arXiv:2302.03986v2 [math.NT] 1 Nov 2023

秩0商策略下某些亏格 3 曲线的有理点

TONY EZOME、BRICE MIAYOKA MOUSSOLO 和 RÉGIS FREGUIN BABINDAMAN A

摘要。1922年，Mordell 猜想光滑曲线 C在 $\mathbb{Q}$ 上的有理点集合是有限的，其中亏格为 $g \geq 2$ 。法尔廷斯于1983年证明了这一猜想。然而，Coleman 于1985年沿用夏博蒂方法，针对曲线 C 的雅可比簇的 Mordell-Weil秩为 $< g$这一特殊情形，确定了 $\#C(\mathbb{Q})$ 的一个上界。2006年，Stoll 改进了 Coleman 界。Balakrishnan 和合作者于 [1]采用 Chabauty-Coleman方法计算了亏格 3 超椭圆曲线的有理点。随后，Hashimoto 和 Morrison [8] 对 Picard曲线进行了同样的工作。不过，所有亏格 3 曲线尚未完成这项工作。本文介绍一种算法，用于计算任意亏格 3 曲线 $C/\mathbb{Q}$ 的有理点完全集合 $C(\mathbb{Q})$，其中该曲线是某条亏格 1 曲线的二次覆盖，且其雅可比簇的秩为 0。我们在 Magma 中实现了这一算法，并在从平面四次曲线和亏格 3 超椭圆曲线数据库中选取的约 40，000 条曲线上运行了该算法。我们讨论了一些有趣的例子，并展示了有理点数达到 Stoll界的曲线。

关键词：低亏格曲线、商曲线、有理点。

2020 年数学主题分类：主要分类 14G05、14H45

1. 引言

给定一个射影、光滑、绝对不可约曲线 C ，其定义在 $\mathbb{Q}$上，我们希望确定 C上的有理点集合 $C(\mathbb{Q})$。 C的亏格 g 是一个重要数据，它是一个非负整数，取决于 C 在双有理等价下的性质。若 $g = 0$，则要么 $C(\mathbb{Q}) = \varnothing$，要么 C 同构于射影直线。若 $g = 1$ 且 $C(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$，则 C 是一条椭圆曲线。在后一种情形下，Mordell 于 [12] 提出的一项著名定理证明了 $C(\mathbb{Q})$是一个有限生成阿贝尔群。这意味着，仅凭有限个点就能描述 $C(\mathbb{Q})$。此外，Mordell 在其论文末尾猜想，若 g 大于或等于 2，则$C(\mathbb{Q})$是有限集。1929年，韦伊 [17] 将莫德尔定理推广到了数域上的所有阿贝尔簇。随后，法尔廷斯 [5] 于1983年证明了莫德尔猜想。但法尔廷斯的证明并非有效的。事实上，构造一种算法来计算给定亏格为 ≥ 2 的曲线的有理点，是当前备受关注的问题。有一些方法适用于特定的曲线族，但一般而言，这个问题很难。现有的主要方法之一基于 Chabauty [3]和 Coleman [4]的工作。假设 p 是一个

日期：2023年11月2日。

pri良约化的点 C，我们用 P 表示 $C(\mathbb{Q}_p)$中的一个点。嵌入

$$\iota : C \hookrightarrow J$$

$$Q \longmapsto [Q - P]$$

在 C 与其雅可比簇 J 上的全纯微分形式空间之间诱导出一个同构 $\iota^* : H^0(J_{\mathbb{Q}_p}, \Omega^1) \to H^0(C_{\mathbb{Q}_p}, \Omega^1)$。记 $J(\mathbb{Q})$ 为 $J(\mathbb{Q})$ 在 $J(\mathbb{Q}_p)$ 中的 p-进闭包。Chabauty [3] 证明，若 C 的雅可比簇的秩小于 g，则交集 $\iota(C(\mathbb{Q}_p)) \cap J(\mathbb{Q})$ 是有限集。随后，Coleman [4] 通过运用其关于曲线上 p-进积分的理论，提出了这一结果的有效版本。事实上，根据配对的性质

$$\langle , \rangle : H^0(C_{\mathbb{Q}_p}, \Omega^1) \times J(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathbb{Q}_p$$

$$(\omega, [\sum P_i - Q_i]) \longmapsto \sum \int_{P_i}^{Q_i} \omega,$$

以及 $H^0(C_{\mathbb{Q}_p}, \Omega^1)$ 是 g 维的，而 J 的 Mordell-Weil秩为 $< g$ 这一事实，可以推得存在一组线性无关的微分 $\omega_1, \ldots\ldots, \omega_k \in H^0(C_{\mathbb{Q}_p}, \Omega^1)$，使得对于 $J(\mathbb{Q})$ 中的所有除子类 $[D]$，ω_i，$[D] = 0$。Coleman 实际上通过考察 ω_i 在 $J(\mathbb{Q}_p)$ 上的积分（这些积分在 $J(\mathbb{Q})$ 上为零），计算出了 C 的所有 $\mathbb{Q}$-有理点。因此，这些 1-形式通常称为湮灭微分。此外，他还得到了有理点数量的一个上界。

定理1 ([4])。 设 C 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的亏格为 $g \geq 2$ 的光滑曲线，其雅可比簇的 *Mordell-Weil* 秩为 $r < g$，且 p 是一个良约化素数，使得 $p > 2g$。记 C 为 C 模 p的约化。则

$$\#C(\mathbb{Q}) \leq \#\overline{C}(\mathbb{F}_p) + 2g - 2. \tag{1}$$

后来 Stoll [15]改进了这个界。

定理2 ([15])。 设 C 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的亏格为 $g \geq 2$ 的光滑曲线，其雅可比簇的 *Mordell-Weil* 秩为 $r < g - 1$，且 p 是一个良约化素数，使得 $p > 2r + 2$。记 C 为 C 模 p 的约化。则

$$\#C(\mathbb{Q}) \leq \#\overline{C}(\mathbb{F}_p) + 2r. \tag{2}$$

Balakrishnan 与她的合作者在 [1] 中实现了 Chabauty-Coleman方法，用于计算从数据库 [2]中选取的亏格 3 超椭圆曲线的有理点。另一方面，Hashimoto 和 Morrison [8] 对从数据库 [16]中选取的 Picard曲线也做了同样的工作。但遗憾的是，这项工作尚未针对所有亏格 3 曲线完成。本文介绍一种算法，用于计算任意亏格 3 曲线 $C/\mathbb{Q}$ 的有理点 $C(\mathbb{Q})$的完整集合；该曲线是亏格 1 曲线 $D/\mathbb{Q}$ 的二次覆盖，且其雅可比簇的秩为 0。第一步是检查 D 是否有一个 $\mathbb{Q}$-有理点。当 $D(\mathbb{Q}) = \varnothing$时，显然 $C(\mathbb{Q}) = \varnothing$。如果我们找到一个有理点 P_0，那么 (D, P_0) 是一条椭圆曲线。莫德尔定理

告诉我们， $D(\mathbb{Q})$ 是一个有限群。此外，Mazur [[10], [11]] 证明了这个群同构于以下十五个群之一：

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \text{with} \quad 1 \le n \le 10 \text{ or } n = 12,$$

and

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \quad \text{with } 1 \le n \le 4.$$

可以使用 Magma 的函数 *Mordell-Weil*群 来确定 $D(\mathbb{Q})$ 的确切性质。由于商映射 $\psi : C \longrightarrow D$ 定义在 $\mathbb{Q}$上，我们有 $\psi(C(\mathbb{Q})) \subseteq D(\mathbb{Q})$，并且可以轻松推出 $C(\mathbb{Q})$，由 $\psi^{-1}(D(\mathbb{Q}))$ 得出。请注意，秩 0 商曲线策略并非专用于亏格 3 曲线。事实上，很容易看出，第 2.2 节中描述的算法可用于计算任何满足输入条件的亏格 ≥ 2 曲线的有理点。例如，Siksek 在 [14]中讨论了一个具体的亏格 2 情形。此外，可以将秩 0 商曲线策略与 Chabauty-Coleman方法相结合，实现一种高效的点计数算法，充分发挥两种方法各自的优势；这样一来，如果实现的函数无法找到 Chabauty-Coleman方法所需的湮灭微分，就可以转而搜索对称性和椭圆商。Magma 的 Chabauty 函数在处理亏格 2 曲线时似乎就采用了这一技巧。

本文的组织如下。引言之后，我们在第 2.1 节回顾亏格 3 曲线的一些重要性质。随后，我们在第 2.2 节介绍秩 0 商曲线策略，并在第 2.3 节讨论其实现。第 3 节专门用于说明。我们给出一些有趣的例子，并展示一些有理点数量达到 Stoll界的曲线。

致谢。 本研究获得了法国政府的经费支持，由法国国家科学研究中心管理，属于撒哈拉以南非洲合作支持计划 框架（通过 REDGATE项目和IRNAFRIMath）。本文介绍的实验使用 Magma 软件完成，所用账户为第二作者在波士顿大学图书馆的账户。前两位作者通过 PREMA项目获得了 Simons基金会的支持。

我们非常感谢 Jennifer Balakrishnan，感谢她参与了许多有益的讨论，并使我们注意到近期关于曲线上 Coleman积分和点计数算法的论文。我们感谢 Oana Padurariu 提供的宝贵建议。我们也非常感谢 Steffen Müller 对本工作早期版本提出的意见。我们感谢 Andrew Sutherland 对本工作的评论，并感谢他与我们分享了他和合作者在 [6] 中使用的一些数据。

2. 秩0 商策略

如引言中所述，该算法可用于计算任何满足输入条件的 ≥ 2 亏格曲线的有理点。本节先回顾亏格 3 曲线的相关性质，然后介绍该算法。我们介绍了实现方法，并使用从数据库 [2]以及由 [6]的作者构建的另一个数据库中选取的曲线进行了实验。

2.1. **亏格 3 曲线符合条件**。虽然亏格为 $g \leq 2$ 的曲线族具有同质性，即代数闭域上亏格相同的两条曲线性质相同（有理、椭圆或双曲），但当亏格大于 2 时，情况便有所不同。例如，一条亏格为 3 的（射影、光滑、绝对不可约）曲线 C 可以是超椭圆曲线，也可以是非超椭圆曲线，$i.e$，即平面四次曲线。假设这条曲线 C 是亏格 1 曲线 D的二次覆盖。众所周知，C的雅可比簇与 D 的雅可比簇和一个阿贝尔曲面的乘积同源，参见例如 [13]。当 C 同时是超椭圆曲线时，它由 $C : y^2 = f(x^2)$定义，其中 f 是一个 4 次多项式，而 D是轨迹 $y^2 = f(x)$。如果 C 是平面四次曲线，那么它就是由形如 $Y^4 - h(X, Z)Y^2 + r(X, Z)$的三元四次曲线所定义的轨迹，因此 D 由 $D : Y^2 - h(X, Z)Y + r(X, Z) = 0$给出。本文实际描述了在 D 的雅可比簇的 Mordell-Weil秩为 0 时，如何根据 D的有理点计算 C 的有理点。这对于带有可产生秩 0 商的额外对合的亏格 3 超椭圆曲线尤为适用。雅可比簇的秩为 ≤ 2 的 Ciani四次曲线也符合条件。回顾一下，Ciani四次曲线是由如下形式的方程定义的光滑曲线：

$$a_1X^4 + a_2Y^4 + a_3Z^4 + 2(b_1Y^2Z^2 + b_2X^2Z^2 + b_3X^2Y^2) = 0.$$

众所周知，此类曲线的雅可比簇与三个商椭圆曲线的乘积同源，见 [9, 第 2 节3]。因此，如果雅可比簇的秩为 ≤ 2，那么这些椭圆曲线中至少有一条的秩为 0。

2.2. **算法**。秩 0 商曲线策略的简明表述如下。

算法1： 秩 0 商曲线策略

输入： 一条曲线 $C/\mathbb{Q}$ 以及定义在 C 上的对合 σ，其中 $\mathbb{Q}$ 使得商 $D := C/\sigma$ 的亏格为 1，且其雅可比簇的秩为 0。

输出： S 上的 $\mathbb{Q}$-有理点集。

令 $\psi : C \longrightarrow D$ 为商映射，并计算 $D(\mathbb{Q})$。
若 $D(\mathbb{Q}) = \varnothing$，则 $S = \varnothing$。否则，对每个 $P \in D(\mathbb{Q})$，计算 $\psi^{-1}(P)$。
令 $\Omega(P) := \psi^{-1}(P) \cap C(\mathbb{Q})$，则 $S = \bigcup_{P \in D(\mathbb{Q})} \Omega(P)$。

返回 S

2.3. **实现**。 我们用 Magma 实现了该算法。代码可在第二作者的 GitHub 仓库中获取

https : //github。com/Brice202145/Strategie_Rang_商。

我们在从 Sutherland 及其合著者于 [6] 构建的数据库中选出的 38,564 条平面四次曲线上运行了我们的代码。实际上，我们最初的数据集由 100,000 条平面四次曲线组成，这些曲线必须通过识别和筛选流程。我们首先测试它们的方程是否呈现某些对称性（$i.e$ 如果在将 x 替换为 $-x$、将 y 替换为 $-y$ 或将 z 替换为 $-z$ 后，方程保持不变），以便为每条曲线识别合适的对合。事实上，我们首先

表 1. 对从 [6]构建的数据库中选出的 100，000 条平面四次曲线执行筛选程序后得出的统计数据。

具有亏格 1 秩 0 商		曲线数量 具有亏格 1 秩 1 商	曲线数量 具有一个亏格 1 秩为 ≥ 2 的商
数量 曲线的 商没有 有理点: **7534**	曲线数量 其 商是一条 椭圆曲线: **31030**	**57347**	**4089**

对这些方程应用线性变换，以便更容易搜索对称性。找到对称性后，我们检查相应的商曲线是否为亏格 1。我们确认，全部 100,000 条曲线都具有对称性，且其商曲线均为亏格 1。筛选流程包括计算这些商曲线的雅可比簇的秩。结果表明，只有 38,564 条曲线具有秩 0 商曲线，其中包括 17, 404 条 Ciani四次曲线。运行算法1后发现，这些曲线中的大多数都没有有理点。筛选流程所得的统计数据汇总于表 1。此外，对符合条件的 38,564 个四次覆盖运行算法1所得的统计数据见图 1。

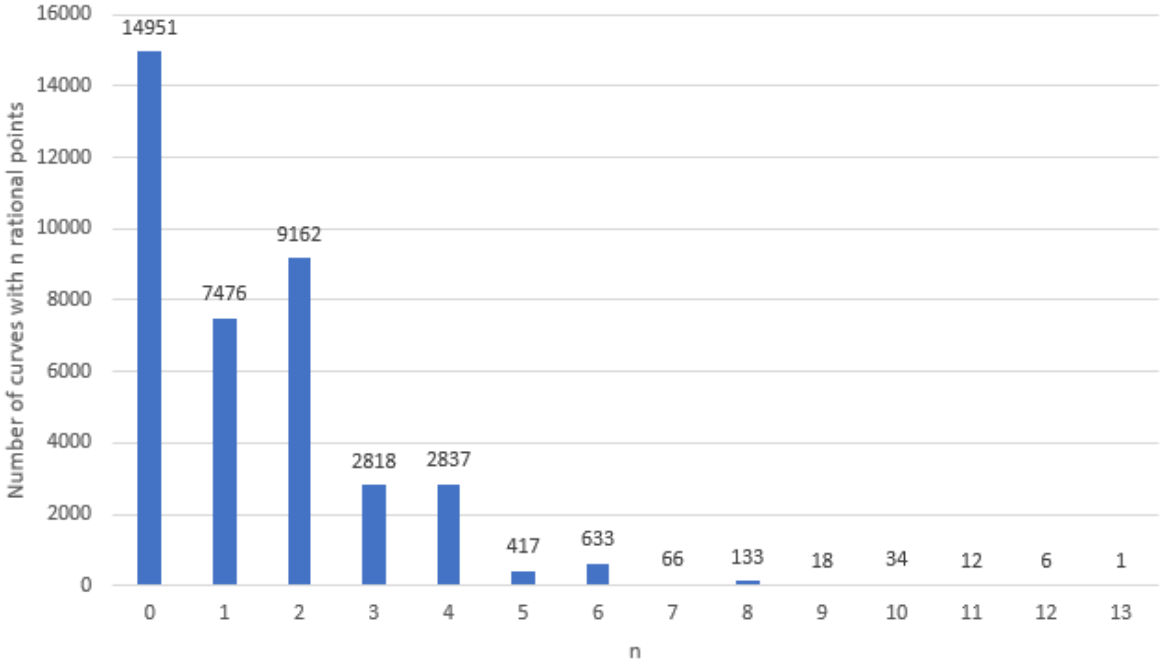
我们还在从数据库 [2] 中筛选出的超椭圆曲线上运行了我们的代码。实际上，我们将此前描述的识别和筛选流程应用于该数据库中的全部 67，879 条超椭圆曲线。结果表明，只有 130 条具有亏格 1 秩 0 商曲线，并且每一条都至少拥有一个有理点。在符合条件的 130 条超椭圆曲线上运行算法1所获得的统计数据列于 2 中。我们在平面四次曲线和超椭圆曲线方面的实验中使用的所有代码以及获得的结果，都可在第二作者的 GitHub 代码仓库中找到: https : //github.com/Brice202145/Strategie_Rang_quotient。

3. 示例

定理1和定理2给出了在某些条件下亏格为 $g \geq 2$ 的光滑曲线上有理点数量的上界。在实际计算这些曲线的有理点时，人们会观察到，其中一些曲线的有理点数量达到了这些上界，而另一些则没有。 [7] 中已经对此类观察进行了说明。下面的示例也说明了这一点。

例 1 （Fermat曲线上的有理点）。 设 k 为正整数，且 a_1、a_2、a_3为非零有理数，并且它们都是 $4k$次幂。根据费马大定理，不存在三元组（X、Y、Z） $\in \mathbb{Q}^3$ 使得 $XYZ \neq 0$，且（X、Y、Z）是三项式 $a_1X^{4k} + a_2Y^{4k}$ –的一个根

图1. 对从 [6] 中构建的数据库里选出的**38,564**条符合条件的四次覆盖运行算法1后得到的统计数据。



a_3Z^{4k}。因此，曲线上的唯一 $\mathbb{Q}$-有理点

$$C_k : X^{4k} + Y^{4k} - Z^{4k} = 0$$

是平凡解：$(0, 1, 1)$、$(0, 1, -1)$、$(1, 0, 1)$ 和 $(1, 0, -1)$。我们得出结论，对于所有素数 $p > 2$，C_1 上有理点的数量都达到 *Stoll*界。但$\#C_k(\mathbb{Q})$ 对任何 k都不会达到 *Coleman* 界。

例2（Ciani四次曲线的有理点）。 考虑 *Ciani*四次曲线

$$C : 15X^4 + 112Y^4 + 112Z^4 + 288Y^2Z^2 - 88X^2Z^2 - 88X^2Y^2 = 0$$

Let

$\sigma_1 : (X, Y, Z) \mapsto (-X, Y, Z)$, $\sigma_2 : (X, Y, Z) \mapsto (X, -Y, Z)$, *and* $\sigma_3 : (X, Y, Z) \mapsto (X, Y, -Z)$

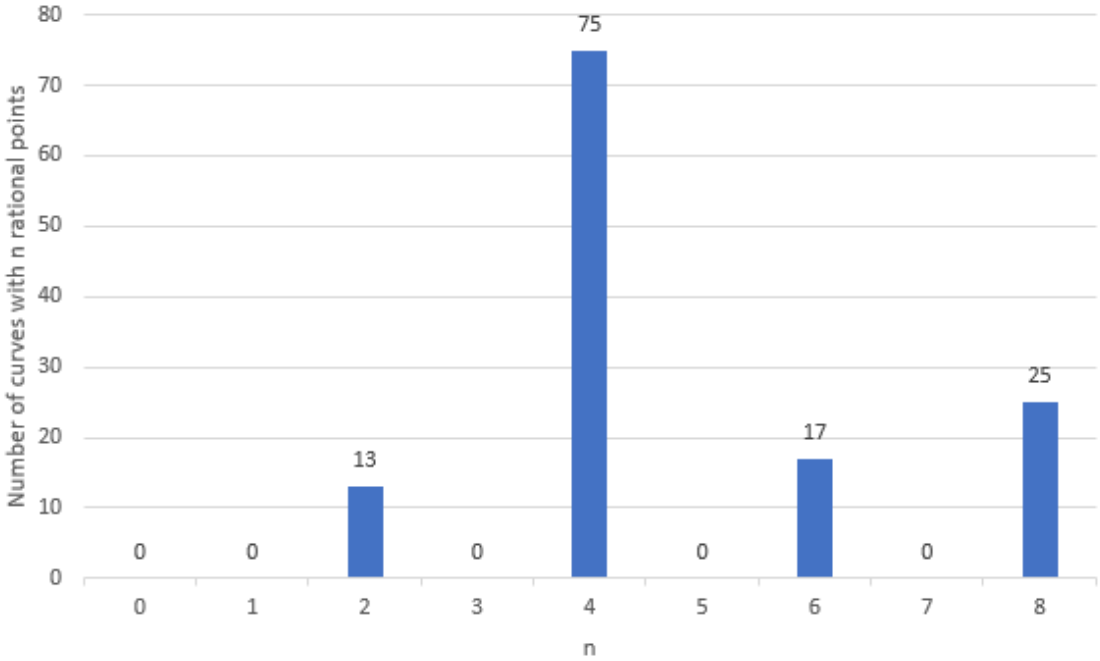
是 C的三个典范对合。相应的商椭圆曲线为

$$E_1 : 112X^4 + 112Y^4 + 15Y^2Z^2 - 88ZY^3 - 88YZX^2 + 288X^2Y^2 = 0,$$
$$E_2 : 112Y^4 + 112Z^4 + 15X^2Z^2 - 88XZ^3 - 88XZY^2 + 288Z^2Y^2 = 0,$$
$$E_3 : 112X^4 + 112Z^4 + 15Y^2X^2 - 88YX^3 - 88YXZ^2 + 288X^2Z^2 = 0.$$

令 $E : y^2 = x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{15}{16}x$。通过使用以下变换

$$E_1 \longrightarrow E : (X, Y, Z) \longmapsto \left(\frac{28}{15}X^2Y + \frac{58}{15}Y^3 - Y^2Z, \frac{56}{15}X^3 + \frac{116}{15}XY^2 - 2XYZ, -\frac{8}{15}Y^3\right),$$

图 2。从数据库 [2] 中选取的 **130** 条超椭圆曲线上运行算法**1**时获得的统计数据。



$$E_2 \longrightarrow E : (X,Y,Z) \longmapsto \left(\frac{28}{15}Y^2Z + \frac{58}{15}Z^3 - Z^2X, \frac{56}{15}Y^3 + \frac{116}{15}YZ^2 - 2XYZ, -\frac{8}{15}Z^3\right),$$

$$E_3 \longrightarrow E : (X,Y,Z) \longmapsto \left(\frac{28}{15}Z^2X + \frac{58}{15}X^3 - X^2Y, \frac{56}{15}Z^3 + \frac{116}{15}ZX^2 - 2XYZ, -\frac{8}{15}X^3\right),$$

我们发现 E_1、 E_2 和 E_3 与 E 同构。*Magma* 告诉我们， E 的秩为 0。运行代码后，我们得到

$$E(\mathbb{Q}) = \left\{\infty, (0,0), \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, 0\right), \left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right), \left(-\frac{15}{4}, 0\right)\right\},$$

and

$$C(\mathbb{Q}) = \{(2:1:0), (-2:1:0), (2:0:1), (-2:0:1)\}.$$

因此，*Stoll*界在 17 处是紧的，因为 C 的秩为 0 ，且其模 17 约化满足

$$\overline{C}(\mathbf{F}_{17}) = \{(2:1:0), (15:1:0), (2:0:1), (15:0:1)\}.$$

例 3 （一条亏格 3 双曲曲线的有理点）。 该双曲曲线

$$C : Y^2Z^6 = X^8 + 2X^4Z^4 - 4X^2Z^6 + Z^8$$

在对称性 σ : （X, Y, Z） $\mapsto$ （$-X, Y, Z$）下保持不变，而商 $D := C/\langle\sigma\rangle$ 是一条亏格1 秩0 曲线。通过运行我们的代码，我们发现

$$D(\mathbb{Q}) = \left\{\infty, (0:\frac{1}{2}:1), (0:-\frac{1}{2}:1), (1:\frac{1}{2}:1), (1:-\frac{1}{2}:1)\right\},$$

and

$$C(\mathbb{Q}) = \{(1:-1:0),(1:1:0),(-1:0:1),(0:-1:1),(0:1:1),(1:0:1)\}.$$

例 4（亏格 3 非双曲曲线且不是 Ciani四次曲线的情形）。考虑平面四次曲线

$$C : 3X^4 - 2X^2Y^2 - Y^4 + 4X^3Z - 4XY^2Z + 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2 + 2XZ^3 + Z^4.$$

这条曲线在对合 $\sigma_2 : (X,Y,Z) \mapsto (X,-Y,Z)$ 下保持不变，但在对合 $\sigma_1 : (X,Y,Z) \mapsto (-X,Y,Z)$ 和 $\sigma_3 : (X,Y,Z) \mapsto (X,Y,-Z)$ 下均不保持不变。商 $E := C/\langle\sigma_2\rangle$ 是一条秩为 *0* 的椭圆曲线。运行我们的代码后，我们发现

$$E(\mathbb{Q}) = \left\{\infty, (-1:0:1), \left(-\frac{1}{2}:\frac{3}{4}:1\right), \left(\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:1\right)\right\},$$

and

$$C(\mathbb{Q}) = \left\{(-1:0:1),(-1:1:0),(1:1:0), \left(-\frac{1}{2}:-\frac{1}{2}:1\right), \left(-\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:1\right)\right\}.$$

我们得出结论，$\#C(\mathbb{Q})$ 不可能达到 *Coleman* 界，因为 C 的约化满足$\#C(\mathbf{F}_p) \geq 2$，对任意素数 p 均如此。

参考文献

[1] Jennifer S. Balakrishnan、Francesca Bianchi、Victoria Cantoral-Farfán、Mirela Çiperiani 和 Anastassia Etropolski。《亏格 3 超椭圆曲线的 Chabauty-Coleman 实验》。载于 《数论研究方向。女性与数论 *IV*。女性与数论 *WIN4* 研讨会论文集。班夫国际研究站，班夫，阿尔伯塔，加拿大，*2017*年*8*月*14*日至*18*日》，第 67–90 页。施普林格：Cham，2019年。

[2] A. Booker、D. Platt 和 A. Sutherland。关于 q 上非双曲亏格 3 曲线的数据库。可访问 http://math.mit.edu/~drew/gce_genus3_hyperelliptic.txt[3] Claude Chabauty。论高于单位亏格的代数曲线的有理点。巴黎科学院报告，212：882–885，1941年。[4] Robert F. Coleman。有效 Chabauty 方法。《杜克数学杂志》，52：765–770，1985年。[5] G. Faltings。数域上阿贝尔簇的有限性定理。《数学发明》，3(73)：349–366，1983年。附有一则可选注释。[6] Francesc Fité、Kiran S. Kedlaya 和 Andrew V. Sutherland。阿贝尔三维簇的 Sato-Tate 群：分类预览。载于 算术、几何、密码学与编码理论，*AGC2T*，第*17*届国际会议，国际数学会议中心，法国马赛，*2019*年*6*月*10*日至*14*日，第103–129页。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2021年。[7] A. Gajovi´c。具有精确的 Chabauty-Coleman 界的曲线。即将出版。西蒙斯合作项目“算术几何、数论与计算”会议论文集。[8] S. Hashimoto 和 T. Morrison。秩 1 Picard 曲线的 Chabauty-Coleman 计算。可访问 https://arxiv.org/pdf/2002.03291.pdf。[9] Gilles Lachaud 和 Christophe Ritzenthaler。关于 Serre 提出的阿贝尔三维簇的若干问题。载于 代数几何及其应用。献给 *Gilles Lachaud 60*岁生日。第一届 *SAGA* 会议论文集，法国帕皮提，*2007*年*5*月7日至*11*日，第88–115页。新泽西州哈肯萨克：世界科学出版社，2008年。[10] B. Mazur。模曲线与 Eisenstein 理想。高等科学研究所数学出版物，47：33–186，1977年。[11] B. Mazur。素数次数的有理同源。（附 D. Goldfeld 的附录）。《数学发明》，44：129–162，1978年。[12] L. J. Mordell。关于三次与四次不定方程的有理解。剑桥哲学学会会报，21：179–192，1922年。

[13] Christophe Ritzenthaler 和 Matthieu Romagny。关于亏格 1 曲线的亏格 3 覆盖的 Prym 簇。*ÉpijournaldeGéom. Algébr., EPIGA*，2：8，2018年。编号/第2号。[14] Samir Siksek。Chabauty 方法与 Mordell–Weil 筛法。载于 超椭圆曲线及其应用进展。基于北约高级研究院（*ASI*）于马其顿奥赫里德举办的活动，*2014*年，第194–224页。阿姆斯特丹：IOS Press，2015年。[15] Michael Stoll。给定曲线的扭曲上的有理点的独立性。*Compositio Mathematica*，142(5)：1201–1214，2006年。[16] A. Sutherland。关于 q 上非双曲亏格 3 曲线的数据库。可访问 https://math.mit.edu/~drew/gce_genus3_nonhyperelliptic.txt[17] A. Weil。代数曲线上的算术。数学学报，52：281–315，1929年。

TONY EZOME，加蓬利伯维尔国立高等师范学院数学系，邮政信箱 17 009。电子邮箱：tony.ezome@gmail.com BRICE MIAYOKA MOUSSOLO，马里恩·恩古瓦比大学理工学院，邮政信箱 69，布拉柴维尔，刚果电子邮箱：bricemiayo@gmail.com RÉGIS FREGUIN BABINDAMANA，马里恩·恩古瓦比大学理工学院，邮政信箱 69，布拉柴维尔，刚果电子邮箱：regis.babindamana@yahoo.fr