arXiv:2302.03904v1 [math.NT] 8 Feb 2023

多重ζ值与伽马函数的欧拉反射公式

Karin Ikeda 和 Mika Sakata

Abstract. 本文给出了一个纯代数证明，证明了一个直接源自伽马函数欧拉反射公式的恒等式。我们的证明使用了 Hoffman 调和代数和一些二项式恒等式。

1. 引言

对于给定的正整数 $k_1, \ldots, k_r$，满足 $k_r \geq 2$，多重ζ值（MZV）$\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ 定义为

$$\zeta(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{{m_1}^{k_1} \cdots {m_r}^{k_r}}.$$

回顾伽马函数（对数）的泰勒级数

$$\Gamma(1+x) = \exp\left(-\gamma x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) x^n\right) (\gamma : \text{Euler's constant}).$$

这与著名的反射公式

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

结合起来 以及展开式（这是由 $\sin x$ 的无穷乘积直接推得的 ）

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \zeta(\underbrace{2, \ldots, 2}_{n}) x^{2n}$$

give

$$\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \zeta(n) x^n\right) \exp\left(-\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(m)}{m} x^m\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \zeta(\underbrace{2, \ldots, 2}_{n}) x^{2n}.$$

这篇短文旨在给出这一恒等式的纯代数证明。更确切地说，我们将在“Hoffman 代数”的框架下证明恒等式（2.1）（第 2 节）。

2020年数学主题分类。11M32。第一作者获得了九州大学日本文部科学省 WISE 项目的资助。

2. 代数设定与主定理

我们回顾 Hoffman 提出的多重ζ值的代数设定 [2]。我们直接处理指标，而非如 [2] 中那样处理非交换多项式。设 $\mathscr{R}$ 为$\mathbb{Q}$-向量空间

$$\mathscr{R} = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathbb{Q}[\mathbb{N}^r]$$

由有限个 $\mathbb{Q}$-线性组合的符号 $[\mathbf{k}] = [k_1, \ldots, k_r]$ 生成，其中 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r$，对某个 r 成立。我们约定 $\mathbb{Q}[\mathbb{N}^0] = \mathbb{Q}[\varnothing]$ 对于 $r = 0$。进一步，令 $\mathscr{R}^0$ 表示 $\mathscr{R}$ 的子空间，它由容许符号生成，即由 $[\varnothing]$ 以及满足 $k_r \geq 2$ 的符号 $[k_1, \ldots, k_r]$ 生成。在 $\mathscr{R}$ 上，我们考虑 $\mathbb{Q}$-双线性调和（stuffle）积 $*$，其归纳定义如下：

(a) 对任意指标 $\mathbf{k}$ $[\varnothing] * [\mathbf{k}] = [\mathbf{k}] * [\varnothing] = [\mathbf{k}]$; (b) 对任意指标 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ 和 $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_s)$，其中 $r, s \geq 1$,

$$[\mathbf{k}] * [\mathbf{l}] = [[\mathbf{k}_-] * [\mathbf{l}], k_r] + [[\mathbf{k}] * [\mathbf{l}_-], l_s] + [[\mathbf{k}_-] * [\mathbf{l}_-], k_r + l_s],$$

其中 $\mathbf{k}_- = (k_1, \ldots, k_{r-1})$, $\mathbf{l}_- = (l_1, \ldots, l_{s-1})$。

Hoffman 证明了 $\mathscr{R}_* := (\mathscr{R}, *)$ 是一个交换且结合的 $\mathbb{Q}$-代数，并且 $\mathscr{R}^0_*$ 是 $\mathscr{R}_*$ [2] 的子代数。此外，他证明求值映射 $\zeta : \mathscr{R}^0_* \ni [k_1, \ldots, k_r] \mapsto \zeta(k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{R}$ 经 $\mathbb{Q}$-线性扩张后，是从 $\mathscr{R}^0_*$ 到 $\mathbb{R}$ 的代数同态。

我们的主定理如下。

定理 2.1. 等式

$$\exp_*\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}[n]x^n\right) \exp_*\left(-\sum_{m=2}^{\infty} \frac{[m]}{m}x^m\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\underbrace{2, \ldots, 2}_{n}]x^{2n} \tag{2.1}$$

在以 $\mathscr{R}_*$ 为系数的形式幂级数环 $\mathscr{R}_*[[x]]$ 中成立，其中 $\exp_*$ 是指数 $\exp_*(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}}{n}!$，其中 f^n 是环 $\mathscr{R}_*[[x]]$ 中的幂。

3. 证明

回忆等式

$$\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\zeta(n)x^n\right) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k S_{\mathbb{R}}(k)x^k,$$

其中

$$S_{\mathbb{R}}(k) = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ r\geq 1, {}^{\forall}k_i\geq 2}} (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \frac{(k_j-1)}{k_j!}\zeta(k_1, \cdots, k_r).$$

如[1], 所示，这可以通过使用$\Gamma(1+x)$的Weierstrass无穷乘积轻松证明。

第二位署名作者证明了这一恒等式的代数对应物。

定理 3.1（[3]）。等式

$$\exp_*\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}[n]x^n\right) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k S(k)x^k \tag{3.1}$$

在 $\mathscr{R}_*[[x]]$ 中成立，其中 $S(k) = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ r\geq 1 \, {}^{\forall}k_i\geq 2}}$, $(-1)^r \prod_{j=1}^{r} \underline{(k_j-1)} \; k_j!$ $[k_1, \ldots, k_r]$。

由此，我们的任务是证明恒等式

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S(k)x^k\right) * \left(\sum_{l=0}^{\infty} S(l)x^l\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\underbrace{2,\ldots,2}_{n}]x^{2n} \tag{3.2}$$

在 $\mathscr{R}_*[[x]]$ 中，其中 $S(0) = 1, S(1) = 0$。

若 n 是奇数，则由显然的对称性，$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k S(k) * S(n-k)$ 等于 0。因此我们有

$$(\mathrm{LHS}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k S(k) * S(2n-k)x^{2n}. \tag{3.3}$$

因此，只需证明以下结论即可完成证明

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k S(k) * S(2n-k) = (-1)^n[\underbrace{2,\ldots,2}_{n}] \tag{3.4}$$

对 $n \geq 1$。

设 $(k_1,\ldots,k_l)$ 为一个权重为 $2n$ 的固定指标。现在我们计算等式 (3.4) 左边 $[k_1,\ldots,k_l]$ 的系数。设 h 是 $[k_1,\ldots,k_l]$ 中大于 3 的分量数。我们先考虑 $h > 0$ 的情形。对于 i 满足 $0 \leq i \leq h$ 的情况，假设 $[k_1,\ldots,k_l]$ 中恰有 i 个分量由如下形式的调和积产生（例如） $k_1,\cdots,k_i$

$$[m_1,\ldots,m_i,k_{i+1},\ldots,k_t] * [k_1-m_1,\ldots,k_i-m_i,k_{t+1},\ldots,k_l],$$

其中 $2 \leq m_j \leq k_j - 2$ 对于 $1 \leq j \leq i$ （即当 $1 \leq j \leq i$ 时， $k_j = m_j + (k_j - m_j)$），并且 $i \leq t \leq l$。

那么，由等式（ $[k_1,\ldots,k_l]$ 左侧的这个乘积所产生的系数为（注意，因子 $[m_1,\ldots,m_i,k_{i+1},\ldots,k_t]$ 可能来自 $S(k)$，也可能来自 $S(2n-k)$），

$$\begin{aligned}
&(-1)^{m_1+\cdots+m_i+k_{i+1}+\cdots+k_t}(-1)^t\prod_{j=1}^{i}\frac{m_j-1}{m_j!}\prod_{d=i+1}^{t}\frac{k_d-1}{k_d!}\\
&\quad\times(-1)^{i+l-t}\prod_{j=1}^{i}\frac{k_j-m_j-1}{(k_j-m_j)!}\prod_{d=t+1}^{l}\frac{k_d-1}{k_d!}\\
&+(-1)^{k_1-m_1+\cdots+k_i-m_i+k_{t+1}+\cdots+k_l}(-1)^{i+l-t}\prod_{j=1}^{i}\frac{k_j-m_j-1}{(k_j-m_j)!}\prod_{d=t+1}^{l}\frac{k_d-1}{k_d!}\\
&\quad\times(-1)^t\prod_{j=1}^{i}\frac{m_j-1}{m_j!}\prod_{d=i+1}^{t}\frac{k_d-1}{k_d!}.
\end{aligned}$$

对 m_j 的所有可能情况求和，得到

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{l+i}\sum_{m_1=2}^{k_1-2}\cdots\sum_{m_i=2}^{k_i-2}\\
&\left\{(-1)^{m_1+\cdots+m_i+k_{i+1}+\cdots+k_t}+(-1)^{k_1-m_1+\cdots+k_i-m_i+k_{t+1}+\cdots+k_l}\right\}\frac{(m_1-1)\cdots(m_i-1)}{m_1!\cdots m_i!}\\
&\qquad\times\frac{(k_1-m_1-1)\cdots(k_i-m_i-1)(k_{i+1}-1)\cdots(k_l-1)}{(k_1-m_1)!\cdots(k_i-m_i)!k_{i+1}!\cdots k_l!}\\
&=(-1)^{l+i}\left\{(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_t}+(-1)^{k_1+\cdots+k_i+k_{t+1}\cdots+k_l}\right\}\\
&\qquad\times\prod_{j=1}^{i}\left\{\sum_{m_j=2}^{k_j-2}(-1)^{m_j}\binom{k_j}{m_j}(m_j-1)(k_j-m_j-1)\right\}\frac{(k_{i+1}-1)\cdots(k_l-1)}{k_1!\cdots k_l!}\\
&=(-1)^{l+i}\left\{(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_t}+(-1)^{k_1+\cdots+k_i+k_{t+1}\cdots+k_l}\right\}\prod_{j=1}^{i}\{1+(-1)^{k_j}\}\prod_{d=1}^{l}\frac{k_d-1}{k_d!}.
\end{aligned}
$$

这里，在最后一个等式中，我们用到了恒等式

$$\sum_{m=2}^{k-2}(-1)^m\binom{k}{m}(m-1)(k-m-1)=(1+(-1)^k)(k-1).$$

我们对所有可能的 t 求和，得到

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{l+i}\{1+(-1)^{k_{i+1}}+\cdots+(-1)^{k_{l-1}}+(-1)^{k_l}\\
&+(-1)^{k_{i+1}+k_{i+2}}+\cdots+(-1)^{k_{l-1}+k_l}\\
&+\cdots+(-1)^{2n-k_{i+1}-k_{i+2}}+\cdots+(-1)^{2n-k_{l-1}-k_l}+\\
&\cdots+(-1)^{2n-k_{i+1}}+\cdots+(-1)^{2n-k_l}+(-1)^{2n}\}\\
&\times\prod_{j=1}^{i}\{1+(-1)^{k_j}\}\prod_{d=1}^{l}\frac{k_d-1}{k_d!}\\
&=(-1)^{l+i}\prod_{j=i+1}^{l}\left\{1+(-1)^{k_j}\right\}(1+(-1)^{2n})\prod_{j=1}^{i}\left\{1+(-1)^{k_j}\right\}\prod_{j=1}^{l}\frac{k_j-1}{k_j!}\\
&=(-1)^{l+i}2\prod_{j=1}^{l}\left\{1+(-1)^{k_j}\right\}\frac{k_j-1}{k_j!}.
\end{aligned}
$$

最后，我们对 i 求和，得到

$$\sum_{i=0}^{h}(-1)^{l+i}\binom{h}{i}2\prod_{j=1}^{l}\left\{1+(-1)^{k_j}\right\}\frac{k_j-1}{k_j!}=0$$

若 $h>0$，由二项式定理可得。

接下来假设 $h=0$。那么， k_i 在 $[k_1,\dots,k_l]$ 中均为 2 或 3。令 $h'=\#\{i|h_i=3\}$。等式左边（3.4）中 $[k_1,\dots,k_l]$ 的系数可计算为

$$(-1)^l\sum_{i=0}^{h'}\sum_{j=0}^{l-h'}(-1)^{2j+3i}\binom{h'}{i}\binom{l-h'}{j}\left(\frac{2}{3!}\right)^{h'}\left(\frac{1}{2!}\right)^{l-h'}$$
$$=\begin{cases}0 & h'\neq 0,\\ (-1)^l=(-1)^n & h'=0.\end{cases}$$

根据二项式定理，我们有

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kS(k)*S(2n-k)=(-1)^n\underbrace{[2,\cdots,2]}_{n}.$$

致谢

作者谨向金子昌信教授致以谢意，感谢他提供的宝贵建议。本研究得到九州大学日本文部科学省 WISE 项目的支持。

参考文献

[1] T. Arakawa 和 M. Kaneko，《多重ζ值导论》（日文）。MI讲义系列，第23卷。九州大学，（2010）。[2] M. Hoffman，多重调和级数的代数，《代数杂志》，194（1997），477–495。[3] M. Sakata，伽马函数的倒数的泰勒级数与多重ζ值，《日本学士院院刊A辑：数学科学》，93（2017），47–49。

Joint Graduate School of Mathematics for Innovation, Kyushu University, Motooka 744, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan电子邮箱：ikeda.karin.236@s.kyushu-u.ac.jp

School of Physical Education, Osaka University of Health and Sport Sciences, 1-1 Asashirodai, Kumatori-cho, Sennan-gun, Osaka 590-0496, Japan电子邮件地址：m.sakata@ouhs.ac.jp