 中当 $r \to 0$ 时的 $u_b(r) = \mathcal{O}(b)$。由于 $\mathfrak{U}(r^2; \alpha, \beta) = \mathcal{O}(r^{-\frac{d-\lambda(b)}{p}})$ 当 $r \to \infty$时，界 *(1.8)* 表明，当 $b \to \infty$时，$u_b(r)$ 满足渐近行为 *(1.2)*，其中 $c = c(b) = \mathcal{O}(b^{-1})$。

图 1.3 展示了渐近结果 (1.5) 对解曲线 $\lambda = \lambda(b)$ 的重要性。对于给定的维数 d 和临界指数 $p = \frac{2}{d-2}$，我们通过数值计算求得 $\lambda(b)$，并将其与渐近关系 (1.5) 进行比较，绘制其随 b 变化的曲线。左图和右图分别展示了当 $p = \frac{2}{5}$ 时 $d = 7$的图像，以及当 $p = \frac{2}{3}$ 时 $d = 5$ 的图像；其中 $\lambda(b) \sim C_p b^{-4/5}$，且 $\lambda(b) \sim C_p b^{-2/3}$，$C_p$ 由最佳最小二乘拟合得到。随着 b 取值增大，双对数图中数值曲线与解析曲线的接近程度显而易见。

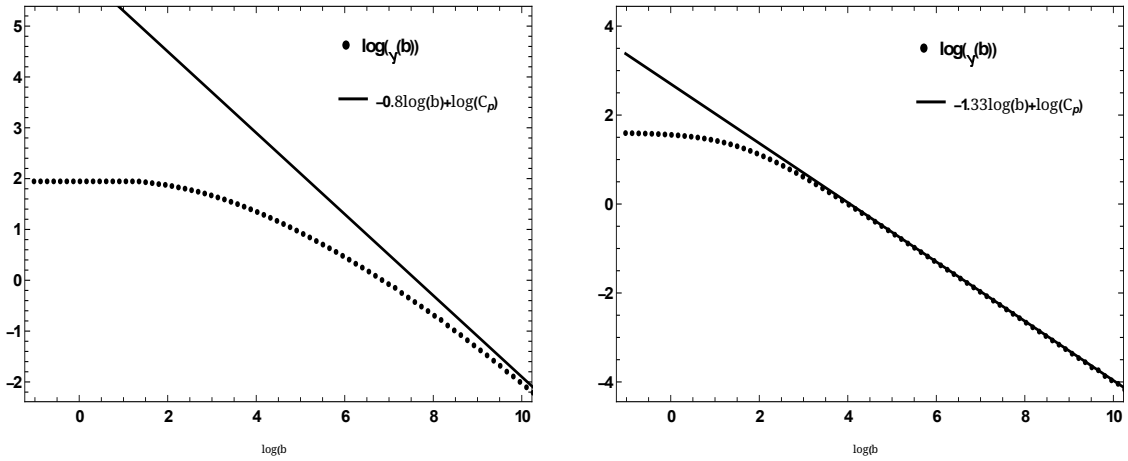

FIGURE 1.3. 定常方程 (1.1) 的基态对应的 $\lambda(b)$ 关于 b 的双对数图，其中 $d = 7$ （左图）和 $d = 5$ （右图）；并与 (1.5) 给出的解析关系进行比较。

我们证明定理 1.1 的策略如下。第 2 节包含一些预备结果：在经过 Emden–Fowler变换后，存在性问题被重新表述，并明确辨识出两个解族及其截断极限。第 3 节分析

b-族在代数孤子 (1.4) 的局部邻域中的情形；经过 Emden–Fowler变换后，该孤子变为指数衰减孤子。第 4 节分析c-族在合流超几何函数局部邻域中的情形。定理 1.1 在第 5 节得到证明，其中两个解族在共同的渐近区域内进行考察，参数 c 和 λ 在渐近极限 $b \to \infty$下被唯一确定。除了渐近关系 (1.5) 能够独立地得到在 [23]中以不同方法证明的结果 (1.9) 外，本研究的主要成果是在 Aubin-Talenti解和合流超几何函数附近，以精确的渐近构造得到基态，并给出逐点估计 (1.6)、(1.7) 和 (1.8)。

2. Preliminary results

与我们先前的工作 [3, 22], 一样，我们将驻定 Gross–Pitaevskii 方程 (1.1) 的基态存在性问题重新表述为以下初值问题：

$$\begin{cases} f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r) - r^2 f(r) + \lambda f(r) + |f(r)|^{2p} f(r) = 0, \qquad r > 0, \\ f(0) = b, \quad f'(0) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中， $b > 0$ 是自由参数，能量临界情形下, - $d = 2 + \frac{2}{p}$ 由 $p > 0$ 定义。若初值问题 (2.1) 的解满足：对于 $r > 0$ ， $f'(r) < 0$；且当 $r \to \infty$时， $f(r) \to 0$ ，则称其为基态。类似于 [3] 中在特例 $p = 1$下得到的引理 3.2 和 3.4，可以利用积分方程表述和 Lyapunov函数方法，得出初值问题 (2.1) 存在唯一经典解。证明是标准的，故略去。我们指出，对于任意 $p > 0$、$\lambda \in \mathbb{R}$和$b > 0$，都存在唯一经典解 $f \in C^2(0, \infty)$，满足以下渐近行为：

$$f(r) = b - \frac{p(\lambda + b^{2p})}{4(p+1)} b r^2 + \mathcal{O}(r^4), \quad \text{as} \quad r \to 0. \tag{2.2}$$

通过引入 Emden-Fowler 变换，定常方程 (2.1) 在 $r = 0$ 处的奇点得以展开：

$$r = e^t, \quad \Psi(t) = e^{\frac{t}{p}} f(e^t). \tag{2.3}$$

经过变量变换后， Ψ 满足二阶非自治方程

$$\Psi''(t) - \frac{1}{p^2}\Psi(t) + |\Psi(t)|^{2p}\Psi(t) = -\lambda e^{2t}\Psi(t) + e^{4t}\Psi(t). \tag{2.4}$$

我们称，将变换 (2.3) 应用于初值问题 (2.1) 的唯一解，所得结果定义了方程 (2.4) 的 b 解族。相应的 b 解记为 $\Psi_b(t)$，其渐近行为满足

$$\Psi_b(t) = b e^{\frac{t}{p}} \left[1 - \frac{p(\lambda + b^{2p})}{4(p+1)} e^{2t} + \mathcal{O}(e^{4t}) \right], \quad \text{as} \quad t \to -\infty, \tag{2.5}$$

这由 (2.2) 得出。因此，当 $t \to -\infty$ 时， b 解族趋于零。我们将在第 3 节证明， b 解族始终接近方程 (2.4) 截断版本的正同宿轨道，该截断版本由以下二阶自治方程给出

$$\Theta''(t) - \frac{1}{p^2}\Theta(t) + |\Theta(t)|^{2p}\Theta(t) = 0. \tag{2.6}$$

二阶方程 (2.6) 具有一阶不变量

$$\frac{1}{2}(\Theta')^2 - \frac{1}{2p^2}\Theta^2 + \frac{1}{2(p+1)}\Theta^{2(p+1)} = E, \tag{2.7}$$

其中， E 沿方程 (2.6) 的经典解保持不变。$(\Theta,\ \Theta')$ 平面上的原点是一个鞍点。对于每个 $p > 0$，在能级 $E = 0$ 处存在唯一的（除平移外）正同宿轨道。同宿轨道可明确表示为

$$\Theta_h(t + t_0) = \frac{e^{\frac{t+t_0}{p}}}{(1 + \alpha_p e^{2(t+t_0)})^{\frac{1}{p}}}, \qquad \alpha_p := \frac{p^2}{4\,(1+p)}, \tag{2.8}$$

其中， $t_0 \in \mathbb{R}$ 是任意平移参数。由于

$$\Theta_h(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{p}}[1 + \mathcal{O}(e^{2t})] & \text{as} \quad t \to -\infty, \\ \alpha_p{}^{-\frac{1}{p}} e^{-\frac{t}{p}}[1 + \mathcal{O}(e^{-2t})] & \text{as} \quad t \to +\infty, \end{cases} \tag{2.9}$$

通过与 (2.5) 比较可知，当 $t \to -\infty$ 时， $\Psi_b(t) \sim b\Theta_h(t)$，此时 (2.8) 中的平移参数 t_0 被唯一确定为 $t_0 = p\log\, b$。取 t_0为此值后，我们注意到，经过变换 (2.3) 后的 $\Theta_h(t + p\log\, b)$ 与 (1.4) 给出的代数孤子 $U_b(r)$ 重合。

接下来，我们介绍方程 (2.4) 的另一类解析解，它们在 $t \to +\infty$ 时衰减至零，称为 c 族，并记作 $\Psi_c(t)$。我们将在第 4 节证明，c 族与方程 (2.4) 的线性化版本所对应的线性二阶非自治方程的衰减解十分接近

$$\Upsilon''(t) - \frac{1}{p^2}\Upsilon(t) + \lambda e^{2t}\Upsilon(t) - e^{4t}\Upsilon(t) = 0. \tag{2.10}$$

通过变量代换

$$z = e^{2t}, \quad \Upsilon(t) = z^{\frac{1}{2p}} e^{-\frac{1}{2}z} u(z), \tag{2.11}$$

二阶方程 (2.10) 化为合流超几何方程（亦称 Kummer 方程）：

$$zu''(z) + (\beta - z)\,u'(z) - \alpha u(z) = 0, \tag{2.12}$$

参数 α 和 β 由 (1.3) 给出。Kummer 方程 (2.12) 的两个特殊解分别为 Kummer 函数 $\mathfrak{M}(z;\,\alpha,\,\beta)$ 和 Tricomi 函数 $\mathfrak{U}(z;\alpha,\beta)$，它们

定义如下 [1]。Kummer 函数由幂级数定义 s

$$\mathfrak{M}(z;\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \frac{z^k}{k!} \tag{2.13}$$
$$= 1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}\frac{z^3}{3!} + \ldots,$$

因此它被有界为 {v1} 界为 $z \to 0$。Tricomi 函数满足渐近行为

$$\mathfrak{U}(z;\alpha,\beta) \sim z^{-\alpha}\left[1 + \mathcal{O}(z^{-1})\right] \quad \text{as } z \to +\infty, \tag{2.14}$$

因此当 $\alpha > 0$ 时，它按 $z \to +\infty$ 衰减。事实上，对于每个 $\lambda \in$ （$-\infty$, d），我们有

$$\alpha = \frac{p+1}{2p} - \frac{\lambda}{4} > \frac{p+1}{2p} - \frac{d}{4} = \frac{p+1}{2p} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} = 0, \tag{2.15}$$

从而在能量临界情形下 $\alpha > 0$ 得到满足。根据 [1, 13.1.3], ，Tricomi 函数可以表示为叠加形式

$$\mathfrak{U}(z;\alpha,\beta) = \frac{\pi}{\sin\pi\beta}\left[\frac{\mathfrak{M}(z;\alpha,\beta)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(\beta)} - z^{1-\beta}\frac{\mathfrak{M}(z;1+\alpha-\beta,2-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\beta)}\right], \tag{2.16}$$

这对 $\beta \notin \mathbb{Z}$ 成立，但在极限 $\beta \to \mathbb{Z}$ 下也可以使用。利用恒等式

$$\frac{\pi}{\sin\pi z} = \Gamma(1-z)\Gamma(z), \quad z \notin \mathbb{Z}. \tag{2.17}$$

我们可以将 (2.16) 改写为 $\beta \notin \mathbb{N}$：

$$\mathfrak{U}(z;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)}\mathfrak{M}(z;\alpha,\beta) + z^{1-\beta}\frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)}\mathfrak{M}(z;1+\alpha-\beta,2-\beta). \tag{2.18}$$

根据 [1, 13.1.6], ，若 $\beta = n+1 \in \mathbb{N}$，则

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}(z;\alpha,n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!\Gamma(\alpha-n)}&(\mathfrak{M}(z;\alpha,n+1)\log z \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(n+1)_k}\frac{z^k}{k!}[\psi(\alpha+k) - \psi(1+k) - \psi(1+n+k)]) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!(1-\alpha+k)_{n-k}}{(n-k)!}z^{-k},\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中 $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$。

通过变换 (2.11)，Tricomi 函数确定了线性方程 (2.10) 的一个合适解：

$$\Upsilon_h(t) = e^{\frac{t}{p}}e^{-\frac{1}{2}e^{2t}}\mathfrak{U}(e^{2t};\alpha,\beta). \tag{2.20}$$

该解被视为 c 族的首阶近似，使得 $\Psi_c(t) \sim c\Upsilon_h(t)$ 在 $t \to +\infty$ 时满足以下渐近行为

$$\Psi_c(t) \sim ce^{-\frac{(2-\lambda)t}{2}} e^{-\frac{1}{2}e^{2t}} \quad \text{as } t \to +\infty. \tag{2.21}$$

定理 1.1 的基态是满足 (2.2) 的初值问题(2.1)的唯一解与满足以下衰减行为的唯一解的连接

$$f(r) \sim cr^{-(1+\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{2})} e^{-\frac{1}{2}r^2} \quad \text{as } r \to \infty, \tag{2.22}$$

这一点由 (2.3) 和 (2.21) 推出。(2.2) 与 (2.22) 之间的连接仅在 $c = c(b)$ 和 $\lambda = \lambda(b)$ 取某些特定值时存在。因此，主要问题是在渐近极限 $b \to \infty$ 下求出并论证 $c(b)$ 和 $\lambda(b)$ 的解析表达式。

3. Persistence of the b-family of solutions族解的延续性

在满足 (2.5) 的微分方程 (2.4) 的 b族解 Ψ_b 的邻域内，考虑满足 (2.9) 的微分方程 (2.6) 的同宿轨道 Θ_h 。由于比较给出，当 $t \to -\infty$ 时， $\Psi_b(t) \sim b\Theta_h\, t(t + p\log\, b)$，我们将 $\Psi_b(t)$ 平移 $-p\log\, b$，并引入扰动项

$$\gamma(t) := \Psi_b(t - p\log b) - \Theta_h(t),$$

其满足

$$\mathcal{L}\gamma = f_b(\Theta_h + \gamma) - N(\Theta_h, \gamma), \tag{3.1}$$

其中 $f_b(t)\colon = -\lambda b^{-2p}e^{2t} + b^{-4p}e^{4t}$,

$$(\mathcal{L}\gamma)(t) := \gamma''(t) - \frac{1}{p^2}\gamma(t) + (2p+1)|\Theta_h(t)|^{2p}\gamma(t),$$

and

$$N(\Theta_h, \gamma) := |\Theta_h + \gamma|^{2p}(\Theta_h + \gamma) - |\Theta_h|^{2p}\Theta_h - (2p+1)|\Theta_h|^{2p}\gamma.$$

注 3.1. 由于对所有 $t \in \mathbb{R}$， $\Theta_h(t)$ 均为正，并且已证明在我们分析 b解族持续性的区域 t 内， $\Theta_h(t) + \gamma(t)$ 为正，因此我们可以省略在 $\mathcal{L}\gamma$ 和 $N(\Theta_h, \gamma)$ 中书写绝对值符号。

根据以下命题，当 $p \in (0, 1\,2)$ 时，非线性项 $N(\Theta_h, \gamma)$ 关于 γ 是超线性的；当 $p \geq \frac{1}{2}$ 时，它是二次的。

命题 3.1. 固定 $p > 0$ 和 $a > 0$。若 $F\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ 定义为

$$F(x) := (a + x)^{2p+1} - a^{2p+1} - (2p+1)a^{2p}x,$$

那么存在一个正常数 $C > 0$，使得对于所有 $x \in [-a, a]$

$$|F(x)| \leq \begin{cases} C|x|^{2p+1}, & \text{if } p \in (0, \frac{1}{2}), \\ C|x|^2, & \text{if } p \in [\frac{1}{2}, \infty). \end{cases} \tag{3.2}$$

证明。 若无 一般性不失，我们假设 $a = 1$，这是由于缩放变换 :

$$F(x) = a^{2p+1}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{2p+1} - 1 - (2p+1)\frac{x}{a}\right].$$

注意到 $F''(x) = 2p(2p+1)(1+x)^{2p-1}$，因此若 $2p-1 \geq 0$，则 F'' 在 $[-1,1]$上有界，且 (3.2) 的第二行由泰勒定理得出。若 $2p-1 < 0$，则 F'' 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上有界，因此

$$|F(x)| \leq C|x|^2 \leq C|x|^{2p+1}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],$$

对于某个正常数 C。当 $|x| \in [\frac{1}{2},1]$时，我们有 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} \leq |x|^{2p+1}$，因此

$$|F(x)| = \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} 2^{2p+1}|F(x)| \leq C|x|^{2p+1}, \quad |x| \in \left[\frac{1}{2},1\right],$$

对于另一个正常数 C。上述两个估计给出了 (3.2) 的第二行。 □

齐次方程 $\mathcal{L}\gamma = 0$ 有两个线性无关解。由于自治方程 (2.6) 的平移对称性，第一个解为 $\Theta_h'(t)$。另一个记作 $\Sigma(t)$ 的解可由朗斯基关系得到

$$\Theta_h'(t)\Sigma'(t) - \Theta_h''(t)\Sigma(t) = \Sigma_0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

其中 $\Sigma_0 \neq 0$ 为常数。我们取 $\Sigma_0 = 1$ 对 $\Sigma(t)$ 进行归一化。将 (2.9) 代入 (3.3)，可得

$$\Sigma(t) = -\frac{p^2}{2}\begin{cases} e^{-\frac{t}{p}}[1+\mathcal{O}(e^{2t})] & \text{as} \quad t \to -\infty, \\ \alpha_p^{\frac{1}{p}} e^{\frac{t}{p}}[1+\mathcal{O}(e^{-2t})] & \text{as} \quad t \to +\infty. \end{cases} \tag{3.4}$$

利用齐次方程 $\mathcal{L}\gamma = 0$的两个线性无关解 Θ_h' 和 Σ，我们将 (3.1) 改写为关于 γ的积分方程:

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(\Theta_h'(t')\Sigma(t) - \Theta_h'(t)\Sigma(t')\right)\left[f_b(t')\left(\Theta_h(t')+\gamma(t')\right) - N\left(\Theta_h(t'),\gamma(t')\right)\right]dt', \tag{3.5}$$

其中，根据 $\gamma(t)$ 随 $t \to -\infty$ 趋于无穷而比 $\Theta_h'(t)$ 更快地衰减至零这一要求，自由解 $c_1\Theta_h'(t) + c_2\Sigma(t)$ 被设为零。

在半无限区间 $(-\infty, T + ap\log\, b]$ 上，扰动项 γ 在 L^∞ 范数下可估计为小量，其中 $T > 0$和 $a > 0$固定，右端点随 $b \to \infty$渐近趋于 $+\infty$ 。下面的引理给出了持久性结果: 当 $t \in (-\infty, T + ap\log\, b]$时，解 $\Psi_b(t - p\log\, b)$ 仍与主导项 $\Theta_h(t)$ 接近。

引理 3.1。 固定 $p \in (0,1]$和 $\lambda \in \mathbb{R}$。对于任意固定的 $T > 0$和 $a \in (0, \frac{p}{1+p})$，存在$b_{T,a} > 0$和 $C_{T,a} > 0$，使得满足渐近行为 (2.5) 的二阶方程 (2.4)的唯一解 $\Psi_b(t)$ 对于 $t \in (-\infty, T + ap\log\, b]$ 及任意 $b \geq b_{T,a}$满足:

$$|\Psi_b(t - p\log b) - \Theta_h(t)| \leq C_{T,a} b^{-2p(1-a)} e^{\frac{t}{p}}, \tag{3.6}$$

其中该界可对 t 求导。

注 *3.2.* 界 *(3.6)* 中的余项在 $[ap\log b, T+ap\log b]$ 上很小，其中任意 $a\in(0,\frac{2p}{1+2p})$ 满足当 $b\to\infty$ 时 $b^{-2p+a(2p+1)}\longrightarrow 0$ 。然而，在同一区间上 $\Theta_h(t)=\mathcal{O}(b^{-a})$，因此对于 $t\in[ap\log b, T+ap\log b]$，若 $a\in(0,\frac{p}{1+p})$ 满足 $b^{-2p+a(2p+1)}\ll b^{-a}$，且 b 足够大，则余项 $\gamma(t)$ 小于主导项 $\Theta_h(t)$ 。

证明。为了消除积分方程 (3.5) 中积分核在 $t\to-\infty$ 时的发散，我们引入变量代换：$\tilde{\Theta}_h(t):=e^{-\frac{t}{p}}\Theta_h(t)$ 和 $\tilde{\gamma}(t):=e^{-\frac{t}{p}}\gamma(t)$。关于 $\tilde{\gamma}$ 的新积分方程可视为不动点方程 $\tilde{\gamma}=A\tilde{\gamma}$，其中

$$(A\tilde{\gamma})(t):=\int_{-\infty}^{t}K(t,t')\left[f_b(t')(\tilde{\Theta}_h(t')+\tilde{\gamma}(t'))-e^{2t'}N(\tilde{\Theta}_h(t'),\tilde{\gamma}(t'))\right]dt', \tag{3.7}$$

其中积分核定义为

$$K(t,t'):=e^{\frac{t'}{p}}\Theta_h'(t')e^{-\frac{t}{p}}\Sigma(t)-e^{-\frac{t}{p}}\Theta_h'(t)e^{\frac{t'}{p}}\Sigma(t'),\quad t'\le t.$$

由 Θ_h 和 Σ的渐近行为 (2.9) 和 (3.4) 可知，对每个 $t\in\mathbb{R}$，积分核均有界，且满足

$$|K(t,t')|\le C\left(1+e^{-\frac{2}{p}(t-t')}\right),\quad t'\le t,$$

对某个正常数 C成立。因此，由于 (3.7) 中的积分是在 t' 上从 $-\infty$ 到 t进行的，核 $K(t,t')$ 有界。此外，由 (2.9) 可得 Θ_h 的下界：

$$\tilde{\Theta}_h(t)\ge C_{T,a}b^{-2a},\quad t\in(-\infty,T+ap\log b),$$

对某个正常数 $C_{T,a}$ 成立，该常数依赖于 T 和 a，且对所有充分大的 b均成立。我们将证明，积分算子 A 在巴拿赫空间$L^\infty(-\infty,T+ap\log b)$ 中的一个小闭球域上是压缩映射，该空间配备范数 $\|\cdot\|_\infty$。

情形 $p\in(0,\frac{1}{2})$。由于 $\tilde{\Theta}_h(t)$ 对于 $t\in(-\infty,T+ap\log b)$ 有下界，根据命题 3.1，若对所有充分大的 b，$\|\tilde{\gamma}\|_\infty\ll b^{-2a}$ 成立，则

$$\|N(\tilde{\Theta}_h,\tilde{\gamma})\|_\infty\le C\|\tilde{\gamma}\|_\infty^{2p+1}, \tag{3.8}$$

对于某个正常数 C。我们使用 $f_b(t):=b^{-2p}e^{2t}[-\lambda+b^{-2p}e^{2t}]$ 并进行估计

$$\begin{aligned}\|A\tilde{\gamma}\|_\infty&\le C\left[(1+\|\tilde{\gamma}\|_\infty)\int_{-\infty}^{T+ap\log b}|f_b(t')|dt'+\|\tilde{\gamma}\|_\infty^{2p+1}\int_{-\infty}^{T+ap\log b}e^{2t'}dt'\right]\\&\le C\left[(1+\|\tilde{\gamma}\|_\infty)\,b^{-2p(1-a)}+b^{2ap}\|\tilde{\gamma}\|_\infty^{2p+1}\right],\end{aligned}$$

其中正常数 C 可以在不同的行之间变化。如果 $\|\tilde{\gamma}\|_\infty \leq 2Cb^{-2p(1-a)}$，那么

$$\begin{aligned}\|A\tilde{\gamma}\|_\infty &\leq C\left[b^{-2p(1-a)} + 2Cb^{-4p(1-a)} + (2C)^{2p+1}b^{-2p(1-2a(p+1)+2p)}\right] \\ &\leq 2Cb^{-2p(1-a)},\end{aligned}$$

其中我们使用了 $2p(1-a) < 2p(1-2a(p+1)+2p)$，若 $a \in (0, \frac{2p}{1+2p})$。由于 $2a < 2p(1-a)$，若 $a \in (0, \frac{p}{1+p})$，且 $\frac{p}{1+p} < \frac{2p}{1+2p}$，界 $\|\tilde{\gamma}\|_\infty \leq 2Cb^{-2p(1-a)}$ 确保界 $\|\tilde{\gamma}\|_\infty \ll b^{-2a}$ 的有效性，从而可以使用界 (3.8)。类似的计算表明，对于 $L^\infty(-\infty, T + ap\log b)$ 中同一个小闭球域内的两个函数 $\tilde{\gamma}$ 和 $\tilde{\gamma}'$，我们有

$$\|A\tilde{\gamma} - A\tilde{\gamma}'\|_\infty \leq Cb^{-2p(1-a)}\|\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}'\|_\infty,$$

从而当 b 足够大时，A 是一个压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，存在 A 的唯一不动点 $\tilde{\gamma}$，使得

$$\sup_{t\in(-\infty, T+ap\log b)} |\tilde{\gamma}(t)| \leq 2Cb^{-2p(1-a)}.$$

由于 $\gamma(t) = e^{\frac{t}{p}}\tilde{\gamma}(t)$，我们得到积分方程 (3.5) 的唯一解 $\gamma(t)$ 所满足的界 (3.6)。

情形 $p \in [\frac{1}{2}, 1]$。证明中唯一的区别在于，根据命题 3.1，界被替换为以下界 (3.8)

$$\|N(\tilde{\Theta}_h, \tilde{\gamma})\|_\infty \leq C\|\tilde{\gamma}\|_\infty^2, \tag{3.9}$$

如果对所有充分大的 b 都有 $\|\tilde{\gamma}\|_\infty \ll b^{-2a}$。在此情形下，我们得到估计

$$\begin{aligned}\|A\tilde{\gamma}\|_\infty &\leq C\left[(1 + \|\tilde{\gamma}\|_\infty)\, b^{-2p(1-a)} + b^{2ap}\|\tilde{\gamma}\|_\infty^2\right], \\ &\leq C\left[b^{-2p(1-a)} + 2Cb^{-4p(1-a)} + (2C)^2 b^{-2p(2-3a)}\right] \\ &\leq 2Cb^{-2p(1-a)},\end{aligned}$$

其中，如果 $a \in (0, \frac{1}{2})$，我们使用了 $2p(1-a) < 2p(2-3a)$。由于当 $a \in (0, \frac{p}{1+p})$ 且 $\frac{p}{1+p} \leq \frac{1}{2}$ 时，$2a < 2p(1-a)$，界 $\|\tilde{\gamma}\|_\infty \leq 2Cb^{-2p(1-a)}$ 确保了界 $\|\tilde{\gamma}\|_\infty \ll b^{-2a}$ 的有效性，对于该界可以使用 (3.9)。其余证明与 $p \in (0, \frac{1}{2})$ 的情形完全相同。□

注 3.3。由引理 *3.1* 的证明可知，当 a 的取值限制在 $a \in (0, \frac{1}{2})$ 内时，界 *(3.6)* 可对每个 $p \geq 1$ 扩展，这适用于 $p \in [\frac{1}{2}, 1]$的情形。

引理 3.1 的结果使我们能够证明以下结论的有效性：

$$\Psi_b(t - p\log b) \sim \Theta_h(t) \sim \alpha_p^{-\frac{1}{p}} e^{-\frac{t}{p}}, \quad t \in [ap\log b, T + ap\log b]$$

由 (2.9) 和 (3.6) 可知。为了获得在同一渐近区域中表现为 $e^{\frac{t}{p}}$ 的修正项，我们需要更详细地分析 γ，并求出其主导阶部分

$\gamma_\circ$ 为此，我们写作 $\gamma = \gamma_h + \delta$，其中主导项 γ_h 满足 $\mathcal{L}\gamma_h = f_b\Theta_h$，并可显式表示为

$$\gamma_h(t) = \Sigma(t)\int_{-\infty}^{t} f_b(t')\Theta_h'(t')\Theta_h(t')dt' - \Theta_h'(t)\int_{-\infty}^{t} f_b(t')\Sigma(t')\Theta_h(t')dt', \tag{3.10}$$

而修正项 δ 满足

$$\mathcal{L}\delta = f_b(\gamma_h+\delta) - N(\Theta_h, \gamma_h+\delta). \tag{3.11}$$

下面的引理给出了关于 γ_h 的比界（3.6）更精确的界。该更精确的界在 $[ap\log b,\ T+ap\log b]$ 上成立，其中 $\Theta_h(t)$ 和 $\Sigma(t)$ 的渐近行为与 $t\to+\infty$ 时的情形有关。

引理 3.2。固定 $p\in(0,1)$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$。对于任意固定的 $T>0$ 和 $a\in(0,\frac{p}{1+p})$，存在 $b_{T,a}>0$ 和 $C_{T,a}>0$，使得 γ_h 在（*3.10*）中对于 $t\in[ap\log b,\ T+ap\log b]$ 以及所有 $b\geq b_{T,a}$ 满足：

- 若 $p\in(0,\frac{1}{2})$，则

$$|\gamma_h(t)| \leq C_{T,a}\left[(|\lambda|b^{-2p(1-a)}+b^{-4p(1-a)})e^{-\frac{t}{p}} + (|\lambda|b^{-2p}+b^{-4p})e^{\frac{t}{p}}\right], \tag{3.12}$$

- 若 $p\in[\frac{1}{2},1)$，则

$$|\gamma_h(t)| \leq C_{T,a}\left[(|\lambda|b^{-2p(1-a)}+b^{-4p(1-a)})e^{-\frac{t}{p}} + (|\lambda|b^{-2p}+b^{-4p(1-a)})e^{\frac{t}{p}}\right], \tag{3.13}$$

其中的界可对 t 求导。

证明。由于对于每个 $t\in\mathbb{R}$，$\Sigma(t)\Theta_h(t)$ 均有界，且与 b 无关，因此 (3.10) 中的第二个积分项可由以下表达式控制：

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{T+ap\log b} f_b(t)\Sigma(t)\Theta_h(t)dt\right| &\leq C\int_{-\infty}^{T+ap\log b}\left(|\lambda|b^{-2p}e^{2t}+b^{-4p}e^{4t}\right)dt\\ &\leq C_{T,a}(|\lambda|b^{-2p(1-a)}+b^{-4p(1-a)}).\end{aligned}$$

根据渐近行为 (2.9)，该估计给出了界 (3.12) 和 (3.13) 中的第一项。另一方面，由于当 $t\to+\infty$ 时，$\Theta_h(t)^2=\mathcal{O}(e^{-\frac{2t}{p}})$，因此 (3.10) 中的第一个积分项可由以下表达式控制：

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{T+ap\log b} f_b(t)\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt\right| &\leq C\int_{-\infty}^{T+ap\log b}\left(|\lambda|b^{-2p}e^{-\frac{2(1-p)}{p}t}+b^{-4p}e^{-\frac{2(1-2p)}{p}t}\right)dt\\ &\leq C_{T,a}(|\lambda|b^{-2p}+b^{-4p+2a\nu_p}),\end{aligned}$$

其中，$\nu_p=0$ 在 $p\in(0,\frac{1}{2})$ 时成立，而 $\nu_p=2p-1$ 在 $p\in[\frac{1}{2},1)$ 时成立。根据渐近行为 (3.4)，这给出了界 (3.12) 和 (3.13) 中的第二项；其中我们还利用了 $4p(1-a)<4p-2a(2p-1)$。□

更精确的界 (3.12) 和 (3.13) 与半无限区间 $(-\infty,\ T+ap\log\ b]$ 上的界 (3.6) 相容，该界可改写为:

$$|\gamma_h(t)| \leq C_{T,a} b^{-2p(1-a)} e^{\frac{t}{p}}, \qquad t \in (-\infty, T + ap\log b]. \tag{3.14}$$

根据以下引理，修正项 δ 估计为小于 γ_h 。

引理 3.3。 固定 $p \in (0,1]$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$。对于任意固定的 $T>0$, $a \in (0, \frac{p}{1+p})$，存在 $b_{T,a}>0$和 $C_{T,a}>0$，使得对于 $t \in (-\infty, T+ap\log\ b]$ 以及所有 $b \geq b_{T,a}$:

- 若 $p \in (0, \frac{1}{2})$，则

$$|\Psi_b(t-p\log b) - \Theta_h(t) - \gamma_h(t)| \leq C_{T,a} b^{-2p[(2p+1)(1-a)-a]} e^{\frac{t}{p}}, \tag{3.15}$$

- 若 $p \in [\frac{1}{2}, 1]$，则

$$|\Psi_b(t-p\log b) - \Theta_h(t) - \gamma_h(t)| \leq C_{T,a} b^{-2p(2-3a)} e^{\frac{t}{p}}, \tag{3.16}$$

其中，这些界可以在 t 中求导。

注记 3.4. 若 $a \in (0, \frac{2p}{1+2p})$对 $p \in (0, \frac{1}{2})$成立，则有

$$2p(1-a) < 2p\left[(2p+1)(1-a) - a\right],$$

因此，比较（*3.14*）与 (3.15) 可知，当 b 足够大时， δ 小于 γ_h 。类似地，若 $a \in (0, \frac{1}{2})$ 对 $p \geq \frac{1}{2}$成立，则有

$$2p(1-a) < 2p(2-3a),$$

因此，比较（*3.14*）与 (3.16) 可知，当b足够大时， δ 小于 γ_h 。在这两种情况下，根据引理 *3.1*，若 $a \in (0, \frac{p}{1+p})$，则还可得 γ_h 小于 Θ_h ，其中$\frac{p}{1+p}$ ≤最小值$\{\frac{2p}{1+2p}, \frac{1}{2}\}$，当 $p \in (0,1]$时。

证明。 关于 δ 的方程（3.11）可仿照（3.5）写成如下积分方程

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(\Theta_h'(t')\Sigma(t) - \Theta_h'(t)\Sigma(t')\right)\left[f_b(t')\left(\gamma_h(t') + \delta(t')\right) - N\left(\Theta_h(t'), \gamma_h(t') + \delta(t')\right)\right] dt'. \tag{3.17}$$

我们以类似于引理 3.1 的证明的方式继续。通过变量代换

$$\tilde{\Theta}_h(t) := e^{-\frac{t}{p}}\Theta_h(t), \quad \tilde{\gamma}_h(t) := e^{-\frac{t}{p}}\gamma_h(t), \quad \tilde{\delta}(t) := e^{-\frac{t}{p}}\delta(t),$$

我们将关于 δ 的积分方程改写为不动点方程 $\delta = B\delta$，其中

$$(B\tilde{\delta})(t) := \int_{-\infty}^{t} K(t,t')\left[f_b(t')(\tilde{\gamma}_h(t') + \tilde{\delta}(t')) - e^{2t'} N(\tilde{\Theta}_h(t'), \tilde{\gamma}_h(t') + \tilde{\delta}(t'))\right] dt'. \tag{3.18}$$

A （3.7）与 B （3.18）之间唯一实质性的区别在于源项，它决定了 L^∞（$-\infty$， $T+ap$）log b]中闭球域的大小，其中不动点迭代

是收敛的。在（3.18）中，它由线性项 $f_b\tilde{\gamma}_h$ 和非线性项~项 N（Θ_h，$\tilde{\gamma}_h$）的贡献组成。根据（3.14），线性项可估计为

$$\left|\int_{-\infty}^{T+ap\log b} f_b(t)\tilde{\gamma}_h(t)dt\right| \le C\|\tilde{\gamma}_h\|_\infty \int_{-\infty}^{T+ap\log b} |f_b(t)|dt \le Cb^{-4p(1-a)}. \tag{3.19}$$

非线性项的估计取决于 p 的取值。为进行估计，我们将其分解为

$$N(\tilde{\Theta}_h, \tilde{\gamma}_h + \tilde{\delta}) = N(\tilde{\Theta}_h, \tilde{\gamma}_h) + \tilde{N}(\tilde{\Theta}_h, \tilde{\gamma}_h, \tilde{\delta}),$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{N}(\tilde{\Theta}_h, \tilde{\gamma}_h, \tilde{\delta}) &:= N(\tilde{\Theta}_h, \tilde{\gamma}_h + \tilde{\delta}) - N(\tilde{\Theta}_h, \tilde{\gamma}_h)\\ &= (\tilde{\Theta}_h + \tilde{\gamma}_h + \tilde{\delta})^{2p+1} - (\tilde{\Theta}_h + \tilde{\gamma}_h)^{2p+1} - (2p+1)(\tilde{\Theta}_h)^{2p}\tilde{\delta}.\end{aligned}$$

情形 $p \in (0, 1/2)$。由命题 3.1 可得

$$\|N(\tilde{\Theta}_h, \tilde{\gamma}_h)\|_\infty \le C'\|\tilde{\gamma}_h\|_\infty^{2p+1}. \tag{3.20}$$

~由于 $N|_{\delta=0} = 0$ 且

$$\left.\frac{\partial \tilde{N}}{\partial \tilde{\delta}}\right|_{\tilde{\delta}=0} = (2p+1)(\tilde{\Theta}_h + \tilde{\gamma}_h)^{2p} - (2p+1)(\tilde{\Theta}_h)^{2p},$$

对命题 3.1 的证明稍作修改，可得

$$\|\tilde{N}(\tilde{\Theta}_h, \tilde{\gamma}_h, \tilde{\delta})\|_\infty \le C\|\tilde{\gamma}_h\|_\infty^{2p}\|\tilde{\delta}\|_\infty. \tag{3.21}$$

综合估计 (3.19)、(3.20) 和 (3.21)，可得

$$\|B\tilde{\delta}\|_\infty \le C\left(b^{-4p(1-a)} + b^{-2p(1-a)}\|\tilde{\delta}\|_\infty + b^{-2p[(2p+1)(1-a)-a]} + b^{-2p[2p(1-a)-a]}\|\tilde{\delta}\|_\infty\right).$$

由于对每个 $p \in (0, 1/2)$ 都有 $4p(1-a) > 2p[(2p+1)(1-a)-a]$，因此当 b 充分大时，有 $b^{-4p(1-a)} \ll b^{-2p[(2p+1)(1-a)-a]}$~。于是，当 $b \to \infty$ 时，来自非线性项 $N(\Theta_h, \tilde{\gamma}_h)$ 的源项远大于来自 $f_b\tilde{\gamma}_h$ 的源项。因此，若 $\|\tilde{\delta}\|_\infty \le 2Cb^{-2p[2p(1-a)-a]}$，则 $\|B\tilde{\delta}\|_\infty \le 2Cb^{-2p[2p(1-a)-a]}$。此外，当 b 充分大时，B 在 ~$L^\infty(-\infty, T + ap\log b)$ 中同一个小闭球上是压缩映射。因此，存在 B 的唯一不动点 δ 满足 $\|\tilde{\delta}\|_\infty \le 2Cb^{-2p[(2p+1)(1-a)-a]}$，由此得到 $\delta(t) = e^{\frac{t}{p}}\tilde{\delta}(t)$ 的 (3.15)。

情形$p \in [\frac{1}{2}, 1]$。根据命题 3.1，我们有

$$\|N(\tilde{\Theta}_h, \tilde{\gamma}_h)\|_\infty \le C\|\tilde{\gamma}_h\|_\infty^2,$$

同样地，

$$\|\tilde{N}(\tilde{\Theta}_h, \tilde{\gamma}_h, \tilde{\delta})\|_\infty \le C\|\tilde{\gamma}_h\|_\infty\|\tilde{\delta}\|_\infty.$$

采用与前述计算类似的方法，我们得到

$$\|B\tilde{\delta}\|_\infty \leq C' \left(b^{-4p(1-a)} + b^{-2p(1-a)} \|\tilde{\delta}\|_\infty + b^{-2p(2-3a)} + b^{-2p(1-2a)} \|\tilde{\delta}\|_\infty \right).$$

由于 $4p(1-a) > 2p(2-3a)$，我们有 $b^{-4p(1-a)} \ll b^{-2p(2-3a)}$，对充分大的 b 成立，因此再次有~，来自非线性项 $N(\Theta_h, \tilde{\gamma}_h)$ 的源项远大于来自 $f_b \tilde{\gamma}_h$ 的源项，当 $b \to \infty$ 时也是如此。类似地，对于充分大的 b，存在 B 的唯一不动点 $\tilde{\delta}$，满足 $\|\tilde{\delta}\|_\infty \leq 2Cb^{-2p(2-3a)}$，由此得到 $\delta(t) = e^{\frac{t}{p}} \tilde{\delta}(t)$ 的 (3.16)。□

与引理 3.2 类似，我们可以为 δ 找到比界 (3.15) 和 (3.16) 更精确的界。下面的引理给出了这一结果，其证明可由引理 3.3 中得到的估计推出。

引理 3.4. 固定 $p \in (0, 1)$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$。对于任意固定的 $T > 0$ 和 $a \in (0, \frac{p}{1+p})$，存在 $b_{T,a} > 0$和 $C_{T,a} > 0$，使得 δ 在 *(3.17)* 中满足：对于 $t \in [ap \log b、 T + ap\log b]$ 以及所有 $b \geq b_{T,a}$：

- 若 $p \in (0, \frac{1}{2})$，则

$$|\delta(t)| \leq C_{T,a}(|\lambda| b^{-2p} + b^{-4p})^{2p+1} b^{2ap} e^{\frac{t}{p}}, \tag{3.22}$$

- 若 $p \in [\frac{1}{2}, 1)$，则

$$|\gamma_h(t)| \leq C_{T,a}(|\lambda| b^{-2p} + b^{-4p(1-a)})^2 b^{2ap} e^{\frac{t}{p}}, \tag{3.23}$$

其中，这些界可关于 t 求导。

证明。对于 $p \in (0, \frac{1}{2})$，界 (3.12) 中含有 $e^{-\frac{t}{p}}$ 的第一项远小于在 $[ap \log b, T + ap \log b]$ 上含有 $e^{\frac{t}{p}}$ 的第二项，因此可以忽略。另一方面，界 (3.12) 中的第二项可扩展至半无限区间 $(-\infty, T + ap\log b]$，从而可以写出相较于 (3.6) 更精细的界，其形式为

$$|\gamma_h(t)| \leq C_{T,a}(|\lambda| b^{-2p} + b^{-4p}) e^{\frac{t}{p}}, \quad t \in (-\infty, T + ap \log b].$$

界 (3.22) 可通过分析积分方程 (3.17) 得到：在引理 3.3 的证明中使用变换转至波浪号变量，并对非线性项 N 使用估计 (3.20)；该项远大于来自 f_b 的源项。

对于 $p \in [\frac{1}{2}, 1)$，证明类似，但我们使用

$$|\gamma_h(t)| \leq C_{T,a}(|\lambda| b^{-2p} + b^{-4p(1-a)}) e^{\frac{t}{p}}, \quad t \in (-\infty, T + ap \log b].$$

以及关于非线性项的估计 (3.21) N，它仍远大于来自 f_b 的源项。□

4. Persistence of the c-family of solutions

考虑满足 (2.21) 的微分方程 (2.4) 的 c-解族 Ψ_c，并研究其在由 (2.20) 给出的线性方程 (2.10) 的解 Υ_h 附近的情形。比较得到$\Psi_c(t) \sim c\Upsilon_h(t)$，其中 $t \to +\infty$。修正项 $\eta(t) := \Psi_c(t) - c\Upsilon_h(t)$ 满足

$$\mathcal{M}\eta = -\left|c\Upsilon_h + \eta\right|^{2p}(c\Upsilon_h + \eta), \tag{4.1}$$

其中

$$(\mathcal{M}\eta)(t) := \eta''(t) - \frac{1}{p^2}\eta(t) + \lambda e^{2t}\eta(t) - e^{4t}\eta(t).$$

齐次方程 $\mathcal{M}\eta = 0$ 有两个线性无关解。一个解是Υ_h 由（2.20）给出的。另一个解记为 Υ_g，可由归一化朗斯基关系得到

$$\Upsilon_h(t)\Upsilon_g'(t) - \Upsilon_h'(t)\Upsilon_g(t) = 1. \tag{4.2}$$

由于由（2.21）可得

$$\Upsilon_h(t) \sim e^{-\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)t}e^{-\frac{1}{2}e^{2t}}, \quad \text{as } t \to +\infty, \tag{4.3}$$

对朗斯基关系（4.2）积分可得

$$\Upsilon_g(t) \sim \frac{1}{2}e^{-\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)t}e^{\frac{1}{2}e^{2t}}, \quad \text{as } t \to +\infty. \tag{4.4}$$

给定两个线性无关解 Υ_h 和 Υ_g，我们将 (4.1) 改写为关于 η 的积分方程:

$$\eta(t) = \int_t^\infty \left(\Upsilon_h(t')\Upsilon_g(t) - \Upsilon_h(t)\Upsilon_g(t')\right)\left|c\Upsilon_h(t') + \eta(t')\right|^{2p}(c\Upsilon_h(t') + \eta(t'))dt', \tag{4.5}$$

其中，将自由解 $c_1\Upsilon_h + c_2\Upsilon_g$ 设为零，以保证 $\eta(t)$ 随 $t \to +\infty$ 趋于无穷时比 $\Upsilon_h(t)$ 更快地衰减至零。

下面的引理描述了 $\eta(t)$ 对于 $t \in [0,\infty)$ 的大小。

引理 4.1。固定 $\lambda \in (-\infty、2]$ 和 $p > 0$。那么，存在一些常数 $C > 0$ 和 $c_0 > 0$，使得对于 $t \in [0,\infty)$ 和 $c \in (-c_0、c_0)$，有

$$|\Psi_c(t) - c\Upsilon_h(t)| \le C|c|^{2p+1}e^{-(1-\frac{\lambda}{2})t}e^{-\frac{1}{2}e^{2t}}, \tag{4.6}$$

其中，该界可以逐项求导。

证明。为了在积分方程 (4.5) 中得到有界核，我们首先引入变量代换

$$\tilde{\Upsilon}_h(t) := e^{(1-\frac{\lambda}{2})t}e^{\frac{1}{2}e^{2t}}\Upsilon_h(t), \qquad \tilde{\eta}(t) := e^{(1-\frac{\lambda}{2})t}e^{\frac{1}{2}e^{2t}}\eta(t),$$

将其应用于 (4.5) 后，得到积分方程 $\tilde{\eta} = E\tilde{\eta}$，其中

$$(E\tilde{\eta})(t) := \int_t^\infty \hat{K}(t,t')e^{-p(2-\lambda)t' - pe^{2t'} - 2t'}\hat{N}(c\tilde{\Upsilon}_h(t'), \tilde{\eta}(t'))dt', \tag{4.7}$$

ˆ ˆ，且核 K 和非线性项 N 定义为

$$\hat{K}(t,t') := e^{-(1-\frac{\lambda}{2})(t'-t)+2t'+\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{2t'})}(\Upsilon_h(t')\Upsilon_g(t) - \Upsilon_h(t)\Upsilon_g(t')),$$

and

$$\hat{N}(c\tilde{\Upsilon}_h,\tilde{\eta}) := |c\tilde{\Upsilon}_h+\tilde{\eta}|^{2p}(c\tilde{\Upsilon}_h+\tilde{\eta}).$$

利用渐近　行为 (4.3) 和 (4.4)，我们得到存在 $C>0$，使得

$$|\hat{K}(t,t')| \leq C(1+e^{\phi(t,t')}), \qquad 0 \leq t \leq t'. \tag{4.8}$$

其中 $\phi(t,t') := \lambda(t'-t) - e^{2t'}(1-e^{-2(t'-t)})$。由于 $\phi(t,t') \to -\infty$ 当 $t' \to +\infty$ 时，而 $\phi(t,t')$ 在 t' 处于 $\lambda - 2e^{2t'} = 0$ 取得极值，该点在 $\mathbb{R}$ 之外（若 $\lambda \in (-\infty, 0]$，且位于 $\mathbb{R}_-$ 上；若 $\lambda \in (0,2)$ 则不然），我们得出 $\max_{t' \in [t,\infty)} e^{\phi(t,t')} = e^{\phi(t,t)} = 1$ 对于 $t \geq 0$ 成立。因此，核 ˆ$K(t,t')$ 对每个 $0 \leq t \leq t' < \infty$ 都有界。另一方面，由于对每个 $p>0$，ˆ$N(c\Upsilon_h,\tilde{\eta})$ 都是一个 C^1 函数，因此非线性项满足以下界：

$$|\hat{N}(c\tilde{\Upsilon}_h,\tilde{\eta})| \leq C|c|^{2p}(|c|+|\tilde{\eta}|), \quad \text{as long as } |\tilde{\eta}| \leq C, \tag{4.9}$$

其中常数 $C>0$ 与 c 无关。

为了使用巴拿赫不动点定理，我们首先估计 $E\tilde{\eta}$ 在 $\tilde{\eta}$ 属于 $L^\infty(0, \infty)$ 中一个小闭球域时的大小。由于 (4.7) 中的 $e^{-p(2-\lambda)t-pe^{2t}-2t}$ 在 $[0,\infty)$ 上绝对可积，利用 (4.8) 和 (4.9) 可得

$$\|E\tilde{\eta}\|_\infty \leq C|c|^{2p}(|c|+\|\tilde{\eta}\|_\infty),$$

其中常数 $C>0$ 与 c 无关。因此，只要将 $|c|$ 取充分小，算子 E 就会将半径为 $2C|c|^{2p+1}$ 的闭球映射到自身。

类似地，由命题 3.1 可知，对于ˆ$L^\infty(0,\infty)$中同一个小闭球内的任意 $\tilde{\eta}_1$ 和 $\tilde{\eta}_2$，N 是满足以下条件的Lipschitz函数

$$\|\hat{N}(c\tilde{\Upsilon}_h,\tilde{\eta}_1) - \hat{N}(c\tilde{\Upsilon}_h,\tilde{\eta}_2)\|_\infty \leq C|c|^{2p}\|\tilde{\eta}_1-\tilde{\eta}_2\|_\infty, \tag{4.10}$$

由此得到

$$\|E\tilde{\eta}_1 - E\tilde{\eta}_2\|_\infty \leq C|c|^{2p}\|\tilde{\eta}_1-\tilde{\eta}_2\|_\infty,$$

因此，当 $|c|$足够小时，算子 E 是一个压缩映射。根据Banach不动点定理，积分方程 $\tilde{\eta} = E\tilde{\eta}$ 存在唯一解 $\tilde{\eta}(t) \in L^\infty(0,\infty)$，且满足 $\|\tilde{\eta}\|_\infty \leq 2C|c|^{2p+1}$。展开$\eta(t)$的变换后，由此估计可得（4.6）。□

利用引理 4.1 的结果，现在我们可以将 $\eta(t)$的估计推广到 t取较大负值的情形。

引理 4.2. 取 $\lambda \in (-\infty, 2]$, $p>0$ 和 $a \in (0,1)$。那么，存在 $b_0>0$ 和 $C>0$，使得对每个 $b \geq b_0$，都存在 $c_0>0$，满足当 $t \in [-(1-a)p\log b, 0]$ 和 $c \in (-c_0 b^{-(1-a)}, c_0 b^{-(1-a)})$ 时，有

$$|\Psi_c(t) - c\Upsilon_h(t)| \leq C|c|^{2p+1} b^{2p(1-a)} e^{-\frac{t}{p}}, \tag{4.11}$$

其中，该界可以逐项求导。

证明。 我们将方程 (4.1) 改写为关于 $t \in [-(1-a)p\log\ b,\ 0]$ 的积分方程:

$$\eta(t) = \left(\Upsilon_g'(0)\Upsilon_h(t) - \Upsilon_h'(0)\Upsilon_g(t)\right)\eta(0) + \left(\Upsilon_h(0)\Upsilon_g(t) - \Upsilon_g(0)\Upsilon_h(t)\right)\eta'(0) + \int_t^0 \left(\Upsilon_h(t')\Upsilon_g(t) - \Upsilon_h(t)\Upsilon_g(t')\right)\left(c\Upsilon_h(t') + \eta(t')\right)\left|c\Upsilon_h(t') + \eta(t')\right|^{2p} dt', \quad (4.12)$$

其中 $|\eta(0)| + |\eta'(0)| \le C|c|^{2p+1}$，由引理 4.1 得出。利用散射关系 (2.18) 和变换 (2.20)，我们得到 $\Upsilon_h(t)$ 的以下渐近行为:

$$\Upsilon_h(t) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{t}{p}}, \quad \text{as } t \to -\infty, \quad (4.13)$$

其中 $\alpha > 0$ 由 (2.15) 得出。朗斯基关系 (4.2) 蕴含 $\Upsilon_g(t)$ 的以下渐近行为:

$$\Upsilon_g(t) \sim \frac{p\Gamma(\alpha)}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} e^{\frac{t}{p}}, \quad \text{as } t \to -\infty. \quad (4.14)$$

当 $t \to -\infty$ 时， $\Upsilon_h(t)$ 的发散行为决定了应采用的变换的正确形式；在本例中，该变换为:

$$\tilde{\Upsilon}_h(t) := e^{\frac{t}{p}}\Upsilon_h(t), \quad \tilde{\Upsilon}_g(t) := e^{\frac{t}{p}}\Upsilon_g(t), \quad \tilde{\eta}(t) := e^{\frac{t}{p}}\eta(t).$$

将其应用于 i 积分方程 (4.12) 得到不动点方程 $\tilde{\eta} = \mathcal{F}\tilde{\eta}$，其中

$$(\mathcal{F}\tilde{\eta})(t) := \left(\Upsilon_g'(0)\tilde{\Upsilon}_h(t) - \Upsilon_h'(0)\tilde{\Upsilon}_g(t)\right)\eta(0) + \left(\tilde{\Upsilon}_h(0)\Upsilon_g(t) - \Upsilon_g(0)\tilde{\Upsilon}_h(t)\right)\eta'(0) + \int_t^0 e^{-2t'}\tilde{K}(t,t')\hat{N}(c\tilde{\Upsilon}_h(t'), \tilde{\eta}(t'))dt', \quad (4.15)$$

其中

$$\tilde{K}(t,t') := e^{\frac{t-t'}{p}}\left(\Upsilon_h(t')\Upsilon_g(t) - \Upsilon_h(t)\Upsilon_g(t')\right)$$

ˆ且 N 与引理 4.1 的证明中相同。

˜我们接下来在空间 $L^\infty(-(1-a)p\log\ b,\ 0)$ 中估计 $\mathcal{F}\tilde{\eta}$ 的每一项。由于当 $t \in (-\infty, 0]$ 和 $|\eta(0)| + |\eta'(0)| \le C|c|^{2p+1}$ 时， Υ_h 和 $\tilde{\Upsilon}_g$ 有界，因此可得

$$\left|\left(\Upsilon_g'(0)\tilde{\Upsilon}_h(t) - \Upsilon_h'(0)\tilde{\Upsilon}_g(t)\right)\eta(0) + \left(\tilde{\Upsilon}_h(0)\Upsilon_g(t) - \Upsilon_g(0)\tilde{\Upsilon}_h(t)\right)\eta'(0)\right| \le C|c|^{2p+1}.$$

此外，如果 $t \ll -1$，渐近式 (4.13) 和 (4.14) 允许我们将 (4.15) 中最后一项的大小估计为

$$\begin{aligned}\left|\int_t^0 e^{-2t'}\tilde{K}(t,t')\hat{N}(c\tilde{\Upsilon}_h(t'), \tilde{\eta}(t'))dt'\right| &\le C|c|^{2p}\int_t^0 e^{-2t'}(1 + e^{-\frac{2}{p}(t'-t)})(|c| + |\tilde{\eta}(t')|)dt' \\ &\le C|c|^{2p}b^{2p(1-a)}(|c| + \|\tilde{\eta}\|_\infty),\end{aligned}$$

其中我们用到了 满足 (4.9) 的 $\hat{}N(c\tilde{\Upsilon}_h,\ \tilde{\eta})$ 的 C^1 性质。这两个估计给出

$$\|\mathcal{F}\tilde{\eta}\|_\infty \le C|c|^{2p} b^{2p(1-a)} \left(|c| + \|\tilde{\eta}\|_\infty\right),$$

当 b 的值足够大时。通过适当减小满足 $|c| < c_0 b^{-(1-a)}$ 的 $|c|$ 的值，可以控制 $b^{2p(1-a)}$ 在 b 较大时的发散行为，其中 $c_0 >$0 足够小。因此，我们看到算子 $\mathcal{F}$ 将 $\hat{}L^\infty$(–(1 − a)$p$log b, 0) 中半径为 $2C|c|^{2p+1} b^{2p(1-a)}$ 的闭球映射到其自身。此外，由于 N 是满足 (4.10) 的 Lipschitz函数，如果 $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ 属于同一个球域，那么

$$\|\mathcal{F}\eta_1 - \mathcal{F}\eta_2\|_\infty \le C|c|^{2p} b^{2p(1-a)} \|\tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_2\|_\infty,$$

因此，只要 $c_0 > 0$ 足够小且 $|c| < c_0 b^{-(1-a)}$，算子 $\mathcal{F}$ 就是压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，存在唯一的 $\tilde{\eta} \in L^\infty$(–(1 − a)$p$log b, 0) 满足

$$\sup_{t\in[-(1-a)p\log b, 0]} |\tilde{\eta}(t)| \le C|c|^{2p+1} b^{2p(1-a)},$$

由变换 η(t) $= e^{-\frac{t}{p}} \tilde{\eta}$(t)，可得界 (4.11)。 □

5. Matching solutions: the proof of Theorem 1.1

现在，我们已经具备证明定理 1.1 所需的全部估计。在 Emden-Fowler变量 (2.3) 下，定态Gross–Pitaevskii方程 (1.1) 的基态 $u = u_b$ 在 $t \to -\infty$ 和 $t \to +\infty$ 处均呈衰减行为，对每个 $b > 0$，只要 $\lambda = \lambda$(b) 即如此。换言之，它出现在两个解族的交点处，其中

$$\Psi_b(t) = \Psi_{c(b)}(t), \qquad t \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

其中某个 $\lambda = \lambda$(b) 和 $c = c$(b) 满足上述条件。这使我们能够在 $t = T$ –(1 − a)$p$log b时，对变化的 $T > 0$ 及足够大的 b，使用 Ψ_b(t) 的渐近行为 (3.15) 和 (3.16)，以及 Ψ_c(t) 的渐近行为 (4.11)。根据 (5.1) 令渐近行为相等，可得关于参数 λ 和 c的两个隐式方程。

变换 (2.3) 后，由界 (3.6) 及 $T = 0$ 可得界 (1.6)。变换 (2.3) 后，按相反顺序由界 (4.6) 和 (4.11) 可得界 (1.7) 和 (1.8)。对于较大的 b，得到 λ(b) 和 c(b) 的渐近表示后，定理 1.1 的证明即告完成。

我们固定 $p \in$(0，1)、$T > 0$ 和 $a \in$(0，$\frac{p}{1+p}$)。对于充分大的 $b \ge b_{T,\ a}$，我们考虑矩形 $[0, 2] \times [0, c_0 b^{-(1-a)}]$ 中的 (λ，c)，使得引理 3.4 和引理 4.2 均可应用。

根据引理 3.4，对于 $t \in [ap\log\ b,\ T + ap\log\ b]$,

$$\Psi_b(t - p\log b) = \Theta_h(t) + \gamma_h(t) + \mathcal{O}(F(\lambda, b) b^{2ap} e^{\frac{t}{p}}), \tag{5.2}$$

其中

$$F(\lambda, b) := \begin{cases} (|\lambda| b^{-2p} + b^{-4p})^{2p+1}, & p \in (0, \frac{1}{2}), \\ (|\lambda| b^{-2p} + b^{-4p(1-a)})^2, & p \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

以及渐近 展开可以在 t 中求导。利用 (3.10)，我们可以将 (5.2) 写成 s

$$\begin{aligned}\Psi_b(t-p\log b)=&\Theta_h(t)+\Sigma(t)\int_{-\infty}^{t}f_b(t')\Theta_h'(t')\Theta(t')dt'\\&-\Theta_h'(t)\int_{-\infty}^{t}f_b(t')\Sigma(t')\Theta_h(t')dt'+\mathcal{O}(F(\lambda,b)b^{2ap}e^{\frac{t}{p}}).\end{aligned}$$

在 $t=T+ap\log b$ 处计算这些表达式，并利用 $\Theta_h(t)$ 和 $\Sigma(t)$ 在 $t\to+\infty$ 时的渐近关系 (2.9) 和 (3.4)，我们得到

$$\begin{aligned}\Psi_b(T-(1-a)p\log b)=&\alpha_p^{-1/p}e^{-\frac{T}{p}}b^{-a}[1+\mathcal{O}(b^{-2ap})]\\&-\frac{1}{2}p^2\alpha_p^{1/p}e^{\frac{T}{p}}b^a[1+\mathcal{O}(b^{-2ap})]\int_{-\infty}^{T+ap\log b}f_b(t)\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt\\&+\frac{1}{p}\alpha_p^{-1/p}e^{-\frac{T}{p}}b^{-a}[1+\mathcal{O}(b^{-2ap})]\int_{-\infty}^{T+ap\log b}f_b(t)\Sigma(t)\Theta_h(t)dt\\&+\mathcal{O}(F(\lambda,b)b^{2ap+a}e^{\frac{T}{p}}),\end{aligned}$$

其中 $f_b(t)=-\lambda b^{-2p}e^{2t}+b^{-4p}e^{4t}$。由于

$$\left|\int_{-\infty}^{T+ap\log b}f_b(t)\Sigma(t)\Theta_h(t)dt\right|\le C_{T,a}b^{-2p(1-a)}$$

是在引理 3.2 的证明中得到的，因此最终得到渐近公式:

$$\begin{aligned}\Psi_b(T-(1-a)p\log b)=&\alpha_p^{-1/p}e^{-\frac{T}{p}}b^{-a}[1+\mathcal{O}(b^{-2ap},b^{-2p(1-a)})]\\&-\frac{1}{2}p^2\alpha_p^{1/p}e^{\frac{T}{p}}b^a\left[\int_{-\infty}^{T+ap\log b}f_b(t)\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt[1+\mathcal{O}(b^{-2ap})]+\mathcal{O}(F(\lambda,b)b^{2ap})\right].\end{aligned}\tag{5.3}$$

由引理 4.2，对于 $t\in(-(1-a)p\log b,\ 0]$，我们有

$$\Psi_c(t)=c\Upsilon_h(t)+\mathcal{O}(|c|^{2p+1}b^{2p(1-a)}e^{-\frac{t}{p}}),\tag{5.4}$$

其中，Υ_h 由 (2.20) 给出，且渐近展开可对 t求导。由于展开 (5.4) 用于 $t\to-\infty$，我们可以使用 (2.18) 或 (2.19) 来求 (2.20) 中 Tricomi 函数 $\mathfrak{U}(e^{2t};\alpha,\ \beta)$ 的渐近展开，其中 $\alpha=\frac{p+1}{2p}-\frac{\lambda}{4}>0$ 由 (2.15) 得出，且 $\beta=1+\frac{1}{p}$。若 $p\neq\frac{1}{n}$且 $n\in\mathbb{N}$，则解 Ψ_c在 Ψ_c处的渐近公式可

在 $t = T - (1 - a)p\log b$ 可借助 (2.18)、(2.20) 和 (5.4) 得到，形式如下：

$$\Psi_c(T-(1-a)p\log b) = ce^{\frac{T}{p}}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2p}-\frac{\lambda}{4}\right)}b^{-(1-a)}[1+\mathcal{O}(b^{-2p(1-a)})] + ce^{-\frac{T}{p}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2p}-\frac{\lambda}{4}\right)}b^{1-a}[1+\mathcal{O}(b^{-2p(1-a)},|c|^{2p}b^{2p(1-a)})]. \tag{5.5}$$

若 $p = \frac{1}{n}$ 满足 $n \in \mathbb{N}$，则利用 (2.19)、(2.20) 和 (5.4)，可得到在 $t = T - (1-a)p\log b$ 处取值的解 Ψ_c 的渐近公式：

$$\Psi_c(T-(1-a)p\log b) = ce^{nT}\frac{2(-1)^{n+1}}{n!\Gamma\left(\frac{1-n}{2}-\frac{\lambda}{4}\right)}b^{-(1-a)}[(T-(1-a)p\log b)[1+\mathcal{O}(b^{-2p(1-a)})]+\mathcal{O}(1)] + ce^{-nT}\frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha)}b^{1-a}[1+\mathcal{O}(b^{-2p(1-a)},|c|^{2p}b^{2p(1-a)})], \tag{5.6}$$

其中 $\alpha = \frac{1+n}{2} - \frac{\lambda}{4} > 0$。

使用连接方程 (5.1) 时，可建立关于两个未知数 λ 和 c 的二元方程组。这两个方程可通过令 $\Psi_b(t)$ 和 $\Psi_c(t)$ 在时刻 $t = T - (1-a)p\log b$ 处相等，并令它们的一阶导数也相等而得到。另一种方法是，由于渐近展开可以逐项对 t 求导，我们可以通过令指数函数 $e^{\frac{T}{p}}$ 和 $e^{-\frac{T}{p}}$ 前的系数相等来建立方程组。令 (5.3) 中的 $e^{-\frac{T}{p}}$ 项系数与 (5.5) 或 (5.6) 中对应项的系数相等，可得以下方程：

$$\alpha_p^{-1/p}b^{-a}[1+\mathcal{O}(b^{-2ap},b^{-2p(1-a)})] = c\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma(\alpha)}b^{1-a}[1+\mathcal{O}(b^{-2p(1-a)},|c|^{2p}b^{2p(1-a)})]. \tag{5.7}$$

非线性方程 (5.7) 定义在 $(\lambda, c) \in [0,2]\times[0, c_0 b^{-(1-a)}]$ 上，余项是关于 (λ, c) 的函数。由于非线性方程 (5.7) 的主导阶部分关于 c 是线性的，并给出解 $c = \mathcal{O}(b^{-1})$，显然该解存在于 $|c| \le c_0 b^{-(1-a)}$ 内，因此根据隐函数定理，当 $\lambda \in [0,2]$ 且 $b \ge b_{T,a}$ 充分大时，存在一个 C^1 函数 $c = c(\lambda, b)$，其渐近表达式为

$$c(\lambda,b) = \alpha_p^{-1/p}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}b^{-1}[1+\mathcal{O}(b^{-2ap},b^{-2p(1-a)})]. \tag{5.8}$$

令 (5.3) 中 $e^{\frac{T}{p}}$ 项的系数分别与 (5.5) 或 (5.6) 中的系数相等，并代入 c 的表达式 (5.8)，即可得到关于 λ 的非线性方程；我们同样可以利用隐函数定理求解该方程。不过，计算的具体细节取决于

value $p \in (0, 1)$ 的取值，因此针对 p 的不同取值分别列出 .

情形 $p \in (0, \frac{1}{2})$。若 $p \neq \frac{1}{n}$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$都成立，则在 (5.1) 中使用 (5.3) 和 (5.5)，令 $e^{\frac{T}{p}}$项的系数相等，并将表达式 (5.8) 代入 $c = c(\lambda, b)$。由此得到关于 λ的非线性方程：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}p^2\alpha_p^{1/p}b^a\big[\lambda b^{-2p}\int_{-\infty}^{T+ap\log b} e^{2t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt[1+\mathcal{O}(b^{-2ap})] \\
&- b^{-4p}\int_{-\infty}^{T+ap\log b} e^{4t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt[1+\mathcal{O}(b^{-2ap})] + \mathcal{O}((|\lambda|b^{-2p}+b^{-4p})^{2p+1}b^{2ap})\big] \\
&= \alpha_p^{-1/p}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2p}-\frac{\lambda}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2p}-\frac{\lambda}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}b^{-2+a}[1+\mathcal{O}(b^{-2p(1-a)})]. \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

若 $p \in (0, \frac{1}{2})$，由于渐近展开 (2.9)，(5.9) 左端的两个积分均收敛，因此可以将它们展开为

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{T+ap\log b} e^{2t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt &= -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}\Theta_h(t)^2dt + \mathcal{O}(b^{-2a(1-p)}), \\
\int_{-\infty}^{T+ap\log b} e^{4t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt &= -2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{4t}\Theta_h(t)^2dt + \mathcal{O}(b^{-2a(1-2p)}),
\end{aligned}$$

这意味着关于 λ 的非线性方程 (5.9) 可以改写为等价形式：

$$\begin{aligned}
&\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}\Theta_h(t)^2dt[1+\mathcal{O}(b^{-2ap}, b^{-2a(1-p)})] \\
&- 2b^{-2p}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{4t}\Theta_h(t)^2dt[1+\mathcal{O}(b^{-2ap}, b^{-2a(1-2p)})] + \mathcal{O}((|\lambda|b^{-2p}+b^{-4p})^{2p+1}b^{2p(1+a)}) \\
&= -2p^{-2}\alpha_p^{-2/p}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2p}-\frac{\lambda}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2p}-\frac{\lambda}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}b^{-2(1-p)}[1+\mathcal{O}(b^{-2p(1-a)})]. \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

若对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $p \neq \frac{1}{n}$，则 $\frac{p-1}{2p}$，$-\frac{1}{p} \neq -m$ 对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都成立，使得在 $\lambda = 0$ 处伽马函数的自变量远离其极点奇异性。因此，非线性方程 (5.10) 的所有项在 $\lambda = 0$ 处都是关于 λ 的 C^1 函数。对于 $p \in (0, \frac{1}{2})$，当 b 充分大时，$b^{-2(1-p)} \ll b^{-2p}$。由于非线性方程 (5.10) 的主导阶部分关于 λ 是线性的，并给出了对解 $\lambda = \mathcal{O}(b^{-2p})$ 的提示，应用隐函数定理可知，当 b 充分大时，存在一个 C^1 函数 $\lambda = \lambda(b)$，其渐近表达式为

$$\lambda(b) = 2\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{4t}\Theta_h(t)^2dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}\Theta_h(t)^2dt}b^{-2p} + \mathcal{O}(b^{-2(1-p)}, b^{-2p(1+a)}, b^{-2(p+a(1-2p))}, b^{-2p(4p+1-a)}). \qquad (5.11)$$

利用由 (2.8) 给出的 Θ_h 的显式表达式（其中 $t_0 = 0$），可以计算 (5.11) 中的积分。作代换 $s = (1 + \alpha_p e^{2t})^{-1}$ 后，可将积分表示为贝塔函数

$$B(z_1, z_2) := \int_0^1 s^{z_1-1}(1-s)^{z_2-1} ds = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}, \quad z_1, z_2 > 0$$

并得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}\Theta_h(t)^2 dt = \frac{1}{2\alpha_p^{1+1/p}} \int_0^1 s^{\frac{1}{p}-2}(1-s)^{\frac{1}{p}} ds = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)}{2\alpha_p^{1+1/p}\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{4t}\Theta_h(t)^2 dt = \frac{1}{2\alpha_p^{2+1/p}} \int_0^1 s^{\frac{1}{p}-3}(1-s)^{\frac{1}{p}+1} ds = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}-2\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}+2\right)}{2\alpha_p^{2+1/p}\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}.$$

将这些表达式代入 (5.11)，得到 $p \in (0, \frac{1}{2})$ 和 $p \neq \frac{1}{n}$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 的最终公式：

$$\lambda(b) = \frac{2(1+p)}{\alpha_p(1-2p)} b^{-2p} + \mathcal{O}(b^{-2(1-p)}, b^{-2p(1+a)}, b^{-2(p+a(1-2p))}, b^{-2p(4p+1-a)}), \tag{5.12}$$

这里用到了性质 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$。

若对某个 $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ 有 $p = \frac{1}{n}$，则在 (5.1) 中使用 (5.3) 和 (5.6)，令 $e^{\frac{T}{p}}$ 项的系数相等，并将表达式 (5.8) 中的 $c = c(\lambda, b)$ 代入。由此得到关于 λ 的非线性方程：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}p^2\alpha_p^{1/p} b^a \big[\lambda b^{-2p} \int_{-\infty}^{T+ap\log b} e^{2t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt[1+\mathcal{O}(b^{-2ap})] \\
&- b^{-4p} \int_{-\infty}^{T+ap\log b} e^{4t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt[1+\mathcal{O}(b^{-2ap})] + \mathcal{O}((|\lambda|b^{-2p}+b^{-4p})^{2p+1}b^{2ap})\big] \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}\Gamma\left(\frac{1+n}{2}-\frac{\lambda}{4}\right)}{\alpha_p^n n!(n-1)!\Gamma\left(\frac{1-n}{2}-\frac{\lambda}{4}\right)} b^{-2+a}[(T-(1-a)p\log b)[1+\mathcal{O}(b^{-2p(1-a)})]+\mathcal{O}(1)].
\end{aligned} \tag{5.13}$$

将该方程除以 b^{a-2p} 后，可将其改写为 (5.10) 的形式，其中右端的阶为

$$\frac{\log b\, b^{-2(1-p)}}{\Gamma(\frac{1-n}{2}-\frac{\lambda}{4})},$$

这远小于阶为 $\mathcal{O}(b^{-2p})$ 的主导项，其中 $p \in (0, \frac{1}{2})$。对于偶数 n，$\lambda(b)$ 的最终公式 (5.11) 修改如下：

$$\lambda(b) = \frac{2(1+p)}{\alpha_p(1-2p)} b^{-2p} + \mathcal{O}(\log b b^{-2(1-p)}, b^{-2p(1+a)}, b^{-2(p+a(1-2p))}, b^{-2p(4p+1-a)}).$$

对于奇数 n，我们也有 $\Gamma(\frac{1-n}{2}) = \infty$。由于

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \mathcal{O}(1) \quad \text{as } z \to -n$$

并且 $\lambda(b) = \mathcal{O}(b^{-2p})$，我们有

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1-n}{2} - \frac{\lambda}{4})} = \mathcal{O}(\lambda) = \mathcal{O}(b^{-2p}),$$

根据下式修改了关于 $\lambda(b)$ 的最终公式 (5.11)

$$\lambda(b) = \frac{2(1+p)}{\alpha_p(1-2p)} b^{-2p} + \mathcal{O}(\log b b^{-2}, b^{-2p(1+a)}, b^{-2(p+a(1-2p))}, b^{-2p(4p+1-a)}).$$

在关于 $\lambda = \lambda(b)$ 的两个公式中，我们有 $p = \frac{1}{n}$，其中 $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ 为偶数或奇数。在所有情况下，当 b 充分大时，$\lambda(b) > 0$。

情形 $p \in (\frac{1}{2}, 1)$。由于当 $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时，对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $p \neq \frac{1}{n}$，因此可以使用非线性方程 (5.9)。然而，积分 $\int_{-\infty}^{T+ap\ \ b} e^{4t}\Theta_h \log(t)^2 dt$ 的上限随指数增长而发散，因为当 $t \to +\infty$ 时，$\Theta_h(t)^2 = \mathcal{O}(e^{-\frac{2t}{p}})$。因此，存在一个正常数 $C_{T,a}$，使得对于所有 $b \geq b_{T,a}$，我们有

$$\left| \int_{-\infty}^{T+ap\log b} e^{4t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt \right| \leq C_{T,a} b^{2a(2p-1)}.$$

非线性方程 (5.9) 可改写为等价形式：

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}\Theta_h(t)^2 dt[1 + \mathcal{O}(b^{-2ap}, b^{-2a(1-p)})] \\
&+ b^{-2p} \int_{-\infty}^{T+ap\log b} e^{4t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt[1 + \mathcal{O}(b^{-2ap})] + \mathcal{O}((|\lambda|b^{-2p} + b^{-4p(1-a)})^2 b^{2p(1+a)}) \\
&= -2p^{-2}\alpha_p^{-2/p} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2p} - \frac{\lambda}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2p} - \frac{\lambda}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} b^{-2(1-p)}[1 + \mathcal{O}(b^{-2p(1-a)})], \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

其中，左端第二项的阶为 $b^{-2p+2a(2p-1)} \to 0$，当 $b \to \infty$时，因为 $-2p + 2a(2p-1) < 0$，对 $a < \frac{p}{2p-1}$成立；由于 $\frac{p}{2p-1} > 1$ 对$p \in$成立（$\frac{1}{2}, 1$），这一条件自动满足。此外，由于 $b^{-2p+2a(2p-1)} \ll b^{-2(1-p)}$对 $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 以及 $a \in (0,1)$成立，右端在非线性方程（5.14）中占主导。应用隐函数定理求解非线性方程（5.14），可知存在一个 C^1 函数 $\lambda = \lambda(b)$

对于充分大的 b，其渐近表达式为

$$\lambda(b) = -\frac{4\alpha_p^{1-1/p}\Gamma\left(\frac{p+1}{2p}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{p^2\Gamma\left(\frac{p-1}{2p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)}b^{-2(1-p)} + \mathcal{O}(b^{-2p+2a(2p-1)}, b^{-2(1-p)-2ap}, b^{-2(1+a)(1-p)}, b^{-2(1-pa)}, b^{-2p(3-5a)}). \tag{5.15}$$

由于 $-\frac{1}{p} \in (-2, -1)$ 且当 $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时 $\frac{p-1}{2p} \in (-\frac{1}{2}, 0)$，因此我们有 $\Gamma\left(-\frac{1}{p}\right) > 0$ 和 $\Gamma\left(\frac{p-1}{2p}\right) < 0$。于是，当 b 足够大时，$\lambda(b) > 0$。

情形 $p = \frac{1}{2}$。这一情形对应于非线性方程 (5.13) 中的 $n = 2$，我们可以将其改写为等价形式：

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}\Theta_h(t)^2 dt[1 + \mathcal{O}(b^{-a})] \\
&+ b^{-1}\int_{-\infty}^{T+ap\log b} e^{4t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt[1 + \mathcal{O}(b^{-a})] + \mathcal{O}((|\lambda|b^{-1} + b^{-2}\log b)^2 b^a) \\
&= \frac{8\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)}{\alpha_p^4\Gamma\left(-\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)}b^{-1}[(T - (1-a)p\log b)[1 + \mathcal{O}(b^{-(1-a)})] + \mathcal{O}(1)],
\end{aligned} \tag{5.16}$$

其中 $\alpha_{p=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4!}$。第二个积分 $\int_{-\infty}^{T+ap} {}^{b} e^{4t}\Theta_h'$对数$(t)\Theta_h(t)dt$ 在上限处线性发散，因为当 $t \to +\infty$ 时，$\Theta_h(t)^2 = \mathcal{O}(e^{-4t})$。利用显式公式 (2.8) 进行精确计算，可得如下渐近表达式：

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{T+ap\log b} e^{4t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t)dt &= \frac{1}{2}e^{4t}\Theta_h(t)^2\Big|_{t\to-\infty}^{t=T+ap\log b} - 2\int_{-\infty}^{T+ap\log b} e^{4t}\Theta_h(t)^2 dt \\
&= \frac{1}{2\alpha_p^4} - \frac{1}{\alpha_p^4}\left[2(T + ap\log b) + \log(\alpha_p) - \frac{11}{6} + \mathcal{O}(b^{-2ap})\right] \\
&= -\frac{2}{\alpha_p^4}(T + ap\log b) + \frac{7}{3\alpha_p^4} - \frac{\log(\alpha_p)}{\alpha_p^4} + \mathcal{O}(b^{-2ap}).
\end{aligned}$$

另一方面，利用 (2.17) 可得

$$\frac{8\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{8}{\pi}\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) = -2,$$

从而，主导项—— 非线性方程 (5.16) 的阶数项可合并为

$$\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}\Theta_h(t)^2 dt[1+\mathcal{O}(b^{-a})] + \mathcal{O}(b^{-1}, \log b\, b^{-1-a}) + \mathcal{O}((|\lambda| b^{-1} + b^{-2}\log b)^2 b^a)$$
$$= \frac{1}{\alpha_p^4}\log b\, b^{-1}[1+\mathcal{O}(\lambda)][1+\mathcal{O}(b^{-(1-a)})] + \mathcal{O}(b^{-1}).$$

利用隐函数定理，当 b 足够大时，存在一个 C^1 函数 $\lambda = \lambda(b)$，其渐近表达式为

$$\lambda(b) = 144 \log b\, b^{-1} + \mathcal{O}(b^{-1}, \log b\, b^{-1-a}, (\log b)^2\, b^{-2}), \tag{5.17}$$

其中我们用到了 $p = \frac{1}{2}$、 $\alpha_{p=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4!}$ ，以及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}\Theta_h(t)^2 dt = \frac{1}{6\alpha_p^3}.$$

因此，当 b 足够大时， $\lambda(b) > 0$ 。

定理 1.1 已得到证明。有关注 1.2 的详细内容，我们给出以下计算 .

情形 $p = 1$。此情形对应于非线性方程 (5.13) 中的 $n = 1$ ，我们可以将其改写为等价形式:

$$\lambda \int_{-\infty}^{T+a\log b} e^{2t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t) dt[1+\mathcal{O}(b^{-2a})]$$
$$- b^{-2}\int_{-\infty}^{T+a\log b} e^{4t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t) dt[1+\mathcal{O}(b^{-2a})] + \mathcal{O}((|\lambda| b^{-2}\log b + b^{-4(1-a)})^2 b^{2a})$$
$$= \frac{4\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{4}\right)}{\alpha_p^2\Gamma\left(-\frac{\lambda}{4}\right)}[(T-(1-a)\log b)[1+\mathcal{O}(b^{-2(1-a)})] + \mathcal{O}(1)],$$

其中 $\alpha_{p=1} = \frac{1}{8}$。由于

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \mathcal{O}(1) \quad \text{as} \quad z \to 0$$

and

$$\int_{-\infty}^{T+a\log b} e^{2t}\Theta_h'(t)\Theta_h(t) dt = -\frac{1}{\alpha_p^2}(T + a\log b - 1) - \frac{1}{2\alpha_p^2}\log(\alpha_p) + \mathcal{O}(b^{-2a}),$$

根据注 1.2，主导项仅包含 $\lambda\log\ b$，而它们无法与 $\mathcal{O}(1)$ 阶的项相平衡，从而得到渐近平衡 $\lambda = \mathcal{O}((\log b)^{-1})$。射击法的这一失效，是因为在 $n = 1$ and$\lambda = 0$ 的 (5.6) 中只出现了一个指数项。处理渐近平衡的方法是，从 $\Psi_c(t)$ 展开的高阶（非线性）项中，在主导阶以外再提取第二个指数项。然而，这会使射击法变得更加复杂，超出了本文的研究范围。

References

[1] M. Abramowitz、I. A. Stegun，《数学函数手册：公式、图表和数学表格》，纽约：Dover（1972）。[2] T. Aubin，关于标量曲率的非线性微分方程与 Yamabe 问题，《纯粹与应用数学杂志》55（1976）269–296[3] P. Bizon、F. Ficek、D. E. Pelinovsky 和 S. Sobieszek，具有调和势的能量超临界 Gross–Pitaevskii 方程的基态，《非线性分析》210（2021）112358。[4] H. Brez´ıs、L. Nirenberg，涉及临界 Sobolev 指数的非线性椭圆方程的正解。《纯粹与应用数学通讯》36（1983）437–477。[5] C.J. Budd，将 Shilnikov理论应用于半线性椭圆方程，《SIAM 数学分析杂志》20（1989）1069–1080。[6] C. Budd 和 J. Norbury，半线性椭圆方程与超临界增长，《微分方程杂志》68（1987）169–197。[7] J. Dolbeault 和 I. Flores，球域中半线性椭圆方程的相空间几何与解，《美国数学会会刊》359（2007）4073–4087。[8] F. Ficek，高维 Schr¨odinger–Newton–Hooke 系统：定态，《物理评论D辑》103（2021）104062（13页）。[9] R.H. Fowler，关于 Emden 及类似微分方程的进一步研究，《季刊数学杂志》2（1931）259–288。[10] R. Frank、T. K¨onig 和 H. Kovaˇr´ık，Bresic–Nirenberg 问题中的能量渐近：高维情形，《数学与工程》2（2020）119–140[11] R. Fukuizumi，具有调和势的非线性 Schr¨odinger 方程驻波的稳定性与不稳定性，《离散连续动力系统》7（2002）525–544。[12] Z. Guo 和 J. Wei，具有超临界指数的半线性椭圆方程的全局解分支与 Morse指标估计，《美国数学会会刊》363（2011）4777–4799。[13] M. Coles 和 S. Gustafson，能量临界 NLS 的次临界扰动所产生的孤立波与动力学，《京都大学数理解析研究所刊》56（2020）1–53[14] Z.-C. Han，涉及临界 Sobolev 指数的非线性椭圆方程奇异解的渐近方法，《庞加莱研究所年刊：非线性分析》8（1991）159–174。[15] E. Hebey 和 M. Vaugon，从最佳常数到临界函数，《数学杂志》237（2001）737–767。[16] M. Hirose 和 M. Ohta，具有调和势的标量方程正径向解的结构，《微分方程杂志》178（2002）519–540。[17] M. Hirose 和 M. Ohta，具有调和势的标量场方程正解的唯一性，《泛函方程》50（2007）67–100。[18] D. Joseph 和 T. Lundgren，由正源项驱动的拟线性Dirichlet问题，《有理力学与分析档案》49（1973）241–269。[19] O. Kavian 和 F. Weissler，伪共形不变非线性 Schr¨odinger 方程的自相似解，《密歇根数学杂志》41（1994）151–173。[20] H. Kikuchi 和 J. Wei，高维情形下具有指数非线性的椭圆方程解的分岔图，《爱丁堡皇家学会学报A辑》148（2018）101—-122。[21] F. Merle 和 L. Peletier，具有超临界增长的椭圆方程正解，《爱丁堡皇家学会学报A辑》118（1991）40–62。[22] D. E. Pelinovsky 和 S. Sobieszek，能量超临界 Gross–Pitaevskii 方程基态的 Morse指标，《微分方程杂志》341（2022）380–401[23] D. E. Pelinovsky、J. Wei 和 Y. Wu，能量临界及超临界非线性下 Gross–Pitaevskii 方程的正解，arXiv:2207.10145（2022）。

[24] O. Rey，格林函数在涉及临界 Sobolev 指数的非线性椭圆方程中的作用，《函数分析杂志》**89** (1990) 1–52。[25] F. Selem，具有指定零点数的调和势非线性 Schr¨odinger 方程径向解，《非线性》**24** (2011) 1795–1819。[26] F. Selem 和 H. Kikuchi，具有调和势和 Sobolev 临界/超临界非线性项的半线性椭圆方程解的存在性与不存在性，《数学分析及其应用杂志》**387** (2012) 746– 754。[27] F.H. Selem、H. Kikuchi 和 J. Wei，具有超临界非线性项的定态 Schr¨odinger 方程奇异解的存在性与唯一性，《离散与连续动力系统》**33** (2013) 4613–4626。[28] N. Shioji 和 K. Watanabe，“正径向解的广义 Pohozaev 恒等式与唯一性， $\Delta u + g($ $r)u + h(r)u^p = 0$, 《微分方程杂志》**255** (2013) 4448–4475。[29] G. Talenti，Sobolev 不等式中的最佳常数，《纯粹与应用数学年鉴》**110** (1976) 353–372

(D.E.Pelinovsky) Department of Mathematics and Statistics, McMaster University, Hamilton,Ontario, Canada, L8S 4K1电子邮箱: dmpeli@math.mcmaster.ca (S. Sobieszek) Department of Mathematics and Statistics, McMaster University, Hamilton,Ontario, Canada, L8S 4K1电子邮箱: sobieszs@mcmaster.ca