arXiv:2302.03974v1 [math.RA] 8 Feb 2023

超简单环与模

CHRISTIAN LOMP、MOHAMED YOUSIF 和 YIQIANG ZHOU

Dedicated to André Leroy on his retirement

Abstract. 本文将环 R 上的单右 R-模 S 称为超简单模，若其内射包 $E(S)$是循环的；若环 R 的每个单右 R-模都是超简单模，则称该环为右超简单环。我们开始研究这些新概念，并重新考察 Osofsky 关于超循环环的研究，即循环右模的内射包均为循环模的环。

1. 引言

Prüfer 群是简单阿贝尔群的内射包，它们是 Artinian 的，但不是 Noetherian 的。更一般地，交换诺特环上的任意单模的内射包都是 Artinian 的，Matlis 在其开创性研究中证明了这一点 [24]。例如，Rosenberg 和 Zelinsky 在 [33] 、Faith 在 [12]中研究了模内射包的其他有限性条件。举例来说，Faith 和 Walker 在 [13, 定理 5.5] 中证明，环 R是拟弗罗贝尼乌斯环，当且仅当任意内射右 R-模都是循环模的直和，且这些循环模同构于环 R的主不可分解右理想。此外，利用佐恩引理很容易证明，每个内射模都是某个循环模直和的内射包。在 [31], 中，Osofsky 研究了循环模均为内射模的环，并证明这类环恰好是半单阿廷环。受此结果启发，Caldwell 在 [4] 中研究了一类称为（右）超循环环的环，其循环右模的内射包都是循环的。他证明，左完美的右超循环环是 Artinian 且单列的。Caldwell 在 [4], 中深入研究了交换环中的超循环环，Osofsky 则在 [30]中研究了非交换环中的超循环环。然而，Caldwell 在 [4], 中给出的唯一一个非半单阿廷超循环环的例子是交换且自内射的环。此外，Caldwell 在其论文 [5, 第 53] 页提出，超循环环是否都是自内射的，并猜想答案为肯定。这个猜想至今仍未解决，此外还有若干相关问题也悬而未决。例如，超循环环这一概念是否具有左右对称性，目前尚不清楚。此外，Osofsky 在 [30] 中提出，局部超循环环的（Jacobson）根基是否幂零。

受 Caldwell 猜想的启发，文献 [18] 证明：若 R 是一个环，且 $E(R_R)$ 是循环的戴德金有限模，则 R 是右自内射的。特别是，

Date：2023年2月9日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：16D40、16D50、16D60；次要分类号：16L30、16L60、16P20、16P40、16P60。
*Key words and phrases.*Hopf性、余霍普夫、戴德金有限环与模、自内射环。

若 $E(R_R)$ 是循环的，则在 R 为交换的、有限维的、半局部的或强 π-正则的情况下，R 是右自内射的。

我们应当指出，[30, 命题 1.6], 中一项主要结果的证明存在漏洞。该命题声称，若 R 是半局部右超循环环，则 $soc(R_R) \subseteq^{ess} R_R$。因此， [30] 中的引理 1.12、引理 1.15 和定理 1.18 仍不确定。此外，由于 [30, 命题 1.6],存在漏洞，[22, 定理 3.4] 也尚不确定。

本文将简单右 R-模 S 称为超简单的，若 $E(S)$是循环的；若对每个简单右R-模 S， $E(S)$都是循环的，则称环 R 为右超简单环。我们开始研究超简单环与模，并证明，关于超循环环的一些研究成果只需要求 $E(R_R)$和/或 $E(R/J(R))$为循环的即可得到。

虽然我们无法弥补 [30, 命题 1.6], 中的缺口，但我们通过要求环 R 为本质右duo环来解决这一问题；也就是说， R的每个本质右理想都是双边理想。在这一额外且温和的条件下，模仿 Osofsky 的论证即可立即得到她的结果，她的其他一些结果也可以得到简化。例如，我们在定理 2.16 中证明：若 R 是一个半局部本质右duo环，且 $E(R_R)$和 $E(R/J(R))$都是循环模，那么 R 是右拟 Frobenius 环，其右理想均为拟内射。

全文中，所有环 R 都是有单位元的结合环，所有模都是幺模。对于一个模 M，我们用 $rad(M)$、 $soc(M)$、 $E(M)$和 $End(M)$分别表示 M的雅各布森根、底、内射包和自同态环。对于一个环 R， $rad({}_RR) = rad(R_R)$，它是 R的雅各布森根，记作 $J(R)$或 J。一般而言， $soc({}_RR) \neq soc(R_R)$，但当 $soc({}_RR) = soc(R_R)$时，我们只写$soc(R)$。若 N 是 M的子模，我们记作 $N \subseteq M$ ；若 N 是 M的本质子模，记作$N \subseteq^{ess} M$ ；若 N 是 M的直和项，记作 $N \subseteq^{\oplus} M$ ；若 N是 M的小子模，记作 $N \ll M$。我们用 N^k表示 N的 k个副本的直和，并用 $U(R)$表示 R的单位元集合。我们用 $r_R(x)$表示 x 在 R中的右湮灭子，用 $l_R(x)$表示 x 在 R中的左零化子。

2. Hypersimple Rings

定义 2.1. 若任意单左（分别为右） R-模的内射包都是循环 R-模，则称环 R 为左（分别为右）超简单环。

Caldwell 的超循环环要求循环模（尤其是模 R_R）的内射包都是循环的，而将条件限制在单模上，似乎确实是一种弱化。

例 2.2. 若 R 是右 Kasch 环（即每个单右 R-模都嵌入 R_R），且 E（R_R）是循环模，则显然 R 是右超简单环。

引理 2.3. 设 R 是任意环， S 是一个简单右 R-模。若 $E(S)$ 是投射的，那么它也是循环的，特别地，它同构于由幂等元生成的 R 的一个右理想。

证明。由于 $E(S)$ 是投射的，存在一个嵌入 $\sigma: E(S) \to F = \oplus_{i\in I} R$，将 $E(S)$ 嵌入一个自由模。现在，存在一个投影映射 $\pi: F \to R$，使得复合映射 $\pi \circ \sigma_{|S}: S \to R$ 非零，因此是一个单态射。但此时 $\pi\circ\sigma: E(S) \to R$ 非零；由于 $S \subseteq^{ess} E(S)$，它也是一个单态射。这说明 $E(S)$ 嵌入 R，因此它同构于 R_R 的一个直和项。也就是说，对于某个 $e^2 = e \in R$，有 $E(S) \cong eR$。□

例 2.4. 环 R 是右余生成环，当且仅当所有简单右 R-模的内射包都是投射的。由引理 2.3 可知，右余生成环都是右超简单的。

例 2.5. 如果 R是 Mod-R 中的内射余生成元，则称环 R为右拟 Frobenius（右 PF-环）；等价地， R 是一个具有本质右底的半完备右自内射环。由例 2.4 可知，右 PF-环都是右超简单的。

定理 2.6. 环 R 满足以下条件等价：

(1) R 是右拟 Frobenius。(2) 对所有简单右 R-模 S， R 都是半局部的，且 $E(S)$ 是投射的。(3) 当 S 是简单右 R- 模时， $E(S)$ 是投射的，并且简单右 R- 模只有有限多个同构类。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。设 S 是一个简单右 R-模。由于 R 是右 Kasch， S嵌入 R，因此 $E(S)$ 是 R的一个直和项，故为投射模。

(2) $\Rightarrow$ (3)。这一蕴含显然。

(3) $\Rightarrow$ (1)。由例 2.4， R 是一个右余生成环。根据 [23, 定理 19.25]， R 是右拟 Frobenius 环。□

例 2.7。 [32, 例 2] 设 R 是域 F 上的一个代数，其基为$\{1\} \cup \{e_i \mid i \geq 0\} \cup \{x_i \mid i \geq 0\}$，其中 1 是 R 的单位元，并且对所有 i 和 j，$e_ie_j = \delta_{ij}e_j$、 $x_je_i = \delta_{i,\ j-1}x_j$、 $e_ix_j = \delta_{ij}x_j$和 $x_ix_j = 0$，其中 δ_{ij}是克罗内克 δ。如 [32]所示， R 是一个非内射右余生成环，既不是左 Kasch 环，也不是半局部环。每个 e_iR 都是内射的，并且对所有 $i \geq 0.$， $x_iR = soc(e_iR) \subseteq^{ess} e_iR$。显然，如果 I 是 R 的一个极小右理想，那么对某个 $i \geq 0$， $I = x_iR$，且 $x_iR \cong x_jR$ 当且仅当 $i = j$。根据定理 2.6 的 (2)， R 是一个右超简单环，但不是右自内射环。此外，由于 R 不是半局部环，由 [27, 引理 4.1], 可知， R 不是左自内射环。特别地， R 既不是左超循环环，也不是右超循环环。

例2.8. 若每个简单左（分别为右）环模都是内射的，则称环 R 为 V-环。对于这样的环 R，任意简单左 R-模 S 都与其内射包 $E(S) = S$ 相同，因此是循环的。由此， V-环构成了一大类超单环。众所周知，交换环是 V-环当且仅当它是冯·诺依曼正则的（见 [25]）。也存在作为整环的非交换 Noetherian V-环（见 [9]）。此外， [18,推论 2.7] 证明，若 R 是一个交换环，且 $E(R)$是循环的，则 R是自内射的。这表明，任何非自内射的交换正则环，都是一个非超循环的超单环。

例2.9. 若右环模 R的子模 N 满足：存在分解 $M = M_1 \oplus M_2$，其中 $M_1 \subseteq N$ 且 $N \cap M_2 \ll M$，则称 N 位于 M 的一个直和项之上。若模 M 的每个子模 N 都位于 M 的一个直和项之上，则称模 M 为提升模。

若 M是 M的直和项，则称环 R 为右 Harada（简称H-环） [3, 定理3.1.12]若每个内射右环模 R都是提升模。已知 H-环是双侧 Artinian 环，参见例如 [3]。每个右 H-环都是右超简单的。事实上，若 R是一个简单右模，则 $E(S)$是一个不可分解的提升模。因此， $E(S)$的每个真子模都是小的。由于 R 是 Artinian 的， $E(S)$有一个极大子模，记为 N。现在，若 $x \in E(S)$且 $x \notin N$，则$E(S) = xR+N$，从而 $E(S) = xR$。这表明，任何不是拟弗罗贝尼乌斯环的右 H-环，都是一个非超循环的右超简单环。

若环 R 的右理想按包含关系全序排列（即，若 A 和 B 是 R 的右理想，则 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$），则称环 R 为右单列（右链）环。

¯例 2.10. 设 K 为一个域，且 $a \mapsto \bar{a}$ 是一个同构 $K \to K \subseteq K^{\bar{}}$，其中子域 $K \neq K$。设 R 是定义在 K 上、以 $\{1, t\}$ 为基的左向量空间，满足 $t^2 = 0$ 且对所有 $a \in K$ 都有 $ta = \bar{a}t$ 。那么 R 是一个局部环，且 $R/J \cong K$ 和 $J^2 = 0.$ 。显然， $J(R) = soc(R) = Rt = Kt$ 是 R 的唯一非平凡左理想；特别地， R 是一个局部左单列左阿廷环。此外，环 R 是右阿廷环，当且仅当 $dim(_{\bar{K}}K)$ 是有限的。若 $dim(_{\bar{K}}K) = n \geqslant 2$，则作为右理想， $J(R) = soc(R)$ 是同一个单模的 n 个副本的直和；若 $dim(_{\bar{K}}K) = \infty$，则 $J(R) = soc(R)$ 是同一个单模的无限多个副本的直和。此外，不难看出，下列命题等价:

(1) $E(soc(R))$ 是循环的左 R-模。(2) $E(R)$ 是循环的左 R-模。(3) R 是左超简单的。(4) R 是左自内射的。(5) R 是拟弗罗贝尼乌斯的。(6) $dim(_{\bar{K}}K) = 1$。

这表明，如果 $dim(_{\bar{K}}K) = n \geq 2$，那么 R 是一个局部左单列且双侧阿廷的环，但不是左超简单的（超循环的）。

对于交换环，人们很容易尝试使用局部-整体论证，将对超单环的研究化约为对局部超单环的研究。例如，Rosenberg 和 Zelinsky 在 [33, 定理 5] 中证明，对于交换环 R，当且仅当对 R 的任意极大理想 $\mathcal{M}$， R 在 $\mathcal{M}$ 处的局部化 $R_{\mathcal{M}}$ 是阿廷的时，单模的内射包具有有限长度。Vamos 在 [36, 定理 2] 中证明，对于交换环 R，当且仅当 R 是 Noetherian 的时，单模的内射包是阿廷的，其中 $\mathcal{M}$ 是 R 的任意极大理想。Carvalho 等人在 [6, 定理 3.3] 中证明，对于交换环 R 上单模的内射包的任意有限生成子模 $R_{\mathcal{M}}$，当且仅当对 R 的任意极大理想 $\mathcal{M}$，在该理想处的局部化也具有同样性质时，它是阿廷的。研究交换超单环是否也存在类似的局部-整体结果，将会很有意义。下面的引理表明，这一等价关系的一个方向成立。

引理 2.11. 交换超单环 $R_{\mathcal{M}}$ 关于极大理想 $\mathcal{M}$ 的任意局部化 R 都是超简单的。

证明。设 R 是一个交换环， $\mathcal{M}$ 是 R 的一个极大理想，而 $R_{\mathcal{M}}$ 是 R 关于 $\mathcal{M}$ 的局部化。根据 [34, 命题 5，6]，简单 R-模 $R/\mathcal{M}$ 的内射包 $E_R(R/\mathcal{M})$ 也是唯一简单 $R_{\mathcal{M}}$-模的内射包

$R_{\mathcal{M}}/\mathcal{M}R_{\mathcal{M}}$。因此，若 R 是超简单的，则 $E_R(R/\mathcal{M})$ 是一个循环 R-模，故 $E_{R_{\mathcal{M}}}(R_{\mathcal{M}}/\mathcal{M}R_{\mathcal{M}}) = E(R/\mathcal{M})$ 是一个循环 $R_{\mathcal{M}}$-模。因此 $R_{\mathcal{M}}$ 是超简单的。□

在 [30, 命题 1.6], 中，Osofsky 证明了每个半局部超循环环都有一个本质右底。不幸的是，该结果的证明中存在一个漏洞；通过略微修改假设，可以使用同样的论证来确立 Osofsky 的结果。[30, 命题 1.6] 的证明问题出在以下论证中：如果 R 是半局部的，并且 $E = E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n)$是所有两两不同构的单模 S_i的内射包的直和，那么E 是忠实的。如果湮灭子 $L_i = r_R(E(S_i)/S_i) = \{t \in R : \ E(S_i)t \subseteq S_i\}$ 对于所有 i都是 R的本质右理想，那么 $L = L_1 \cap \cdots \cap L_n$ 也将是本质的；由于 $ELJ(R) = 0$ 且 E 是忠实的，可以推出 $LJ(R) = 0$，从而$L = soc(R_R)$是本质的。问题在于， L_i 不一定是本质的。如果$E(S_i) = x_iR$ 是循环的，那么 $L_i = r_R(x + S_i) = \{t \in R : \ x_it \in S_i\} \subseteq^{ess} R$，前提是$R$ 是交换的。然而在非交换的情况下， L_i 可能不同于$r_R(x + S_i)$。为弥补交换性的缺失，我们引入一个新定义；但首先回顾一下，模 M 的子模 N 称为完全不变的，如果 M 的每个自同态都将 N 映入 N。模的完全不变子模对应于环中的双边理想。如果模 M 的每个子模都是完全不变的，则称模 M 为 duo模；如果 R_R 是 duo模，则称环 R 为右 duo（等价地，如果 R 的每个右理想都是理想）。

定义2.12. 若每个本质子模 M 都是全不变的，则称右环 R-模 M 为本质duo；若模 R_R 是本质duo的，则称环 R 为本质右duo环（等价地，若 R 的每个本质右理想都是理想）。

下面的例子表明，本质右duo环类与右拟 duo 环类（即极大右理想为双边理想的那些环）互不包含。

例2.13. 任意半单右环 R-模 M 显然都是本质duo，因为 M 没有本质子模。特别地，任意半单阿廷环

$$R = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k),$$

对于除环 D_i 和整数 $n_i \geq 1$，都是左、右本质duo环。然而，若其中一个整数 n_i 大于1，则 R 包含一个不是理想的右（分别为左）极大理想。因此， R 既不是右拟 duo 环，也不是左拟 duo 环。注意， R 甚至不是阿贝尔环；若环 R 的幂等元都是中心的，则称其为阿贝尔环。这表明存在不是右拟 duo 环的本质右duo环。

反过来，设 R 是任意一个不是域的交换整环。那么， R上的下三角 2×2 矩阵环，即

$$S = \mathrm{LTM}_{2\times 2}(R) = \begin{bmatrix} R & 0 \\ R & R \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\}$$

根据 [38, 命题 2.1]，它是右拟二重环，也是左拟二重环。然而，若 A 是 R的任意真非平凡理想，那么

$$I = \begin{bmatrix} R & 0 \\ A & A \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} : a \in R, \ b, c \in A \right\}$$

这是 S 的一个本质右理想，但不是 S的理想，因为对于任意非零元素 $m = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix} \in S$ 和非零的 $a \in A$:

$$0 \neq ma = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & 0 \\ ya & za \end{bmatrix} \in I,$$

由于 R 是整环， $a \neq 0$ 和 m 的一个分量非零。因此 $mS \cap I \neq 0$，即 I 是 S 的本质右理想。另一方面，

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ A & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R & 0 \end{bmatrix} \not\subseteq I,$$

即 $RI \not\subseteq I$，这表明 I 不是 S 的左理想。因此， S 不是本质右 duo 环。这表明存在不是本质右 duo 环的右拟 duo 环。

命题 2.14. 若 R 是半局部、右超简单且本质右 duo 的，则 $soc(R_R) \subseteq^{ess} R_R$。

证明. 由于 R 是半局部的，因此非同构的简单右 R-模只有有限多个，记为 $S_1, \ldots, S_n$。令 $E = E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n)$ 为简单模 S_i 的内射包的直和。根据假设，对每个 i, $E(S_i) = x_i R$ 都是循环的。由于 $L_i = r_R(x_i + S_i) = \{t \in R : x_i t \in S_i\}$ 是 R 的本质右理想，且根据假设 L_i 是双边理想，因此有 $E(S_i)L_i = x_i R L_i = x_i L_i \subseteq S_i$。于是 $L_i = r_R(E(S_i)/S_i)$ 在 R 中是本质的，因此 $L = L_1 \cap \cdots \cap L_n$ 也是如此。因此 $ELJ(R) \subseteq (S_1 \oplus \cdots \oplus S_n)J(R) = 0$，并且由于 E 是忠实的（因为它是余生成子），故 $LJ(R) = 0$。由于 R 是半局部的， $L \subseteq soc(R_R)$，这表明 $soc(R_R) \subseteq^{ess} R_R$。□

引理 2.15. [18, 定理 2.16] 若 R 是半局部环且 $E(R_R)$ 是循环的，则 R 是半完备且右自内射的。

在 [21], 中，若环 R 的每个右理想都是拟内射的，则称其为右 q-环；等价地，若 R 是右自内射且本质右 duo，则亦如此。下一个结果可直接由引理 2.15、命题 2.14，以及 [27, 定理 3.24 和例 3.26]得出。

定理 2.16. 若环 R 是半局部、右超简单且本质右 duo，并且 $E(R_R)$ 是循环的，则 R 是右拟 Frobenius 环。特别地， R满足以下条件:

(1) $J(R) = Z(R_R) = Z({}_R R)$。 (2) $soc(R) := soc(R_R) = soc({}_R R)$。 (3) $soc(R) \subseteq^{ess} R_R$ 且 $soc(R) \subseteq^{ess} {}_R R$。 (4) $soc(eR)$ 和 $soc(Re)$ 是简单的， $soc(eR) \subseteq^{ess} eR$ 且 $soc(Re) \subseteq^{ess} Re$，对每个局部幂等元 e（属于 R）均成立。 (5) R 具有左、右有限戈尔迪维数。 (6) 每个简单右 R-模和简单左 R-模都嵌入于 R。 (7) R 是右 q-环。 (8) $T = r_R l_R(T)$，对 R的每个右理想 T均成立。

注意，若 R 是半局部环，且 $E(R/J(R))$ 是循环模，则 $E(R/J(R)) = \oplus_{i=1}^{n} E(S_i)$, 其中 $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ 是一组简单右 R-模。因此 $E(S_i)$ 是循环的， $1 \leq i \leq n$。现在，若 S 是任意简单右 R-模，则对某个 i，有 $S \cong S_i$， $1 \leq i \leq n$，因此 $E(S)$ 是循环的。特别地， R 是右超简单环。现在，下面的结果是上述定理 2.16 的直接推论。

推论 2.17. 若 R 是半局部本质右duo环，且 $E(R_R)$ 和 $E(R/J(R))$ 都是循环模，则 R 是满足上述定理 2.16 中条件 (1) 至 (8) 的右拟 Frobenius 环。

3. Rings with Cyclic Injective Hulls

正如引言中所指出的，目前还没有已知的非自内射超循环环的例子。此外，我们也不知道存在非自内射环 R，其内射包 $E(R_R)$ 是循环的例子。一般来说，当环 R 不是 Artinian 时，构造 $E(R_R)$ 并不容易。这意味着，存在非自内射环 R，其内射包 $E(R_R)$ 是循环的情形，将是一类难以捉摸的环。

本节继续研究 [18]，中所开展的关于环 R（其内射包 $E(R_R)$ 是循环的）的工作。我们将推广并统一 [18] 中的一些结果，并得到新的结果。

引理 3.1. 记 E 为 R_R 的一个内射包，嵌入为 $\epsilon: R \to E$。假设 E 是循环的。那么存在一个满同态 $\pi: R \to E$，以及右 R-模的自同态 $f: R \to R$ 和 $g: E \to E$，使得 $\epsilon = \pi \circ f$ 和 $\pi = g \circ \epsilon$ 成立，即下列图表交换：



此外，下列性质成立 *d:*

(1) f 是内射的，且若 Im(f) 在 R 中是本质的，则 $R \simeq E$。(2) Ker(π) $\oplus$ Im(f) 是 R 的本质右理想。(3) g 是满射的，且若 Ker(g) 在 E 中是小的，则 $R \simeq E$。(4) Im(ϵ) $+$Ker(g) $= E$ 且 Im(ϵ) $\cap$ Ker(g) $= \epsilon$ (Ker(π))。(5) $E \simeq E$(Ker(π)) $\oplus E$ 且 E/ϵ(Ker(π)) $\simeq E/\epsilon(R) \oplus E$。

证明。(1) 由于 $\epsilon = \pi \circ f$ 是内射的，f 也内射。此外，若 Im(f) 是本质的，则 π 是内射的，因而是一个同构。

(2) 由 $\epsilon = \pi \circ f$ 和 f 均为内射可得 Ker(π) $\cap$ Im(f) $=$ Ker(ϵ) $= 0$。此外，Ker(π) $\oplus$ Im(f) $= \pi^{-1}$(Im(ϵ)) 成立，因为若 $r \in \pi^{-1}$(Im(ϵ)，则对某个 $r' \in R$，有 $\pi(r) = \epsilon(r') = \pi(f(r'))$。因此，$r - f(r') \in$Ker($\pi$) 且$r = r - f(r') + f(r') \in$ Ker(π) $\oplus$Im(f)。反之，若 $r \in$Ker(π) $\oplus$Im(f)，则对某个 $r' \in$Ker(π) 及 $r'' \in R$，有$r = r' + f(r'')$。因此 $\pi(r) = \pi(f(r'')) = \epsilon(r'')$，即 $r \in \pi^{-1}$(Im(ϵ))。

由于像(ϵ)是 E 中的本质子模，且本质子模的原像仍是本质的，因此我们得出，核(ϵ) $\oplus$ 像(f) 是 R中的本质子模。

(3)和(4)与(1)和(2)互为对偶，唯一的例外是核(π)不一定是小的：(3) 由于 $\pi = g \circ \epsilon$ 是满射，g 也是内射的。此外，如果核(g)是小的，那么 ϵ 是满射，因而是一个同构。

(4) 由于 $\pi = g \circ \epsilon$ 和 g 是满射，我们得到 Im(ϵ) $+$Ker(g) $=$ Im(π) $= E$，因为对于任意 $e \in E$，都有 $g(e) = \pi(r)$，其中某个 $r \in R$ 满足该条件。因此 $e - \epsilon(r) \in$Ker(g)，且 $e = \epsilon(r) + (e - \epsilon(r)) \in$Im($\epsilon$)$+$Ker($g$)。此外，Im($\epsilon$)$\cap$Ker($g$) $= \epsilon$(Ker(π)) 成立，因为如果 $r \in \epsilon$(Ker(π))，那么对于某个 $r' \in$ Ker(π)，有 $r = \epsilon(r')$。因此

$g(r) = g(\epsilon(r')) = \pi(r') = 0$ 表明 $r \in \mathrm{Im}(\epsilon) \cap \mathrm{Ker}(g)$。另一方面，如果 $r = \epsilon(r') \in \mathrm{Im}(\epsilon) \cap \mathrm{Ker}(g)$，那么 $\pi(r') = g(r) = 0$，即 $r \in \epsilon(\mathrm{Ker}(\pi))$。

(5) 的第一部分由 (2) 得出，因为 $\mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Im}(f)$ 在 R 中是本质的：

$$E = E(R_R) = E(\mathrm{Ker}(\pi)) \oplus E(\mathrm{Im}(f)) \simeq E(\mathrm{Ker}(\pi)) \oplus E$$

因为 $\mathrm{Im}(f) \simeq R$。(5) 的第二部分由 (4) 得出，因为

$$\begin{aligned} E/\epsilon(\mathrm{Ker}(\pi)) &\simeq \mathrm{Im}(\epsilon)/\left(\mathrm{Im}(\epsilon) \cap \mathrm{Ker}(g)\right) \oplus \mathrm{Ker}(g)/\left(\mathrm{Im}(\epsilon) \cap \mathrm{Ker}(g)\right) \\ &\simeq E/\mathrm{Ker}(g) \oplus E/\mathrm{Im}(\epsilon) \\ &\simeq \mathrm{Im}(g) \oplus E/\mathrm{Im}(\epsilon) \simeq E \oplus E/\epsilon(R). \end{aligned}$$

□

在假设 $E = E(R_R)$ 是循环模且存在满同态$\pi: R \to E$ 的条件下，引理 3.1(5) 表明，若 π 不是内射的，则 E 同构于自身的一个真直和项。若右 R-模 M 不与自身的任何真直和项同构，则称其为戴德金有限。因此，若 E 是循环且戴德金有限的，则引理 3.1(5) 蕴含 π 是同构，进而 $R \simeq E$ 是自内射的。我们由此重新证明 [18, 命题 2.9]。众所周知，环 R 作为右（分别为左） R-模是戴德金有限，当且仅当它是直有限的；这意味着对于任意 $a, b \in R$，若 $ab = 1$，则 $ba = 1$。戴德金有限模包括 Hopfian 模和余霍普夫模。回顾一下，若右 R-模 M 的任意满同态都是同构（分别有小核），则称其为 Hopf性模（分别为广义霍普夫模）（见 [14]）；而若 M 的每个单态射都是同构（分别具有本质像），则称其为余霍普夫（分别为弱余霍普夫）（见 [15]）。广义霍普夫模的例子包括诺特模以及具有有限对偶戈尔迪维数的模，例如阿廷模和半局部环上的有限生成模。特别地，若 R_R 有一个循环内射包 E，且 E 是广义霍普夫的（例如，若 R 是半局部环），则由引理 3.1(3)， R 是右自内射的。

弱余霍普夫模的例子包括 Goldie 维数有限的模，以及交换环上的循环模。此外，每个平方自由模 M 都是弱余霍普夫的。若模 M 不含非零的同构子模 A 和 B，且满足$A \cap B = 0$，则称其为平方自由模（简称SF-模）。根据 [15, 命题 1.4],，对于拟内射模，戴德金有限、余霍普夫和弱余霍普夫这几个概念是等价的。

现在，我们将列出一些充分条件；在内射包是循环模这一条件下，这些条件可保证一个环是自内射的。首先，我们在以下命题中重新得到[18, 命题 2.4 和 2.9] 。

命题 3.2. 设 $E = E(R_R)$ 是 R的一个内射包。那么，以下条件等价：

(a) E 是循环且戴德金有限。(b) E 是循环且 R_R 是弱余霍普夫。(c) E 是循环，并且每当 $E = xR$、$r_R(x) = 0$。(d) R 是右自内射且直接有限。

证明。$(a) \Rightarrow (b)$。由 [15, 推论 1.5]， R_R 是弱余霍普夫。

$(b) \Rightarrow (d)$。该蕴含由 [18, 命题 2.4] 得出，也可由引理 3.1(1) 得出。$(d) \Rightarrow (a)$。对于 $R \simeq E$，该蕴含显然成立。

(*d*) ⇒ (*c*)。显然，若 R 是右自内射的，则存在一个同构$\pi: R \to E$，它是右 R-模。若 $E = xR$，则 $R = x'R$，因为 $x' = \pi^{-1}(x)$。因此$1 = x'y$，其中某个 $y \in R$。由于 R 是直接有限的，$yx' = 1$。所以，$x' \in U(R)$，进而$r_R(x) = r_R(x') = 0$。

(*c*) ⇒ (*d*)。显然，$E = xR \simeq R/r_R(x) \simeq R$ 表明 R 是右自内射的。如果$xy = 1$ 属于 R，那么 $xR = R = E(R_R)$，因此 $r_R(x) = 0$。由于 $x(1 - yx) = 0$，可知 $yx = 1$。所以 R 是直接有限的。□

一个众所周知的非直接有限右自内射环的例子，是除环上无限维向量空间的（全）线性变换环，其中线性变换作用于向量的左侧（例如参见[29]）。上述命题引出了以下问题：

问题 3.3。如果 $E(R_R)$是循环的且 R 是直接有限的，那么 R 是右自内射的吗?

例 3.4。注意，如果 $E(M)$是戴德金有限的，那么 M 也是戴德金有限的，但反之一般并不成立。事实上，若 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，$p$ 是素数，且 $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ 是 Prüfer ¨群，那么 $\mathbb{Z}$-模 $M = \oplus_{n\geq 1}\mathbb{Z}_{p^n}$ 是戴德金有限的，但其内射包 $E(M) = \oplus_{n\geq 1}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ 并不是戴德金有限的 $\mathbb{Z}$-模。此外，M 有一个同态像，它是 $\mathbb{Z}_p$ 的可数无限个副本的直和，并且不是戴德金有限的。

首先回顾一下，右 R-模 M 称为广义 $C2$-模（简称 $GC2$-模），如果 N 的任何与 M 同构的子模，都是 M 的直和项。环 R 称为右 $GC2$- 环，如果 R_R 是一个 $GC2$-模。容易看出，模 M 是余霍普夫的，当且仅当 M 是戴德金有限且 $GC2$。因此，我们对上述问题 3.3 得到了部分肯定的回答，即根据命题 3.2：如果 R 是直接有限的，且 E（R_R）是循环的，那么 R 是右自内射的，当且仅当 R 是右 $GC2$-环。

如果模 M 的每个同态像都是戴德金有限的，则称 M 为强戴德金有限模。例 3.4 中的模 M 是戴德金有限的 $\mathbb{Z}$- 模，但不是强戴德金有限的。

命题 3.5. 假设 E（R_R）是循环的。若 R_R 是强戴德金有限的，则R 是右自内射的。此外，在这种情况下，R/J（R）是单位正则的。

证明。若 R_R 是强戴德金有限的且 E 是循环的，则 E 是戴德金有限的，由命题 3.2 可再次得到该结论。□

若一个模 M 满足：M 没有真子模 A 和 B，其中 $M = A+B$ 且 $M/A \cong M/B$，则称其为对偶平方自由模（简称 DSF-模）。若一个环 R 满足：R 作为右 R-模是一个 DSF-模，则称其为右 DSF-环。由 [17, 命题 2.3 和引理 3.1] 可知，DSF-模是强戴德金有限的。此外，[17, 推论 2.17] 表明，一个环 R 是右 DSF 当且仅当 R 是右拟 duo，即 R 的每个极大右理想都是双边的。此外，由 [38] 可知，R 是右拟 duo 当且仅当 R/J（R）是右拟 duo 环，当且仅当 R/J（R）是阿贝尔右拟 duo 环。

推论 3.6（与 [18, 命题 3.8] 比较）。对于环 R，以下条件等价：

(a) $E(R_R)$ 是循环的，且 R 是右拟 duo。(b) $E(R_R)$ 是循环的，且 $R/J(R)$ 是强正则的。

(c) R 是右拟 duo 右自内射。

证明。由于右拟 duo 环是强戴德金有限的，等价关系 $(a) \Leftrightarrow (c)$ 由命题 3.2 得出。□

若右 R-模 M 满足对其任意子模 A、 B和 C ，都有 $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$，则称其为分配的。文献 [35] 证明，模 M 是分配的，当且仅当 M 的每个商模都是平方自由的；此外， [19, 引理 2.2]证明， M 是分配的，当且仅当 M 的每个子模都是 DSF。因此，由推论 3.6 可知，若 R 是右分配环且 $E(R_R)$ 是循环的，则 R 是右自内射的。

下一个命题给出了环为右弱 co-Hopf 性的条件。因此，若 R 具有循环内射包，这些条件足以保证其为自内射。若环 R满足： R的每个非单位都是一个单位与一个幂零元的乘积，则称 R为 UN-环 [7]。环 R 中的元素 a 称为右形态的[26] ，如果 $R/aR \cong r_R(a)$。环 R 中的元素 a 称为（冯·诺依曼）正则（分别地，单位正则），如果 $a \in aRa$ 分别地 $a \in aU(R)a$。根据 [26, 例 4 和命题5], ，环中的元素是单位正则的，当且仅当它既正则又右形态。回顾一下，环 R 是强 π-正则的，当且仅当对每个 $a \in R$，都存在 $n \geq 1$ ，使得 a^n 是一个单位与一个彼此可交换的幂等元的乘积。若非零元素 $a \in R$ 满足 $r_R(a) = 0$，即若 $ab = 0$ 蕴含 $b = 0$，则称其为左非零因子。注意，若 a 是左非零因子且有右逆，例如 b，则 $1 = ab$ 蕴含 $a(1 - ba) = 0$。但由 $1 = ba$ 可知，$a \in U(R)$是可逆的。

命题 3.7. 若环 R 满足以下任一条件，则它是右弱余霍普夫的：

(1) 每个不可逆的左非零因子 $a \in R$ 都满足 $a(bR) \subseteq (bR)a$ ，对任意 $b \in R$ 均成立。(2) 每个不可逆的左非零因子都是中心的。(3) 每个左非零因子的某个幂都是形态的。(4) R是交换环、形态环、强 π-正则环或 UN-环。此外，若 $E(R_R)$是循环的，则 R_R 是内射的。

证明。(1) 设 $a \in R$ 是 R的一个左非零因子。若 a 可逆，则显然 $aR = R$ 是本质的。否则，对任意 $b \in R$， a 满足 $a(bR) \subseteq (bR)a$。取任意非零元素 $0 \neq b \in R$ 。由于 $r_R(a) = 0$ （且 R 有单位元），$abR \neq 0$。根据假设， $0 \neq abR \subseteq (bR)$ $a \cap aR \subseteq bR \cap aR$。因此， aR 在R 中是本质的，从而 R 是右弱余霍普夫的。

(2) 由 (1) 得出。

(3) 设 a 是 R 的左非零因子。根据假设，存在 $n \geq 1$ 使得 $R/a^nR \simeq r_R(a^n) = 0$，因为 $r_R(a) = 0$。因此 $R = a^nR$，这表明 a 可逆。

(4) 所提及的环类满足上述性质之一。 □

在 [39], 中，模 M 的子模 N 若满足：对于任意真子模 X ，只要 M/X 奇异，便有 $M \neq X + N$ ，则称其在 M 中是 δ-小的。模 M 的所有 δ-小子模之和记为 $\delta(M)$，而 $\delta(R_R)$记作 $\delta(R)$。如 [39]所示， $\delta(R)$ 是 R 的一个理想，它是 R的所有本质极大右理想的交，因此 $soc(R_R) \subseteq \delta(R)$，且 $J(R) \subseteq \delta(R)$；事实上， $J(R/soc(R_R)) = \delta(R)/soc(R_R)$。

定义 3.8. 若模 M 的每个满射自同态都在 M中具有一个 δ-小核，则称模 M 为 δ-Hopf性。

在引理 3.1 之后的讨论中，我们已经提到，如果 $E(R_R)$ 是循环且广义霍普夫的，那么 R_R 是内射的。广义霍普夫模是 δ-Hopfian 的，而根据 [11, 例 1], ，反之未必成立。

命题 3.9. 如果 $E(R_R)$ 是循环且 δ-Hopfian，那么 R_R 是内射的。

证明. 设 $E = E(R_R)$ 是循环的，且有嵌入 $\epsilon: R \to E$ 和典范投影 $\pi: R \to E$。根据引理 3.1，存在满同态 $g: E \to E$，使得 $E =$ 像$(\epsilon) +$核(g)。由于 E 是 δ-Hopfian 的，核(g) 在 E 中是 δ-小的。现在，根据引理 1.2], ，可得 $E =$ 像 $(\epsilon) \oplus Y$，其中 Y 是 E 的一个投射半单子模。由于像 (ϵ) 在 E 中是本质的，$Y = 0$，且 ϵ 是同构。□

引理 3.10. 设 $E(R_R) = xR$，并写作 $x_0 := 1_R = xa$，其中 $a \in R$。若对于某个u, $v \in U(R)$，且对于某个 $n \geq 1$，$(uav)^n \in \delta(R)$，则 R是一个半单环。

证明. 设 $y_0 := x_0 v = (xu^{-1})(uav) = yb$，其中 $y = xu^{-1}$ 且 $b = uav$。于是$E(R_R) = yR$。令 $f: y_0R \to yR$ 由 $f(y_0r) = yr$给出。由于 $r_R(y_0) = 0$，f 是良定义的。因为 $(yR)_R$ 是内射的，存在一个 R-同态 $g: yR \to yR$，使得 $f = g$ 在 y_0R上成立。于是

$$y = f(y_0) = g(y_0) = g(yb) = g(y)b.$$

若写作 $g(y) = yc$，其中 $c \in R$，则得到

$$y = g(y)b = ycb.$$

因此，$g(y) = g(ycb) = g(y)cb = yc^2b$，所以

$$y = g(y)b = yc^2b^2.$$

反复采用上述论证，可得

$$y = yc^nb^n \text{ for all } n \geq 1.$$

若 $b^n \in \delta(R)$，则 $y \in y\delta(R) \subseteq \delta(yR)$，因此 $yR = \delta(yR)$。由于 $\delta(yR)$ 是 δ-小子模 of yR，可知 yR 根据 [39, 引理 1.2] 是投射且半单的。由于 R_R 在 yR 中是本质的，因此 $R = yR$ 是半单的。□

命题 3.11. 假设 R_R 有一个循环内射包。那么在以下任一条件下，R_R 都是内射的:

(1) $R/J(R)$ 是一个 UN-环。(2) $R/J(R)$ 是单位正则的，且 $J(R)$ 是幂零的。(3) $R/\delta(R)$ 是半单的。

证明。(1) 设 $\overline{R} = R/J(R)$。写作 $E(R_R) = xR$ and $x_0 := 1_R = xa$，其中 $a \in R$。若 $a \in U(R)$，则 $x = x_0a^{-1} \in R$，所以 $R_R = xR$ 是内射的。若 $a \notin U(R)$，则$\overline{a} \notin U(\overline{R})$，因此 $\overline{a} = \overline{ub}$，其中 $\overline{u} \in U(\overline{R})$ 的逆为 $\overline{v}$，且 $\overline{b}$ 是幂零元。因此 $\overline{uv} = \overline{ub}\overline{bv}$ 是幂零元，即存在某个 $n \geq 1$ 使得 $(av)^n \in \delta(R)$。由于 $v \in U(R)$，根据引理 3.10，R 是半单的。

(2) 写作 $E(R_R) = xR$ 和 $x_0 := 1_R = xa$，其中 $a \in R$。由于 $\overline{R}$ 是单位正则的，$\overline{a} = \overline{u}\,\overline{e}$，其中 $\overline{u} \in U(\overline{R})$ 且 $\overline{e}^2 = \overline{e}$，所以 $u \in U(R)$。由于 $E(R_R) =(xu)R$且 $x_0 = xa = (xu)(u^{-1}a)$ 并且 $\overline{u^{-1}a} = \overline{e}$，我们可以假设 $\overline{a}^2 = \overline{a}$。因此$a^2 - a \in J(R)$。由于 $J(R)$ 是幂零的，$a^n(1-a)^n = (a-a^2)^n = 0$，其中某个 $n > 0$。由于

$r_R(a) = 0$，由此可得 $(1-a)^n = 0$，所以 $a \in U(R)$。因此，$x = x_0 a^{-1} \in R$，所以 $R = E(R_R)$ 是内射的。

(3) 如果 $R/\delta(R)$ 是半单的，那么根据 [11, 命题 4]，每个有限生成R-模都是 δ-Hopf性模，因此 $E(R_R)$ 是 δ-Hopf性模。所以，根据命题 3.9，R_R 是内射的。□

问题 3.12：如果 R_R 具有循环内射包且 $R/J(R)$ 是单位正则的，那么 R_R 是否是内射的?

注意，如果问题 3.3 有肯定答案，那么问题 3.12 也将有肯定答案。

在 [10], 中，如果对于 M 的任意子模 X 和 Y，满足 $M = X \oplus Y$ 和 $\alpha : X \to Y$ 是一个满足 $ker(\alpha) \subseteq^{\oplus} X$ 的同态，则有 $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq^{\oplus} Y$，那么称 M 为 $C4$-模。$C4$-模这一类同时扩展了 $C3$-模和 SF-模。

命题 3.13. 环 R 是右自内射的，当且仅当 $E(R_R)$ 是循环投射的，且 R_R 是一个 $C4$-模。

证明. 必要性显然。为证充分性，由于 $E := E(R_R) = xR$ 是循环的，令 $\eta : R \to E$ 为由 $\eta(r) = xr$, $r \in R$ 给出的自然 R-满同态。由于 E 是投射的，存在一个 R-同态 $h : E \to R_R$，使得 $\eta h = id_E$。显然，h是单态，且 $R =$像 $h \oplus$核 η。若 $T = h$(核η)，则$T \cong$核η，因为 h是单态。现在，由于 $T \subseteq$像 h, $T \cap$核 $\eta = 0$，且核 $\eta \subseteq^{\oplus} R_R$和 R_R 是一个 $C4$-模，我们由 [10, 定理 2.2] 推得 $T \subseteq^{\oplus} R_R$。由于 $T \subseteq$像 $h \subseteq R$，可得 $T \subseteq^{\oplus}$像 h。由于像 h是内射的，$T \cong$核η是内射的，因此 $R =$像 $h \oplus$核η是内射的。□

4. On Hypercyclic Rings

本节重新审视 Osofosky 在 [30] 中的一些结果，重点介绍关于超循环环这一类环的一些新信息，并说明 [30] 中的一些主要结果，只需要求 $E(R_R)$ 和/或 $E(R/J(R))$ 是循环的即可得到。

在 [4], 中，Caldwell 证明了左完美的右超循环环是阿廷环。下面我们将证明，若 R 是基本的右（或左）完美环，且 $E(R/J^2)$ 作为右 R-模是循环的，则 R 是右阿廷环。此外，若进一步有 $E(R_R)$ 作为右 R-模是循环的，则 R 是拟弗罗贝尼乌斯环。首先回顾一下，若半完美环 R 的单位元 1 可表示为 R的两两正交且互不同构的局部幂等元之和，则称 R 为基本环。

定理 4.1. 设 R 是基本的右（或左）完美环。若 $E(R/J^2)$ 作为右 R-模是循环的，则 R 是右阿廷环。若进一步有 $E(R_R)$ 作为右 R-模是循环的，则 R 是拟弗罗贝尼乌斯环。

证明。由于 R 是基本半完备环，由 [19, 推论 2.4] 可知，R_R 是一个右 DSF-模（即 R 是右拟 duo）。由于 DSF-模的同态像仍然是 DSF，我们推知 $E(R/J^2)$作为右 R-模是 DSF。我们断言：$M := E(R/J^2)$是一个 SF-模。为此，设 M 的子模 A和 B 满足 $A \overset{f}{\cong} B$ 和 $A \cap B = 0$.。我们需要证明$A = B = 0$。由于 M 是内射的，存在 M 的两个子模 C 和 D，使得

满足 $A \subseteq^{ess} C \subseteq^{\oplus} M$和 $B \subseteq^{ess} D \subseteq^{\oplus} M$。显然， $C \cap D = 0$、 $C \oplus D \subseteq^{\oplus} M$，且 $C \oplus D$ 是内射的。现在，单态射 $A \xrightarrow{f} B \subseteq D$ 可延拓为同态 $g: C \longrightarrow D$。由于 $A \subseteq^{ess} C \ and \ B \subseteq^{ess} D$，我们有核$g = 0$和像$g \subseteq^{ess} D$。因为 $C \oplus D$是内射的，我们推知像 $g \subseteq^{\oplus} D$，因而像$g = D$。因此$C \cong D$。现在，令 $M = C \oplus D \oplus T$表示 M的一个子模 T。由于 M是一个 DSF-模，我们推知 $C = D = 0$，从而 $A = B = 0$，如所需。由于 SF-模的类对子模封闭，因此 $(J/J^2)_R$ 是一个 SF-模。由于 R 是半局部的，$(J/J^2)_R$ 是有限个两两非同构单模的直和，因此是有限生成的。现在，由[32, 引理 11]， R 是右阿廷的，从而证明了第一个断言。由于 R 是右拟 duo，且 $E(R_R)$作为右 R-模是循环的，由推论 3.6可知， R 是右自内射的。现在，第二个断言由以下事实得出：环 R 是拟弗罗贝尼乌斯环，当且仅当 R 是右阿廷且右（或左）自内射的。□

定理 4.2. 若 R 是右超循环环，则以下条件等价：

(1) R 是右拟 duo 环。(2) 每个循环右 R-模的内射包都是 DSF-模。

(3) R 是右自内射、右分配环。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。若 T 是 R的右理想，则 $E(R/T)$是循环右 R-模，因此是 DSF-模，因为 R 是右拟 duo 环。

(2) $\Rightarrow$ (3)。若 A 是 R的右理想，则 $E := E(R/A)$是循环模，因此根据假设是 DSF-模。我们断言 E 是平方自由模。为证此点，设 A 和 B 是 E 的子模，且 $A \overset{f}{\cong} B$ 和 $A \cap B = 0$。由于E 是内射的， $A \subseteq^{ess} A_1 \subseteq^{\oplus} E$ 和 $B \subseteq^{ess} B_1 \subseteq^{\oplus} E$，其中 A_1 和 B_1 是 E的子模。显然， f 可扩张为单态射 $h: A_1 \to B_1$，且 $\mathrm{Im}\, h \subseteq^{ess} B_1$。但由于 A_1 是内射的，$\mathrm{Im}\ h \subseteq^{\oplus} B_1$，因此 $A_1 \cong B_1$。现在，设 $E = A_1 \oplus B_1 \oplus C$，其中 $C \subseteq E$是一个子模。由于 DSF-模的类对直和项封闭， $A_1 \oplus B_1$是一个 DSF-模，这就产生矛盾。这说明 $A = B = 0$，从而证明了该断言。因此， R/A 和 $E(R/A)$都是平方自由模，故 R 是右分配环。由于右分配环是右拟 duo 环，且 $E(R_R)$作为右 R-模是循环的，由推论 3.6 可知 R 是右自内射的。

(3) $\Rightarrow$ (1). 右分配环是右 DSF的，因此是右拟 duo。□

推论 4.3. 若 R 是局部右超循环环，则：

(1) R 是右自内射的。(2) 每个循环右 R-模的内射包都是一个 DSF-模。

(3) R 是右分配的。(4) R 是右一致的。(5) R 是右单列的。

证明。(1)、(2) 和 (3) 由定理 4.2 得出，因为局部环是拟二重的。

(4) 设 A 是 R的一个右理想。由(1)， R 是右自内射的，因此 A 在 R的一个直和项中本质。由于 R 是局部环， A 必定在 R中本质。这表明 R 是右一致的。

(5) 设 A 和 B 是 R的非零右理想。由 (4)， $A \cap B \neq 0$。现在，$(A/A \cap B) \oplus (B/A \cap B) \subseteq R/A \cap B \subseteq E(R/A \cap B) \cong R/T$，其中 T是一个右

理想。由于 R 是局部环， R/T 是局部内射模，因此是不可分解的。所以，要么 $A/A\cap B=0$，要么 $B/A\cap B=0$。这表明，要么 $A\subseteq B$，要么 $B\subseteq A$。□

若环 R 满足：从主右理想到 R 的任意同态都是由 R的某个元素左乘所诱导的，则称其为右主内射（p-内射）环 [28], ；等价地，对所有 $x\in R$，有 $l_Rr_R(x)=Rx$。

引理 4.4. 每个右单列右 p-内射环 R 都是左单列的。

证明. 设 $x,y\in R$。由于 R 是右单列的，因此 $r_R(x)\subseteq r_R(y)$ 或 $r_R(y)\subseteq r_R(x)$。现在，由于 R 是右 p-内射的， $l_Rr_R(x)=Rx$ 且 $l_Rr_R(y)=Ry$。这表明 $Rx\subseteq Ry$ 或 $Ry\subseteq Rx$。现在，设 A 和 B 是环 R的左理想，且满足 $A\nsubseteq B$。设 $x\in A, x\notin B$。现在，若 $y\in B$，则 $Rx\nsubseteq Ry$。因此，$Ry\subseteq Rx$，从而 $B\subseteq Rx\subseteq A$，如所需。□

推论 4.5. 每个局部右超循环环 R 都是左单列的。特别地，R是左一致且左分配的。

证明。该结论由推论 4.3 和引理 4.4 得出。最后一个断言是显然的。□

极大赋值环和几乎极大赋值环在交换的环论中发挥着重要作用。单列环是在非交换情形下赋值环的自然推广。回顾一下，若一个环 R 满足：对于任意一族 $\{I_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ 的 R的左理想 I_α，形如 $x\equiv x_\alpha\ (I_\alpha)$ 的每个两两可解同余方程组，其中 $\alpha\in\Lambda$ 且 $x_\alpha\in R$，在 R中都有一个同时解，则称该环为左极大。借助上述结果，由 [2,定理 9] 可立即推出，每个局部右超循环环都是左极大的。

定理 4.6. 每个局部右超循环环都是左极大的。

回顾一下，若环 R 的每个右理想或左理想都是湮灭子，则称 R 为对偶环 [16] 。

命题 4.7. 设 R 是一个局部右超循环环，并考虑以下条件：

(1) R 是右 duo。(2) R 是本质右 duo。(3) $soc(R_R)\subseteq^{ess}R_R$。(4) R 是对偶的。

则 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2)。这一蕴含显然。

(2) $\Rightarrow$ (1)。这一蕴含由推论 4.3 的 (3) 得出。

(2) $\Rightarrow$ (3)。该推论由命题 2.14 得出。

(3) $\Rightarrow$ (4)。根据推论 4.3， R 是右自内射的。由于 $soc(R_R)\subseteq^{ess}R_R$，我们推知 R 是右 PF环。因此， R是一个内射余生成元。这意味着，若 T 是 R 的右理想，则 R/T 嵌入到若干个 R的直积中，由此可得 $T=r(X)$，其中 X 是 R的子集。现在，设 L 是 R 的左理想。根据推论 4.3 和推论 4.5， R 的左（右）理想按包含关系全序排列。定义 $N:=\bigcap_{Rx\supseteq L}Rx$。于是 $N=l_R(\sum_{Rx\supseteq L}r(Rx))$，因为$R$ 是右 p自内射的。若 $L\neq N$，取 $y\in N$ 和 $y\notin L$。则 $Ry\supsetneq L$。现在，若

$t \in R$ 使得 $Rt \supseteq L$，那么根据 N的定义可知 $Rt \supseteq N \supseteq Ry$。这意味着 Ry/L是一个单左模，并且 $Jy \subseteq L$，其中 $J = J(R)$。但由于 Ry/Jy 也是一个单模，我们推知 $L = Jy$。现在，由于$soc(R_R) \subseteq^{ess} R_R$，我们可以找到一个元素 $z \in R$，使得 $0 \neq yz \in soc(R_R)$。由于R是右 PF环，$soc(R_R) = soc(_RR)$，因此 $Jyz = 0$且 $Jy \subseteq l_R(zR)$。但由于 $0 \neq Ryz$，我们推知 $Ry \nsubseteq l_R(zR)$。由于 R 的左理想按包含关系全序排列，$Jy \subseteq l_R(zR) \subsetneq Ry$。由于 Ry/Jy 是一个单模，因此可得 $L = Jy = l_R(zR)$，证毕。

(4) ⇒ (3)。该蕴含由 [16, 引理 3.2 和定理 3.5]得出。□

注 4.8. 我们无法证明或否证命题 n
4.7 中的 (2){v1}(3)。

下一个结果是命题 4.7 和 [16, 定理 m
5.3].

推论 4.9. 如果 R 是局部右超循环右 duo 环，那么每个有限生成的右（左） R-模都具有有限 Goldie维数。

Acknowledgments

本研究的部分工作是在第二作者访问葡萄牙波尔图大学数学系期间完成的。他谨向波尔图大学数学系的成员致以谢意，感谢他们提供的经费支持和热情接待。第三作者感谢接待方在其访问俄亥俄州立大学期间的热情款待；部分工作正是在那里完成的。第一作者的研究部分得到 CMUP（LASI 成员）的支持；该机构由国家资金通过科学与技术基金会——科学与技术基金会，I.P.资助，项目编号为 UIDB/00144/2020 和 UIDP/00144/2020。第二作者的研究得到俄亥俄州立大学数学研究所的支持，第三作者的研究则获得加拿大自然科学与工程研究委员会颁发的探索基金资助。

References

[1] Asgari, Sh., Haghany, A., Vedadi, M. (2008). 拟余霍普夫模及其应用。《代数通讯》36：1801–1816。[2] Albrecht, U., Santill´án-Covarrubias, F.J. (2020). 关于几乎极大链环的一则短 note。《巴多瓦大学数学研讨会论文集》144：1–11。[3] Baba, Y., Oshiro, K. (2009). 经典阿廷环及相关主题。World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.[4] Caldwell, W. (1968). 超循环环。《太平洋数学杂志》24：29-44。[5] Caldwell, W. (1966). 循环模具有循环内射包的环。博士论文，罗格斯新泽西州立大学，新不伦瑞克。[6] Carvalho, P., Lomp, C., Smith, P.F. (2018). 关于拟局部环上的单模的一则短 note。《国际电子代数杂志》24：91-106。[7] C˘alug˘areanu, G. (2016). UN-环。《代数与应用杂志》15 (8)。1650182（9页）。[8] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., Wisbauer, R. (2006). 提升模。巴塞尔-波士顿-柏林：Birkhauser Verlag。[9] Cozzens, J., Faith, C. (1975). 单诺特环。剑桥数学专著，第69号，剑桥大学出版社，剑桥-纽约-墨尔本。[10] Ding, N., Ibrahim, Y., Yousif, M., Zhou, Y. (2017). $C4$-模。《代数通讯》45：1727-1740。[11] Ebrahimi Atani, S., Khoramdel, M., Pishhesari, D.S. (2018). 每个满射自同态都具有 δ-小核的模。 *Algebra Discrete Math.* 26：170-189。

[12] Faith, C. (1966) 关于 K¨othe 环。《数学年鉴》164：207–212。[13] Faith, C., Walker, E. (1967). 内射模的直和表示。《代数杂志》5：203-221。[14] Ghorbani, A., Haghany, A. (2002). 广义霍普夫模。《代数杂志》255：324–341。[15] Haghany, A., Vedadi, M.R. (2001). 内射自同态为本质的模。《代数杂志》243：765–779。[16] Hajarnavis, C.R., Norton, N.C. (1985). 关于对偶环及其模。《代数杂志》93：253–266。[17] Ibrahim, Y., Yousif, M. (2019). 对偶平方自由模。《代数通讯》47：2954-2966。[18] Ibrahim, Y., Yousif, M. (2020). 具有循环内射包的环。《代数通讯》48：5110–5122。[19] Ibrahim, Y., Yousif, M. (2020). 内射包为对偶平方自由的环。《代数通讯》48：1011–1021。[20] Jain, S.K., Malik, D.S. (1985). q-超循环环。《加拿大数学杂志》37：452-466。[21] Jain, S.K., Mohamed, S.H., Singh, S. (1969). 每个右理想都是拟内射的环。《太平洋数学杂志》31：73–79。[22] Jain, S.K., Saleh, H.H. (1987). 循环模具有有限生成内射（拟内射）包的环。《代数通讯》15：1679-1687。[23] Lam, T.Y. (1999). 模与环讲义。数学研究生教材189。施普林格出版社。[24] Matlis, E. (1958). 诺特环上的内射模。《太平洋数学杂志》8：511-528。[25] Michler, G.O. and Villamayor, O.E. (1973). 关于单模为内射模的环。《代数杂志》25：185-201。[26] Nicholson, W.K., S´anchez Campos, E. (2004). 具有同构定理之对偶的环。《代数杂志》271：391–406。[27] Nicholson, W.K., Yousif, M.F. (2003). 拟弗罗贝尼乌斯环，剑桥数学专著158，剑桥大学出版社，英国剑桥。[28] Nicholson, W.K., Yousif, M.F. (1995). 主内射环。《代数杂志》174：77–93。[29] Osofsky, B. (1966). 全线性环的循环内射模。《美国数学会会刊》17：247-253。[30] Osofsky, B. (1968). 循环模具有循环内射包的非交换环。《太平洋数学杂志》25：331–340。[31] Osofsky, B.L. (1964). 所有有限生成模都是内射模的环。《太平洋数学杂志》14：645-650。[32] Osofsky, B. (1966). 拟弗罗贝尼乌斯环的一种推广，《代数杂志》4：373-387。[33] Rosenberg, A., Zelinsky, D. (1958/59). 内射包的有限性。《数学杂志》70：372-380。[34] Sharpe, D., Vamos, P. (1972). 内射模。剑桥数学与数理物理专著，第62号，剑桥大学出版社，伦敦-纽约。[35] Stephenson, W. (1974). 子模格为分配格的模。《伦敦数学会会刊》28：291–310。[36] V´amos, P. (1968). “有限生成”概念的对偶。《伦敦数学会杂志》43：643–646。[37] Wisbauer, R. (1991). 模与环理论基础：学习与研究手册，戈登与布里奇科学出版社，宾夕法尼亚州费城。[38] Yu, H-P. (1995). 关于拟双环。《格拉斯哥数学杂志》37：21–31。[39] Zhou, Y. (2000). 完备环、半完备环与半正则环的推广。《代数讨论刊》7：305-318。

CMUP, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, rua do Campo Alegre s/n, 4169-007 Porto, Portugal.*Email address*: clomp@fc.up.pt

Department of Mathematics, The Ohio State University, Lima, Ohio 45804, USA. *Email address*: yousif.1@osu.edu

Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL, A1C 5S7, Canada.*Email address*: zhou@mun.ca