arXiv:2302.03947v1 [math.GR] 8 Feb 2023

交错群直积的直径

AZIZOLLAH AZAD 和 NASIM KARIMI

Abstract. 迄今为止，已有证明表明，若 G 是阿贝尔群，则 G^n 相对于任意生成集的直径为 $O(n)$；若 G 是幂零群、对称群或二面体群，则存在一个最小大小的生成集，使得 G^n 的直径为 $O(n)$ [9]。在 [4] 中，已有证明表明，若 G 是非阿贝尔单群，则 G^n 相对于任意生成集的直径为 $O(n^3)$。本文估计交错群直积幂 A_n 的直径，其中 $n \geq 4$，即一类非阿贝尔单群。我们证明，对于 A_4^n，存在一个最小大小的生成集，使得 A_4^n 的直径为 $O(n)$。对于$n \geq 5$，我们证明，对于 A_n^2，存在一个最小大小的生成集，使得 A_n^2 的直径至多为 $O(ne^{(c+1)(\log\ n)^4\ 双对数\ n})$，其中 $c > 0$为绝对常数。最后，对于 $1 \leq n \leq 8$，我们给出 A_5^n 的二元生成集，并证明 A_5^n 相对于这些生成集的直径为 $O(n)$。这些结果为 [8]在2015年提出的猜想提供了更多证据。

1. Introduction

设 G 是一个有限群，其生成集为 A。我们将 G 关于 A 的直径定义为：对 $g \in G$ 取最大值，求用 A 中的元素表示 g 的最短字长。求有限群直径的上界是有限群论中的一个重要研究领域。我们提及该领域最重要的猜想，即 Babai 猜想 [2]：每个非阿贝尔有限单群 G 的直径都不超过 $log^k|G|$，其中 k 是一个绝对常数。尽管人们在交错群和李型群方面都取得了重大进展，该猜想仍未解决。

给出单群直积的直径上界，并使其取决于各因子的直径，这种方法曾多次用于证明 Babai猜想。在 [3], 中，已证明对于 $G = T_1 \times T_2 \times \cdots T_n$，其中 T_i 是非阿贝尔单群，diam(G) $\leq 20n^3h^2$，其中 h 是 T_i 的最大直径。在 [7], 中，当因子为交错群时，这个上界被改进为取决于 h 而非 h^2；随后在 [4], 中，这一结果推广到了所有

日期：2023年2月9日。关键词和短语：群的直径、群的秩、非阿贝尔单群。1

非阿贝尔单群。迄今为止，提出的所有上界都取决于 n^3。本文结构如下：

在第3节中，我们为 A_4^n for $n \geq 1$ 找到了最小大小的生成集，并证明相对于这些生成集，A_4^n 的直径为 $O(n)$，其中 $n \geq 2$。

在第4节中，对于 $n \geq 5$，我们为 A_n^2 找到了大小为二的生成集，使得 A_n^2 的直径为 $O(ne^{(c+1)(\log n)^4 \operatorname{loglog} n})$，其中 $c > 0$ 是一个绝对常数。

在第5节中，我们证明存在大小为二的生成集，适用于 $A_5^n (1 \leq n \leq 8)$，并且对于这些生成集，A_5^n 的直径至多为 $n(|A_5| - 秩(A_5)) = 58\, n$。

2. Preliminaries

本文中所有群均视为有限群。子集 $A \subseteq G$ 是 G 的生成集，当且仅当 G 的每个元素都可以表示为 A 中元素构成的序列。[a] 我们用 G 的秩表示为 rank(G)，指 G 的任一最小生成集的基数。对于非单位元 $g \in G$，相对于 A 的长度是指用 A 中元素表示 g 的序列的最小长度。将此参数记为 $l_A g$。

约定2.1。我们认为单位元的长度为零，即对于每个生成集 A，$l_A(1) = 0$。

定义2.2。设 G 是一个有限群，具有生成集 A。我们将相对于 A 的G 的直径定义为

$$\operatorname{diam}(G, A) := \max\{l_A(g) : g \in G\}.$$

下一个定义将为任意直积幂 G^n 引入一个生成集（我们称之为典范生成集），该生成集是相对于 G的一个生成集而言的。

定义2.3。设 G 是一个有限群，具有生成集 A。我们将相对于 A的 G^n 的典范生成集定义为集合

$$C^n(A) := \{(1, \ldots, \overbrace{a}^{i\,\text{th}}, \ldots, 1) : i \in \{1, 2, \ldots, n\}, a \in A\}.$$

注记2.4。若 G 是一个满足秩(G^n) $= n$秩(G)这一性质的群，则 G^n 的典范生成集是一个最小大小的生成集，并且 G^n 相对于 $C^n(A)$的直径至多为 $O(n)$ [9]。注意，对于 $n \geq 4$，交错群 A_n不满足秩(G^n) $= n$秩(G)这一性质。

我们将以下简单事实作为一条注记加以说明。

[a]通常，如果 G 的每个元素都能表示为 $A \cup A^{-1}$ 中元素组成的序列，那么 $A \subseteq G$ 就被视为生成集。当 G 是有限集时，这些定义是一致的。

注 2.5. 设 $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n = \langle A \rangle$。由于 $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ 是由n 个形如 $(1, \ldots, g_i, \ldots, 1)$ 的元素构成的乘积，因此我们有

$$l_A(g_1, g_2, \ldots, g_n) \leq \sum_{i=1}^{n} l_A(1, \ldots, g_i, \ldots, 1). \tag{1}$$

定义 2.6. 群 G 的 n 基是指由 G 的 n 个元素 x_1、x_2、.....、x_n 组成的任意有序集，它生成 G。此外，若存在 G 的一个自同构 θ，将一个基变换为另一个基，则称 G 的两个 n 基 x_1、x_2、.....、x_n 和 y_1、y_2、.....、y_n 等价：

$$x_i\theta = y_i,$$

对每个 $i = 1$，2，....., n 均成立。否则，称这两个基不等价。

一般而言，对于有限群 G 的直积幂的秩，有如下引理：

引理 2.7. [11] 设 G 是一个有限群， k 是一个正整数。以下不等式成立：

$$k \operatorname{rank}(G/G') \leq \operatorname{rank}(G^k) \leq k \operatorname{rank}(G), \tag{2}$$

其中， G' 是 G 的交换子子群。

定义 2.8. 如果一个群等于其自身的换位子群，则称其为完美群；否则称其为非完美群。

注 2.9. 根据引理 2.7，如果 G 是完美群，那么不等式 (2) 中的下界为零，因此引理 2.7 中的第一个不等式显然成立。如果 G 是非完美群，那么引理 2.7 中的第一个不等式给出了一个下界，该下界取决于 k，用于估计 G^k 的秩。

由于交错群 A_4 是非完美的，而对于 $n \geq 5$，交错群 A_n 是完美的，因此根据注 2.9，我们需要在不同章节中分别验证它们。

3. The diameter of a direct power of alternating group A_4

我们使用以下引理来求交错群 A_4 的直积幂的最小大小生成集。

引理 3.1. 设 G 是一个有限的非完美群。如果 G 可由 k 个阶两两互素的元素生成，那么对于 $n \geq k$，rank(G^n) $= n$。

证明。由于 G 不是完美的，根据引理 2.7，可得秩(G^n) $\geq n$。假设 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ 是 G 的一个生成集，其中 a_i的阶

两两互素。令 $n \geq k$。我们为 G^n构造一个大小为 n 的生成集。对于 $1 \leq i \leq n$，定义元素 $g_i \in G^n$ 如下:

$$g_i = (1, \ldots, \overbrace{a_1}^{i\,\text{th}}, a_2, \ldots, a_k, \ldots, 1) \qquad \text{for } 1 \leq i \leq n-k+1,$$

$$g_i = (a_{n-i+2}, a_{n-i+3}, \ldots, a_k, 1, \ldots, 1, \overbrace{a_1}^{i\,\text{th}}, \ldots, a_{n-i+1}) \quad \text{for } n-k+2 \leq i \leq n.$$

我们证明 $C = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ 是 G^n的一个生成集。若证明 C生成 $C^n(A)$，则结论成立。任取一个元素 $(1, \ldots, a_i, \ldots, 1) \in C^n(A)$。由于 a_i的阶两两互素，存在一个正整数ℓ使得

$$(1, \ldots, a_i, \ldots, 1) = (1, \ldots, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k, \ldots, 1)^\ell.$$

由此得到所需结论。 □

下面的例子给出了交错群 A_4的直积幂的一个最小大小生成集。

例 3.2. 容易看出， A_4 由以下两个元素生成

$$\alpha = (1\ 2)(3\ 4),\ \beta = (1\ 2\ 3).$$

由于 A_4 不是完美群，且根据引理 3.1， α和 β 的阶互素，因此 A_4^n的秩等于 n，其中 $n \geq 2$。

定理 3.3。存在一个适用于 A_4^n 的最小大小生成集，使得 A_4^n 的直径不超过 $10n$。

证明。正如我们在例 3.2 中所提到的，在引理 3.1 的证明中构造的生成集 C 是 $n \geq 2$ 的最小大小生成集 A_4^n。我们证明 $\mathrm{diam}(A_4^n, C) \leq 10n$。设 $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in A_4^n$。根据注 2.5，只需证明 $l_C(1, \ldots, 1, g_i, 1, \ldots, 1) \leq 10$，其中 $1 \leq i \leq n$。由以下等式可知

$$(1, \ldots, \overbrace{\alpha}^{i\,\text{th}}, \beta, \ldots, 1)^3 = (1, \ldots, \overbrace{\alpha}^{i\,\text{th}}, 1, \ldots, 1),$$

$$(1, \ldots, \alpha, \overbrace{\beta}^{i\,\text{th}}, \ldots, 1)^4 = (1, \ldots, 1, \overbrace{\beta}^{i\,\text{th}}, \ldots, 1),$$

$$(1, \ldots, \alpha, \overbrace{\beta}^{i\,\text{th}}, \ldots, 1)^2 = (1, \ldots, 1, \overbrace{\beta^2}^{i\,\text{th}}, \ldots, 1),$$

我们有

$$l_C(1,\ldots,\overbrace{\alpha}^{i\,\text{th}},\ldots,1)\le 3,$$
$$l_C(1,\ldots,\overbrace{\beta}^{i\,\text{th}},\ldots,1)\le 4,$$
$$l_C(1,\ldots,\overbrace{\beta^2}^{i\,\text{th}},\ldots,1)\le 2.$$

另一方面， A_4 中的元素可以用生成集$\{\alpha,\beta\}$ 表示如下:

$$A_4=\{\alpha,\beta,\alpha^2,\alpha\beta,\beta\alpha,\beta^2,\alpha\beta\alpha,\alpha\beta^2,\beta\alpha\beta=\alpha\beta^2\alpha,\beta^2\alpha,\beta^2\alpha\beta,\beta\alpha\beta^2\}.$$

现在不难看出, $(1,\ldots,\overbrace{g}^{i\,\text{th}},\ldots,1)$在生成集 C中的长度至多为 10，对每个元素 $g\in A_4$均如此，由此完成证明。□

4. The diameter of A_n^2, for $n\ge 5$

注意，对于 $n\ge 5$，交错群 A_n是完美群。计算完美群直积幂的秩，还有另一种方法，即利用群的欧拉函数（见 [5, 11]）。下面的引理是 [5]中结果的推论。

引理 4.1. 设 G 是一个非阿贝尔单群。若 G 由 n 个元素生成，则集合 $\{(a_{i1},a_{i2}\ldots,a_{ik}):\ i=1,\ldots,n\}$ 生成 G^k 当且仅当满足以下条件:

(1) 集合 $\{a_{1i},a_{2i},\ldots,a_{ni}\}$ 是 G 关于 $i=1,\ldots,k$ 的生成集；
(2) 对任意 $i\ne j$，都不存在将 $(a_{1i},a_{2i},\ldots,a_{ni})$ 映射到 $(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj})$ 的自同构 $f: G\to G$。

此外，在 [5] 中，Hall 证明交错群 A_5 满足引理 4.1：对于 $1\le k\le 19$， $n=2$ 满足该引理；对于 $k\ge 20$ 则不满足。

因此，以下结论可由引理 4.1 直接推出。

推论 4.2. 当且仅当满足以下条件时，一对 $(s_1,\ldots,s_k)$、$(t_1,\ldots,t_k)$ 能生成 A_5^k:

(1) 集合 $\{s_i,t_i\}$ 是 A_5 关于 $i=1,...,k$ 的生成集；(2) 对任意$i\ne j$，都不存在将 (s_i,t_i) 映射到 (s_j,t_j) 的自同构 $f: A_5\to A_5$。

此外， $k=19$ 是满足这些条件的最大数。也就是说，当且仅当 $1\le k\le 19$时， A_5^k 的秩等于 2。

现在我们可以证明以下定理。

定理 4.3. 设 $n \geq 5$。存在一个大小为二的生成集，使得 A_n^2 的直径至多为 $O(ne^{(c+1)(\log n)^4 \log\log n})$，其中 $c > 0$ 是一个绝对常数。

证明。对于 $n \geq 5$，令 $a = (1\,2\,3\cdots n)$、$b = (1\,2)(3\,4)$、$a' = (1\,2\,3\cdots n-1)$ 和 $b' = (n-3\,n-2)(n-1\,n)$。容易看出，当 n 为奇数时，$A = \{a, b\}$ 和 $A' = \{a', b'\}$ 是 A_n 的生成集；当 n 为偶数时，亦然。此外，若 n 为奇数，则 (a, b)、(b, a) 是 A_n 的两个不等价的 2-基；若 n 为偶数，则 (a', b')、(b', a') 是 A_n的两个不等价的 2-基。由引理 4.1，若 n 为奇数，则 $A_n^2 =< (a, b)、(b, a) >$；若 n 为偶数，则 $A_n^2 =< (a', b')、(b', a') >$。令$G = \{(a, b)、(b, a)\}$，并令 $G' = \{(a', b')、(b', a')\}$。暂且假设 n 为奇数。对于 $(x, y) \in A_n^2$，有 $l_A(x, y) \leq l_A(x, 1) + l_A(1, y)$。结合以下等式：

$$(a, b)^2 = (a^2, 1), (b, a)^n = (b, 1), (b, a)^2 = (1, a^2), \text{and}(a, b)^n = (1, b). \tag{3}$$

我们得到

$$\operatorname{diam}(A_n^2, G) \leq 2\, n \operatorname{diam}(A_n, \{b, a^2\}). \tag{4}$$

在 4 中将 $\operatorname{diam}(A_n, \{b, a^2\})$ 替换为 $O(e^{(c+1)(\log n)^4 \text{双对数} n})$（见 [6] 中的定理 6.6），即可得到所需结论。对于 n 为偶数的情形，类似的论证同样适用。□

推论 4.4. 存在一个大小为二的生成集，使得其直径不超过

$$2(|A_n| - \operatorname{rank}(A_n)) = n! - 4,$$

当 n 充分大时。

证明. 根据定理 4.3，只需证明对于充分大的 n，$ne^{(c+1)(\log n)^4 \text{双对数} n} \leq n!$。令 log $n \geq (c + 1)$，则有 $ne^{(c+1)(\log n)^4 \text{双对数}\, n} \leq ne^{(\log n)^6}$。将 $n!$ 用斯特林公式替换后，只需证明对于充分大的 n，$e^{(\log n)^6 + n} \leq n^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}$，这显然成立。□

5. The diameter of a direct power of A_5

我们知道，对于 $1 \leq k \leq 19$，群 A_5^k 可由两个元素生成的最大数是 19（见 [5]）。令 $a = (12)(34)$ $b = (12345)$ $c = (123)$ $d = (135)$ $e = (245)$ $f = (12354)$ $g = (12543)$ $h = (12534)$ $i = (13254)$。我们使用群、算法与编程（GAP）——一个计算离散代数系统——进行了验证，发现这些元素对

$$(a, b), (b, a), (a, b^2), (b^2, a), (c, b), (b, c), (c, b^2), (b^2, c), (b, c^2), (c^2, b), (b^2, c^2), (c^2, b^2),$$
$$(d, a), (a, d), (d, e), (b, f), (b, g), (b, h), (b, i)$$

是 A_5 的 19 个不等价二基。根据推论 4.2，我们可以为 A_5^k、 $1 \leq k \leq 19$ 构造大小为二的生成集；但要证明定理 5.1，我们只需要其中 8 个。令

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{a, b\}, \\
C_2 &= \{(a, b), (b, a)\}, \\
C_3 &= \{(a, b, a), (b, a, b^2)\}, \\
C_4 &= \{(a, b, a, b^2), (b, a, b^2, a)\}, \\
C_5 &= \{(a, b, a, b^2, c), (b, a, b^2, a, b)\}, \\
C_6 &= \{(a, b, a, b^2, c, b), (b, a, b^2, a, b, c)\}, \\
C_7 &= \{(a, b, a, b^2, c, b, c), (b, a, b^2, a, b, c, b^2)\}, \\
C_8 &= \{(a, b, a, b^2, c, b, c, b^2), (b, a, b^2, a, b, c, b^2, c)\},
\end{aligned}
$$

因此，对于 $1 \leq n \leq 8$，集合 C_n 是群 A_5^n的最小大小生成集。

定理 5.1。对于 $1 \leq n \leq 8$， A_5^n 的直径至多为 $58\,n$。

证明。使用 GAP [10] 我们检查得 $\mathrm{diam}(A_5, C_1) = 10$，且 $\mathrm{diam}(A_5^2, C_2) = 18$。令 (x, y, z) 为 A_5^3 中的任意元素。则有

$$l_{C_3}(x, y, z) = l_{C_3}(x, 1, z) + l_{C_3}(1, y, 1).$$

另一方面，$(x, z) \in A_5^2 = \langle (a, a),\ (b^2, b^4) \rangle$，且 $\mathrm{diam}(A_5^2, \{(a, a),\ (b^2, b^4)\}) = 20$，以及 $y \in A_5 = \langle a, b^2 \rangle$，且 $\mathrm{diam}(A_5, \{a, b^2\}) = 9$。这些事实与下列等式一起

$$
\begin{aligned}
(a, b, a)^2 &= (1, b^2, 1), \\
(b, a, b^2,)^5 &= (1, a, 1), \\
(a, b, a)^5 &= (a, 1, a), \\
(b, a, b^2,)^2 &= (b^2, 1, b^4),
\end{aligned}
$$

导致

$$\mathrm{diam}(A_5^3, C_3) \leq 5 \times 9 + 5 \times 20 = 5 \times (9 + 20) = 145.$$

同样，我们可以看到

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(A_5^4, C_4) &\leq 5 \times (20 + 20) = 200,\\
\operatorname{diam}(A_5^5, C_5) &\leq 6 \times (20 + 25) = 270,\\
\operatorname{diam}(A_5^6, C_6) &\leq 6 \times (25 + 25) = 300,\\
\operatorname{diam}(A_5^7, C_7) &\leq 6 \times (25 + 30) = 330,\\
\operatorname{diam}(A_5^8, C_8) &\leq 6 \times (30 + 30) = 360.
\end{aligned}$$

□

由于随着 n 的增加， A_5^n 的凯莱图呈指数级增长，我们无法使用 GAP 计算 $n \geq 4$ 的 A_5^n 直径，因此也无法使用定理 5.1 证明中采用的技术估算 $n \geq 9$ 的 A_5^n 直径。

2015年，第二位作者猜想， G^n 的直径相对于 n呈多项式增长。更确切地说，她猜想，若 G是有限群，则 G^n 的直径至多为 n(|G| –rank(G))，这称为强猜想。强猜想已在阿贝尔群的情形下得到证明，见 [9]。强猜想的另一种版本称为弱猜想，其内容是：若 G 是有限群，则存在一个对 G^n而言大小最小的生成集，使得G^n 的直径至多为 n(|G| –rank(G))。弱猜想已在幂零群、二面体群以及某些非完美群的幂次的情形下得到证明，见 [9]。最近，有研究表明，对于可解群 G， G^n 的直径相对于n [1]呈多项式增长。本文中的定理 3.3、5.1 和推论 4.4 为弱猜想提供了更多证据。

6. Acknowledgments

第二作者谨此感谢阿拉克大学的邀请与热情款待，并感谢国际科学技术互动组织（ISTI）提供的经费支持。

References

1. A. Azad 和 N. Karimi, 《可解群直积幂的直径上界》, https://doi.org/10.48550/arxiv.2211.08699, （2022）。2. L. Babai 和 A. Seress, 《对称群凯莱图的直径》, 《组合理论杂志》A辑 49（1988）, 第 1 期, 175–179。MR 957215 3. , 《置换群的直径》, 《欧洲组合学杂志》13（1992）, 第 4 期, 231–243。MR 1179520（93h:20001）4. D. Dona, 《有限单群乘积的直径》, 《当代数学文集》22（2022）。5. P. Hall, 《群的欧拉函数》, 《牛津季刊数学杂志》7（1936）, 134–151。

6. H. A. Helfgott 和 A. Seress，《置换群的直径》，《数学年刊》（第 2 辑）179（2014），第 2 期，611–658。MR 3152942 7. H.A. Helfgott，《线性代数群和置换群中的增长：迈向统一视角》，C. M. Campbell、C. W. Parker、M. R. Quick、E. F. Robertson 和 C. M. Roney-Dougal（编），《2017年伯明翰圣安德鲁斯群论会议》，剑桥大学出版社，剑桥，伦敦数学会讲义系列第 455 卷（2019），300–345。8. N. Karimi，《在有限半群中到达最小理想》，2015年，博士论文。9.，《有限群直积幂的直径》，《代数通讯》45（2017），第 11 期，4869–4880。10. L.H. Soicher，《GAP 的 grape 软件包》，4.9.0 版，（2022）。11. J. Wiegold，《有限群的增长序列》，《澳大利亚数学会杂志》17（1974），133–141。

Department of Mathematics, Faculty of Sciences Arak University, Arak, Iran.电子邮箱：a-azad@araku.ac.ir

Instituto de Matemática e estatística, Universidade do Estado de Rio de janeiro, Rio de Janeiro,Brasil电子邮箱：nasim@ime.uerj.br