arXiv:2302.03989v2 [math.KT] 4 Dec 2023

KK-对偶：图上的自相似群胚作用

NATHAN BROWNLOWE、ALCIDES BUSS、DANIEL GONÇALVES、JEREMY B. HUME、AIDAN SIMS 和 MICHAEL F. WHITTAKER

Abstract. 我们将 Nekrashevych 关于正则、递归、收缩自相似群作用的 KK-代数的对偶性推广到图上的正则、收缩自相似群胚作用，完全去除了递归条件，并将有限字母表推广为有限图。

更确切地说，给定一个忠实作用于有限有向图 E 的正则且收缩自相似群胚 (G, E)，我们为其关联两个 C^*-代数 $\mathcal{O}(G, E)$ 和 $\lessdot\mathcal{O}(G, E)$，并证明它们分别与由该自相似极限空间的 Wieler 索伦环面产生的 Smale 空间的稳定和不稳定 Ruelle C*-代数强 Morita 等价。这些代数在 KK-理论中互为 Spanier–Whitehead 对偶，这一点可由 Kaminker、Putnam 和最后一位作者证明的不可约 Smale 空间 Ruelle 代数的一般结果得出。

1. Introduction

在过去40年里，自相似群在解决众多重要猜想方面发挥了根本性作用；例如，Grigorchuk 群 [11] 是首个被证明具有中间增长的群，也是已知首个既可和又非初等可和的群的例子。由于自相似群由其在树上的作用定义，因而也在树的边界上诱导出作用，所以很适合通过非交换分析来研究。Segal [31], 在 Maharam [19] 的工作基础上表明，交换 von Neumann 代数恰好是可局部化测度空间的 L^∞代数，而 Gelfand–Naimark 定理 [10] 则刻画了交换 C^*代数：它们恰好是局部紧豪斯多夫空间的 C_0代数。在这一基础上，现代算子代数理论的许多领域，包括 Connes 的非交换几何，都通过类比某种非交换测度空间或拓扑空间，研究非交换 C^*代数。一个极佳的例子是 Connes 提出的非交换 Poincar´e 对偶性 [4], ，我们将其称为一对非交换 C^*代数之间的 KK-对偶（实际上，这是 Spanier–Whitehead 对偶性的一种形式，见 [14]）。一个非常一般的例子是不可约 Smale 空间的稳定与不稳定 Ruelle 代数之间的 KK-对偶 [13]。最近，Nekrashevych [23] 的开创性工作证明，收缩的、递归的和正则的自相似群各自都会产生一对 C^*代数，它们可以

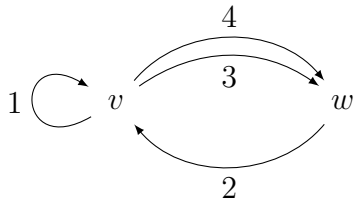
2020年数学主题分类。47L05，19K35（主要）；37B05（次要）。关键词和短语。 C^*-代数；自相似群；极限空间；Poincar´e 对偶；Spanier-Whitehead 对偶；KK-对偶；Smale 空间。Sims 获得了澳大利亚研究委员会资助项目 DP220101631 以及 CAPES 资助项目 88887.370640 的支持。第二和第三作者获得了 CNPq 及 CAPES - Brazil 的部分支持。Hume 获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划提供的支持（资助协议编号：817597）。我们感谢 Isnie Yusnitha 仔细阅读本文并提出有益意见，也感谢 Volodia Nekrashevych 富有洞见的交流。我们还感谢 Valentin Deaconu 和一位匿名审稿人指出了原稿中的问题。

实现为某个底层 Smale 空间的 Ruelle 代数，并利用 [13] 的对偶结果证明这些代数是 KK-对偶的。

本文将这一对偶结果推广到 [18], 中定义的自相似群胚，并同时将 Nekrashevych 关于 Smale 空间的结果 [23] 推广到不一定是递归的自相似作用。我们还指出，我们的证明截然不同；尤其是，我们证明了底层的 Smale 空间是一个 Wieler 索伦环面 [32]。我们的主要定理定理 8.1 表明，按 [18], 中的定义，收缩的自相似群胚作用的 C^*-代数 $\mathcal{O}(G,E)$，与关联极限空间上典范局部同胚的 Deaconu–Renault 群胚的 C^*-代数（记作 $\mathcal{O}(G,E)$） KK-对偶。结合 C^*-代数分类理论的推论（见 [13, 定理 1.1 和第 4 节.4] 以及 [25, 定理 5.11]），我们的结果意味着 $\mathcal{O}(G,E) \cong \mathcal{O}(G,E)$，因此我们的 KK-对偶模仿了拓扑中的 Poincar´e 对偶。

为证明我们的主要定理，我们将 Nekrashevych [23]的结果推广到 [18]的自相似群胚情形。我们将 Nekrashevych 关于自相似群的极限空间 $\mathcal{J}$ 的构造推广到自相似群胚情形，并证明 $\mathcal{J}$ 上的移位映射是开映射且具有膨胀性。我们运用 Wieler 关于具有全不连通稳定集的 Smale 空间的分类，得出 $\mathcal{J}$ 关于移位映射的射影极限——我们将其识别为一个自然的极限溶胶 $\mathcal{S}$——相对于由 $\mathcal{J}$ 上的移位映射诱导的同胚 $\tilde{\tau}$ 而言，是一个 Smale 空间。Nekrashevych 从自相似群构造 Smale 空间的方法颇为微妙，因此在将其推广到自相似群胚情形时，我们谨慎地纳入了所有细节。在此过程中，即使对于自相似群，我们也能够弱化现有假设。本文其余部分致力于证明，Cuntz–Pimsner 代数 $\mathcal{O}(G,E)$ 与 $(\mathcal{S},\tilde{\tau})$ 的不稳定 Ruelle 代数 Morita 等价（即稳定同构），而 Deaconu–Renault 群胚 C^*-代数 $\mathcal{O}(G,E)$ 与 $(\mathcal{S},\tilde{\tau})$ 的稳定 Ruelle 代数 Morita 等价。

我们通过若干例子来说明我们的结果。特别地，文献[18] 中的主要例子定义为由以下图和自动机产生的自相似群胚 (G,E):



$$a\cdot 1 = 4,\ a|_1 = v;$$
$$a\cdot 2 = 3,\ a|_2 = b;$$
$$b\cdot 3 = 1,\ b|_3 = v;$$
$$b\cdot 4 = 2,\ b|_4 = a.$$

这个自相似作用的极限空间与复单位圆同胚，其映射为 $z \mapsto z^2$。相应的极限溶胶是经典的二进螺旋体 Smale 空间。因此，利用 [33]和定理 8.1，我们推得

$$K_0(\mathcal{O}_{(G,E)}) \cong \mathbb{Z}, \quad K_1(\mathcal{O}_{(G,E)}) \cong \mathbb{Z}, \quad K^0(\mathcal{O}_{(G,E)}) \cong \mathbb{Z}, \quad \text{and } K^1(\mathcal{O}_{(G,E)}) \cong \mathbb{Z}.$$

随后，Kirchberg-Phillips 定理推出 $\mathcal{O}_{(G,E)}$ 与里程表作用的 Cuntz–Pimsner 代数同构。

另一个有趣例子的来源是 Katsura 代数 [15]。Exel 和 Pardo [7]发现，这些代数可视为图上的自相似作用。若要了解它们如何纳入我们的框架，请参见 [18, 例7] 和 [18, 附录 A] ，其中介绍了如何将 Exel-Pardo 情形一般地转化为自相似群胚作用。在 [7, 节 18], 中，Exel 和 Pardo 证明，UCT 类中所有含幺 Kirchberg 代数都具有

作为自相似群胚的表示。他们还证明，这类自相似群胚的 Cuntz–Pimsner代数的 K-理论，可以直接根据图邻接矩阵以及自相似作用的限制矩阵计算。利用 Schreier 图进行分析表明，这类自相似群胚的极限空间是一个以圆为底空间的丛的全空间，其纤维由 Cantor 集的副本构成，每个副本都带有由限制矩阵指定的里程表作用。再次结合KK-对偶性与分类理论可知，此类系统的 Cuntz–Pimsner代数同构于极限空间的 Deaconu–Renault 群胚。这使我们能够计算这些有趣的 Deaconu–Renault K-代数的理论，参见例8.15 C^*

例3.20介绍了一个新例子，其极限动力系统与basilica群的极限动力系统共轭。根据定义，basilica群是函数 $f(z) = z^2 - 1$ 作为从$\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$到复映射的迭代单值化群（见 [22, 第 5]章）。其Cuntz–Pimsner代数的 K-群以及对偶代数的 K-群，已在 [23, 定理4.8]和 [23, 定理6.6] 中计算（另见[12]）。因此，我们的主定理也使我们能够计算这两个代数的 K-同调。

本文安排如下。第2节介绍本文所需的背景知识。我们从有向图及其 C^*-代数开始。接下来讨论图上的自相似群胚作用，并回顾 [18]中的相关信息。本节最后介绍 Smale 空间及其 C^*-代数。

在第 3 节中，我们将 Nekrashevych 对极限空间的概念推广到自相似群胚作用。Nekrashevych 的构造巧妙而精细，因此我们详细阐述了他在其著作中未涉及的极限空间度量拓扑。我们在本节末定义自相似群胚作用的层级Schreier图，并说明它们与极限空间的关系。在接下来的两节中，我们试图理解极限空间上的动力学。特别地，我们证明极限空间上的移位映射是一个 Wieler 索伦环面，因此其自然扩张是一个具有全不连通稳定集的 Smale 空间。

第 6 节和第 7 节定义了与自相似群胚作用相关的两种自然 C^*-代数。其中一种是 [18]的 Cuntz–Pimsner代数；我们的主要目标是为该代数提供一个群胚模型，从而推广 Nekrashevych 在 [23, 第 5]节中给出的模型。另一种是对 Nekrashevych 的 Deaconu–Renault 群胚的推广所对应的 C^*-代数；该群胚是与自相似群相关的极限空间的 Deaconu–Renault 群胚。它成为 Cuntz–Pimsner代数的对偶代数。推论 6.7 确立了芽群胚成为豪斯多夫空间所需的确切条件。

我们的主要结果见第8节。我们证明，Cuntz–Pimsner代数与某个 Smale 空间的不稳定 Ruelle 代数强 Morita 等价，并且 Deaconu–Renault群胚代数与其稳定 Ruelle 代数强 Morita 等价。随后，我们由此推出主要的 KK-对偶结果 [13]。

2. Background

2.1. 图与 C^*-代数。本文采用 [29] 关于图及其 C^*-代数的记号和约定。有向图 E 是一个四元组 $E = (E^0, E^1, r, s)$，由集合 E^0 和 E^1 以及映射 $r, s\colon E^1 \to E^0$组成。E^0 中的元素称为顶点，我们将其视为点；E^1 中的元素称为边，我们将其视为从一个顶点指向另一个顶点的箭头：$e \in E^1$从 $s(e)$指向 $r(e)$。

E 中的路径要么是一个顶点，要么是一个字符串 $\mu = e_1 \dots e_n$，使得每个 $e_i \in E^1$ 和$s(e_i) = r(e_{i+1})$。对于 $n \geq 2$，我们定义 $E^n = \{e_1 \dots e_n \mid e_i \in E^1, s(e_i) = r(e_{i+1})\}$，表示 E 中长度为 n 的路径集。路径 μ 的长度 $|\mu|$ 定义为：当且仅当 $\mu \in E^n$时，$|\mu| = n$。E 中所有路径构成的集合 $E^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} E^n$ 是一个小范畴，其恒等态射为 E^0，复合由非零长度路径的拼接以及恒等规则 $r(\mu)\mu = \mu = \mu s(\mu)$给出，定义域映射与余定义域映射为 r, s。

对于 $\mu \in E^*$ 和 $X \subseteq E^*$，我们记作 $\mu X = \{\mu\nu \mid \nu \in X, s(\mu) = r(\nu\}$ 和 $X\mu = \{\nu\mu \mid \nu \in X, r(\mu) = s(\nu)\}$。我们将 $\mu X \cap X\nu$ 记作 $\mu X\nu$。

如果图 E 对每个 $v \in E^0$ 都满足 vE^1 有限，我们就称它为行有限图；如果每个 vE^1 都非空，则称它没有源点。若 E^0 和 E^1 都有限，则称该图有限。若对所有 v、$w \in E^0$，集合 vE^*w 都非空，且 E 不等于只有一个顶点且没有边的图，我们就称 E 为强连通图。若 E 是强连通的，则对于 E^0 中所有 v，vE^1 和 E^1v 都非空。

本文中，我们需要处理有向图 E中的左无限、右无限和双无限路径。我们将使用以下记号：

$$\begin{aligned} E^\infty &= \{e_1e_2e_3\cdots \mid e_i \in E^1, s(e_i) = r(e_{i+1}) \text{ for all } i\},\\ E^{-\infty} &= \{\dots e_{-3}e_{-2}e_{-1} \mid e_i \in E^1, s(e_i) = r(e_{i+1}) \text{ for all } i\}, \quad \text{and}\\ E^{\mathbb{Z}} &= \{\dots e_{-2}e_{-1}e_0e_1e_2\cdots \mid e_i \in E^1, s(e_i) = r(e_{i+1}) \text{ for all } i\}. \end{aligned}$$

对于 $x = x_1x_2\cdots \in E^\infty$，我们记作 $r(x) = r(x_1)$；对于 $x = \dots x_{-2}x_{-1} \in E^{-\infty}$，我们记作$s(x) = s(x_{-1})$。

我们赋予这些空间由柱集确定的拓扑。这些柱集由所涉及的三个空间中各自的有限路径索引，因此我们用以下稍非标准的记号加以区分：对于 $\mu \in E^n$，我们定义

$$\begin{aligned} Z[\mu) &:= \{x \in E^\infty \mid x_1 \dots x_n = \mu\}, \quad \text{and}\\ Z(\mu] &:= \{x \in E^{-\infty} \mid x_{-n} \dots x_{-1} = \mu\}. \end{aligned}$$

对于 $n \geq 0$ 和 $\mu \in E^{2n+1}$，我们记作

$$Z(\mu) := \{x \in E^{\mathbb{Z}} \mid x_{-n} \dots x_n = \mu\}.$$

本文中，所有图都是有限的。因此，空间 E^∞、$E^{-\infty}$ 和 $E^{\mathbb{Z}}$ 都是全不连通的紧豪斯多夫空间，且柱集构成的集合是拓扑的基，并且对交封闭。

存在实现这些拓扑的标准度量。$E^{-\infty}$ 上的度量为

$$d(x,y) = \begin{cases} \inf\{c^{-n} \mid x, y \in Z(\mu] \text{ for some } \mu \in E^n\} & \text{if } s(x) = s(y)\\ 2 & \text{if } s(x) \neq s(y), \end{cases} \tag{2.1}$$

另外两个度量的定义类似：对于 E^∞，将 $Z(\mu]$ 替换为 $Z[\mu)$，并将源映射替换为值域映射；对于 $E^{\mathbb{Z}}$，将“$Z(\mu]$ 对某个 $\mu \in E^n$”替换为“$Z(\mu)$ 对某个 $\mu \in E^{2n+1}$”，并将条件“$s(x) = s(y)$”和“$s(x) \neq s(y)$”分别替换为“$x_0 = y_0$”和“$x_0 \neq y_0$”。

给定一个没有源点的有限有向图，在 C^*代数 A 中，Cuntz–Krieger E-族是由函数 $p : v \mapsto p_v$ 从 E^0 到 A 以及函数 $s : e \mapsto s_e$ 从E^1 到 A 组成的一对(p, s)，满足 p_v 是两两正交投影，每个 $s_e^*s_e = p_{s(e)}$，并且

$p_v = \sum_{e\in vE^1} s_e s_e^*$ 对所有 $v \in E^0$都成立。图 C^*-代数记为 $C^*(E)$，是由 Cuntz–Krieger E-族生成的泛C^*-代数，参见 [29]。

2.2. 群胚在图上的自相似作用。回顾一下，群胚是一个带有逆元的小范畴 $\mathcal{G}$。恒等态射称为单位元，所有恒等态射构成的集合称为单位空间，记作 $\mathcal{G}^{(0)}$。$\mathcal{G}$ 中可复合元素对的集合记作 $\mathcal{G}^{(2)}$。

群胚在图上的自相似作用最初由 [18], 提出，其灵感来自 Exel 和 Pardo 在 [7] 中的工作。两种构造之间的确切关系详见 [18]的附录。

给定一个无源点的有向图 E，以及 v、$w \in E^0$，E^* 的部分同构是一个双射 $g : vE^* \to wE^*$，它保持长度，并按如下意义保持拼接：对所有 $\mu \in E^*$ 和 $e \in E^1$，$g(\mu e) \in g(\mu)E^1$。预期的公式$g(\mu e) = g(\mu)g(e)$甚至没有意义，因为 g 通常在 $s(\mu)E^*$ 上未定义。对每个 $v \in E^*$，恒等映射 $\mathrm{id}_v : vE^* \to vE^*$ 是一个部分同构。

E^* 的所有部分同构构成的集合 $\mathrm{PIso}(E^*)$ 是一个群胚，其单位元为 id_v，由 E 的顶点索引，乘法由映射复合给出。我们将以典范方式把 $\mathrm{PIso}(E^*)$ 的单位空间与 E^0 等同；这与我们关于图的记号一致，因为映射 $\mu \mapsto v\mu$ 与 $\mathrm{id}_v : vE^* \to vE^*$ 相同。

我们将用 $c, d : \mathrm{PIso}(E^*) \to E^0$ 表示群胚 $\mathrm{PIso}(E^*)$ 上的陪域映射和定义域映射，因为符号 s 和 r 已经相当多义。因此，若 $g : vE^* \to wE^*$ 是一个部分同构，则 $c(g) = w$ 且 $d(g) = v$。

群胚 G 在图 E 上的忠实作用（其单位空间为 E^0）是一个单射群胚同态 $\phi : G \to \mathrm{PIso}(E^*)$，并且在 E^0 上限制为恒等映射。通常，我们用 $g \cdot \mu$ 代替 $\phi(g)(\mu)$。

若 $E = (E^0, E^1, r, s)$ 是一个有向图，且 G 是一个单位空间为 E^0、忠实作用于 E^* 的群胚，则称 (G, E) 为自相似群胚作用，若对每个 $g \in G$ 以及每个 $e \in d(g)E^1$，都存在 $h \in G$ 使得 $c(h) = s(g \cdot e)$，并且

$$g \cdot (e\mu) = (g \cdot e)(h \cdot \mu) \quad \text{for all } \mu \in s(g \cdot e)E^*. \tag{2.2}$$

由于群胚作用 $G \curvearrowright E^*$ 是忠实的，对于每个 $g \in G$ 以及 $e \in d(g)E^1$，都存在唯一的 h 满足 (2.2)。我们将此元素记作 $g|_e$，并称其为 g 对 e 的限制。通过迭代，限制可扩展到有限路径：对于 $g \in G$，我们定义 $g|_{d(g)} = g$；对于 $e \in E^1$ 和 $\mu \in s(e)E^*$，我们递归地定义

$$g|_{e\mu} = (g|_e)|_\mu.$$

因此 $g|_{e_1 \dots e_n} = (\dots (g|_{e_1})|_{e_2} \dots)|_{e_n}$，于是 (2.2) 可推广为

$$g \cdot (\mu\nu) = (g \cdot \mu)(g|_\mu \cdot \nu)$$

每当 $g \in G$, $\mu \in d(g)E^*$ 和 $\nu \in E^* s(\mu)$。

本文中，我们将不加说明地使用以下基本公式。

引理 2.1（[18, 引理 3.4 和命题 3.6]）。设 (G, E) 是有限有向图 E 上的自相似群胚作用。对于 $(g, h) \in G^{(2)}$, $\mu \in d(g)E^*$, $\nu \in E^* s(\mu)$ 和 $\eta \in c(g)E^*$，有

(1) $r(g \cdot \mu) = c(g)$ 和 $s(g \cdot \mu) = g|_\mu \cdot s(\mu)$;
(2) $g|_{\mu\nu} = (g|_\mu)|_\nu$; (3) $\mathrm{id}_{r(\mu)}|_\mu = \mathrm{id}_{s(\mu)}$;
(4) $(hg)|_\mu = (h|_{g\cdot\mu})(g|_\mu)$; 以及 (5) $g^{-1}|_\eta = (g|_{g^{-1}\cdot\eta})^{-1}$。

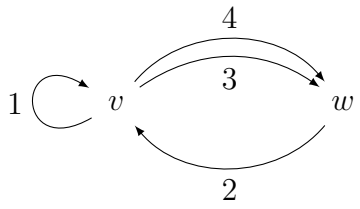


FIGURE 1. 例 2.2 的 E 图

现在，我们通过定义一个 E-自动机来给出一个自相似群胚作用的例子，如 [18, 定义 3.7、命题 3.9 和定理 3.9] 中所述。 E-自动机的关键在于，对图的边的作用以及满足指定值域和源点条件的限制映射，能够确保该作用扩展为图的有限路径上的自相似群胚作用。

例 2.2。下面将贯穿使用这个例子 [18]。考虑图1中的图 E ，并定义

$$\begin{aligned} a \cdot 1 = 4,\ a|_1 = v; \qquad & b \cdot 3 = 1,\ b|_3 = v; \\ a \cdot 2 = 3,\ a|_2 = b; \qquad & b \cdot 4 = 2,\ b|_4 = a. \end{aligned} \tag{2.3}$$

详细说明见 [18, 例 3.10]。为了明确展示群胚作用在 E^* 上的表现，我们计算

$$a \cdot 242312 = 3(b \cdot 42312) = 32(a \cdot 2312) = 323(b \cdot 312) = 3231(v \cdot 12) = 323112.$$

2.3. Smale 空间与 C^*-代数。Smale 空间 (X, φ) 由一个紧致度量空间 X 和一个同胚 $\varphi\colon X \to X$ 以及常数 $\varepsilon_X > 0$ 和 $0 < \lambda < 1$ ，连同一个局部定义的连续映射组成

$$[\cdot,\cdot] : \{(x,y) \in X \times X \mid d(x,y) \le \varepsilon_X\} \to X, \quad (x,y) \mapsto [x,y]$$

满足

(B1) $[x,x] = x$，(B2) $[x,[y,z]] = [x,z]$（若两侧均有定义），(B3) $[[x,y],z] = [x,z]$（若两侧均有定义），(B4) $\varphi[x,y] = [\varphi(x)\ \varphi(y)]$（若两侧均有定义），(C1) 对于满足 $[x,y] = y$ 的 x、$y \in X$，有 $d(\varphi(x)\ \varphi(y)) \le \lambda d(x,y)$；且 (C2) 对于满足 $[x,y] = x$ 的 x、$y \in X$，有 $d(\varphi^{-1}(x)\ \varphi^{-1}(y)) \le \lambda d(x,y)$。

如下所示，括号映射在 Smale 空间上定义了一个局部乘积结构：对于$x \in X$ 和 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_X$，定义

$$\begin{aligned} X^s(x,\varepsilon) &:= \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon, [y,x] = x\} \text{ and} \\ X^u(x,\varepsilon) &:= \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon, [x,y] = x\}. \end{aligned}$$

我们称 $X^s(x,\varepsilon)$ 为 x 的局部稳定集，称 $X^u(x,\varepsilon)$ 为 x 的局部不稳定集。图 2 展示了局部稳定集及其相互作用的示意图（假设$d(x,y) < \varepsilon_X/2$）。

设 (X,φ) 是一个 Smale 空间。那么对于 $x, y \in X$，全局稳定等价关系和不稳定等价关系分别为

$$\begin{aligned} x \sim_s y \text{ whenever } d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \to 0 \text{ as } n \to \infty \text{ and} \\ x \sim_u y \text{ whenever } d(\varphi^{-n}(x), \varphi^{-n}(y)) \to 0 \text{ as } n \to \infty. \end{aligned}$$

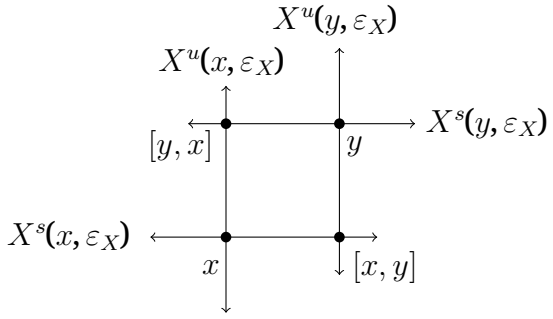


FIGURE 2. $x, y \in X$ 的局部稳定集和不稳定集及其括号映射

$x \in X$ 的稳定等价类记为 $X^s(x)$，且有 $X^s(x,\varepsilon) \subset X^s(x)$。类似地，$x \in X$ 的不稳定等价类记为 $X^u(x)$，且 $X^u(x,\varepsilon) \subset X^u(x)$。我们将每个稳定等价类视为局部紧豪斯多夫拓扑空间，其拓扑由 $\{X^s(y,\varepsilon) \mid y \in X^s(x)\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_X\}$ 生成。不稳定情形下也定义类似的拓扑。

如果对于所有非空开集 $U, V \subseteq X$，都存在 N使得 $\varphi^N(U) \cap V \neq \varnothing$，则称 Smale 空间 (X,φ) 是不可约的。

如果对于所有非空开集 $U, V \subseteq X$，都存在 N，使得对于所有 $n \geq N$，$\varphi^n(U) \cap V \neq \varnothing$，则称其为混合的。

现在我们考虑与 Smale 空间相关的各种 C^*-代数。Ruelle 最早在 [30], 中定义了与 Smale 空间相关的 C^*- 代数，这些 C^*- 代数通常称为该 Smale 空间的稳定代数和不稳定代数。在 [26], 中，Putnam 随后将 Ruelle 代数定义为稳定代数和不稳定代数的交叉积 C^*-代数。Putnam 证明了 Ruelle 代数是 Cuntz–Krieger 代数的推广。最近，Putnam 和 Spielberg [28] 大幅简化了 Smale 空间为混合时上述代数的群胚构造（在 Morita 等价意义下）。Putnam 在 [27, 第 2] 节讨论了这种简化如何推广到非游荡情形。我们只关注不可约 Smale 空间；这是比非游荡更强的条件。

本节余下部分将概述稳定代数$S(X,P)$和稳定 Ruelle 代数 $S(X,P) \rtimes \mathbb{Z}$的构造。关于这些构造的更详细版本见 [28] 和 [13, 第 3] 节。

给定一个不可约 Smale 空间 (X,φ)，我们固定一个非空有限的、φ-不变的周期点集 P（在不可约情形下，周期点稠密）。接着定义 $X^u(P) = \bigcup_{p\in P} X^u(p)$，其局部紧且豪斯多夫的拓扑由集合 $\{X^u(x,\varepsilon) \mid x \in X^u(P)\ \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_X]\}$ 生成。

稳定等价关系的群胚为

$$G^s(P) := \{(v,w) \in X \times X \mid v \sim_s w \text{ and } v, w \in X^u(P)\}. \tag{2.4}$$

稳定群胚可赋予一个 étale 拓扑，详见 [13, 引理 3.1] 。在此结构下，$G^s(P)$ 是一个可和的局部紧豪斯多夫 étale 群胚。稳定 C^*-代数 $S(X,P)$ 定义为与 $G^s(P)$ 相关联的群胚 C^*-代数。

C^*代数 $S(X,P)$存在一个典范自同构，它由底层群胚 $G^s(P)$的自同构诱导，该自同构由 $\alpha := \varphi \times \varphi$定义。$G^s(P)$的这一自同构产生了半直积群胚 $G^s(P) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$，后者同样是一个可核的局部紧豪斯多夫 ´etale群胚。稳定 Ruelle 代数是

交叉积 $S(X,P) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \cong C^*(G^s(P) \rtimes_\alpha \mathbb{Z})$，其中我们也用 α 表示由 $\alpha \in \mathrm{Aut}(G^s(P))$诱导的 $S(X,P)$的自同构。Putnam 在 [27, 第 2]节中解释了， $S(X,P) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ 与 Putnam 在 [26], 中最初定义的 Ruelle 代数强 Morita 等价；后者建立在 Putnam 和 Spielberg 关于混合情形的类似结果（[28]）之上。 [28] 关于 Ruelle 代数是可分、简单、稳定、核、纯无限且满足 UCT 的结果，很容易推广到不可约情形。

类似的构造给出不稳定群胚 $G^u(P)$、不稳定代数$U(X,P)$，以及相关的不稳定 Ruelle 代数 $U(S,P) \rtimes \mathbb{Z} \cong C^*(G^u(P) \rtimes \mathbb{Z})$。另一种方法是，具有相反括号映射的 Smale 空间 (X,φ^{-1}) 的稳定代数与 (X,φ) 的相应不稳定代数同构。

3. The limit space of a self-similar groupoid action

本节将 Nekrashevych 在 [22, Chapter 3] 中构造自相似群极限空间的方法推广到自相似群胚作用的情形。

定义 3.1. 设 E 是一个有限有向图。设 (G,E) 是一个自相似群胚作用。我们称左无限路径 $x,y \in E^{-\infty}$ 渐近等价，并记作 $x \sim_{\mathrm{ae}} y$，如果存在一个序列 $(g_n)_{n<0}$ 属于 G，使得 $\{g_n \mid n<0\}$ 是一个有限集，并且

$$g_n \cdot x_n \dots x_{-1} = y_n \dots y_{-1} \quad \text{for all } n<0.$$

如果序列 (g_n) 实现渐近等价 $x \sim_{\mathrm{ae}} y$，而序列 (h_n) 实现渐近等价 $y \sim_{\mathrm{ae}} z$，那么对于所有 n， $d(h_n)=c(g_n)$，且 $(h_n g_n)$ 实现渐近等价 $x \sim_{\mathrm{ae}} z$。此外，序列 g_n^{-1} 实现渐近等价 $y \sim_{\mathrm{ae}} x$，而序列 $(r(x_n))_{n<0}$ 实现渐近等价 $x \sim_{\mathrm{ae}} x$。因此， $\sim_{\mathrm{ae}}$ 是一种等价关系。

定义 3.2. 设 E 是一个有限有向图。设 (G,E) 是一个自相似群胚作用。(G,E) 的极限空间定义为商空间 $\mathcal{J}_{G,\,E} := E^{-\infty}/\!\sim_{\mathrm{ae}}$。

极限空间通常不是豪斯多夫空间，但与 [22],的情形一样，若自相似作用按以下意义是收缩的，则可以保证它是豪斯多夫空间；这一概念由 [18, 22] 引入。

定义 3.3. 若存在一个有限子集 $F \subseteq G$，使得对于每个 $g \in G$，都存在 $n \geq 0$，满足 $\{g|_\mu : \mu \in d(g)E^n\} \subseteq F$，则称有限有向图 E 上的自相似群胚作用 (G,E) 是收缩的。任何这样的有限集 F 都称为 (G,E) 的收缩核。 G 的核是集合

$$\mathcal{N}_{G,E} := \bigcap \{F \subseteq G \mid F \text{ is a contracting core for } (G,E)\}.$$

当上下文已明确所指的自相似群胚作用时，我们通常只写 $\mathcal{N}$，而不写 $\mathcal{N}_{G,\,E}$。

与自相似群的情形一样，核是 (G,E) 的极小收缩核，且具有对称性、对限制封闭，并包含 $G^{(0)}$:

引理 3.4. 设 E 为有限有向图。设 (G,E) 为收缩自相似群胚作用。那么 $\mathcal{N}$ 是 (G,E) 的一个收缩核，并且包含于 (G,E) 的任何其他收缩核中。我们有

$$\mathcal{N} = \bigcup_{g \in G} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{g|_\mu \mid \mu \in d(g)E^*, |\mu| \geq n\}. \tag{3.1}$$

我们有 $\mathcal{N}=\mathcal{N}^{-1}$, $\mathcal{N}$ 对限制封闭，并且如果 E 没有汇点，那么 $G^{(0)}\subseteq\mathcal{N}$。

证明。对于第一个结论，我们先证明，(G,E)的收缩核族对交封闭。若 F,K 分别是 G 和 $g\in G$的收缩核，则存在 M,N，使得当 $|\mu|\geq M$时 $g|_\mu\in F$，且当 $|\nu|\geq N$时 $g|_\nu\in K$。特别地，若 $|\mu|\geq\max\{M,N\}$，则 $g|_\mu\in F\cap K$。因此，$F\cap K$是一个收缩核。

现在，由于收缩核按定义都是有限的，存在一个有限的收缩核集族 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{N}=\bigcap\mathcal{F}$。因此，前一段表明 $\mathcal{N}$是一个收缩核。根据定义，它包含于任何其他收缩核中。

令 $\mathcal{M}:=\bigcup_{g\in G}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{g|_\mu\mid\mu\in d(g)E^*,|\mu|\geq n\}$。固定 $h\in\mathcal{M}$。那么存在$g\in G$ 以及由有限路径构成的序列$(\mu_i)_{i=1}^{\infty}$，使得 $|\mu_i|\to\infty$，且对所有i都有 $g|_{\mu_i}=h$。根据 $\mathcal{N}$ 的定义，存在 N，使得当 $|\mu|\geq N$时 $g|_\mu\in\mathcal{N}$。由于$n_i\to\infty$，对于某个 i，我们有 $n_i>N$，因此 $h=g|_{\mu_i}\in\mathcal{N}$。所以 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$。对于反向包含，注意到我们刚才已经证明 $\mathcal{M}$ 是有限的。固定 $g\in G$。由于 G 是收缩的，以 $n\in\mathbb{N}$ 为指标的集合 $R_n:=\{g|_\mu\mid|\mu|\geq n\}$ 都是有限的，并且关于集合包含构成递减序列。因此，存在 N，使得对所有 $n\geq N$都有 $R_n=R_N$。由此可得，当 $|\mu|\geq N$时 $g|_\mu\in R_N\subseteq\mathcal{M}$。所以 $\mathcal{M}$是(G,E)的一个收缩核，故由引理的第一个断言可知 $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}$。

为证明 $\mathcal{N}=\mathcal{N}^{-1}$，固定 $h\in\mathcal{N}$。于是 (3.1) 表明，存在 $g\in G$ 和一个序列 $(\mu_i)_{i=1}^{\infty}$，属于 $d(g)E^*$，使得 $|\mu_i|\to\infty$，且对所有 i，都有 $g|_{\mu_i}=h$。于是，对所有 i，我们有$h^{-1}=(g|_{\mu_i})^{-1}=g^{-1}|_{g\cdot\mu_i}$，因此由 (3.1) 可得 $h^{-1}\in\mathcal{N}$。

$\mathcal{N}$ 对限制封闭，这一点可由 (3.1) 立即得出。

最后，如果 E 没有汇点，那么对于每个 $v\in E^0$ 和 $n\geq0$，都有 $E^nv\neq\emptyset$。设 w 是一个顶点，使得对于无穷多个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $wE^nv\neq\emptyset$。于是，$v\in\{w|_\mu:$ 对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$\mu\in wE^n$、$|\mu|\geq n\}$，从而 $v\in\mathcal{N}$。□

记号 3.5. 设 E 是一个没有源点的有限有向图。设 (G,E) 是一个以 $\mathcal{N}$ 为核的收缩自相似群胚作用。由于 $\mathcal{N}$ 是有限集，以下集合也都是有限集

$$\mathcal{N}^k:=\Big\{\textstyle\prod_{i=1}^k g_i\mid g_1,\dots,g_k\in\mathcal{N}\text{ and }d(g_i)=c(g_{i+1})\text{ for all }i\Big\}.$$

我们用 R_k 表示整数

$$R_k:=\min\{j\in\mathbb{N}\mid h|_\mu\in\mathcal{N}\text{ for all }h\in\mathcal{N}^k\text{ and }\mu\in E^j\}.$$

因此 $R_1=0$，且对所有 i，$R_i\leq R_{i+1}$。

现在我们证明，若 x和 $y\in E^{-\infty}$ 渐近等价，则实现该渐近等价的序列g_i 可以取自 $\mathcal{N}$，并且关于限制保持一致。

引理 3.6. 设 E 是一个有限有向图。设 (G,E) 是一个以 $\mathcal{N}$ 为核的收缩自相似群胚作用。那么 $x,y\in E^{-\infty}$ 渐近等价，当且仅当存在一个由 $\mathcal{N}$ 中的元素构成的序列 $(h_n)_{n<0}$，使得 $h_n\cdot x_n=y_n$，并且对所有 n，$h_n|_{x_n}=h_{n+1}$。

Proof. 如果存在这样一个由 $\mathcal{N}$ 中元素构成的序列（h_n），那么对于每个 n，我们有

$$h_n\cdot(x_n\dots x_{-1})=y_n(h_n|_{x_n}\cdot x_{n+1}\dots x_{-1})=y_n(h_{n+1}\cdot x_{n+1}\dots x_{-1})$$
$$=\dots=y_n\dots y_{-1}.$$

因此 $x\sim_{\mathrm{ae}}y$。

反过来，假设 $x\sim_{\mathrm{ae}}y$，并固定一个序列 $(g_n)_{n<0}$，它属于 G，只有有限个不同的项，且满足：对所有 n，都有 $g_n\cdot x_n\dots x_{-1}=y_n\dots y_{-1}$。令 $S=\{g_n\mid n<0\}$ 为序列 (g_n) 中出现的元素所构成的有限集。由于

(G,E) 是收缩的，因此对每个 $g\in S$，都存在 k_g，使得只要 $|\mu|\geq k_g$，就有 $g|_\mu\in\mathcal{N}$。令 $k:=\max_{g\in S}k_g$。我们按以下方式迭代地构造序列 $(h_n)_{n<\infty}$，使其属于 $\mathcal{N}$。考虑序列 $(g_n|_{x_n\dots x_{-2}})_{n<-k-1}$。根据 k的选取，该序列的每一项都属于 $\mathcal{N}$。由于 $\mathcal{N}$ 是有限的，存在 $h_{-1}\in\mathcal{N}$ 以及一个由整数 $n_i^1<-2-k$ 构成的严格递减无限序列 $(n_i^1)_{i=1}^\infty$，使得对所有 i。由于每个 $g_{n_i^1}\cdot(x_{n_i^1}\cdots x_{-1})=y_{n_i^1}\cdots y_{-1}$，因此我们有

$$h_{-1}\cdot x_{-1}=g_{n_i^1}|_{x_{n_i^1}\dots x_{-2}}\cdot x_{-1}=(g_{n_i^1}\cdot x_{n_i^1}\cdots x_{-1})_{-1}=y_{-1}。$$

现在假设我们已选定 $h_m,\dots,h_{-1}\in\mathcal{N}$，使得每个 $h_j\cdot x_j=y_j$ 和 $h_j|_{x_j}=h_{j+1}$，并且有一个严格递减的整数序列 $(n_i^m)_{i=1}^\infty$，满足对于所有 i，都有 $g_{n_i^m}|_{x_{n_i^m}\dots x_{m-1}}=h_m$。那么，序列 $(g_{n_i^m}|_{x_{n_i^m}\dots x_{m-2}})_i$ 包含于 $\mathcal{N}$ 中，因此存在 $h_{m-1}\in\mathcal{N}$，以及序列 n_i^m 的一个子序列 n_i^{m-1}，使得对于所有 i，都有 $n_i^{m-1}|_{x_{n_i^m}\dots x_{m-2}}=h_{m-1}$。我们有

$$h_{m-1}|_{m-1}=(g_{n_1^{m-1}}|_{x_{n_i^m}\dots x_{m-2}})|_{x_{m-1}}=g_{n_1^{m-1}}|_{x_{n_i^m}\dots x_{m-1}}=h_m,$$

并且 $h_{m-1}\cdot x_{m-1}=y_{m-1}$通过与我们用于证明 $h_{-1}\cdot x_{-1}=y_{-1}$的计算类似的计算。

上述过程产生了一个序列 $(h_n)_{n<1}$，它属于 $\mathcal{N}$，并具有所需的性质。□

推论 3.7. 设 E 为有限有向图。设 (G,E) 为一个收缩自相似群胚作用，其极限空间为 $\mathcal{J}=\mathcal{J}_{G,\,E}$。设 $q\colon E^{-\infty}\to\mathcal{J}$ 为商映射。对于每个 $x\in E^{-\infty}$，等价类 $[x]:=q^{-1}(q(x))$ 满足 $|[x]|\leq|\mathcal{N}|$。

证明. 固定 $x\in E^{-\infty}$。设 $y^1,\dots,y^l$ 是 $[x]$ 中互不相同的元素。我们必须证明 $l\leq|\mathcal{N}|$。固定满足以下条件的 $m<0$：当 $i\leq l$ 时，有限路径 $\mu^i:=y^i_m\dots y^i_{-1}$ 均互不相同。引理 3.6 表明，存在元素 $n^1,\dots,n^l\in\mathcal{N}$，使得对所有 i，都有 $\mu^i=n^i\cdot x_m\dots x_{-1}$。由于 μ^i 互不相同，因此 n^i 也互不相同，从而必有 $l\leq|\mathcal{N}|$。□

为了从极限空间 $\mathcal{J}$ 构造一个 Smale 空间，我们将证明移位映射在 $E^{-\infty}$ 上诱导出 $\mathcal{J}$ 到自身的映射，并且在类似于 Nekrashevych [22], 所用的正则性假设下，这个自映射是局部扩张的，因而是局部同胚。

为此，我们需要描述 $\mathcal{J}$ 上拓扑的一个基。我们先给出一个关于商拓扑的预备引理。

引理 3.8. 设 X 是一个紧致、可度量化的豪斯多夫空间，且 $\sim$ 是 X 上的一个等价关系。设 $Y:=X/\!\sim$ 是商空间，且 $q\colon X\to Y$ 是商映射。对于每个 $A\subseteq X$，设 $U_A:=\{y\in Y\mid q^{-1}(y)\subseteq A\}$。若 A 在 X 中是开集，则 U_A 在 Y 中是开集。若对于每个 $y\in Y$，都有 $|q^{-1}(y)|<\infty$，那么对于 X 上拓扑的任意基 $\mathcal{B}$，集合

$$\mathcal{U}_\mathcal{B}:=\{U_B\mid B\ \textit{is a finite union of elements of}\ \mathcal{B}\}$$

是 Y上商拓扑的一个基。如果 $q\colon X\to Y$ 是闭映射，那么 Y 是可度量化的。

证明。根据商拓扑的定义，U_A 在 Y中是开集，当且仅当 $q^{-1}(U_A)$在 X中是开集。根据 U_A 的定义，我们有 $[x]\in U_A$ 当且仅当 $[x]\subseteq A$，因此

$$q^{-1}(U_A)=\{x\in X\mid[x]\subseteq A\}=X\setminus\{x\in X\mid[x]\setminus A\neq\varnothing\}.$$

因此，只需证明：若网 $(x_i)_{i\in I}$ 属于 X 并收敛到某个 $x\in X$，且每个 $[x_i]\setminus A$ 都非空，则 $[x]\setminus A$ 非空。为此，注意对每个

i，都存在 $y_i \in [x_i] \setminus A$。由于 X 是紧致的，我们可以取一个子网 (y_{i_j})，使其在 X 中收敛。由于 A 是开集，因此有 $y := \lim_j y_{i_j} \notin A$。由于商映射是连续的，我们有 $q(y) = \lim_j q(y_{i_j}) = \lim_j q(x_{i_j}) = \lim_i q(x_i) = [x]$，因此$y \in [x] \setminus A$。

现在假设 $\mathcal{B}$ 是 X上的拓扑的一组基。设 V 是Y 的一个开子集，并固定 $y \in V$。由于 $q^{-1}(V)$ 在 X中是开的，对于每个点 $x \in q^{-1}(y)$，我们都可以找到$B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subseteq q^{-1}(V)$。令 $B := \bigcup_{x \in q^{-1}(y)} B_x$。由于 $q^{-1}(y)$ 是有限的，这是 $\mathcal{B}$中元素的有限并，因此只需证明 $y \in U_B \subseteq V$。根据 B 的定义，我们有 $q^{-1}(y) \subseteq B$，因此 $y \in U_B$。为证明 $U_B \subseteq V$，取 $y' \in U_B$。那么根据 U_B的定义，$q^{-1}(y) \subseteq B$。由于每个 $B_x \subseteq q^{-1}(V)$，我们有 $B \subseteq q^{-1}(V)$，从而 $q(B) \subseteq V$。因此，所需的结论是 $y \in q(B) \subseteq V$。

最后一个结论由 [5, 定理 4.2.13]得出。 □

接下来的引理描述渐近等价与核在柱集上的作用之间的相互关系。

引理 3.9. 设 E 是一个有限有向图。设 (G, E) 是一个收缩自相似群胚作用。若存在 $g \in \mathcal{N}$ 和 μ, ν 属于 E^*，使得 $g \cdot \mu = \nu$，则$q(Z(\mu)) \cap q(Z(\nu)) \neq \varnothing$.

证明。固定 μ、ν和 g。由于 $\mathcal{N}$ 对限制封闭，存在 $e \in E^1$ 和$h \in \mathcal{N}$使得 $h|_e = g$。令 $f := h \cdot e$。我们断言 $s(e) = r(\mu)$ 且 $s(f) = r(\nu)$，从而 $h \cdot e\mu = f\nu$。事实上，由引理 2.1(1)可得

$$s(f) = s(h \cdot e) = h|_e \cdot s(e) = g \cdot s(e).$$

由于 $d(g) = r(\mu)$，我们有 $s(e) = r(\mu)$，进而 $s(f) = g \cdot r(\mu) = r(\nu)$，这就证明了该断言。递归地应用上述过程，我们可以构造路径 $x \in Z(\mu)$和 $y \in Z(\nu]$，使得 $x \sim_{\mathrm{ae}} y$。 □

现在我们可以描述收缩自相似群胚作用的极限空间拓扑的一个基。

推论 3.10. 设 E 是一个没有源点或汇点的有限有向图。设 (G, E) 是收缩自相似群胚作用。集合

$$U_\mu := \left\{ y \in \mathcal{J} \mid q^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{g \in \mathcal{N} \cap d^{-1}(r(\mu))} Z(g \cdot \mu] \right\},$$

由 $\mu \in E^*$ 索引，是 $\mathcal{J}$ 上拓扑的一个基。

证明. 根据引理 3.8，我们知道 U_μ 是开的。现在固定一个开集 $V \subseteq \mathcal{J}$ 和 $y \in V$。如果 $x \in Z(\mu]$ 对某个 $\mu \in E^n$，并且 $x' \sim_{a.e} x$，那么根据引理 3.6，存在 $g \in \mathcal{N} \cap d^{-1}(r(\mu))$ 使得 $x' \in Z(g \cdot \mu]$。因此，如果 $q(x) = y$，那么对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $y \in U_{x_{-n} \ldots x_{-1}}$。令 $X_n = \bigcup_{g \in \mathcal{N} \cap d^{-1}(r(x_{-n}))} Z(g \cdot x_{-n} \ldots x_{-1}]$。由于 $\mathcal{N}$ 对限制封闭，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $X_{n+1} \subseteq X_n$。根据引理 3.6，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = q^{-1}(y)$。因此，紧集 $Y_n := q(X_n)$ 满足 $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ 和 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n = \{y\}$。所以，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $Y_k \subseteq V$。由于 $y \in U_{x_{-k} \ldots x_{-1}} \subseteq Y_k$，结论得证。 □

除了拥有规范基之外，还可以为 $\mathcal{J}$ 找到一个诱导相同拓扑的度量，正如引理 3.8 的下一个推论所示。

推论 3.11. 设 (G, E) 是一个收缩自相似群胚作用。那么它的极限空间 $\mathcal{J}$ 是紧致且可度量化的。

证明. 回顾一下，$(E^{-\infty}, d)$ 在 (2.1) 的乘积度量 d 下是紧致的。由引理 3.8，只需证明 $\sim_{\mathrm{ae}}$ 是一个闭等价关系。为此，设 C 是 $E^{-\infty}$ 的一个闭子集，并取一个网 $(x_\alpha) \in C$ 以及点 $x \in E^{-\infty}$，使得 $q(x_\alpha)$ 收敛到 $q(x)$。我们必须证明 $q(x) \in q(C)$。由于 $E^{-\infty}$ 是紧致的，C 也如此，因此我们可以假设 x_α 收敛到某个 $z \in C$。于是 $q(x_\alpha) \to q(z)$。因此我们必须证明 $x \sim_{\mathrm{ae}} z$。

固定一个整数 $n < 0$。由推论 3.10 可知，对于足够大的 α，有 $q(x_\alpha) \in U_{x_n \dots x_{-1}}$；又由于 x_α 收敛到 z，对于足够大的 α，有 $x_\alpha \in Z(z_n \dots z_{-1}]$。因此，存在 $g_n \in \mathcal{N}$ 使得 $Z(g_n \cdot x_n \dots x_{-1}] \cap Z(z_n \dots z_{-1}] \neq \varnothing$。由于对于不同的 μ、$\nu \in E^n$，有 $Z(\mu] \cap Z(\nu] = \varnothing$，我们推出 $g_n \cdot x_n \dots x_{-1} = z_n \dots z_{-1}$。由于 $n < 0$ 是任意的，因此如所声称的，$x \sim_{\mathrm{ae}} z$。□

3.1. Schreier 图与递归自相似作用。Schreier 图为自相似作用的极限空间提供了有用的组合近似。我们从适用于当前情形的定义开始。请注意，群的 Schreier 图有一个相当一般的定义，它推广了凯莱图。

定义 3.12. 设 (G, E) 是一个有限生成的自相似群胚，且 A 是 G 的一个生成集，并且在逆映射和限制下封闭。第 n 层 Schreier 图 $\Gamma_n := \Gamma_n(G, A)$ 是一个（无向）图，其顶点集为 $\Gamma_n^0 := E^n$；当且仅当 $d(a) = r(\mu)$ 且 $a \cdot \mu = \nu$ 时，μ 与 ν 之间存在一条标记为 $a \in A$ 的边。

请注意，由于 A 在逆元下封闭，且如果 $a \cdot \mu = \nu$，则 $a^{-1} \cdot \nu = \mu$，我们可以用 $a \in A$ 或 a^{-1} 来标记 Γ_n 中的一条边。我们将使用无向图顶点集上的测地距离 d_{geo}：$d_{\mathrm{geo}}(v, w)$ 是 v 与 w 之间路径的最小长度。以下内容推广了 [22, 命题 3.6.6]；证明几乎完全相同。

命题 3.13. 设 (G, E) 是有限有向图 E 上有限生成的收缩自相似群胚作用。设 A 是 G 的一个有限生成集，且对逆元和限制封闭。设 Γ 是第 n 层施赖尔图 $\Gamma_n(G, A)$。存在一个映射 $\psi_n : \Gamma_n \to \Gamma_{n-1}$，定义为

$$\psi_n(e\mu) = \mu \quad for\ e\ in\ E^1\ and\ v\ in\ s(e)E^{n-1}$$
$$\psi_n(a : e\mu \to f\nu) = a|_e : \mu \to \nu.$$

对于 $x, y \in E^{-\infty}$，序列 $\left(d_{geo}(x_{-n} \dots x_{-1}, y_{-n} \dots y_{-1})\right)_{n=1}^{\infty}$ 有界，当且仅当 x 和 y 渐近等价。

现在，我们将 Nekrashevych 关于递归自相似群作用的概念推广到群胚作用。虽然本文的主要结果并不要求递归性，但递归性确实揭示了动力学和极限空间的一些有趣拓扑性质。我们注意到，Nekrashevych 将下文的概念称为递归、自复制和分形，这些术语可以互换使用。

定义 3.14. 如果对于任意 e、$f \in E^1$ 和 $h \in G$，满足 $d(h) = s(e)$ 以及 $c(h) = s(f)$，都存在 g 属于 $Gr(e)$，使得 $g \cdot e = f$ 和 $g|_e = h$，则称自相似群胚作用（G，E）是递归的。

自相似群胚作用的递归性显然是一个相当强的条件。例如，若 (G, E) 是递归的，我们便立即看到，图中所有顶点的入度必定相等。递归性的另一个直接推论如下。

命题 3.15. 设 (G, E) 是有限有向图 E 上的一个递归自相似群胚作用。则 G 在 E^* 上的作用是层传递的。

证明。对于长度为一的路径，传递性可由递归性立即得出。现在假设，对于任意长度为 n 的路径 μ 和 ν，以及任意满足 $d(h) = s(\mu)$ 的 $h \in G$，存在满足 $d(g) = r(\mu)$ 的 $g \in G$，使得 $g \cdot \mu = \nu$ 和 $g|_\mu = h$ 成立；也就是说，按照递归性的定义，G 在具有指定限制的长度为 n 的路径上传递作用。现在考虑长度为 $n+1$ 的路径 λ 和 ρ，并试图证明存在 $g \in G$ 使得 $g \cdot \lambda = \rho$。递归性意味着存在满足 $d(g_{n+1}) = r(\lambda_{n+1})$ 的 $g_{n+1} \in G$，使得 $g_{n+1} \cdot \lambda_{n+1} = \rho_{n+1}$。现在，归纳假设意味着存在满足 $d(g) = r(\lambda)$ 的 $g \in G$，使得 $g \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_n = \rho_1 \cdots \rho_n$ 和 $g|_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = g_{n+1}$。因此我们有

$$g \cdot \lambda = g \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_n \lambda_{n+1} = (\rho_1 \cdots \rho_n) g_{n+1} \cdot \lambda_{n+1} = \rho_1 \cdots \rho_n \rho_{n+1} = \rho,$$

所期望的结果。 □

遵循 Nekrashevych 的工作，我们现在考察极限空间的连通性，但首先我们将推广 [22, 命题 2.11。3]

命题 3.16。设（G， E）是有限有向图 E 上的一个收缩的、递归自相似群胚作用，并且 G 是有限生成的。那么（G， E）的核$\mathcal{N}$ 是一个生成集。

证明。令 H 为 G的一个有限生成集。则存在 $m \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $h \in H$，集合 $\{h|_\mu \mid |\mu| \geq m\}$ 都包含于 $\mathcal{N}$中。给定 $g \in G$，我们有$g = h_1 h_2 \cdots h_n$，其中对于 $1 \leq i \leq n$有 $h_i \in H$。由于（G， E）是递归的，对于每个 h_i，存在 $a_i \in G$ 和 $\mu_i \in s$（a_i）E^m，使得 $a_i|_{\mu_i} = h_i$。由于 a_i 是 H 中元素的乘积，因此 $a_i|_{\mu_i} = h_i$ 是 $\mathcal{N}$中元素的乘积。于是 G 由$\mathcal{N}$生成。□

下面的证明遵循 Nekrashevych 的 [22, 命题 3.3.10 和定理 3.5.1]，，而他又将其中一部分归功于 K. Pilgrim 和 P. Haissinsky（私人通信）。

定理 3.17. 假设 (G, E) 是有限有向图 E 上的收缩自相似群胚作用，且 G 是有限生成的。那么，极限空间 $\mathcal{J}_{(G,E)}$ 连通，当且仅当 (G, E) 是层传递的。

证明. 首先假设 (G, E) 是层传递的。我们假设 $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{(G,E)}$ 不连通，并导出矛盾。设 H 是 G 的一个有限生成集。取闭的非空子集 $A, B \subset \mathcal{J}$，使得 $A \cup B = \mathcal{J}$ 且 $A \cap B = \varnothing$。令 $X_A = q^{-1}(A)$ 和 $X_B = q^{-1}(B)$。那么 X_A 和 X_B 是 $E^{-\infty}$ 的闭非空子集，且 $X_A \cup X_B = E^{-\infty}$ 和 $X_A \cap X_B = \varnothing$。定义

$$X_A^n := \{a_{-n} \cdots a_{-1} \mid a = \ldots a_{-n-1} a_{-n} \ldots a_{-1} \in X_A\}.$$

由于 X_A 是开集，我们将其写成柱集 $\mu]$ 的并 $X_A = \bigcup_{\mu \in I} Z$。由于 X_A 也是紧致的，存在有限的 $F \subseteq I$，使得 $X_A = \bigcup_{\mu \in F} Z$。令 N =={$|\mu|$ 的最大值：$\mu \in F$}。对于每个 $\mu \in F$，我们有 Z。因此，对于任意 $\nu \in X_A^n$，只要....., 就有 Z。

由于 (G, E) 是层传递且收缩的，对于每个 $n \geq N$，存在 $a_{-n} \ldots a_{-1}$in $X_A^n$and $g_n \in \mathcal{N}$ such that $g_n \cdot a_{-n} \cdots a_{-1} \in X_B$。由引理 3.9，存在$\mu_n \in X_A \cap E^*(a_{-n} \cdots a_{-1})$ 和 $\nu_n \in X_B \cap E^*($ $g_n \cdot a_{-n} \cdots a_{-1})$。由于 X_A, X_B是紧的，存在一个自然数的递增序列 $(n_k)_{k=1}^\infty$，使得 $(\mu_{n_k})_k$，并且

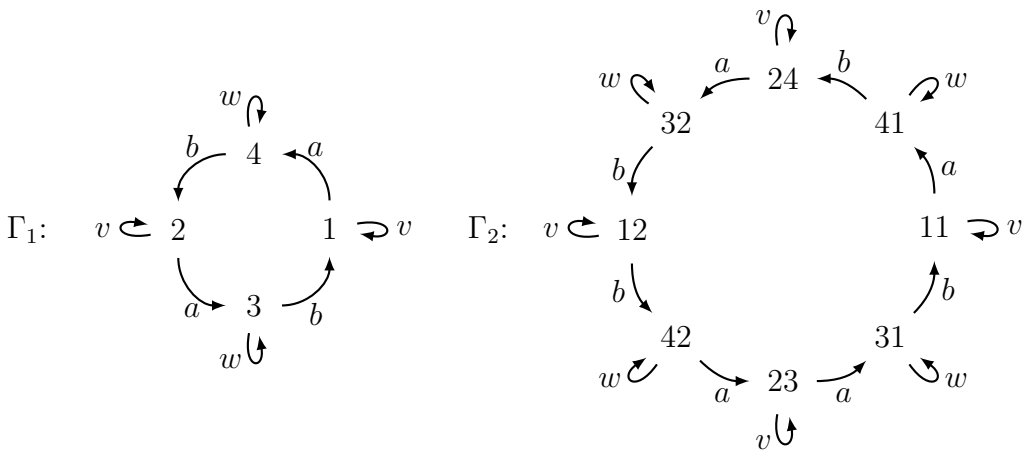


FIGURE 3. 例 3.19 中的前两个 Schreier 图。

$(\nu_{n_k})_k$ 都收敛，分别记其极限为 $\mu_{n_k} \to \mu \in X_A$ 和 $\nu_{n_k} \to \nu \in X_B$。由于 $\mathcal{N}$ 是有限的，$\mu \sim_{\mathrm{ae}} \nu$。因此 $q_{\mathrm{ae}}(\mu) = q_{\mathrm{ae}}(\nu) \in A \cap B$，矛盾。因此，$\mathcal{J}$是连通的。

现在假设 (G, E) 不是层传递的。固定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $a \in E^n$，使得 $G \cdot a \neq E^n$。定义 $A' := \bigcup_{a' \in G \cdot p} Z(a')$ 和 $B' := \bigcup_{b' \in E^n \setminus G \cdot p} Z(b')$。于是，$A := q(A')$ 和 $B := q(B')$ 是 $\mathcal{J}$ 中不相交的紧集，且满足 $A \cup B = \mathcal{J}$。□

推论 3.18. 假设 (G, E) 是有限有向图 E 上的收缩且递归的自相似群胚作用，并且 G 是有限生成的。那么极限空间 $\mathcal{J}_{(G,E)}$ 是连通的。

例 3.19. 考虑例 2.2。我们断言，该作用是收缩的，且其核为 $\mathcal{N} = \{v, w, a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$。事实上，由于自动机中的所有元素都作为限制出现，$v, w, a, b, a^{-1}, b^{-1} \in \mathcal{N}$。为证明这些就是全部，我们计算

$$(ab)|_3 = a|_{b\cdot 3} b|_3 = v \qquad (ba)|_1 = b|_{a\cdot 1} a|_1 = a$$
$$(ab)|_4 = a|_{b\cdot 4} b|_4 = ba \qquad (ba)|_2 = b|_{a\cdot 2} a|_2 = b$$

并且所有长度为 2 的群胚元素都限制到核上。

前两个 Schreier 图如图 3 所示。更一般地，第 n 个 Schreier 图是一个长度为 2^n 的环，每个顶点上都有一个环，这表明该作用是层传递的。这也表明极限空间同胚于一个圆。可以通过归纳证明这一点：将第 n 个 Schreier 图的顶点映射到复平面圆周上的 n 次单位根上，并将该圆周度量化为周长为 1，使得这一映射延续图 3 中的图示。具体而言，Schreier 图中的每个顶点都与圆周上距离最近的两个邻点相连；对于任意无限路径 $\mu \in E^{-\infty}$，其初始段的像视为 Schreier 图中的顶点后，在单位圆上收敛。将 μ 映射到其极限点的映射即为所需的同胚：它是连续的，因为它是压缩映射；它是满射的，因为其像既稠密又紧致；并且根据命题 3.13 的最后一项结论，可以验证它是单射。

例3.20。考虑图3.20中的图 E，并通过 E-自动机定义一个自相似群胚

$$\begin{array}{llllll} a\cdot 0 = 2 & a|_0 = v & b\cdot 2 = 0 & b|_2 = v & c\cdot 2 = 1 & c|_2 = v \\ a\cdot 1 = 3 & a|_1 = a & b\cdot 3 = 1 & b|_3 = c & c\cdot 3 = 0 & c|_3 = b. \end{array} \tag{3.2}$$

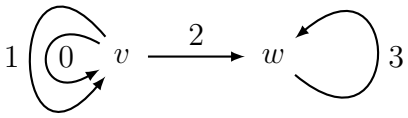


FIGURE 4. 例3.20的图 E

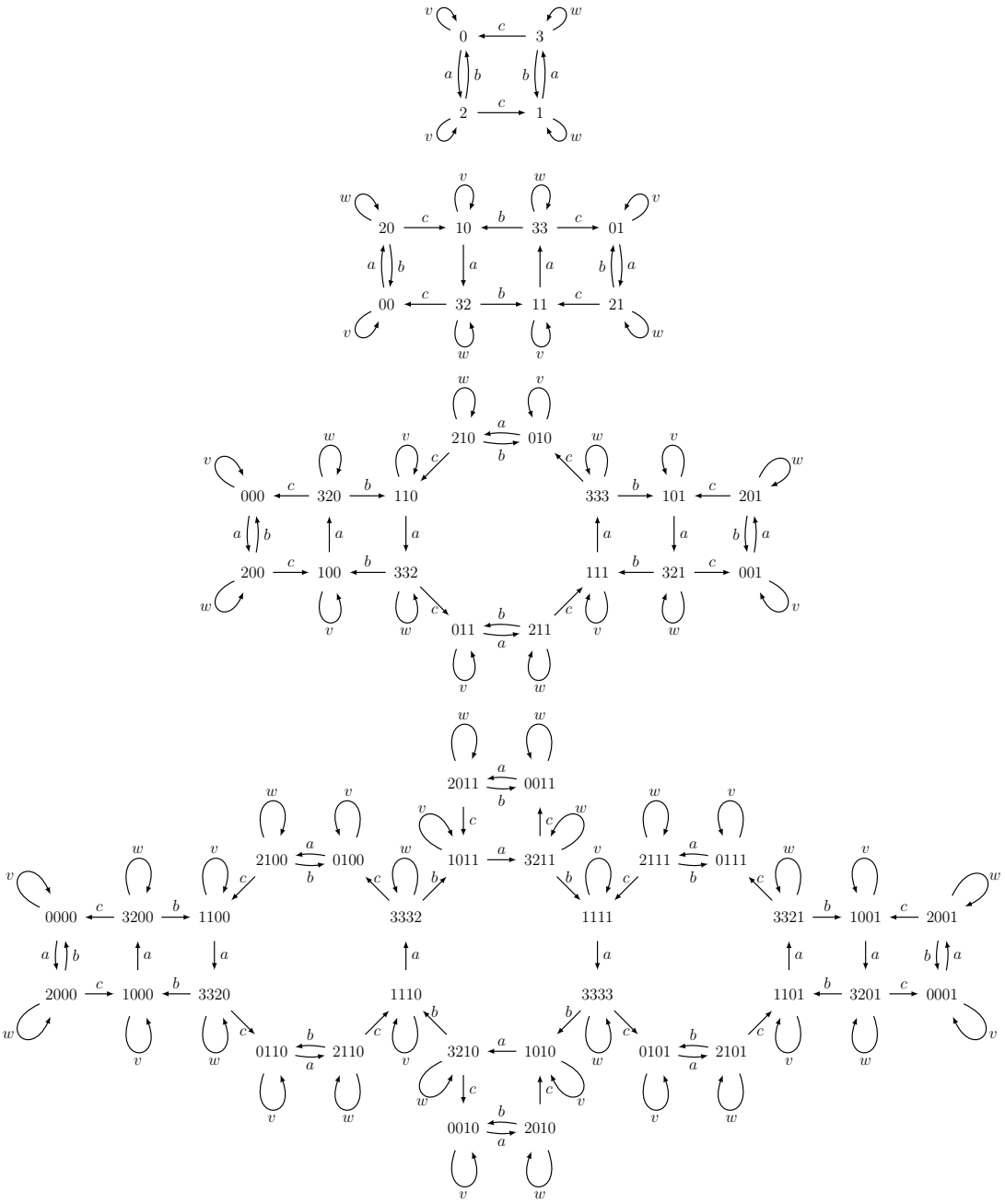


FIGURE 5. 例3.20的前四个 Schreier 图。

我们断言，这个作用是收缩的，其核为

$$\mathcal{N} = \{v, w, a, b, c, ba, ca, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, (ba)^{-1}, (ca)^{-1}\}.$$

注意到自动机的所有元素都以限制的形式出现，因此v、 w、 a、 b、 c及其逆元都属于核。由计算可知， ba和 ca也属于核。

$$(ba)|_1 = b|_{a\cdot 1}a|_1 = ca \quad \text{and} \quad (ca)|_1 = c|_{a\cdot 1}a|_1 = ba.$$

现在可以计算得出，限制到长度为 2 的词后，所有长度为 3 的群胚元素都会化简为核中的某个元素。

前四个 Schreier 图见图 5。它们表明这个作用是层传递的，并且极限空间与罗勒分形（ $z^2 - 1$的 Julia 集）同胚；可以通过类似例 3.19 中概述的方法证明这一点。

4. Dynamics on the limit space

本节将描述收缩正则自相似群胚作用的极限空间 $\mathcal{J}$ 上，由 $\mathbb{N}$ 通过局部扩张局部同胚给出的一个作用。下一节中，我们将利用这一点，从该自相似群胚作用构造一个 Smale 空间。

设 E 是一个有限有向图。移位映射 $\sigma: E^{-\infty} \to E^{-\infty}$ 定义为$\sigma($ $\ldots x_{-3}x_{-2}x_{-1}) = \ldots x_{-3}x_{-2}$；也就是说， σ会删除左无限路径最右侧的边。这个 σ是一个局部同胚，因为对于任意有限路径 μ 以及满足 $s(\mu) = r(e)$的任意边 e，它在 $Z(\mu e] \to Z(\mu]$ 上限制为一个同胚σ。本节的主要结果针对满足以下正则条件的自相似群胚作用；该条件基于 Nekrashevych 在[23]中使用的正则性条件。

定义 4.1（参见 [23, 定义 6.1]）。设 E 为有限有向图。设 (G, E) 为自相似群胚作用。若对于每个 $g \in G$ 以及满足 $g \cdot y = y$的每个 $y \in E^\infty$，都存在 E^* 中的 μ，使得 $y \in Z[\mu)$、 $g \cdot \mu = \mu$以及 $g|_\mu = s(\mu)$，则称 (G, E) 为正则的。

注 4.2。由于根据定义，自相似群胚作用是忠实的，因此正则性条件等价于如下条件：若 $y \in E^\infty$ 且 $g \cdot y = y$，则存在 y 的一个开闭邻域，该邻域在 g 下逐点固定。

本节的主要定理表明，对于收缩正则自相似群胚作用，移位映射在 $\mathcal{J}$ 上诱导出一个局部扩张的局部同胚。

定理 4.3. 设 E 为一个无源点的有限有向图。设 (G, E) 是一个收缩正则自相似群胚作用，其极限空间 $\mathcal{J}$如定义 3.2 所示。设 $\sigma: E^{-\infty} \to E^{-\infty}$ 为移位映射。则存在一个满射 $\tilde{\sigma}: \mathcal{J} \to \mathcal{J}$，使得对所有 $x \in E^{-\infty}$， $\tilde{\sigma}([x]) = [\sigma(x)]$。此外，存在 $\varepsilon > 0$、 $c > 1$ 以及 $d_\mathcal{J}$ 上的一个度量 $d_\mathcal{J}$，使得

(1) 每当 $d_\mathcal{J}([x], [y]) < \varepsilon$时，都有 $d_\mathcal{J}(\tilde{\sigma}([x])\ \tilde{\sigma}([y])) = c \cdot d_\mathcal{J}([x], [y])$；并且 (2) 每当 $\alpha \le \varepsilon$时，都有 $\tilde{\sigma}(B([x], \alpha)) = B(\tilde{\sigma}([x])\ c\alpha)$。

特别地， $\tilde{\sigma}$ 是一个局部扩张的局部同胚。

在证明定理之前，我们需要先建立一些预备结果。首先注意，若 $x \sim_{\mathrm{ae}} y$，则存在一个序列 $(g_n)_{n<0} \in \mathcal{N}$，使得

$g_n \cdot x_n \dots x_{-1} = y_n \dots y_{-1}$对所有 n 都成立，因此可得 $g_{n-1} \cdot \sigma(x)_n \dots \sigma(x)_{-1} = g_{n-1} \cdot x_{n-1} \dots x_{-2} = y_{n-1} \dots y_{-2} = \sigma(y)_n \dots \sigma(y)_{-1}$。也就是说，

$$x \sim_{\mathrm{ae}} y \Longrightarrow \sigma(x) \sim_{\mathrm{ae}} \sigma(y). \tag{4.1}$$

因此，存在映射 $\tilde{\sigma}\colon \mathcal{J} \mapsto \mathcal{J}$，如定理 4.3 所述。

引理 4.4. 设 E 是一个无源点的有限有向图。设 (G, E) 是一个正则自相似群胚作用。对于任意有限集 $F \subseteq G$，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对于所有满足 $d(g) = d(h)$ 的 $g, h \in F$，以及所有满足 $|\mu| \geq k$ 的 $\mu \in d(g)E^*$，若 $g \cdot \mu = h \cdot \mu$，则 $g|_\mu = h|_\mu$。

证明. 固定 $g, h \in F$。

对于每个满足 $g \cdot y = h \cdot y$ 的 $y \in E^\infty$，我们有 $h^{-1}g \cdot y = y$，因此正则性意味着存在 $\lambda_y \in E^*$，使得 $y \in Z[\lambda_y)$ 且 $(h^{-1}g)|_{\lambda_y} = s(\lambda_y)$。对于每个满足 $g \cdot x \neq h \cdot x$ 的 $x \in E^\infty$，我们有 $h^{-1}g \cdot x \neq x$，因此存在 $\lambda_x \in E^*$，使得$x \in Z[\lambda_x)$ 且 $(h^{-1}g) \cdot \lambda_x \neq \lambda_x$。

由于 $E^\infty = \bigcup_{x \in E^\infty} Z[\lambda_x)$，且 E^∞ 是紧致的，存在有限的 $K \subseteq E^\infty$使得 $E^\infty = \bigcup_{x \in K} Z[\lambda_x)$。令 $k_{g,h} := \max\{|\lambda_x| : x \in K\}$。假设 $\mu \in E^*$满足$|\mu| \geq k_{g,h}$，且 $g \cdot \mu = h \cdot \mu$。由于 E 没有源点，我们有 $Z[\mu) \neq \emptyset$。由于$Z[\lambda_x)$覆盖了 E^∞，我们有 $Z[\mu) \cap Z[\lambda_x) \neq \varnothing$，其中某个 $x \in K$。由于 $|\mu| \geq |\lambda_x|$，可知对于某个属于 E^∞ 的 μ'，有 $\mu = \lambda_x \mu'$。由于 $g \cdot \mu = h \cdot \mu$，我们有 $g \cdot \lambda_x = h \cdot \lambda_x$，因此$h^{-1}g \cdot \lambda_x = \lambda_x$。根据 λ_x 的选取，我们有 $h^{-1}g \cdot x = x$，且 $(h^{-1}g)|_{\lambda_x} = s(\lambda_x)$。因此 $(h^{-1}g)|_\mu = (h^{-1}g)|_{\lambda_x \mu'} = s(\lambda_x)|_{\mu'} = s(\mu') = s(\mu)$。因此 $g|_\mu = h|_\mu$。

我们现在已经证明，对于每个满足 $d(g) = d(h)$ 的 $g, h \in F$，存在 $k_{g,\,h} \in \mathbb{N}$使得只要 $\mu \in d(g)E^{k_{g,\,h}}$ 满足 $g \cdot \mu = h \cdot \mu$，就有 $g|_\mu = h|_\mu$。因此$k = \max_{g,\,h \in F} k_{g,\,h}$ 具有所需的性质。□

我们的下一个结果本质上是定理 4.3 的一个版本，其中度量球和 ε-近似被推论 3.10 中基本开集的相关条件所取代。我们将以此结果为基础，证明定理 4.3。

命题 4.5. 设 E 是一个没有源点的有限有向图。若 (G, E) 是一个收缩的正则自相似群作用，则

(1) 对每个 $z \in \mathcal{J}$，σ 将 $q^{-1}(z)$ 双射到 $q^{-1}(\tilde{\sigma}(z))$; (2) 存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \geq k+1$ 和每个 $\mu \in E^n$，映射 $\tilde{\sigma}$ 限制为从 U_μ 到 $U_{\sigma(\mu)}$ 的双射；并且

(3) 对每个 $n \geq k$、每个 $\omega \in E^n$、每个 $w \in U_\omega$ 以及每个 $z \in \tilde{\sigma}^{-1}(w)$，都存在 $\mu \in E^{n+1}$，使得 $z \in U_\mu$ 且 $\sigma(\mu) = \omega$。

特别地，$\tilde{\sigma}$ 是一个局部同胚。

证明。将引理 4.4 应用于有限集 $F = \mathcal{N}^2 \cup \mathcal{N} \cup E^0$，可得 $k \in \mathbb{N}$，使得对于所有 n_1、$n_2 \in F$，若 $\mu \in E^*$ 满足 $|\mu| \geq k$，则 $n_1 \cdot \mu = n_2 \cdot \mu$ 成立。对于证明的其余部分，我们固定具有此性质的 k。

(1) 由于 $q \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ q$，若 $q(x) = z$ 则 $q(\sigma(x)) = \tilde{\sigma}(q(x)) = \tilde{\sigma}(z)$，因此$\sigma(q^{-1}(z)) \subseteq q^{-1}(\tilde{\sigma}(z))$。所以我们必须证明反向包含。假设 $q(x) = z$且 $y' \sim_{\mathrm{ae}} \sigma(x)$。令 $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{N}$ 中的一个序列，使得 $d(g_n) = r(x_{-n-1})$，且对每个 $n \in \mathbb{N}$都有$g_n \cdot x_{-n-1} x_{-n} \dots x_{-2} = y'_{-n} y'_{-n+1} \dots y'_{-1}$。根据 k的选取，对所有 n，$n' \geq k$，可得 $g_n|_{x_{-n-1}x_{-n}\dots x_{-2}} = g_{n'}|_{x_{-n'-1}x_{-n'}\dots x_{-2}}$。令 $x'_{-1} = (g_k|_{x_{-k-1}x_{-k}\dots x_{-2}}) \cdot x_{-1}$且 $x' = y'x'_{-1}$，并令 $g'_n = g_k|_{x_{-k-1}x_{-k}\dots x_{-n-1}}$ 对 $n < k$成立，$g'_n = g_{n-1}$ 对 $n \geq k$成立。则对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $g'_n \cdot x_{-n}x_{-n+1}\dots x_{-1} = x'_{-n}x'_{-n+1}\dots x'_{-1}$。因此，$x \sim_{\mathrm{ae}} x'$ 且 $\sigma(x') = y'$。所以，$\sigma(q^{-1}(z)) = q^{-1}(\tilde{\sigma}(z))$。

假设 $x', x'' \in q^{-1}(z)$ 满足 $\sigma(x'') = \sigma(x') = y'$。由于 $x' \sim_{\mathrm{ae}} x \sim_{\mathrm{ae}} x''$，存在 g 属于 $\mathcal{N}$，使得 $g \cdot x'_{-k-1}x'_{-k}...x'_{-1} = x''_{-k-1}x''_{-k}...x''_{-1}$。根据 k的选取，且由于 $x'_{-k-1}x'_{-k}...x'_{-2} = x''_{-k-1}x''_{-k}...x''_{-2}$，我们有 $g|_{x'_{-k-1}x'_{-k}...x'_{-2}} = s(x'_{-2})$。因此$x''_{-1} = (g|_{x'_{-k-1}x'_{-k}...x'_{-2}}) \cdot x'_{-1} = x_{-1}$。所以，$x' = x''$。

(2) 固定 $\mu \in E^*$，使得 $|\mu| > k$ 和 $w \in U_{\sigma(\mu)}$。对于每个 $y \in q^{-1}(w)$，都存在 $g \in \mathcal{N}$ 使得 $y \in Z[g \cdot \sigma(\mu))$。根据 k的选取，元素 $g|_{\sigma(\mu)}$ 不依赖于 g的选取。因此存在唯一映射 $\delta : q^{-1}(U_{\sigma(\mu)}) \to E^{-\infty}$，使得对于任意满足 $y \in Z[g \cdot \sigma(\mu))$ 的 $g \in \mathcal{N}$，都有 $\delta(y) = y\big((g|_{\sigma(\mu)}) \cdot \mu_{-1}\big)$。我们声称，$\delta$可导出映射 $\delta : U_{\sigma(\mu)} \to U_\mu$，它是 $\tilde{\sigma}|_{U_\mu}$的逆映射。

为此，设 y、$y' \in q^{-1}(w)$ 渐近等价。固定 $g \in \mathcal{N}$使得 $y \in Z(g \cdot \sigma(\mu)]$，并固定 $g' \in \mathcal{N}$ 使得 $y' \in Z(g' \cdot \sigma(\mu)]$。那么，$x := \delta(y)$ 满足 $x = y\big((g|_{\sigma(\mu)}) \cdot \mu_{-1}\big) \in Z(g \cdot \mu]$。由 (1)，存在唯一元素 $x' \in E^{-\infty}$使得 $x' \sim x$ 且 $\sigma(x') = y'$。由于 $x \sim_{\mathrm{ae}} x'$，存在 $h \in \mathcal{N}$ 使得$h \cdot (x_{-k-1} \cdots x_{-1}) = x'_{-k-1}x'_{-k} \cdots x'_{-1}$。因此 $(hg) \cdot \sigma(\mu) = x'_{-k-1}x'_{-k} \cdots x'_{-2} = g' \cdot \sigma(\mu)$。由于 hg、$g' \in F$，根据 k的选取，我们有 $(hg)|_{\sigma(\mu)} = g'|_{\sigma(\mu)}$，由此推得$x'_{-1} = \big((hg)|_{\sigma(\mu)}\big) \cdot \mu_{-1} = \big(g'|_{\sigma(\mu)}\big) \cdot \mu_{-1}$。根据定义，我们有 $\delta(y') = y'\big(g'|_{\sigma(\mu)}\big) \cdot \mu_{-1} = y'x'_{-1}$；又由于根据 x'的定义，$\sigma(x') = y'$，我们推得 $\delta(y') = \sigma(x') x'_{-1} = x'$。所以 $\delta(y') = x' \sim_{\mathrm{ae}} x = \delta(y)$，从而 δ 可导出映射 $\delta : U_{\sigma(\mu)} \to \mathcal{J}$。

为了说明 $\delta(U_{\sigma(\mu)}) \subseteq U_\mu$，固定 $y \in q^{-1}(w)$，并令 $x = \delta(y)$。我们必须证明$[x] \subseteq \bigcup_{\nu \in \mathcal{N} \cdot \mu} Z(\nu]$。固定 $x' \in [x]$，并令 $y' = \sigma(x)$。应用前一段的论证，我们得到 $x' = \delta(y') \in Z(g' \cdot \mu]$，其中某个 $g' \in \mathcal{N}$，如所要求。

还需证明 δ 是 $\tilde{\sigma}|_{U_\mu}$的逆映射。根据构造，对于 $y \in q^{-1}(U_{\sigma(\mu)})$，$\sigma\delta(y) = y$，因此 $\tilde{\sigma}\delta(q(y)) = q(y)$。所以，$\tilde{\sigma}\delta = \mathrm{id}_{U_{\sigma(\mu)}}$。

现在证明 $\tilde{\delta}\tilde{\sigma} = id_{U_\mu}$。如果 $q^{-1}(z) \subseteq \bigcup_{g \in \mathcal{N}:\, d(g) = r(\mu)} Z[g \cdot \mu)$，那么 $q^{-1}(\tilde{\sigma}(z)) = \sigma(q^{-1}(z)) \subseteq \sigma\big(\bigcup_{g \in \mathcal{N}:d(g) = r(\mu)} Z[g \cdot \mu)\big) = \bigcup_{g \in \mathcal{N}:d(g) = r(\sigma(\mu))} Z[g \cdot \sigma(\mu))$。因此，$\tilde{\sigma}(U_\mu) \subseteq U_{\sigma(\mu)}$，所以复合映射 $\tilde{\delta}\tilde{\sigma}$ 和 $\delta\sigma$ 分别在 U_μ 和 $q^{-1}(U_\mu)$ 上定义良好。对于 $y \in q^{-1}(U_{\sigma(\mu)}) \cap Z[g \cdot \sigma(\mu))$，我们有 $\delta(y) = y(g|_{\sigma(\mu)}) \cdot \mu_{-1}$，因此对于 x 中的 $q^{-1}(U_\mu) \cap Z[g \cdot \mu)$，$\delta\sigma(x) = x$。于是，对于 $x \in q^{-1}(U_\mu)$，$\tilde{\delta}\tilde{\sigma}(q(x)) = q(x)$。因此，$\tilde{\delta}\tilde{\sigma} = \mathrm{id}_{U_\mu}$，并且我们已经证明 $\tilde{\sigma}$ 将 U_μ 双射到 $U_{\sigma(\mu)}$。

(3) 固定 $\omega \in E^*$，使得 $|\omega| \geq k$ 和 $w \in U_\omega$，并固定 $z \in \tilde{\sigma}^{-1}(w)$。选取 x、$y \in E^{-\infty}$，使得 $q(x) = z$、$q(y) = w$，且 $\sigma(x) = y$。那么存在 $g \in Gr(\omega)$，使得$y \in Z[g \cdot \omega)$。由于 $\sigma(x) = y$，可知 $x_{-n-1}x_{-n}...x_{-1} = (g \cdot \omega)x_{-1}$。我们有$d((g|_\omega)^{-1}) = c(g|_\omega) = s(g \cdot \omega) = r(x_{-1})$。令 $f = (g|_\omega)^{-1} \cdot x_{-1}$ 且 $\mu = \omega f$。那么$x \in Z(g \cdot \mu)$ 且 $\sigma(\mu) = \omega$，并且在 (2) 的证明中构造的映射 $\delta : q^{-1}(U_{\sigma(\mu)}) \to q^{-1}(U_\mu)$ 满足 $\delta(y) = x$。因此 $z = q(x) \in U_\mu$。□

现在我们证明主要结果的第一部分。

定理 4.3(1) 的证明。由推论 3.11，$\mathcal{J}$是可度量化的。在 $\mathcal{J}$上固定一个度量 d。根据引理 4.4，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对于所有 n_1、$n_2 \in F = \mathcal{N}^2 \cup \mathcal{N} \cup E^0$，如果 $\mu \in E^*$满足 $|\mu| \geq k$，则 $n_1 \cdot \mu = n_2 \cdot \mu$满足 $n_1|_\mu = n_2|_\mu$。由勒贝格数引理，存在 $\delta > 0$，使得 $\mathcal{J}$中半径为 δ 的每个球都包含于某个 U_ω 中，其中 $\omega \in E^{k+2}$。我们首先证明，$\tilde{\sigma}$ 具有扩张性，即如果对于所有 $n \in \mathbb{N}_0$，$[x]$、$[y] \in \mathcal{J}$ 满足$d(\tilde{\sigma}^n([x]), \tilde{\sigma}^n([y])) < \delta$，那么 $[x] = [y]$。

对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，由于 $d(\tilde{\sigma}^n([x]), \tilde{\sigma}^n([y])) < \delta$，存在 $\omega_n \in E^{k+2}$ 使得$\tilde{\sigma}^n([x]), \tilde{\sigma}^n([y]) \in U_{\omega_n}$。因此，存在$h_{n,1}, h_{n,2} \in \mathcal{N}$使得 $d(h_{n,1}) = d(h_{n,2}) = r(\omega_n)$，$h_{n,1} \cdot \omega_n = x_{-n-k-2}...x_{-n-1}$ 以及$h_{n,2} \cdot \omega_n = y_{-n-k-2}...y_{-n-1}$。因此，$g_n := h_{n,2}h_{n,1}^{-1}$，

满足 $d(g_n) = r(x_{-n-k-2})$ 且 $g_n \cdot x_{-n-k-2}...x_{-n-1} = y_{-n-k-2}...y_{-n-1}$。我们声称 $g_n \cdot x_{-n-k-2}...x_{-1} = y_{-n-k-2}...y_{-1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}_0$均成立。

这对 $n = 0$ 显然成立。假设对于某个 $n \geq 0$，我们有 $g_n \cdot x_{-n-k-2}...x_{-1} = y_{-n-k-2}...y_{-1}$ g_n、$(g_{n+1}|_{x_{-n-k-3}}) \in F$、$g_n \cdot x_{-n-k-2}...x_{-n-2} = y_{-n-k-2}...y_{-n-2} = (g_{n+1}|_{x_{-n-k-3}}) \cdot x_{-n-k-2}...x_{-n-2}$ 和 $|x_{-n-k-2}...x_{-n-2}| = k$，由引理 4.4 可得 $g_{n+1}|_{x_{-n-k-3}...x_{-n-2}} = g_n|_{x_{-n-k-2}...x_{-n-2}}$。因此，$g_{n+1} \cdot x_{-n-k-3}...x_{-1} = y_{-n-k-3}...y_{-1}$。由归纳法得证。

因此，若我们令 $h_n = g_{n-k-2}$ 为 $n \geq k+2$，并令 $h_n = g_0|_{x_{-k-2}...x_{-n-1}}$ 为 $0 < n < k+2$，则 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都满足 $h_n \cdot x_{-n}...x_{-1} = y_{-n}...y_{-1}$。因此，$[x] = [y]$，如所声称的。

由此可知，若 $[x] \neq [y]$，则存在 $n \in \mathbb{N}_0$ 使得 $d(\tilde{\sigma}^n([x])\ \tilde{\sigma}^n([y])) > \delta$。根据命题 4.5，映射$\tilde{\sigma}$ 是开映射；又由于 E 没有源点，$\tilde{\sigma}$ 也是满射。因此，$\tilde{\sigma}$ 是 Ruelle 扩张（见 [9]）。于是，根据定理 2.2], [9, , 存在 $\epsilon > 0$、$c > 1$ 以及 $\mathcal{J}$上的度量 $d_{\mathcal{J}}$，使得只要 $d_{\mathcal{J}}([x],[y]) < \epsilon$，就有 $d_{\mathcal{J}}(\tilde{\sigma}([x])\ \tilde{\sigma}([y])) = c \cdot d_{\mathcal{J}}([x],[y])$。□

现在我们固定一个满足定理 4.3 中条件 (1) 的度量 $d_{\mathcal{J}}$。为了证明条件 (2)，我们将使用下面的技术引理，并且在引理 8.6 的证明中还会再次用到它。

引理 4.6. 沿用定理 4.3 的假设。假设 $\varepsilon > 0$ 和 $c > 1$ 满足该定理的陈述 (1)。令 k 如命题 4.5(2) 中所述。则存在 $\eta < \varepsilon$ 和 $n > k$，使得

(1) 对每个 $w \in \mathcal{J}$ 和 $\alpha \leq \eta$，都存在 $\omega \in E^*$，使得 $|\omega| \geq n-1$ 和 $B(w, c\alpha) \subseteq U_\omega$；以及 (2) 对每个满足 $|\mu| \geq n$ 的 $\mu \in E^*$，映射 $\tilde{\sigma}$ 将 U_μ 同胚地映到 $U_{\sigma(\mu)}$；若 δ 表示其逆映射，则对所有 $z \in U_\mu$ 以及所有满足 $B(\tilde{\sigma}(z)\ c\alpha) \subseteq U_{\sigma(\mu)}$ 的 $\alpha \leq \tilde{\eta}$，都有 $B(z,\alpha) \subseteq U_\mu$，并且 δ 将 $B(\tilde{\sigma}(z)\ c\alpha)$ 同胚地映到 $B(z,\alpha)$。

证明。对于满足 $s(\mu) = r(\omega)$ 的 $\mu, \omega \in E^*$，我们有 $U_{\mu\omega} \subseteq U_\omega$；对于任意无限路径 $x \in E^{-\infty}$，我们有 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{x_{-n}...x_{-1}} = [x]$。因此 $\lim_{n\to\infty} \sup_{\mu\in E^n} \operatorname{diam}(U_\mu) = 0$。令 k 如命题 4.5(2) 中所述，并固定 $n > k$，使得当 $|\mu| \geq n$ 时，$\operatorname{diam}(U_\mu) < \varepsilon$。利用 $\mathcal{J}$ 的紧致性，固定 $K \subseteq \bigcup_{m\geq n-1} E^m$ 使得 $\mathcal{J} \subseteq \bigcup_{\omega\in K} U_\omega$。由勒贝格数引理可得 $0 < \eta < \varepsilon$，使得对于 $\mathcal{J}$ 中的每个 w，都存在 $\omega \in K$ 使得 $B(w, c\eta) \subseteq U_\omega$。按构造，这些 n, η 满足 (1)，因此我们只需证明 (2)。

为此，取一条路径 μ，使得 $|\mu| \geq n$。由于 $n \geq k$，由命题 4.5(2)，$\tilde{\sigma}$ 将 U_μ 同胚映射到 $U_{\sigma(\mu)}$。假设对于 $z \in U_\mu$ 和 $\alpha \leq \eta$，$B(\tilde{\sigma}(z)\ c\alpha) \subseteq U_{\sigma(\mu)}$。根据假设，$\varepsilon$ 满足定理 4.3(1)，因此，由于 $\operatorname{diam}(U_\mu) < \varepsilon$，我们有

$$c \cdot d_{\mathcal{J}}(\tilde{\delta}(\tilde{\sigma}z), \tilde{\delta}(w)) = d_{\mathcal{J}}(\tilde{\sigma}\tilde{\delta}(\tilde{\sigma}z), \tilde{\sigma}\tilde{\delta}(w)) = d_{\mathcal{J}}(\tilde{\sigma}z, w)$$

$\tilde{}$ 对所有满足 $< c\alpha$ 的 $d_{\mathcal{J}}(\tilde{\sigma}z, w)$ 均成立。因此，$\delta(B(\tilde{\sigma}z, c\alpha)) \subseteq B(z,\alpha) \cap U_\mu$，从而 $B(\tilde{\sigma}z, c\alpha) \subseteq \tilde{\sigma}(B(z,\alpha) \cap U_\mu)$。由于 $\alpha \leq \eta < \varepsilon$，再次应用定理 4.3(1)可知，$\tilde{\sigma}$ 在 $B(z,\alpha)$ 上的限制是一个同胚，并且 $\tilde{\sigma}(B(z,\alpha)) \subseteq B(\tilde{\sigma}(z)\ c\alpha)$。因此，$B(z,\alpha) \cap U_\mu = B(z,\alpha)$，且 $\tilde{\sigma}(B(z,\alpha)) = B(\tilde{\sigma}(z)\ c\alpha)$。因此，$B(z,\alpha) \subseteq U_\mu$，$\tilde{}$，故 $\delta \circ \tilde{\sigma}|_{B(z,\alpha)}$ 定义良好，并且 $\delta(B(\tilde{\sigma}(z)\ c\alpha)) = \delta\tilde{\sigma}(B(z,\alpha)) = B(z,\alpha)$。□

现在我们完成本节主要结果的证明。

定理 4.3(2) 的证明。令 $\epsilon > 0$ 如定理 4.3(1) 的证明中所述。由引理 4.6(1)，存在 $\varepsilon < \epsilon$ 和 $n \in \mathbb{N}$，使得对任意 $z \in \mathcal{J}$ 和 $\alpha \leq \varepsilon$，都存在 $\omega \in E^*$，满足 $|\omega| \geq n-1$ 和 $B(\tilde{\sigma}(z)\ c\alpha) \subseteq U_\omega$。由命题 4.5(3)，存在 $f \in E^1$，使得 $s(\omega) = r(f)$ 且 $z \in U_{\omega f}$。于是，引理 4.6(2) 给出 $B(z,\alpha) \subseteq \widetilde{U_{\omega f}}$，以及 $\tilde{\sigma}(B(z,\alpha)) = \tilde{\sigma}\delta(B(\tilde{\sigma}(z)\ c\alpha)) = B(\tilde{\sigma}(z)\ c\alpha)$。

至此，便完成了定理 4.3 的证明，其中 $\varepsilon > 0$ 如上所述，$c > 1$ 和 $d_{\mathcal{J}}$ 。 □

为结束本节，我们将证明，对于强连通图，定理 4.3 中的正则性假设是必要的（稍后我们需要将讨论限制在强连通图上，以便应用 Kaminker、Putnam 和 Whittaker 关于与 Smale 空间相关的 KK-代数的 C^*-对偶性的结果）。回忆一下，有向图 E 称为强连通图，是指它至少有一条边，且对于所有 v、$w \in E^0$，集合 vE^*w 均非空。

引理 4.7. 设 E 是一个没有源点的有限有向图。设 (G,E) 是一个以 $\mathcal{N}$为核的收缩自相似群胚作用。则存在 $\mu \in E^*$，使得每当 $g \in \mathcal{N}$满足 $d(g) = r(\mu)$ 且 $g \cdot \mu = \mu$时，对于 $s(\mu)E^*$中的所有 ν，都有 $g \cdot \mu\nu = \mu\nu$。

证明。首先假设存在 $x \in E^\infty$，使得对于所有满足 $d(g) = r(x)$ 的 $g \in \mathcal{N} \setminus E^0$，都有 $g \cdot x \neq x$。选取 $n \in \mathbb{N}$，使得对于所有满足 $d(g) = r(x)$ 且属于 $\mathcal{N} \setminus E^0$ 的 g，都有 $g \cdot x_1...x_n \neq x_1....x_n$。那么 $\mu = x_1...x_n$ 具有所需性质。

现在假设对于每个 $x \in E^\infty$，都存在 $g \in \mathcal{N} \setminus E^0$，使得 $d(g) = r(x)$ 且 $g \cdot x = x$。那么，$\bigcup_{g \in \mathcal{N} \setminus E^0} \{x \in d(g)E^\infty :\ g \cdot x = x\} = E^\infty$。由于有限个开稠密集的交集本身也是开稠密集，因此存在不属于 $\{x \in d(g)E^\infty$ 的边界的 $x \in E^\infty$: 对于任意 $g \in \mathcal{N} \setminus E^0$，都有 $g \cdot x = x\}$。因此，存在一个 $n \in \mathbb{N}$，使得对于所有属于 $\mathcal{N} \setminus E^0$ 且满足 $d(g) = r(x)$ 的 g，要么 $g \cdot x_1...x_n \neq x_1...x_n$，要么对于所有 $Z[x_1...x_n$ 中的 y，都有 $g \cdot y = y$。因此，$\mu = x_1...x_n$ 具有所需性质。□

命题 4.8. 设 E 是一个强连通有限有向图。设 (G,E) 是一个核为 $\mathcal{N}$ 的收缩自相似群胚作用。若 $\tilde{\sigma} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ 是局部同胚，则 (G,E) 是正则的。因此，(G,E) 是正则的，当且仅当 $\tilde{\sigma}$ 是局部同胚

证明. 假设 (G,E) 不是正则的。只需证明存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\tilde{\sigma}^k$ 不是局部单射。由于 (G,E) 不是正则的，存在 $x \in E^\infty$ 和 $g \in G$，使得 $g \cdot x = x$，但 g 不固定 x 的任何邻域。因此，在 $\mathbb{N}$ 中存在一个严格递增序列 (n_j) 以及路径 $\alpha_j \in s(x_{n_j})E^*$，使得 $g \cdot x_1 \ldots x_{n_j}\alpha_j \neq x_1 \ldots x_{n_j}\alpha_j$。特别地，对于所有 j，元素 $h_j := g|_{x_1...x_j}$ 满足 $h_j \cdot \alpha_j \neq \alpha_j$。由引理 3.4 可知，当 j 足够大时，$h_j \in \mathcal{N}$。由于 $\mathcal{N}$ 是有限的，取一个子序列后，可假设对所有 j 都有 $h_j = h_1 =: h$（因而对所有 j 都有 $s(x_{n_j}) = d(h)$）。因此，$\alpha := \alpha_1 \in d(h)E^*$ 满足 $h \cdot \alpha \neq \alpha$；令 $\beta := h \cdot \alpha$。

对于每个 j，固定 $y_j \in Z(x_1 \ldots x_{n_j}] \subseteq E^{-\infty}$. 由于 $E^{-\infty}$ 是紧致的，通过取一个子序列，我们可以假设 $y_j \to y \in E^{-\infty}$。由于对所有 j，$s(y_j) = s(x_{n_j}) = d(h)$，因此我们有 $s(y) = d(h)$，所以 $y\alpha$，$y\beta \in E^{-\infty}$。根据 $E^{-\infty}$ 中收敛的定义，对于每个$N \in \mathbb{N}$，存在 j使得 $y_{-N} \cdots y_{-1} = x_{n_j-N+1} \ldots x_{n_j}$。对于这个 j，元素$g_N := g|_{x_1...x_{n_j-N+1}}$满足 $g_N \cdot y_{-N} \ldots y_{-1}\alpha = y_{-N} \ldots y_{-1}\beta$。因此 $y\alpha \sim_{\text{ae}} y_\beta$。也就是说，$[y_\alpha] = [y_\beta] \in \mathcal{J}$。此外，$k := |\alpha| = |\beta|$ 满足 $\tilde{\sigma}([y\alpha]) = [y] = \tilde{\sigma}([y\beta])$。

由引理 4.7，存在 $\mu \in E^*$，使得逐点满足 $g \cdot \mu = \mu$ 的每个 $g \in \mathcal{N}$ 都固定 $Z[\mu)$。固定 $z \in Z(r(\mu)]$，使得 $z\mu \in E^{-\infty}$。由于 E 是强连通的，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\nu_n \in E^*$，使得 $r(\nu_n) = s(\mu)$ 且 $s(\nu_n) = r(y_n)$。因此，对于每个 n，我们得到 $E^{-\infty}$ 的元素 $z\mu\nu_n y_n \ldots y_{-1}\alpha$ 和 $z\mu\nu_n y_n \ldots y_{-1}\beta$。由于

$\alpha \neq \beta$，我们对 μ 的选择确保对于所有 $g \in \mathcal{N}$ 都有 $g \cdot \mu\nu_n y_n \dots y_{-1}\alpha \neq \mu\nu_n y_n \dots y_{-1}\beta$，因此引理 3.6 表明对于所有 n 都有 $z\mu\nu_n y_n \dots y_{-1}\alpha \not\sim_{\mathrm{ae}} z\mu\nu_n y_n \dots y_{-1}\beta$。我们有 $z\mu\nu_n y_n \dots y_{-1}\alpha \to y\alpha$ 和 $z\mu\nu_n y_n \dots y_{-1}\beta \to y_\beta$，并且对于所有 n，$\tilde{\sigma}^k([z\mu\nu_n y_n \dots y_{-1}\alpha]) = [z\mu\nu_n y_n \dots y_{-1}] = \tilde{\sigma}^k([z\mu\nu_n y_n \dots y_{-1}\beta])$，因此 $\tilde{\sigma}^k$ 不是局部单射的。□

5. The Smale space of a self-similar groupoid action on a graph

本节将介绍由上一节所述的局部膨胀动力学产生的 Wieler Smale 空间，并证明该 Smale 空间可表示为 $E^{\mathbb{Z}}$ 关于渐近等价关系的自然扩张所得的商空间。

我们首先回顾 Wieler 公理。在这些公理下，空间 V 在连续满射 $V \to V$ 的迭代作用下的射影极限成为一个稳定集全不连通的 Smale 空间。Wieler 还证明了更多内容：每个稳定集全不连通的 Smale 空间都具有这种形式，但我们不需要她的定理的全部威力。

陈述 Wieler 定理之前，先回顾一下：若 $g: X \to X$ 是拓扑空间上的连续自映射，则 $\varprojlim(X, g)$ 是如下空间

$$\varprojlim(X, g) := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_i \in X \text{ and } g(x_{i+1}) = x_i \text{ for all } i\}.$$

设 $\phi: X \to X$ 是拓扑空间上的连续自映射。若对点 $x \in X$ 的每个邻域 U（其中 x），都存在 $n \geq 1$ 使得 $\phi^n(U) \cap U \neq \varnothing$，则称点 $x \in X$ 是非游荡点。最后，回顾一下，$x \in X$ 的正向轨道为 $\{\phi^n(x) \mid n \geq 0\}$。

定理 5.1（Wieler [32, 定理 A]）。设 (X, d) 是一个紧致度量空间，并设 $\varphi: X \to X$ 是连续满射。假设存在 $\varepsilon > 0$、$K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和 $\gamma \in \in (0, 1)$，使得

公理 1：对所有满足 $d(x, y) < \varepsilon$ 的 $x, y \in X$，都有

$$d(\varphi^K(x), \varphi^K(y)) \leq \gamma^K d(\varphi^{2K}(x), \varphi^{2K}(y)).$$

公理 2：对所有 $x \in X$ 和 $0 < \alpha < \varepsilon$，

$$\varphi^K(B(\varphi^K(x), \alpha)) \subseteq \varphi^{2K}(B(x, \gamma\alpha)).$$

Then

$$d_\infty((x_n), (y_n)) := \sum_{n=1}^{K} \gamma^{-n} \sup_{m \in \mathbb{N}} \gamma^m d(x_{m+n}, y_{m+n}),$$

在 X_∞ 上定义一个度量：$= \varprojlim(X, \varphi)$，公式为

$$\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots) = (\varphi(x_1), x_1, x_2, \dots)$$

定义了一个同胚 $\varphi_\infty: X_\infty \to X_\infty$，且 $(X_\infty, \varphi_\infty)$ 是一个具有全不连通稳定集的 Smale 空间。当且仅当 X中的每个点都是非游荡点，并且 X 中存在一个点，其在 φ_∞ 作用下的正向轨道是稠密的时，该 Smale 空间才是不可约的。

对我们而言，关键在于前两节的结果表明，每个作用于无源有限有向图上的收缩正则自相似群胚作用，都会产生一个满足 Wieler 公理的无动力系统。

引理5.2. 设 E 是一个没有源点的有限有向图。设(G, E)是一个收缩的正则自相似群胚作用。设 $\mathcal{J}$ 为定义 3.2 中的极限空间，$d_{\mathcal{J}}$ 为推论 3.11 中的等价关系度量，且 $\tilde{\sigma}$ 为定理 4.3 中的局部

同胚。设 ε 和 c 如定理 4.3 的陈述所述。则有序对$(\mathcal{J},\tilde{\sigma})$满足关于$\gamma=\frac{1}{c}$、 $K=1$和 $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}$的 Wieler 公理。

证明。定理 4.3 (1) 表明，若 $d_{\mathcal{J}}([x],[y])<\varepsilon'$，则

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{J}}(\tilde{\sigma}^K([x]),\tilde{\sigma}^K([y])) &= d_{\mathcal{J}}(\tilde{\sigma}([x]),\tilde{\sigma}([y])) \\ &= \frac{1}{c}d_{\mathcal{J}}(\tilde{\sigma}^2([x]),\tilde{\sigma}^2([y])) = \gamma d_{\mathcal{J}}(\tilde{\sigma}^{2K}([x]),\tilde{\sigma}^{2K}([y])), \end{aligned}$$

从而证得公理 1。

定理 4.3(2) 表明，对于所有 $\alpha\le\varepsilon'$和$[x]\in\mathcal{J}$， $\tilde{\sigma}^{2K}(B([x],\gamma\alpha))=\tilde{\sigma}^K(B(\tilde{\sigma}^K([x]),\alpha))$，从而证得公理 2。□

现在，我们将由定理 5.1 应用于 $(\mathcal{J},\tilde{\sigma})$ 所得到的极限空间 $\mathcal{J}_\infty$，与 E 的双无限路径空间的一个商空间对应起来。

我们对双无限路径定义渐近等价的方式，与对右无限路径定义渐近等价的方式相同。也就是说，若 (G,E) 是一个自相似群胚作用，且 $x,y\in E^{\mathbb{Z}}$，那么$x\sim_{\mathrm{ae}}y$ 当且仅当存在一个双无限序列 $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 属于 G，使得 $\{g_n\mid n\in\mathbb{Z}\}$ 是有限集，并且对于所有 $n\in\mathbb{Z}$， $g_n\cdot x_nx_{n+1}x_{n+2}\cdots=y_ny_{n+1}y_{n+2}\cdots$。

引理 3.6 的论证表明， $x,y\in E^{\mathbb{Z}}$ 渐近等价，当且仅当存在一个序列 $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，属于 $\mathcal{N}$，使得对所有 n 都有 $g_n\cdot x_nx_{n+1}x_{n+2}\cdots=y_ny_{n+1}y_{n+2}\ldots$，且对所有 n 都有 $g_n|_{x_n}=g_{n+1}$。

定义 5.3. 设 E 是一个没有源点的有限有向图。设 (G,E) 是一个收缩的自相似群胚作用。我们将商空间 $E^{\mathbb{Z}}/\!\sim_{\mathrm{ae}}$ 记作 $\mathcal{S}$，并称其为 (G,E) 的极限溶胶。

下面需要用到一些记号。给定一个没有汇点或源点的有向图 E，我们将平移同胚 $\tau(x)_n=x_{n-1},n\in\mathbb{Z}$ 记作 $\tau\colon E^{\mathbb{Z}}\to E^{\mathbb{Z}}$。对于 $n\in\mathbb{Z}$ 和 $x\in E^{-\infty}$，我们将 $E^{-\infty}$ 中由 $x(-\infty,n)=\ldots x_{n-2}x_{n-1}x_n$ 给出的元素记作 $x(-\infty,n)$。

命题 5.4. 设 E 是一个没有汇点或源点的有限有向图。设 (G,E) 是一个收缩的自相似群胚作用。设 $\mathcal{J}$ 是 (G,E) 的极限空间，且 $\tilde{\sigma}\colon\mathcal{J}\to\mathcal{J}$是如定理 4.3 中所定义的映射。设 $\mathcal{J}_\infty:=\varprojlim(\mathcal{J},\tilde{\sigma})$，且 $\tilde{\sigma}_\infty\colon\mathcal{J}_\infty\to\mathcal{J}_\infty$是如定理 5.1 中所定义的同胚。设 $\mathcal{S}=E^{\mathbb{Z}}/\!\sim_{\mathrm{ae}}$是 (G,E) 的极限溶胶。那么存在一个同胚 $\theta\colon\mathcal{S}\to\mathcal{J}_\infty$，使得对所有 $x\in E^{\mathbb{Z}}$， $\theta([x])=([x(-\infty,-1)],[x(-\infty,0)],[x(-\infty,1)],\ldots)$。我们有$\theta([\tau(x)])=\tilde{\sigma}_\infty(\theta([x]))$，对所有 $x\in E^{\mathbb{Z}}$ 均成立。

证明。若 $x,y\in E^{\mathbb{Z}}$满足 $x\sim_{\mathrm{ae}}y$，则对所有 $n\in\mathbb{Z}$，有 $x(-\infty,n)\sim_{\mathrm{ae}}y(-\infty,n)$。因此，公式 $\theta([x])=([x(-\infty,-1)],[x(-\infty,0)],[x(-\infty,1)],\ldots)$ 定义良好，并确定了一个映射 $\theta\colon\mathcal{S}\to\prod_{n=1}^{\infty}\mathcal{J}$。根据 $\tilde{\sigma}$ 的定义，我们有 $\tilde{\sigma}([x(-\infty,n)])=[\sigma(x(-\infty,n))]=[x(-\infty,n-1)]$，对所有 n均成立，因此每个 $\theta([x])\in\mathcal{J}_\infty$。

由于 $E^{\mathbb{Z}}$ 是紧致的，其连续像 $\mathcal{S}$也紧致。豪斯多夫空间的射影极限是豪斯多夫空间，因此 $\mathcal{J}_\infty$ 是豪斯多夫空间。要证明 θ 是同胚，只需证明它是连续双射。

由 $n\in\mathbb{Z}$ 索引的映射 $E^{\mathbb{Z}}\ni x\mapsto x(-\infty,n)$ 显然是连续的，因此映射 $x\mapsto[x(-\infty,n)]$ 也连续，因为从 $E^{-\infty}$到 $\mathcal{J}$的商映射是连续的。因此， $\theta(x):=([x(-\infty,-1)],[x(-\infty,0)],[x(-\infty,1)],\ldots)$ 定义了一个连续映射 $\bar{\theta}\colon E^{\mathbb{Z}}\to\mathcal{J}_\infty$。由于 $\theta:\mathcal{S}\to\mathcal{J}_\infty$ 是由 $\bar{\theta}$ 诱导的映射，它也是连续的。

为证明 θ 是满射，固定 $(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\ldots)\in\mathcal{J}_\infty$。对每个 j，选取 $x_j\in E^{-\infty}$ 使得 $[x_j]=\zeta_j$。由于每个 $\tilde{\sigma}(\zeta_j)=\zeta_{j-1}$，因此对所有 j，都有 $\sigma(x_j)\sim_{\mathrm{ae}}x_{j-1}$。对每个 $j\ge1$，

考虑 $E^{-\infty}$ 中的序列 $(\sigma^{n-j}(x_n))_{n=j}^{\infty}$。我们刚才看到，每个 $\sigma^{n-j}(x_n) \sim_{\mathrm{ae}} x_j$，因此推论 3.7 表明，该序列中 $E^{-\infty}$ 的不同元素只有有限多个。由标准的康托尔对角线论证，可得到一个子序列 (x_{n_k})，使得对每个 j，$\left(\sigma^{n_k-j}(x_{n_k})\right)_{n_k\geq j}$ 都是常值序列。定义 $y \in E^{\mathbb{Z}}$ 为 $y_j = \lim_k \sigma^{n_k-j}(x_{n_k})$。根据构造，对所有 j，都有 $\sigma(y_j) = y_{j-1}$。此外，根据构造，每个$y(-\infty, n) \sim_{\mathrm{ae}} x_n$，因此 $\theta([y]) = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots)$。

为证明 θ 是单射，假设 $\theta([x]) = \theta([y])$。我们必须证明 $x \sim_{\mathrm{ae}} y$。为此，固定 $m \in \mathbb{Z}$。只需找到 $g \in \mathcal{N}$，使得 $g \cdot x(m, \infty) = y(m, \infty)$。由于$\theta([x]) = \theta([y])$，对于所有 n，都有 $x(-\infty, n) \sim_{\mathrm{ae}} y(-\infty, n)$。固定 $n \geq m$。引理 3.6 表明，存在一个序列 $(g_{k,n})_{k\leq n}$属于 $\mathcal{N}$，使得对于所有k，都有 $g_{k,n} \cdot x_k \dots x_n = y_k \dots y_n$。取 $k = m \leq n$，可得 $g_n := g_{m,n} \in \mathcal{N}$，使得 $g_n \cdot x_m \dots x_n = y_m \dots y_n$。由于 $\mathcal{N}$ 是有限的，序列 $(g_n)_{n\geq m}$ 有一个常值子序列。该子序列的常值g 因此对无穷多个 $n \geq m$ 满足 $g \cdot x_m \dots x_n = x_m \dots y_n$。于是可得 $g \cdot x(m, \infty) = y(m, \infty)$，如所需。

接下来只需验证，对于所有 $x \in E^{\mathbb{Z}}$，$\theta([\tau(x)]) = \tilde{\sigma}_\infty(\theta([x]))$。由直接计算可得：对于 $x \in E^{\mathbb{Z}}$，

$$\begin{aligned}\theta([\tau(x)]) &= \big([\tau(x)(-\infty,-1)], [\tau(x)(-\infty,0)], [\tau(x)(-\infty,1)], \dots\big)\\ &= \big([x(-\infty,-2)], [x(-\infty,-1)], [x(-\infty,0)], \dots\big)\\ &= \big(\tilde{\sigma}([x(-\infty,-1)]), [x(-\infty,-1)], [x(-\infty,0)], \dots\big)\\ &= \tilde{\sigma}_\infty(\theta([x])).\end{aligned}$$

□

推论 5.5. 设 E 是一个没有汇点或源点的有限有向图。设 (G, E) 是一个收缩正则自相似群胚作用。设 $\mathcal{S} := E^{\mathbb{Z}}/\sim_{\mathrm{ae}}$ 是 (G, E) 的极限溶胶。那么存在一个同胚 $\tilde{\tau}$: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$，使得对于所有 $x \in E^{\mathbb{Z}}$，$\tilde{\tau}([x]) = [\tau(x)]$。令 $d_{\mathcal{J}}$ 为 $\mathcal{J}$ 上的商度量，如推论 3.11 所述。存在 $\mathcal{S}$ 上的一个度量 $d_{\mathcal{S}}$，使得

$$d_{\mathcal{S}}([x], [y]) = \sup_{m\in\mathbb{N}_0} (\frac{1}{c})^m d_{\mathcal{J}}([x(-\infty, m)], [y(-\infty, m)])$$

对于所有 $x, y \in E^{\mathbb{Z}}$。存在一个常数 $\varepsilon_{\mathcal{S}}$，使得 $(\mathcal{S}, d_{\mathcal{S}}, \tilde{\tau}, \varepsilon_{\mathcal{S}}, \frac{1}{c})$ 是一个稳定集全不连通的 Smale 空间。

如果 E 是强连通的，那么 $(\mathcal{S}, \tilde{\tau})$ 是不可约的。如果 E 是本原的，那么 $(\mathcal{S}, \tilde{\tau})$ 是拓扑混合的。

证明。定理 5.1 表明 $(\mathcal{J}_\infty, \tilde{\sigma}_\infty)$ 是一个稳定集全不连通的 Smale 空间，而命题 5.4 表明 $(\mathcal{S}, \tilde{\tau})$ 与 $(\mathcal{J}_\infty, \tilde{\sigma}_\infty)$ 共轭。令 d_∞ 为定理 5.1 中的度量。对于 $x, y \in E^{\mathbb{Z}}$，我们有

$$d_\infty(\theta([x]), \theta([y])) = c \cdot \sup_{m\in\mathbb{N}} (\frac{1}{c})^m d(\theta([x])_{m+1}, \theta([y])_{m+1}).$$

由于 $\theta([x])_{m+1} = [x(-\infty, m)],$，我们有 $d_\infty = d_{\mathcal{S}} \circ (\theta \times \theta)$。因此，存在一个常数$\varepsilon_{\mathcal{S}} > 0$，使得 $(\mathcal{S}, d_{\mathcal{S}}, \tilde{\tau}, \varepsilon_S, \frac{1}{c})$ 是一个 Smale 空间。

关于不可约性，根据 Wieler 定理，只需证明 $\mathcal{J}$中的每个点都是非游荡的，并且 $\mathcal{J}$ 具有稠密轨道。为说明每个点都是非游荡的，首先注意，如果 $x \in E^{-\infty}$ 是周期点，即 $\sigma^n(x) = x$，那么 $[x] \in \mathcal{J}$满足 $\tilde{\sigma}^n([x]) = [\sigma^n(x)] = [x]$，因此 $[x]$ 也是周期点。由于 E 是强连通的，对于每个 $\lambda \in E^*$，存在 $\mu \in s(\lambda)E^*r(\lambda)$，于是 $x := (\lambda\mu)^\infty$ 是 $Z(\lambda)$中的周期点。因此，周期点构成一个稠密集。由此可知，$\mathcal{J}$ 中的周期点是稠密的。因此，对于任意 $[y] \in \mathcal{J}$ 以及 U 这个 $[y]$的开邻域，我们

可以找到 $[x] \in U$ 和 $n \geq 1$，使得 $\tilde{\sigma}^n([x]) = [x]$，从而 $[x] \in \tilde{\sigma}^n(U) \cap U$。为说明 $\mathcal{J}$具有稠密轨道，令 λ_1、λ_2、$\lambda_3 \ldots$ 为 E^*的一个列表。对于每个 $i \geq 1$，选择$\mu_i \in s(\lambda_i)E^* r(\lambda_{i+1})$。于是 $x = \lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2 \cdots \in E^\infty$。对于每个 $\lambda \in E^*$，存在某个 i使得 $\lambda = \lambda_i$，进而 $\sigma^{|\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_{i-1}\mu_{i-1}|}(x) \in Z(\lambda)$。因此，$\{\sigma^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 E^∞中稠密。因此，$\{\tilde{\sigma}^n([x]) \mid n \in \mathbb{N}\} = q(\{\sigma^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 $\mathcal{J}$中构成一个稠密的正向轨道。

若 E 是本原的，则 $\tau\colon\ E^{\mathbb{Z}} \mapsto E^{\mathbb{Z}}$ 是拓扑混合的，参见 [16, 观察 7.2.2]。由于商映射 $q\colon\ E^{\mathbb{Z}} \mapsto \mathcal{S}$ 满足 $q \circ \tau = \tilde{\tau} \circ q$ 且为满射，τ是拓扑混合的意味着 $\tilde{\tau}$ 也是拓扑混合的。□

6. The C^*-algebra of a self-similar groupoid action on a graph

在本节和下一节中，我们将讨论与自相似群胚作用相关的两个 C^*-代数。第一个是 Laca–Raeburn–Ramagge–Whittaker 在 [18], 中描述的 C^*-代数 $\mathcal{O}(G, E)$，另见 [17, 21, 23]。我们的主要目标是提供一个群胚模型，该模型基于 Exel 和 Pardo 为图上的自相似群作用所建立的模型 [7]。这正是本节的主题。在下一节中，我们将考察由第4节的动力学 $(\mathcal{J}, \tilde{\sigma})$ 的 Deaconu–Renault 群胚所得到的 C^*-代数。我们的主要结果将为收缩的正则自相似作用建立这两个 C^*-代数之间的 KK-对偶。

在 [18], 中，自相似群胚作用的 Toeplitz 代数被定义为与之关联的 Hilbert 模的 Toeplitz 代数。随后，[18] 的命题 4.4 给出了另一种描述：它是由生成元与关系定义的普适 C^*-代数。在 [18], 第8节开篇，自相似作用的 Cuntz–Pimsner代数被定义为 Toeplitz 代数对由附加的 Cuntz–Krieger 型关系所确定的理想取商。我们沿用 [18]，通过生成元与关系来定义自相似作用的 C^*-代数。

若 G 是离散群胚，则 G 的酉表示是一个从 G 到 C^*-代数的函数 $g \mapsto u_g$，满足 $u_g u_h = \delta_{d(g),c(h)} u_{gh}$，并且对于所有 g、$h \in G$均有 $u_{g^{-1}} = u_g^*$。这等价于 [18, 第 4]节开头给出的定义。

如果 E 是一个没有源点的有限有向图，且 (G, E) 是一个自相似群胚作用，那么，在 C^*-代数 A 中，(G, E) 的协变表示是一个三元组 (u, p, s)，由酉表示 $u\colon\ g \mapsto u_g$ of G in A 和一个 Cuntz–Krieger$E$-族 $(p, s) \in A$ 构成，并满足对所有 $v \in E^0$ 都有 $p_v = u_v$，且满足

$$u_g s_e = s_{g \cdot e} u_{g|_e} \quad \text{for all } g \in G \text{ and } e \in d(g)E^1.$$

由 $p_v = u_v$，我们有 $p_v u_g = \delta_{v,c(g)} u_g$ 和 $u_g p_v = \delta_{d(g),v} u_g$。如果 $d(g) \neq r(e)$，那么 $u_g s_e = u_g p_{d(g)} p_{r(e)} s_e = 0$。因此，我们刚刚给出的关系等价于 [18, 命题 4.4] 中的关系，再加上确定理想 I 的生成元的附加关系；该理想在 [18, 方程 (8.1)] 中有描述。根据命题 4.4 以及 [18] 中 $\mathcal{O}(G, E)$ 的定义，C^*-代数 $\mathcal{O}(G, E)$ 是由 (G, E) 的协变表示生成的泛 C^*-代数。

我们的第一步是为 $\mathcal{O}(G, E)$ 描述一个群胚模型。我们的构造基于 [7] 的构造。

引理 6.1. 设 E 是一个有限图，且 (G, E) 是一个自相似群胚作用。集合

$$S_{G,E} := \{0\} \cup \{(\mu, g, \nu) \in E^* \times G \times E^* \mid s(\mu) = c(g) \text{ and } s(\nu) = d(g)\}$$

在如下定义的乘法下构成一个逆半群

$$(\alpha,g,\beta)(\mu,h,\nu)=\begin{cases}(\alpha(g\cdot\mu'),g|_{\mu'}h,\nu) & if\ \mu=\beta\mu'\\ (\alpha,gh|_{h^{-1}\cdot\beta'},\nu(h^{-1}\cdot\beta')) & if\ \beta=\mu\beta'\\ 0 & otherwise.\end{cases}$$

存在一个$S_{G,\ E}$在 E^∞ 上的作用，使得 $\mathrm{Dom}(\mu,g,\nu)=Z[\nu)$，并且

$$(\mu,g,\nu)\cdot\nu x=\mu g\cdot x\quad for\ all\ x\in Z[s(\nu)).$$

证明。验证该乘法满足结合律是常规但繁琐的。对于每个 $a:=(\mu,g,\nu)$，元素 $a^*:=(\nu,g^{-1},\mu)$满足 $aa^*a=a$和 $a^*aa^*=a^*$。直接计算可知，公式$(\mu,g,\nu)\cdot\nu x=\mu g\cdot x$定义了一个从 $Z[\nu)$到 $Z[\mu)$的同胚。与验证结合律时类似的常规计算表明，只要两边都有定义，就有 $a\cdot(b\cdot x)=(ab)\cdot x$。□

给定逆半群 S 在局部紧豪斯多夫空间X上的任意作用，我们可以如下构造相应的芽群胚 $S\ltimes X$ （见 [24, 第4节3]）：我们在 $\{(s,x)\mid s\in S,x\in\mathrm{Dom}(s)\}$ 上定义一个等价关系：若$x=y=$，则$(s,x)\sim(t,y)$，其中 z ，且存在幂等元 $e\in S$ 使得 $z\in\mathrm{Dom}(e)$，并且 $se=te$。其拓扑的基本开集为 $W(s,V):=\{[s,x]\mid x\in V\}$，由元素 $s\in S$ 和开集 $V\subseteq\mathrm{Dom}(s)$组成的配对$(s,V)$为指标。该群胚的单位空间为 X，群胚运算定义如下：

$$s([t,x])=x,\quad r([t,x])=t\cdot x,\quad [t,u\cdot x][u,x]=[tu,x],\quad \text{and}\quad [t,x]^{-1}=[t^*,t\cdot x].$$

尽管这个群胚未必是豪斯多夫的，但它总是 ´etale，且其单位空间 X是豪斯多夫的，因此它局部豪斯多夫，并具有由开双截面构成的基。这个群胚的 C^*-代数是 *-代数在泛范数下的完备化

$$\mathcal{C}(S\ltimes X)=\mathrm{span}\{C_c(U)\mid U\text{ is an open bisection}\}$$

。关于这一构造的精彩介绍可见 [6]。

定义 6.2. 设 E 是一个有限有向图，且 (G,E) 是一个自相似群胚作用。(G,E) 的群胚记作 $S_{G,\ E}\ltimes E^\infty$ 定义为上述 $S_{G,\ E}$ 在 E^∞ 上的作用所对应的芽群胚。

为了在后文建立我们的对偶定理，我们将描述群胚 $S_{G,\ E}\ltimes E^\infty$ 与第 5 节构造的 Smale 空间的稳定群胚之间的群胚等价。为此，首先将 $S_{G,\ E}\ltimes E^\infty$ 描述为一种滞后群胚会很有帮助。关于自相似群作用的相关描述见 [7, 第 8], 节，不过其中滞后的取值在“序列群” $\prod_{i=1}^\infty G/\bigoplus_{i=1}^\infty G$中。我们还将给出另一种描述，这种描述尤其适用于我们稍后关于 KK-对偶的应用。我们还将精确刻画这个群胚何时是豪斯多夫的，具体来说，就是精确刻画哪些元素对（若存在）无法由互不相交的开邻域分离。

我们的群胚基于 E^∞ 上的左移映射 $x_1x_2x_3\cdots\mapsto x_2x_3\ldots$。在图代数文献中，通常用 σ表示这个移位映射，但我们已经用该符号表示 $E^{-\infty}$上的右移。我们将改用 ς 表示左移映射。

引理 6.3. 设 E 是一个有限有向图，且 (G,E) 是一个自相似群胚作用。在 $\sim$ 上存在一个等价关系

$$\{(x,m,g,n,y)\in E^\infty\times\mathbb{N}\times G\times\mathbb{N}\times E^\infty\mid d(g)=r(\varsigma^n(y))\ and\ \varsigma^m(x)=g\cdot\varsigma^n(y)\}$$

使得 $(x,m,g,n,y) \sim (w,p,h,q,z)$ 当且仅当

- $x=w$、 $y=z$ 和 $m-n=p-q$，以及
- 存在 $l \geq \max\{n,q\}$ 使得 $g|_{y(n,l)} = h|_{z(q,l)}$。

W我们用 $[x,m,g,n,y]$ 表示 (x,m,g,n,y) 在 $\sim$ 下的等价类。这个 s et

$$\mathcal{G}_{G,E} := \{[x,m,g,n,y] \mid d(g) = r(\varsigma^n(y)) \text{ and } \varsigma^m(x) = g \cdot \varsigma^n(y)\}$$

是一个代数组胚，其单位空间为 $\{[x,0,r(x),0,x] \mid x \in E^\infty\}$，与 E^∞ 相认同；值域映射和源映射分别为 $r([x,m,g,n,y]) = x$ 和 $s([x,m,g,n,y]) = y$，运算为

$$[x,m,g,n,y][y,p,h,q,z] = [x,m+p,g|_{y(n,n+p)}h|_{z(q,q+n)},n+q,z], \quad \text{and}$$
$$[x,m,g,n,y]^{-1} = [y,n,g^{-1},m,x].$$

存在一个从图群胚 $\mathcal{G}_E$ 到 $\mathcal{G}_{G,E}$ 的单射同态 ι，定义为$\iota(x,m-n,y) = [x,m,s(x_m)$ m， $y]$只要 $x,y \in E^\infty$ 满足 $\varsigma^m(x) = \varsigma^n(y)$。

证明。关系 $\sim$ 的自反性和对称性显然。为证明传递性，设 $(x,m,g,n,y) \sim (x',m',g',$ $n',y')$，且 $(x',m',g',n',y') \sim (x'',m'',g'',n'',y'')$。那么$x = x' = x''$, $y = y' = y''$ 和 $m-n = m'-n' = m''-n''$。选取 $l \geq n, n'$ 和$l' \geq n', n''$，使得 $g|_{y(n,l)} = g'|_{y(n',l)}$ 且 $g'|_{y(n',l')} = g''|_{y(n'',l')}$，并令 $L = \max\{l,l'\}$。于是 $L \geq n, n''$，且我们有

$$\begin{aligned} g|_{y(n,L)} &= \big(g|_{y(n,l)}\big)|_{y(l,L)} = \big(g'|_{y(n',l)}\big)_{y(l,L)} = g'|_{y(n',L)} \\ &= \big(g'|_{y(n',l')}\big)|_{y(l',L)} = \big(g''|_{y(n'',l')}\big)|_{y(l',L)} = g''|_{y(n'',L)}. \end{aligned}$$

为证明 $\mathcal{G}_{G,\ E}$是一个群胚，我们首先检查：若 $[x,m,g,n,y]$ 和 $[y,p,h,q,z]$属于 $\mathcal{G}_{G,}$ $_E$，那么 $[x,m+p,g|_{y(n,n+p)}h|_{z(q,q+n)},n+q,z]$也属于其中。为此，只需检查：

$$\begin{aligned} (g|_{y(n,n+p)})(h|_{z(q,q+n)}) \cdot \varsigma^{q+n}(z) &= (g|_{y(n,n+p)}) \cdot \varsigma^n(h \cdot \varsigma^q(z)) \\ &= (g|_{y(n,n+p)}) \cdot \varsigma^{n+p}(y) = \varsigma^p(g \cdot \varsigma^n(y)) = \varsigma^{m+p}(x). \end{aligned}$$

根据定义，值域映射和源映射是良定义的。我们必须检查乘法是良定义的。首先，假设 $[x,m,g,n,y] = [x',m',g',n',y']$；于是 $x = x'$、$y = y'$ 和 $m-n = m'-n'$成立，并且存在 $l \geq n$、 n' 使得 $g|_{y(n,l)} = g'|_{y(n',l)}$。固定$[y,p,h,q,z] \in \mathcal{G}_{G,\ E}$。我们必须证明

$$[x,m+p,g|_{y(n,n+p)}h|_{z(q,q+n)},n+q,z] = [x,m'+p,g'|_{y(n',n'+p)}h|_{z(q,q+n')},n'+q,z].$$

我们有 $m+p-(m'+p) = n+q-(n'+q)$。我们将证明

$$\big(g|_{y(n,n+p)}h|_{z(q,q+n)}\big)|_{z(q+n,q+l)} = \big(g'|_{y(n',n'+p)}h|_{z(q,q+n')}\big)|_{z(q+n',q+l)}.$$

我们有

$$\big(g|_{y(n,n+p)}h|_{z(q,q+n)}\big)|_{z(q+n,q+l)} = \big((g|_{y(n,n+p)})|_{h|_{z(q,q+n)} \cdot z(q+n,q+l)}\big)h|_{z(q,q+l)},$$

类似地

$$\big(g'|_{y(n',n'+p)}h|_{z(q,q+n')}\big)|_{z(q+n',q+l)} = \big((g'|_{y(n',n'+p)})|_{h|_{z(q,q+n')} \cdot z(q+n',q+l)}\big)h|_{z(q,q+l)}.$$

因此，我们需要验证 $(g|_{y(n,n+p)})|_{h|_{z(q,q+n)} \cdot z(q+n,\ q+l)} = (g'|_{y(n',n'+p)})|_{h|_{z(q,q+n')} \cdot z(q+n',\ q+l)}$。为此，我们注意到 $h|_{z(q,q+n)} \cdot z(q+n,q+l) = (h \cdot \varsigma^q(z))(n,l)$，这等于$\varsigma^p(y)(n,l)$，因为$[y,p,h,q,z] \in \mathcal{G}_{G,}$ $_E$。因此

$$\begin{aligned} (g|_{y(n,n+p)})|_{h|_{z(q,q+n)} \cdot z(q+n,q+l)} &= (g|_{y(n,n+p)})|_{y(n+p,l+p)} = (g|_{y(n,l)})|_{y(l,l+p)} = (g'|_{y(n',l)})|_{y(l,l+p)} \\ &= (g'|_{y(n',n'+p)})|_{y(n'+p,l+p)} = (g'|_{y(n',n'+p)})|_{h|_{z(q,q+n')} \cdot z(q+n',q+l)} \end{aligned}$$

如所需。类似的计算表明，若 $[y,p,h,q,z]=[y',p',h',q',z']$ 且$[x,m,p,n,y]\in\mathcal{G}_{G,\ E}$，则

$$[x,m+p,g|_{y(n,n+p)}h|_{z(q,q+n)},n+q,z]=[x,m+p',g|_{y(n,n+p')}h'|_{z(q',q'+n)},n+q',z],$$

因此，$\mathcal{G}_{G,\ E}$中的乘法定义良好。显然，对于所有$[x,m,g,n,y]\in\mathcal{G}_{G,\ E}$，都有 $[x,0,r(x)\ 0,x][x,m,g,n,y]=[x,m,g,n,y]=[x,m,g,n,y][y,0,r(y)\ 0,y]$，因此$\mathcal{G}_{G,\ E}$有单位元。

我们有

$$[x,m,g,n,y][y,n,g^{-1},m,x]=[x,m+n,g|_{y(n,2n)}g^{-1}|_{x(m,m+n)},m+n,x].$$

我们计算:

$$g^{-1}|_{x(m,m+n)}=g^{-1}|_{\varsigma^m(x)(0,n)}=g^{-1}|_{g\cdot(\varsigma^n(y)(0,n))}=\big(g|_{\varsigma^n(y)(0,n)}\big)^{-1}.$$

因此，$[x,m+n,g|_{y(n,2n)}g^{-1}|_{x(m,m+n)},m+n,x]=[x,m+n,r(x)\ m+n,x]$。现在我们有，对于所有 x,p,q，$(x,p,r(x)\ p,x)\sim(x,q,r(x)\ q,x)$，由此可得 $[y,n,g^{-1},m,x]$ 是 $[x,m,g,n,y]$ 的逆映射。上述乘法的结合律可通过类似于前述的直接计算得到，因此我们得出 $\mathcal{G}_{G,E}$ 是一个群胚。根据 $\sim$的定义，我们看到，$[x,m,r(x)\ n,y]\sim[x',m',r(x')\ n',y']$ 当且仅当 $x=x',y=y'$ 且 $m-n=m'-n'$，由此可知 $\iota(x,m-n,y)=[x,m,e,n,y]$ 定义了一个群胚同态 $\mathcal{G}_E\to\mathcal{G}_{G,E}$，根据 $\sim$的定义，该同态是单射。□

现在我们描述一个从 $S_{G,E}\ltimes E^\infty$ 到引理 6.3 中的群胚 $\mathcal{G}_{G,E}$ 的代数同构，并利用它在$\mathcal{G}_{G,E}$上定义一个 ′仿射拓扑。

引理 6.4. 设 E 是一个有限有向图，且 (G,E) 是一个自相似群胚作用。设 $\mathcal{G}_{G,E}$ 是引理 6.3 中的群胚，设 $S_{G,E}\ltimes E^\infty$ 是定义 6.2 中描述的芽群胚。存在一个代数同构 ψ: $S_{G,E}\ltimes E^\infty\to\mathcal{G}_{G,E}$，使得对于 $S_{G,E}$ 中的所有 (μ,g,ν) 以及 $x\in Z[s(\nu)$，都有 $\psi([(\mu,g,\nu)\ \nu x])=[\mu(g\cdot x)\ |\mu|,g,|\nu|,\nu x]$。这些集合

$$Z(\mu,g,\nu):=\{[\mu(g\cdot y),|\mu|,g,|\nu|,\nu y]\mid y\in Z[s(\nu))\}$$

由满足 $s(\mu)=g\cdot s(\nu)$ 的三元组 $(\mu,g,\nu)\in E^*\times G\times E^*$ 索引，构成 $\mathcal{G}_{G,E}$ 上的一个局部豪斯多夫拓扑的紧致开集基，在该拓扑下，值映射和源映射是同胚。赋予此拓扑后，$\mathcal{G}_{G,E}$ 是一个 ′仿射群胚。

证明。定义

$$\psi^0:\{\big((\mu,g,\nu),\nu x\big)\mid(\mu,g,\nu)\in S_{E,G},x\in s(\nu)E^\infty\}\to\mathcal{G}_{G,E}$$

为 $\psi^0\big(((\mu,g,\nu)\ \nu x)\big)=[\mu g\cdot x,|\mu|,g,|\nu|,\nu x]$。我们断言

$$[(\mu,g,\nu),\nu x]=[(\alpha,h,\beta),\beta y]\quad\Longleftrightarrow\quad\psi^0\big((\mu,g,\nu),\nu x\big)=\psi^0\big((\alpha,h,\beta),\beta y\big).\tag{6.1}$$

为此，首先假设 $[(\mu,g,\nu)\ \nu x]=[(\alpha,h,\beta)\ \beta y]$。那么 $\nu x=\beta y$，并且存在 $S_{G,E}$ 的一个幂等元 (λ,e,λ)，使得 $x\in Z[\lambda)$ 且 $(\mu,g,\nu)(\lambda,e,\lambda)=(\alpha,h,\beta)(\lambda,e,\lambda)$。不失一般性，我们可以假设 $\lambda=x(0,n)$，其中 $n\geq|\nu|,|\beta|$。因此$\lambda=\nu\nu'=\beta\beta'$。由于 $(\lambda,e,\lambda)=(\lambda,e,\lambda)(\lambda,e,\lambda)=(\lambda,e^2,\lambda)$，我们有 $e^2=e$，因此$e=s(\lambda)$。于是

$$(\mu g\cdot\nu',g|_{\nu'},\nu\nu')=(\mu,g,\nu)(\lambda,e,\lambda)=(\alpha,h,\beta)(\lambda,e,\lambda)=(\alpha h\cdot\beta',h|_{\beta'},\beta\beta').$$

特别地，$g|_{(\nu x)(|\nu|,|\lambda|)} = g|_{\nu'} = h|_{\beta'} = h|_{(\alpha y)(|\alpha|,|\lambda|)}$。此外，$\mu(g\cdot x) = \mu(g\cdot\nu')g|_{\nu'}\cdot\varsigma^{|\nu'|}(x) = \alpha(h\cdot\beta')h|_{\beta'}\cdot\varsigma^{|\beta'|}(y) = \alpha(h\cdot y)$。因此

$$\begin{aligned}\psi^0\big((\mu,g,\nu),\nu x\big) &= [\mu(g\cdot x),|\mu|,g,|\nu|,\nu x]\\ &= [\mu(g\cdot x),|\mu|+|\nu'|,g|_{(\nu x)(|\nu|,|\nu|+|\nu'|)},|\nu|+|\nu'|,\nu x]\\ &= [\alpha(h\cdot y),|\alpha|+|\beta'|,h|_{(\beta y)(|\beta|,|\beta|+|\beta'|)},|\beta|+|\beta'|,\beta y]\\ &= \psi^0\big((\alpha,h,\beta),\beta y\big).\end{aligned}$$

反过来，假设 $\psi^0\big((\mu,g,\nu)\ \nu x\big) = \psi^0\big((\alpha,h,\beta)\ \beta y\big)$。那么 $|\mu|-|\nu| = |\alpha|-|\beta|$，$\nu x = \beta y$，$\mu g\cdot x = \alpha h\cdot y$，并且存在 $l\geq|\nu|,|\beta|$ 使得 $g|_{x(0,l-|\nu|)} = h|_{y(0,l-|\beta|)}$。令 $e = s(y_{l-|\beta|}) = s(x_{l-|\nu|})$。于是

$$\begin{aligned}&(\alpha,h,\beta)(\beta y(0,l-|\beta|),e,\beta y(0,l-|\beta|))\\ &\quad= (\alpha h\cdot y(0,l-|\beta|),h|_{y(0,l-|\beta|)},(\beta y)(0,l))\\ &\quad= (\mu g\cdot x(0,l-|\nu|),g|_{x(0,l-|\nu|)},(\nu x)(0,l))\\ &\quad= (\mu,g,\nu)(\nu x(0,l-|\nu|),e,\nu x(0,l-|\nu|)).\end{aligned}$$

由于 $\nu x(0,l-|\nu|) = (\nu x)(0,l) = (\beta y)(0,l) = \beta y(0,l-|\beta|)$，我们得到

$$(\alpha,h,\beta)(\beta y(0,l-|\beta|),e,\beta y(0,l-|\beta|)) = (\mu,g,\nu)(\beta y(0,l-|\beta|),e,\beta y(0,l-|\beta|)).$$

因此 $[(\mu,g,\nu)\ \nu x] = [(\alpha,h,\beta)\ \beta y]$。这就完成了 (6.1) 的证明。

由此可知，ψ^0 可导出一个单射 $\psi : S_{G,E}\ltimes E^\infty\to\mathcal{G}_{G,E}$。为证明$\psi$是满射，取定 $[x,m,g,n,y]\in\mathcal{G}_{G,E}$，令 $z := \varsigma^n(y)$，$\nu = y(0,n)$ 且 $\mu = x(0,m)$，并注意到 $[x,m,g,n,y] = [\mu g\cdot z,|\mu|,g,|\nu|,\nu z] = \psi([(\mu,g,\nu)\ \nu z])$。容易验证，$\psi$ 是乘法保持的，因此是如所述的群胚代数同构。

对于满足 $s(\mu) = g\cdot s(\nu)$ 的 (μ,g,ν)，以及 E^∞ 中的一个开集 $U\subseteq Z[\nu)$，令

$$Z(\mu,g,\nu,U) := \{[\mu g\cdot x,|\mu|,g,|\nu|,\nu x] \mid \nu x\in U\}.$$

[6] 的命题4.14结合上面的代数同构 ψ 表明，集合 $Z(\mu,g,\nu,U)$构成了$\mathcal{G}_{G,\ E}$上的一个拓扑的基，在该拓扑下它成为一个拓扑群胚。若 $[\mu g\cdot x,|\mu|,g,|\nu|,\nu x]$ 属于 $Z(\mu,g,\nu,U)$，那么根据 E^∞ 上的拓扑定义，存在 $n\in\mathbb{N}$，使得 $\nu' := x(0,n)$是一条路径，且$\nu x\in Z[\nu\nu')\subseteq U$。于是，我们有

$$[\mu g\cdot x,|\mu|,g,|\nu|,\nu x]\in Z(\mu g\cdot\nu',g|_{\nu'},\nu\nu') = Z(\mu,g,\nu,Z(\nu'))\subseteq Z(\mu,g,\nu,U).$$

因此，$Z(\mu,g,\nu)$构成了与 $Z(\mu,g,\nu,U)$相同拓扑的一个基。现在，[6] 的命题4.15表明，值域映射和源映射分别限制为同胚$r:\ Z(\mu,g,\nu)\to Z[\mu)$和 $s:\ Z(\mu,g,\nu)\to Z[\nu)$。由于 $Z[\nu)$是紧致且豪斯多夫的，我们推得 $Z(\mu,g,\nu)$也是紧致且豪斯多夫的。因此，$\mathcal{G}_{G,\ E}$ 是局部豪斯多夫的，并且如所声称的是仿紧的。□

现在我们证明，刚构造的群胚 $\mathcal{G}_{G,E}$ 的 C^*-代数与自相似作用 (G,E) 的 C^*-代数一致。

注意，对于每个 $\mu\in E^*$ 和 $g\in G$，若 $c(g) = s(\mu)$，则有 $(\mu,g,d(g))\in S_{G,E}$，且 $\mathrm{Dom}((\mu,g,d(g))) = Z[d(g))$. 因此，对每个 $\lambda\in d(g)E^*$，$W((\mu,g,d(g))\ Z[\lambda))$ 是 $S_{G,E}\ltimes E^\infty$ 的一个紧致开子集。

命题 6.5. 设 E 是一个无源点的有限有向图，且 (G,E) 是一个自相似群胚作用。设 $\mathcal{G}_{G,\ E}$ 是引理 6.3 和 6.4 中描述的群胚。

存在一个同构 $\pi\colon \mathcal{O}(G,E) \to C^*(\mathcal{G}_{G,\ E})$，使得 $\pi(u_g) = 1_{Z(c(g),g,d(g))}$ 且 $\pi(s_e) = 1_{Z(e,s(e),s(e))}$，对所有 $g \in G$ 和 $e \in E^1$ 均成立。

证明。由引理 6.4，只需构造一个同构 $\pi\colon \mathcal{O}(G,E) \to C^*(S_{G,E} \ltimes E^\infty)$，使得每个 $\pi(u_g) = 1_{W((c(g),g,d(g)),Z[d(g)))}$，且每个 $\pi(s_e) = 1_{W((e,s(e)\ s(e))\ Z[s(e)))}$。对于 $g \in G$、$e \in E^1$ 和 $v \in E^0$，定义

$$U_g := 1_{W((c(g),g,d(g)),Z[d(g)))}, \quad S_e := 1_{W((e,s(e),s(e)),Z[s(e)))}, \quad \text{and} \quad P_v := 1_{W((v,v,v),Z[v))}.$$

利用 $S_{G,E}$ 中乘法定义的初等计算表明，(U,P,S) 是 $(G,E) \in C^*(S_{G,E} \ltimes E^\infty)$ 的协变表示。因此，存在一个同态 $\pi\colon \mathcal{O}(G,E) \to C^*(S_{G,E} \ltimes E^\infty)$，满足给定的公式。对于每个 $\lambda \in E^*$，将 $\lambda = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$ 写成边的拼接，然后定义$S_\lambda := S_{\lambda_1}\ldots S_{\lambda_n}$。于是

$$1_{Z[\lambda)} = S_\lambda S_\lambda^* \in \pi(\mathcal{O}(G,E)).$$

由于 $Z[\lambda)$ 构成了 E^∞ 上拓扑的一个基，因此 $C_0(E^\infty) \subseteq \pi(\mathcal{O}(G,E))$。若 V是 $S_{G,E} \ltimes E^\infty$ 中的一个紧开双截，则可将其写成有限个形如 $W((\mu,g,\nu)\ Z[\nu\alpha))$ 的两两不交双截之并。我们有

$$1_{W((\mu,g,\nu),Z[\nu\alpha))} = 1_{W((\mu g\cdot\alpha,g|_\alpha,\nu\alpha),Z[s(\alpha)))} = S_{\mu g\cdot\alpha}U_{g|_\alpha}S_{\nu\alpha}^* \in \pi(\mathcal{O}(G,E)),$$

由此可得，每个紧开双截的示性函数都属于 π 的值域。对于每个紧开双截 V，此类示性函数的线性张成在 $C_c(V)$ 中稠密。因此，π 是满射。

剩下要证明 π 是单射。为此，只需为 π 构造一个右逆映射 $\rho\colon C^*(S_{G,E}\ltimes E^\infty) \to \mathcal{O}(G,E)$。注意，由于 $S_{G,E}\ltimes E^\infty$ 是逆半群 $S_{G,E}$ 在 E^∞, [6, 上的作用 θ 的芽群胚，定理 8.5] 表明，$C^*(S_{G,E} \ltimes E^\infty)$ 对 $\theta, S_{G,E}, E^\infty$ 的表示具有泛性质，定义见 [6, 定义 8.1]。由于 s_e 和 p_v 在 $\mathcal{O}(G,E)$ 中构成一个 Cuntz–Krieger E-族，存在一个同态 $\rho_0\colon C_0(E^\infty) \to \mathcal{O}(G,E)$，使得对每个$\lambda$都有 $\rho_0(1_{Z[\lambda)}) = s_\lambda s_\lambda^*$。对于每个 $(\mu,g,\nu) \in S_{G,E}$，定义 $S_{(\mu,g,\nu)} := s_\mu u_g s_\nu^*$。若 $\lambda = \nu\lambda'$，则$\mathcal{O}(G,E)$ 中的关系给出

$$S_{(\mu,g,\nu)}\rho_0(1_{Z[\lambda)})S_{(\mu,g,\nu)}^* = s_\mu u_g s_\nu^* s_\lambda s_\lambda^* s_\nu u_{g^{-1}} s_\mu^* = s_{\mu g\cdot\lambda'}s_{\mu g\cdot\lambda'}^*,$$

然后，根据线性和连续性可知，只要 f 的支撑位于 $\mathrm{Dom}(\theta_{(\mu,g,\nu)})$ 上，就有 $S_{(\mu,g,\nu)}\rho_0(f)S_{(\mu,g,\nu)}^* = \rho_0(f\circ\theta_{(\mu,g,\nu)^*})$。通过常规计算可得，对于所有 $a,b \in S_{G,E}$，$S_aS_b = S_{ab}$ 和 $S_{a^*} = S_a^*$。因此，(ρ_0, S) 是 $(\theta, S_{G,E}, E^\infty)$ 的一个表示，由此可知存在同态 $\rho\colon C^*(S_{G,E} \ltimes E^\infty) \to \mathcal{O}(G,E)$，使得对于所有 $f \in C_0(E^\infty)$，有 $\rho(f) = \rho_0(f)$；并且对于所有 $(\mu,g,\nu) \in S_{G,E}$，有 $\rho(1_{W((\mu,g,\nu),Z[\nu))}) = s_\mu u_g s_\nu^*$。特别地，$\rho\circ\pi$ 固定了 $\mathcal{O}(G,E)$ 的生成元，因此 $\rho\circ\pi = \mathrm{id}_{\mathcal{O}(G,E)}$，这正是所需。□

本节最后，我们精确刻画 $\mathcal{G}_{G,E}$ 何时是豪斯多夫的。

命题 6.6. 设 E 是一个有限有向图，且 (G,E) 是一个自相似群胚作用。设 $\mathcal{G}_{G,E}$ 为引理 6.3 和 6.4 中的群胚。点 $[x,m,g,n,y]$和 $[w,p,h,q,z] \in \mathcal{G}_{G,E}$ 互不相同，但无法由不相交的开集分离，当且仅当以下两条均成立

(1) 对所有 $l \geq n,q$，$x = w$, $y = z$, $m - n = p - q$ 和 $g|_{y(n,l)} \neq h|_{y(q,l)}$；以及 (2) 对每个 $l \geq n,q$，都存在 $\lambda \in s(y_l)E^*$，使得 $g|_{y(n,l)}\cdot\lambda = h|_{y(q,l)}\cdot\lambda$ 和$g|_{y(n,l)\lambda} = h|_{y(q,l)\lambda}$。

证明。首先，假设 $[x,m,g,n,y]$ 和 $[w,p,h,q,z]$ 是不同的，但无法用开邻域将它们分离。

值域映射 r、源映射 s 和余循环映射 $c : \mathcal{G}_{(G,E)} \mapsto \mathbb{Z}$（定义为 $c([x,m,g,n,y]) = m-n$）都是到豪斯多夫空间上的连续映射，因此，由于 $[x,m,g,n,y]$ 和 $[w,p,h,q,z]$ 无法用开邻域分离，它们在 r、s 和 c 下的像重合。因此，$x=w$、$y=z$ 和 $m-n=p-q$。由于 $[x,m,g,n,y] \neq [w,p,h,q,z]$，引理 6.3 中等价关系的定义迫使 $g|_{y(n,l)} \neq h|_{y(q,l)}$ 对所有 $l \geq \max(n,q)$ 都成立。因此，(1) 得以满足。

对于 (2)，令 $\xi = y(n,l)$，且 $\tau = y(q,l)$。于是 $[x,m,g,n,y] \in Z(x(0,m)g\cdot\xi, g|_\xi, y(0,n)\xi)$，并且 $[x,p,h,q,y]$ 属于 $Z(x(0,p)h\cdot\tau, h|_\tau, y(0,q)\tau)$。令 $\gamma := y(0,n)\xi = y(0,q)\tau$，且 $\omega := x(0,m)g\cdot\xi = x(0,p)h\cdot\tau$。根据假设，$Z(\omega, g|_\xi, \gamma) \cap Z(\omega, h|_\tau, \gamma) \neq \emptyset$，因此存在 $u \in s(\gamma)E^\infty$ 和 $v \in s(\omega)E^\infty$，使得 $g|_\xi \cdot u = h|_\tau \cdot u = v$ 且 $[\omega v, |\omega|, g|_\xi, |\gamma|, \gamma u] = [\omega v, |\omega|, h|_\tau, |\gamma|, \gamma u]$。因此，存在 k 属于 $\mathbb{N}$，使得 $(g|_\xi)|_{u(0,k)} = (h|_\tau)|_{u(0,k)}$。于是 $\lambda := u(0,k) \in s(y_l)E^*$ 满足 (2)。

现在假设 (1) 和 (2) 成立。(1) 的最后一部分及 $\sim$ 的定义蕴含 $[x,m,g,n,y] \neq [w,p,h,q,z]$。固定邻域 $U \ni [x,m,g,n,y]$ 和 $V \ni [w,p,h,q,z]$。我们必须证明 $U \cap V \neq \varnothing$。根据拓扑的定义，存在 $l \geq n$、q，使得 $Z(x(0,m-n+l)\ g|_{y(n,l)}, y(0,l)) \subseteq U$ 且 $Z(x(0,p-q+l)\ h|_{y(q,l)}, y(0,l)) \subseteq V$。按照条件 (2)，针对这个 l 固定 λ。于是

$$\begin{aligned} U &\ni \left[x(0,m-n+l)g|_{y(n,l)}\cdot(\lambda z), m-n+l+|\lambda|, g|_{y(n,l)\lambda}, l+|\lambda|, y(0,l)\lambda z\right] \\ &= \left[x(0,p-q+l)h|_{y(q,l)}\cdot(\lambda z), p-q+l+|\lambda|, h|_{y(q,l)\lambda)}, l+|\lambda|, y(0,l)\lambda z\right] \in V \end{aligned}$$

对所有 $z \in Z[s(\lambda))$，所以 $U \cap V \neq \emptyset$。 □

对于以下推论，我们采用改编自 [7, 定义 5.2] 的术语：如果 (G,E) 是有限图 E 上的自相似群胚作用，则称路径 $\lambda \in E^*$ 被元素 $g \in Gr(\lambda)$ 强固定，当且仅当 $g\cdot\lambda = \lambda$ 且 $g|_\lambda = s(\lambda)$。

推论 6.7. 设 E 为有限有向图，且 (G,E) 为自相似群胚作用。则以下各条件等价。

(1) 群胚 $\mathcal{G}_{G,E}$ 是豪斯多夫的。(2) 子群胚 $\mathcal{G}^{\mathbb{T}}_{G,E} := \{[x,m,g,n,y] \in \mathcal{G}_{G,E} \mid m=n\}$ 是豪斯多夫的。(3) 子群胚 $\{[g\cdot x, 0, g, 0, x] \mid x \in E^\infty$ 和 $d(g) = r(x)\}$ 是豪斯多夫的。(4) 若 $g \in G$ 和 $y \in E^\infty$ 满足：对于所有 n，均有 $g\cdot y = y$ 和 $g|_{y(0,n)} \neq s(y_n)$，则存在 $\lambda \in E^*$ 使得 $y \in Z[\lambda)$，且 λE^* 中没有元素被 g 强固定。

特别地，若 (G,E) 是正则的，则 $\mathcal{G}_{G,E}$ 是豪斯多夫的。

证明。由于 $\mathcal{G}^{\mathbb{T}}_{G,E} \subseteq \mathcal{G}_{G,E}$ 和 $\mathcal{G}^{\mathbb{T}}_{G,E}$ 包含式 (3) 的子群胚，因此有 (1) $\Longrightarrow$(2) $\Longrightarrow$(3)。

对于 (3) $\Longrightarrow$ (4)，我们证明其逆否命题。设 (4) 关于 $g \in G$ 和 $y \in Z[d(g))$ 不成立。也就是说，对所有 n，$g\cdot y = y$ 且 $g|_{y(0,n)} \neq s(y_n)$，但对于每个满足 $y \in Z[\lambda)$ 的 λ，都存在 $\mu \in s(\lambda)E^*$，使得 $\lambda\mu$ 被 g强固定。等价地，对于每个 $l \geq 0$，都存在 $\mu \in s(y_l)E^*$，使得 $g\cdot(y(0,l)\mu) = y(0,l)\mu$ 且 $g|_{y(0,l)\mu} = s(\mu)$。因此，命题 6.6 意味着 $[y,0,g,0,y]$ 和 $[y,0,d(g),0,y]$ 彼此不同，却不能被开集分离。因此，开子群胚 $\{[g\cdot x, 0, g, 0, x] \mid x \in E^\infty$ 和 $d(g) = r(x)\}$ 不是豪斯多夫的。

对于 (4) $\Longrightarrow$ (1)，假设 (4) 成立。固定 $[x,m,g,n,y]$ 和 $[w,p,h,q,z] \in \mathcal{G}_{G,E}$。只需证明，对于这些点，命题 6.6 的条件不可能同时成立。为此，我们假设命题 6.6(1) 成立，并证明命题 6.6(2) 不成立。令 $l := \max(n,q)$，令 $k := (g|_{y(n,l)})^{-1}h|_{y(q,l)}$，并设 $y' = \varsigma^l(y)$。由于 $x=w$，我们有 $(g|_{y(n,l)})\cdot y' = h|_{y(q,l)}\cdot y'$，因此 $k\cdot y' = y'$。此外，对所有 a，$k|_{y'(0,a)} = \left((g|_{y(n,l)})^{-1}h|_{y(q,l)}\right)|_{y'(0,a)} = \left((g|_{y(n,l+a)})^{-1}h|_{y(q,l+a)}\right) \neq s(y_{(l+a)})$。因此 (4)

意味着当 $a \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda \in s(y'_a)E^*$ 足够大时，$k|_{y'(0,\ a)} \cdot \lambda \neq \lambda$ 或 $k|_{y'(0,\ a)\lambda} \neq s(\lambda)$。也就是说，当 a 足够大时，对每个 $\lambda \in s(y_a)E^*$，要么 $g|_{y(n,l+a)} \cdot \lambda \neq h|_{y(q,l+a)} \cdot \lambda$，要么$g|_{y(n,l+a)\lambda} \neq h|_{y(q,l+a)\lambda}$。因此，命题 6.6 的条件 (2) 对 $[x, m, g, n, y]$ 和$[w, p, h, q, z]$ 不成立，证毕。

对于最终的陈述，我们证明，若（G， E）是正则的，则（4）成立。设 $g \in G$ 和 $y \in E^\infty$ 满足 $g \cdot y = y$。正则性给出 $n \in \mathbb{N}$，使得 g逐点固定 $Z[y(0, n))$。因此，$g|_{y(0,n)}$ 逐点固定 $Z[y(n))$。由于自相似群胚作用按定义是忠实的，这意味着 $g|_{y(0,n)} = y(n) \in G^{(0)}$。所以，（4）的假设从未满足，因而（4）真空成立。□

我们可以用 $\mathcal{G}_{G,E}$刻画（G， E）的正则性。回忆一下，群胚$\mathcal{G}$ 是主的，当且仅当其各向同性丛 $\mathrm{Iso}(\mathcal{G}) = \{g \in \mathcal{G} : r(g) = s(g)\}$ 等于单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}$。

命题 6.8. 设 (G, E) 是有限有向图E上的自相似群胚作用。那么，(G, E) 是正则的，当且仅当 $\mathcal{G}_{G,\ E}^{\mathbb{T}}$ 是主的。

证明. 假设 (G, E) 是正则的。取 $\gamma \in \mathrm{Iso}(\mathcal{G}_{G,\ E})$。那么 $\gamma = [x, n, g, n, x]$ 对某些 $x \in E^\infty$、$n \geq 0$ 和 $g \in G$ 成立，且满足 $d(g) = r(\varsigma^n(x))$ and $g \cdot \varsigma^n(x) = \varsigma^n(x)$。由正则性，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $g|_{x(n+1,n+k)} = s(x_{n+k})$。根据定义等价关系 $\sim$（它定义了 $\mathcal{G}_{G,\ E}$；见引理 6.3），我们有 $[x, n, g, n, x] = [x, n + k, s(x_{n+k})\ n + k、\ x] \in \mathcal{G}_G^{(0)}{}_{,\ E}$。因此，$\mathcal{G}_{G,\ E}^{\mathbb{T}}$ 是主的。

现在，假设 $\mathcal{G}_{G,E}^{\mathbb{T}}$ 是主的。若 $g \in G$ 和 $x \in E^\infty$ 满足 $d(g) = r(x)$ 且$g \cdot x = x$，则 $[x, 0, g, 0, x] \in \mathrm{Iso}(\mathcal{G}_{G,E})$。因此，$(x, 0, g, 0, x) \sim (x, n, s(x_n)\ n, x)$，其中某个 n。于是存在 $k \geq n$，使得 $g|_{x(0,k)} = s(x_n)|_{x(n,k)} = s(x_k)$。因此，$(G, E)$ 是正则的。□

7. The dual algebra of a self-similar graph

现在，我们描述与有限有向图（无源点）上的收缩、正则自相似群胚作用相关联的第二个 C^*-代数；具体而言，它是第4节中同胚 $\tilde{\sigma} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ 的 Deaconu–Renault 群胚的 C^*-代数。

回顾一下，若 X 是一个局部紧豪斯多夫空间，且 $T : X \to X$ 是一个局部同胚，则$\mathcal{G}_{X,\ T}$ 是集合

$$\mathcal{G}_{X,T} := \{(x, m - n, y) \in X \times \mathbb{Z} \times X \mid m, n \in \mathbb{N}_0, T^m(x) = T^n(y)\},$$

其拓扑由以下基本开集生成

$$Z(U, m, n, V) := \{(x, m - n, y) \in U \times \{m - n\} \times V \mid T^m(x) = T^n(y)\}.$$

单位空间为 $\mathcal{G}_X^{(0)}{}_{,T} := \{(x, 0, x) \mid x \in X\}$，并与 X相识别。群胚结构由下式给出

$$r(x, p, y) := x, \qquad s(x, p, y) := y,$$
$$(x, p, y)(y, q, z) := x(p + q, z) \qquad \text{and} \qquad (x, p, y)^{-1} := (y, -p, x).$$

不难验证

$$\{Z(U, m, n, V) \mid T^m|_U \text{ and } T^n|_V \text{ are homeomorphisms and } T^m(U) = T^n(V)\}$$

是该拓扑的开双截面基，因此 $\mathcal{G}_{X,\ T}$ 是 étale。容易看出它是豪斯多夫的，并且由于 X 是紧致的，它也是局部紧的。

定义 7.1. 设 E 是一个无源点的有限有向图。设 (G,E) 是一个收缩正则自相似群胚作用。设 $\mathcal{J}$ 和 $\tilde{\sigma}$ 分别是定义 3.2 和命题 4.3 中的空间与$\widehat{\ }$局部同胚。我们定义 $\mathcal{G}_{G,E}$ 为$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$Deaconu–Renault 群胚 $\mathcal{G}_{G,E}:=\mathcal{G}_{\mathcal{J},\tilde{\sigma}}$，并定义 $\mathcal{O}(G,E):=C^*(\mathcal{G}_{G,E})$，称其为 (G,E) 的对偶 C^*-代数。

令 $\mathcal{G}_\sigma$ 为与 $\sigma\colon E^{-\infty}\mapsto E^{-\infty}$ 相关联的 Deaconu–Renault 群胚。回顾第 3 节中的商映射 $q\colon E^{-\infty}\mapsto\mathcal{J}$。由于 $q\circ\tilde{\sigma}=\sigma\circ q$，我们看到 qˆ 可扩张为群胚同态 $q:\mathcal{G}_\sigma\mapsto\mathcal{G}_{G,E}$ 它将 $(x,k,y)\in\mathcal{G}_\sigma$ 映至 ˆ$q(x,k,y)=(q(x),k,q(y))$。下一个结果将使我们能够从 $\mathcal{G}_\sigma$ 的性质推导出 $\mathcal{G}_{G,E}$ 的性质。

命题 7.2. 设 E 是一个无源点的有限有向图，且 (G,E) 是一个压缩正则自相似群胚作用。对于每个 $y\in E^{-\infty}$, $q:(\mathcal{G}_\sigma)y\mapsto$ˆ ˆ$(\mathcal{G}_{G,E})q(y)$ 都是双射，并且 $q:\mathcal{G}_\sigma\mapsto\mathcal{G}_{G,E}$ 是真映射。

证明。假设 $z\in\mathcal{J}$和 $m,n\in\mathbb{N}$ 满足 $\tilde{\sigma}^n(q(y))=\tilde{\sigma}^m(z):=w$。命题 4.5(1)表明，对所有 $k\geq 0$，$\sigma^{m+k}\colon q^{-1}(z)\mapsto q^{-1}(\tilde{\sigma}^k(w))$ 和 $\sigma^{n+k}\colon q^{-1}(q(y))\mapsto q^{-1}(\tilde{\sigma}^k(w))$ 均为双射。因此，存在唯一的 x' 属于 $q^{-1}(z)$，使得对所有 $k\geq 0$，$\sigma^{m+k}(x')=\sigma^{n+k}(y)$。于是，$(x',m-n,y)$ 是 $(\mathcal{G}_\sigma)y$ 中满足$q((x',m-n,y))=(z,m-n,q(y))$ 的唯一元素。

同一唯一性性质表明，若 $x,y\in E^{-\infty}$和 $m,n,k\geq 0$满足$\sigma^{m+k}(x)=\sigma^{n+k}(y)$ 且 $\tilde{\sigma}^m(q(x))=\tilde{\sigma}^n(q(y))$，则 $\sigma^m(x)=\sigma^n(y)$。由此可得，对任意 $m,n\geq 0$，$q^{-1}(Z(\mathcal{J},m,n,\mathcal{J}))=Z(E^{-\infty},m,n,E^{-\infty})$。由于这些集合分别构成相应群胚的紧开覆盖，$q$ 是真。□

$\widehat{\ }$我们研究何时 $\mathcal{O}(G,E)$ 是简单的。若对每个 $x\in\mathcal{G}^{(0)}$，$\{r(\gamma)\mid s(\gamma)=x\}$在 $\mathcal{G}^{(0)}$ 中稠密，则群胚 $\mathcal{G}$ 是极小的；若一个 ´étale 群胚 $\mathcal{G}$ 的 Iso($\mathcal{G}$) 内部 $=\{\gamma\in\mathcal{G}\mid r(\gamma)=s(\gamma)\}$ 是 $\mathcal{G}^{(0)}$，则它是有效的。

引理 7.3. 设 E 是一个有限有向图。设 (G,E) 是一个收缩正则自相似群胚作用。若 E 是强连通的，且不是简单环，则$\curvearrowright$ $\curvearrowright\mathcal{G}_{G,E}$ 是极小且有效的，并且 $\mathcal{O}(G,E)$ 是简单的。

证明。固定 $x\in E^{-\infty}$。于是 $\{x\mu\mid\mu\in E^*$ 和 $s(x)=r(\mu)\}\subseteq\{r(\gamma)\mid\gamma\in\mathcal{G}_\sigma$ 以及 $s(\gamma)=x\}$。由于 E 是强连通的，对每个 $\nu\in E^*$，存在 $\mu\in E^*$ 使得 $s(\mu)=r(\nu)$ 且 $r(\mu)=s(x)$。因此 $x\mu\nu\in E^{-\infty}$。所以，$Z(\nu)\cap\{r(\gamma)\mid s(\gamma)=x\}\neq\emptyset$，从而 $\mathcal{G}_\sigma$ 是极小的。

ˆ 根据命题 7.2，对于每个 $x\in E^{-\infty}$, $q\colon(\mathcal{G}_\sigma)x\mapsto(\mathcal{G}_{G,E})q(x)$ 都是满射。因此，ˆ ˆ$q(r((\mathcal{G}_\sigma)x))=r((\mathcal{G}_{G,E})q(x))$。由于 q 是满射且连续，只要 $r((\mathcal{G}_\sigma)x)$ 稠密，$r((\mathcal{G}_{G,E})q(x))$ 就是稠密的。因此，$\mathcal{G}_\sigma$ 的极小性意味着 $\mathcal{G}_{G,E}$ 的极小性。

ˆ 要证明 $\mathcal{G}_{G,E}$ 是有效的，假设 $w\in\mathcal{J}$ 满足 $\tilde{\sigma}^m(w)=w$。根据命题 4.5(1)，σ^m 将 $q^{-1}(w)$ 双射到 $q^{-1}(w)$ 上。由于 $q^{-1}(w)$ 是有限的，存在 $k\in\mathbb{N}$，使得对所有 $x\in q^{-1}(w)$，$\sigma^{mk}(x)=x$。令 P_σ 和 $P_{\tilde{\sigma}}$ 分别表示 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 的周期点集。那么 $q^{-1}(P_{\tilde{\sigma}})=P_\sigma$。因此，$q^{-1}(\bigcup_{n\geq 0}\tilde{\sigma}^{-n}(P_{\tilde{\sigma}}))=\bigcup_{n\geq 0}\sigma^{-n}(P_\sigma)$。我们有 $P_\sigma=\bigcup_{\lambda\in E^*}\bigcup_{\mu\in s(\lambda)E^*s(\lambda)\setminus\{\lambda\}}\{\lambda\mu^\infty\}$，故 P_σ，进而$\bigcup_{n\geq 0}\tilde{\sigma}^{-n}(P_{\tilde{\sigma}})$，是可数的。

如果 $g\in$ˆ$\mathcal{G}_{G,E}\setminus\mathcal{J}$满足 $r(g)=s(g)$，那么 $r(g)\in\bigcup_{n\geq 0}\tilde{\sigma}^{-n}(P_{\tilde{\sigma}})$。因此 $r\big(\mathrm{Iso}($ˆ$\mathcal{G}_{G,E})\setminus\mathcal{J}\big)$ˆ 是可数的。由于 r 是开映射，要证明 Iso($\mathcal{G}_{G,E}$)$\setminus\mathcal{J}$内部为空，只需证明 $\mathcal{J}$ 中没有可数的开集。根据贝尔纲定理，只需证明 $\mathcal{J}$ 没有孤立点。由于 E 是强连通的，且不是简单

环， $E^{-\infty}$ 的每个开子集都是无限的。由 q的连续性和满射性可知， $\mathcal{J}$ 的每个非空开子集的原像都是开集，因此也是无限的。由于 q 是有限对一的，因此 $\mathcal{J}$中没有单点集是开集。于是 $\mathcal{J}$没有孤立点，$\hat{}$ 因而 $\mathcal{G}_{G,\,E}$ 是有效的。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由 [2, 定理 5.1] 可知， $\mathcal{O}(G,E) = C^*(\mathcal{G}_{G,\,E})$是简单的。 □

8. KK-duality via Smale spaces

本节将确立我们的 KK对偶结果。我们利用 Kaminker–Putnam–Whittaker 的一个一般性结果 [13], ，该结果表明，任意不可约 Smale 空间的稳定与不稳定 Ruelle 代数都是 KK对偶的。我们证明，第 5 节 Smale 空间的稳定 Ruelle$\widehat{\ }$代数与第 7 节的 C^*代数 $\mathcal{O}(G,E)$ Morita 等价，而不稳定 Ruelle 代数与第 6 节的 C^*代数$\mathcal{O}(G,E)$ Morita 等价。结合 Ruelle 代数的对偶性，即可得到我们的主要结果。

定理 8.1. 设 E 是一个强连通有限有向图。设 (G,E) 是$\widehat{\ }$一个收缩正则自相似群胚作用。那么 $\mathcal{O}(G,E)$ 和 $\mathcal{O}(G,E)$ 是 KK-对偶的，即存在类 $\mu \in KK^1(\mathcal{O}(G,E) \otimes \widehat{\mathcal{O}}(G,E)\ \mathbb{C})$ 和 $\beta \in KK^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}(G,E) \otimes \widehat{\mathcal{O}}(G,E))$，使得

$$\beta \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}(G,E)}} \mu = \mathrm{id}_{KK(\widehat{\mathcal{O}}(G,E),\widehat{\mathcal{O}}(G,E))} \quad \textit{and} \quad \beta \mathbin{\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{O}}(G,E)}} \mu = -\mathrm{id}_{KK(\mathcal{O}(G,E),\mathcal{O}(G,E))}.$$

特别地， $K^*(\mathcal{O}(G,E)) \cong K_{*+1}(\widehat{\mathcal{O}}(G,E))$ 和 $K_*(\mathcal{O}(G,E)) \cong K^{*+1}(\widehat{\mathcal{O}}(G,E))$。

$\widehat{\ }$8.1. 稳定代数。我们将证明，引理 6.3 和 6.4 中的群胚 $\mathcal{G}_{G,\,E}$ 等价于第 5 节 Smale 空间 $\mathcal{S}$ 的稳定 Ruelle 群胚 $G^s \rtimes \mathbb{Z}$。$\widehat{\ }$思路是证明，事实上 $G^s \rtimes \mathbb{Z}$ 等于 $\mathcal{G}_{G,\,E}$ 关于满射 $\tilde{\pi} : \mathcal{S} \to \mathcal{J}$ 的放大；该满射由 $E^{\mathbb{Z}}$ 到 $E^{-\infty}$ 的自然满射诱导。为此，我们首先需要证明这个 $\tilde{\pi}$ 是有意义的，并且是一个开映射。

引理 8.2. 设 E 是一个无源点的有限有向图。设 (G,E) 是一个收缩的正则自相似群胚作用。设 $\mathcal{J}$ 是定义 3.2 中的极限空间， $\mathcal{S}$ 是定义 5.3 中的极限溶胶。存在一个连续开满射 $\tilde{\pi}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{J}$，使得对所有 $x \in E^{\mathbb{Z}}$， $\tilde{\pi}([x]) = [\ldots x_{-3}x_{-2}x_{-1}]$。

证明. 设 $\theta : \mathcal{S} \to \mathcal{J}_\infty$ 是命题 5.4 中的同胚。设 P_1 是投影映射 $P_1\colon \mathcal{J}_\infty \to \mathcal{J}$，定义为 $P_1([x_1],[x_2],[x_3],\ldots) = [x_1]$。根据射影极限拓扑的定义， P_1 是连续的；又因为 $\tilde{\sigma}$ 是满射，所以它也是满射。根据 $\mathcal{J}_\infty$ 上拓扑的定义，由开集 $W \subseteq J$ 和元素 $n \in \mathbb{N}$ 组成的各对 (W,n) 所对应的集合 $Z(W,n) := \{([x_1],[x_2],[x_3],\ldots) \mid [x_n] \in W\}$ 构成 $\mathcal{J}_\infty$ 上拓扑的一组基。由于 $\tilde{\sigma}$ 是满射，每个 $P_1(Z(W,n)) = \tilde{\sigma}^n(W)$ 都是开集。因此 P_1 是开映射。于是， $\tilde{\pi} := P_1 \circ \theta$ 是从 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{J}$ 的连续开满射。根据定义，它满足 $\tilde{\pi}([x]) = [\ldots x_{-3}x_{-2}x_{-1}]$。□

如果 X 是局部紧豪斯多夫空间， $\mathcal{G}$ 是一个 ´étale 群胚，并且 $\pi : X \to \mathcal{G}^{(0)}$ 是连续开满射，那么我们可以构造 $\mathcal{G}$ 关于 π 的放大；该放大作为拓扑空间为

$$\mathcal{G}^\pi := \{(x,\gamma,y) \in X \times \mathcal{G} \times X \mid r(\gamma) = \pi(x) \text{ and } s(\gamma) = \pi(y)\}$$

在继承自乘积拓扑的拓扑下。其单位空间为 $(\mathcal{G}^\pi)^{(0)} = \{(x,\pi(x)\ x) \mid x \in X\}$ ，我们将其与 X 等同。值域映射和源映射分别为 $r(x,\gamma,y) = x$ 和 $s(x,\gamma,y) = y$。乘法和求逆定义为

$(x,\gamma,y)(y,\eta,z)=(x,\gamma\eta,z)$，以及 $(x,\gamma,y)^{-1}=(y,\gamma^{-1},x)$。例如，根据命题 3.10], 的 $[8,(4)\implies(1)$，群胚 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}^\pi$ 是等价群胚，因此，根据定理 2.8], $C^*(\mathcal{G})$ 和 $C^*(\mathcal{G}^\pi)$ 是 Morita 等价的。

回顾一下，与 Smale 空间 $(\mathcal{S},d,\tau,\varepsilon_S,\lambda)$ 相关的稳定等价关系是如下等价关系

$$G^s:=\{(\xi,\eta)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}\mid \lim_{m\to\infty}d(\tau^m(\xi),\tau^m(\eta))=0\}.$$

根据 [26, 第 179], 页，存在 $\varepsilon'_{\mathcal{S}}\le\varepsilon_{\mathcal{S}}$，使得对于任意 $\delta\le\varepsilon'_{\mathcal{S}}$,

$$\begin{aligned}G^s:=\{(\xi,\eta)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}\mid{}&\text{there exists } M\in\mathbb{N} \text{ such that}\\&d(\tau^m(\xi),\tau^m(\eta))<\delta \text{ for all } m\ge M\}\end{aligned}\tag{8.1}$$

对于 $M\ge 0$，我们定义

$$G^s_{\varepsilon,M}=\{(\xi,\eta)\mid d(\tau^m(\xi),\tau^m(\eta))<\varepsilon \text{ for all } m\ge M\},$$

赋予从 $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ 继承的子空间拓扑。我们在 G^s 上赋予由归纳极限分解 $G^s=\bigcup_M G^s_{\varepsilon,M}$ 得到的归纳极限拓扑。容易验证，这与 G^s 在 $[28,$ 第 $282]$ 页所描述的拓扑一致。

现在我们描述 Smale 空间 $(\mathcal{S},d_{\mathcal{S}},\tilde\tau,\varepsilon_{\mathcal{S}},\frac{1}{c})$ 的稳定等价关系及其拓扑，这将有助于我们证明放大 $\widehat{\mathcal{G}}^{\tilde\pi}_{G,E}$ 与稳定 Ruelle 群胚 $G^s\rtimes_{\tilde\tau}\mathbb{Z}$ 同构。

引理 8.3. 设 E 是一个没有汇点或源点的有限有向图，且 (G,E) 是一个收缩的正则自相似群胚。设 $(\mathcal{S},d_{\mathcal{S}},\tilde\tau,\varepsilon_{\mathcal{S}},\frac{1}{c})$ 是推论 5.5 中的 Smale 空间。设 ε 如定理 4.3 中所述，并设 $\varepsilon'_{\mathcal{S}}$ 是一个常数，使得对所有 $\delta<\varepsilon'_{\mathcal{S}}$，(8.1) 均成立。设 $\beta=\min\{\varepsilon,\varepsilon'_{\mathcal{S}}\}$。对每个 $m\in\mathbb{N}$，令

$$G^s_m=\{([x],[y])\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}\mid [x(-\infty,-m)]=[y(-\infty,-m)]\}.$$

那么，存在 $k\in\mathbb{N}$，使得对每个 $m\in\mathbb{N}$，都有 $G^s_{\beta,\,m}\subseteq G^s_m\subseteq G^s_{\beta,\,m+k}$。点 $[x],[y]\in\mathcal{S}$ 稳定等价，当且仅当存在 $m\in\mathbb{N}$，使得 $[x(-\infty,-m)]=[y(-\infty,-m)]$。$G^s$ 上的拓扑等于分解 $G^s=\bigcup_m G^s_m$ 对应的归纳极限拓扑。

证明。为说明 $G^s_{\beta,m}\subseteq G^s_m$，固定 $x,y\in E^{\mathbb{Z}}$ 使得对所有 $n\ge m$ 均有 $d_{\mathcal{S}}([\tau^n(x)],[\tau^n(y)])<\beta$。固定 $n\ge m$。于是

$$\begin{aligned}d([x(-\infty,-n)],[x(-\infty,-n)])&=d([\tau^n(x)(-\infty,0)],[\tau^n(x)(-\infty,0)])\\&\le d_{\mathcal{S}}([\tau^n(x)],[\tau^n(y)])<\beta<\varepsilon.\end{aligned}$$

根据 ϵ 的定义，

$$\begin{aligned}c\cdot d([x(-\infty,-n)],[x(-\infty,-n)])&=d(\tilde\sigma([x(-\infty,-n)]),\tilde\sigma([y(-\infty,-n)]))\\&=d([x(-\infty,-(n+1))],[x(-\infty,-(n+1))]).\end{aligned}$$

因此

$$d([x(-\infty,-m)],[x(-\infty,-m)])=c^{m-n}d([x(-\infty,-n)],[x(-\infty,-n)])\le c^{m-n}.$$

由于 $n\ge m$ 是任意的，我们推得 $[x(-\infty,-m)]=[y(-\infty,-m)]$。

固定 $k\in\mathbb{N}$，使得 $(\frac{1}{c})^k<\beta$。我们证明 $G^s_m\subseteq G^s_{\beta,\,m+k}$。固定 $x,y\in E^{\mathbb{Z}}$，使得 $[x(-\infty,-m)]=[y(-\infty,-m)]$。那么，对于所有 $l-n\le -m$，$[\tau^n(x)(-\infty,l)]=[\tau^n(y)(-\infty,l)]$。因此，

$$d_{\mathcal{S}}(\tilde\tau^n[x],\tilde\tau^n[y])=\sup_{l>n-m}(c^{-l}d([\tau^n(x)(-\infty,l)],[\tau^n(y)(-\infty,l)])\le c^{-(n-m)}.$$

因此，只要 $n \geq m+k$，就有 $d_{\mathcal{S}}(\tilde{\tau}^n[x], \tilde{\tau}^n[y]) < c^{-k} < \beta$。因此，$([x],[y]) \in G^s_{\beta,m+k}$。□

回顾一下，稳定 Ruelle 群胚是 $\mathbb{Z}$ 在 G^s的单位空间上作用所对应的斜群胚。也就是说，

$$G^s \rtimes_{\tilde{\tau}} \mathbb{Z} = \{(\xi, n, \eta) \in \mathcal{S} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{S} \mid (\tilde{\tau}^n(\xi), \eta) \in G^s\}.$$

定理 8.4. 设 E 是一个没有汇点或源点的有限有向图。设 (G, E) 是一个收缩正则自相似群胚作用。设 $\tilde{\pi}: \mathcal{S} \to \mathcal{J}$ 是引理 8.2 中的连续开满射，且 $\tilde{\tau}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 是推论 5.5 中的同胚。那么存在一个同构 κ，将稳定 Ruelle 群胚 $G^s \rtimes_{\tilde{\tau}} \mathbb{Z}$ 映到 $\tilde{\pi}$ 作用于 (G, E) 的对偶群胚的放大 $\widehat{\mathcal{G}}^{\tilde{\pi}}_{G,E}$，并满足：对于所有 $([x], n, [y]) \in G^s \rtimes_{\tilde{\tau}} \mathbb{Z}$，有 $\kappa([x], n, [y]) = ([x], (\tilde{\pi}([x]), n, \tilde{\pi}([y])), [y])$。

证明。对于 $z \in E^{\mathbb{Z}}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\tilde{\pi}(\tilde{\tau}^n([z])) = [z(-\infty, -n)]$。因此，由引理 8.3 可知，$([x], n, [y]) \in G^s$ 当且仅当存在某个 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\tilde{\pi}(\tilde{\tau}^{m+n}([x])) = \tilde{\pi}(\tilde{\tau}^m([y]))$，且 $m+n \geq 0$。由于对于任意 $m \in \mathbb{N}$，$\tilde{\pi} \circ \tilde{\tau}^m = \tilde{\sigma}^m \circ \tilde{\pi}$，

$$([x], n, [y]) \in G^s \iff ([x], (\tilde{\pi}([x]), n, \tilde{\pi}([y])), [y]) \in \widehat{\mathcal{G}}^{\tilde{\pi}}_{G,E}. \tag{8.2}$$

因此存在一个双射 $\kappa: G^s \rtimes_{\tilde{\tau}} \mathbb{Z} \to \widehat{\mathcal{G}}^{\tilde{\pi}}_{G,E}$，满足所需公式。

我们证明 κ 是连续的。将 κ 扩展为映射 $\tilde{\kappa}: \mathcal{S} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S} \times \mathcal{J} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{J} \times \mathcal{S}$，定义为 $\tilde{\kappa}((\xi, n, \eta)) = (\xi, (\tilde{\pi}(\xi), n, \tilde{\pi}(\eta)), \eta)$。那么 $\tilde{\kappa}$ 是连续的。对于满足 $M+n \geq 0$ 的 $M \in \mathbb{N}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，将 κ 限制在 $G^s_M \rtimes_{\tilde{\tau}} \{n\} = \{([x], n, [y]) \mid (\tilde{\tau}^n([x]), [y]) \in G^s_M\}$ 上的值域包含于

$$\mathcal{S} * \widehat{\mathcal{G}}^{(M+n,M)}_{G,E} * \mathcal{S} := \{([x], (\tilde{\pi}([x]), n, \tilde{\pi}([y])), [y]) \mid \tilde{\sigma}^{M+n}(\tilde{\pi}([x])) = \tilde{\sigma}^M(\tilde{\pi}([y]))\}.$$

相对于 $G^s \rtimes_{\tilde{\tau}} \mathbb{Z}$ 的 $G^s_M \rtimes_{\tilde{\tau}} \{n\}$ 的子空间拓扑等于相对于 $\mathcal{S} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{S}$ 的子空间拓扑，而相对于 $\widehat{\mathcal{G}}_G$ 的 $\mathcal{S} * \widehat{\mathcal{G}}^{(M+n,M)}_{G,E} * \mathcal{S}$ 的子空间拓扑等于相对于 $\mathcal{S} \times \mathcal{J} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{J} \times \mathcal{S}$ 的子空间拓扑。因此，$\tilde{\kappa}$ 的连续性意味着 $\kappa: G^s_M \rtimes_{\tilde{\tau}} \{n\} \to \mathcal{S} * \widehat{\mathcal{G}}^{(M+n,M)}_{G,E} * \mathcal{S}$ 是连续的。固定 $n \in \mathbb{Z}$。$G^s \rtimes_{\tilde{\tau}} \{n\} = \bigcup_{M+n \geq 0} G^s_M \rtimes_{\tilde{\tau}} \{n\}$ 上归纳极限拓扑的泛性质意味着，对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，κ 在开闭子空间 $G^s \rtimes_{\tilde{\tau}} \{n\} \subseteq G^s \rtimes_{\tilde{\tau}} \mathbb{Z}$ 上是连续的。因此，κ 是连续的。

由于 $\mathcal{S} * \widehat{\mathcal{G}}^{(M+n,M)}_{G,E} * \mathcal{S}$ 和 $G^s_M \rtimes_{\tilde{\tau}} \{n\}$ 是紧致的，并且 $\kappa^{-1}(\mathcal{S} * \widehat{\mathcal{G}}^{(M+n,M)}_{G,E} * \mathcal{S}) \subseteq G^s_M \rtimes_{\tilde{\tau}} \{n\}$，而 $\widehat{\mathcal{G}}^{\tilde{\pi}}_{G,E} = \bigcup_{M+n \geq 0} \mathcal{S} * \widehat{\mathcal{G}}^{(M+n,M)}_{G,E} * \mathcal{S}$，映射 κ 是正则的。由于局部紧豪斯多夫空间之间的真连续映射是闭映射，κ 是一个同胚。□

推论 8.5. 设 E 是一个没有汇点或源点的有限有向图。设 (G, E) 是一个收缩正则自相似群胚作用。那么，定义 7.1 中的对偶 C^*-代数 $\mathcal{O}(G, E)$ 与推论 5.5 中 Smale 空间 $(\mathcal{S}, \tilde{\tau})$ 的稳定 Ruelle 代数 $C^*(G^s \rtimes \mathbb{Z})$ Morita 等价。

证明。由于 $\tilde{\pi}: \mathcal{S} \to \mathcal{J}$ 是一个开映射，根据引理 8.2, [8, , 命题 3.10]表明 $\widehat{\mathcal{G}}^{\tilde{\pi}}_{G,E}$ 与 $\widehat{\mathcal{G}}_{G,E}$ 群胚等价。因此，[20, 定理 2.8] 表明 $C^*(\widehat{\mathcal{G}}_{G,E})$ 与 $C^*(\widehat{\mathcal{G}}^{\tilde{\pi}}_{G,E})$ Morita 等价。定理 8.4 表明 $C^*(\widehat{\mathcal{G}}^{\tilde{\pi}}_{G,E})$ 与 $C^*(G^s \rtimes_{\tilde{\tau}} \mathbb{Z})$ 同构，这正是 $(\mathcal{S}, \tilde{\tau})$ 的稳定 Ruelle 代数。□

8.2. 不稳定代数。现在我们需要证明，Smale 空间 $(\mathcal{S},\tilde{\tau})$ 的不稳定 Ruelle 代数与 C^*-代数 $\mathcal{O}(G,E)$ Morita 等价。我们的方法仍然是通过群胚等价。我们采用 Putnam 和 Spielberg 构造的étale 群胚 $G^u_{[x]}\rtimes_{\tilde{\tau}}\mathbb{Z}$，它对应于 $\mathcal{S}$ 中选定的一个轨道。我们将证明，该群胚与引理 6.3 中的群胚 $\mathcal{G}_{G,\ E}$ 的某个合适放大同构。为此，我们需要对不稳定等价关系及其拓扑作另一种描述，并将在下一个引理中给出。

对于 $M\in\mathbb{N}$和 $\varepsilon>0$，令 $G^u_{\varepsilon,\ M}=\{(\eta,\xi)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}\mid d_{\mathcal{S}}(\tilde{\tau}^{-m}(\eta)\ \tilde{\tau}^{-m}(\xi))<\varepsilon$ 对所有 $m\geq M\}$均成立。由 [26, 第 179], 页可知，存在 $\varepsilon'_{\mathcal{S}}\leq\varepsilon_{\mathcal{S}}$ 使得对每个 $\varepsilon<\varepsilon'_{\mathcal{S}}$，我们都有

$$G^u=\bigcup_M G^u_{\varepsilon,M}$$

在归纳极限拓扑下。这与 282]第 [28, 页上 G^u 的拓扑一致。

引理 8.6. 设 E 是一个没有汇点或源点的有限有向图。设 (G,E) 是一个收缩正则自相似群胚作用。设 $\varepsilon'_{\mathcal{S}}$ 如上所述，并设 ε 如定理 4.3 所述。设 $\beta=\min\{\varepsilon,\varepsilon'_{\mathcal{S}}\}$。设 F是包含 $\mathcal{N}\cup\mathcal{N}^2$且对限制封闭的最小有限集。那么，存在一个 $l\in\mathbb{N}$，使得对每个 $M\in\mathbb{N}$，我们都有
$G^u_{\beta,M}\subseteq G^u_M\subseteq G^u_{\beta,M+l}$，其中

$$G^u_M=\{([y],[x])\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}\mid\ \exists g\in F:g\cdot x(M+1,\infty)=y(M+1,\infty)\}.$$

更确切地说，若 $(\eta,\xi)\in G^u_{\beta,M}$，则对于任意代表元 y,x，满足 $[y]=\eta,[x]=\xi$，都存在元素 $g\in F$，使得 $g\cdot x(M+1,\infty)=y(M+1,\infty)$。

特别地，$[x]$ 和 $[y]$ 在 $\mathcal{S}$ 中不稳定等价，当且仅当存在一个 $M\in\mathbb{N}$和 $g\in G^s(x_M)$，使得 $g\cdot x(M+1,\infty)=y(M+1,\infty)$，并且 G^u 上的拓扑等于分解$G^u=\bigcup_M G^u_M$所给出的归纳极限拓扑。

证明。固定 $M\in\mathbb{N}$。我们首先证明$G^u_{\beta,M}\subseteq G^u_M$。设 $([x],[y])\in G^u_{\beta,M}$。对于 $m\in\mathbb{Z}$，令 $x^m:=[x(-\infty,m)]$ 以及 $y^m:=[y(-\infty,m)]$。根据度量 $d_{\mathcal{S}}$的定义，对于每个$m\geq M$，

$$d(x^m,y^m)=d([\tau^{-m}(x)(-\infty,0)],[\tau^{-m}(y)(-\infty,0)])\leq d_{\mathcal{S}}(\tilde{\tau}^{-m}([x]),\tilde{\tau}^{-m}([y]))<\beta.$$

由于 $\beta\leq\varepsilon$，定理 4.3(1) 给出：对于所有 $m\geq M$，$d(x^m,y^m)=d(\tilde{\sigma}(x^{m+1})\ \tilde{\sigma}(y^{m+1}))=c\cdot d(x^{m+1},y^{m+1})$。因此，对于所有 $s\geq 0$，$d(x^{M+s},y^{M+s})=(\frac{1}{c})^s d(x^M,y^M)$。所以，$\alpha:=d(x^M,y^M)$ 满足对每个 $s\geq 0$ 都有 $y^{M+s}\in B(x^{M+s},(\frac{1}{c})^s\alpha)$。

[2] 固定 $n\in\mathbb{N}$（如引理 4.6 中所述）和 $k\in\mathbb{N}$（如命题 4.5 中所述）。由于 $\alpha<\varepsilon$，引理 4.6(1) 给出 $\omega\in E^*$，使得 $|\omega|\geq n-1$，且 $B(x^M,\alpha)\subseteq U_\omega$。

由于 $\tilde{\sigma}(x^{M+1})=x^M$ 且 $|\omega|\geq n-1\geq k-1$，命题 4.5(3) 给出 $e\in E^1$，使得 $s(\omega)=r(e)$ 且 $x^{M+1}\in U_{\omega e}$。由于 $B(x^M,\alpha)\subseteq U_\omega$，引理 4.6 蕴含$B(x^{M+1},\frac{1}{c}\alpha)\subseteq U_{\omega e}$。

对上段中的论证进行归纳，得到路径 $\{\mu_s\}_{s\in\mathbb{N}}$，使得 $\mu_{s+1}=\mu_s e_{s+1}$，其中某条边为 e_{s+1}，并且对所有 $s\in\mathbb{N}$，$B(x^{M+s},(\frac{1}{c})^s\alpha)\subseteq U_{\omega\mu_s}$。由于对每个 $s\in\mathbb{N}$，都有 $y^{M+s}\in B(x^{M+s},(\frac{1}{c})^s\alpha)$，我们得到 $x^{M+s},y^{M+s}\in U_{\omega\mu_s}$对每个$s\in\mathbb{N}$。因此，存在序列 $\{g_s\}_{s\in\mathbb{N}},\{h_s\}_{s\in\mathbb{N}}$，属于 $\mathcal{N}$，使得对所有 $s\in\mathbb{N}$，$d(g_s)=d(h_s)=r(\mu_s)$，$g_s\cdot\mu_s=x(M+1,M+s)$，且 $h_s\cdot\mu_s=y(M+1,M+s)$。令 $z\in E^\infty$ 为$\bigcap_s Z[\mu_s]$ 的唯一元素。取一个递增子序列$\{n_s\}_{s\in\mathbb{N}}$，使得 $(g_{n_s})_s$ 和 $(h_{n_s})_s$ 均为常值序列，其常值分别为 g 和 h。于是 $g\cdot z=x(M+1,\infty)$ 且 $h\cdot z=y(M+1,\infty)$。因此，$t:=hg^{-1}\in\mathcal{N}^2\subseteq F$ 满足 $t\cdot x(M+1,\infty)=y(M+1,\infty)$。所以，$([y],[x])\in G^u_M$。

取 $l_1 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $g \in F$ 以及满足 $|\mu| \geq l_1$ 的 $\mu \in d(g)E^*$，都有$g|_\mu \in \mathcal{N}$。固定 $l_2 \in \mathbb{N}$，使得对每条满足 $|\nu| \geq l_2$ 的路径 ν，$\mathrm{diam}(U_\nu) < \frac{1}{c}\beta$。令$l := l_1 + l_2$。我们证明 $G^u_M \subseteq G^u_{\beta,\ M+l}$。

取 $[x],[y] \in \mathcal{S}$，使得存在 $g \in F$ 满足 $d(g) = s(x_M)$ 且 $g \cdot x(M+1,\infty) = y(M+1,\infty)$。如上所述，令 $x^m := [x(-\infty,m)]$，且对所有 $m \in \mathbb{Z}$，令 $y^m := [y(-\infty,m)]$。令 $h = g|_{x(M+1,M+l_1)}$。根据 l_1 的选取，我们有 $h \in \mathcal{N}$。由于 $h \cdot x(M+l_1,\infty) = y(M+l_1,\infty)$，因此对所有 $m \in \mathbb{N}$，有 $x^{M+l_1+m}, y^{M+l_1+m} \in U_{x(M+l_1+1,M+l_1+m)}$。根据 l_2 的选取，对所有 $m \geq l_2$，有 $d(x^{M+l_1+m}, y^{M+l_1+m}) < \frac{1}{c}\beta$。因此，对所有 $s \geq M+l$ 和 $k \geq 0$，有 $(\frac{1}{c})^k d(x^{k+s}, y^{k+s}) < \frac{1}{c}\beta$。所以，对所有 $s \geq M+l$，有 $d_{\mathcal{S}}(\tilde{\tau}^{-s}([x])\ \tilde{\tau}^{-s}([y])) = \sup_{k\in\mathbb{N}_0}(\frac{1}{c})^k d(x^{k+s}, y^{k+s}) \leq \frac{1}{c}\beta < \beta$，从而推出 $([y],[x]) \in G^u_{\beta,M+l}$。因此 $G^u_M \subseteq G^u_{\beta,M+l}$。

我们已经证明，$[x]$ 与 $[y]$ 不稳定等价，当且仅当存在$M \in \mathbb{N}$和 $g \in Fs(x_M)$，使得 $g\cdot x(M+1,\infty) = y(M+1,\infty)$。若 $[x]$、$[y] \in \mathcal{S}$、N属于 $\mathbb{N}$，且 $g \in Gr(x_N)$ 满足 $g\cdot x(N+1,\infty) = y(N+1,\infty)$，那么由于 (G,E) 是收缩的，存在 $M \geq N$ 使得 $h := g|_{x(N+1,M)} \in \mathcal{N} \subseteq F$，且 $h \cdot x(M+1,\infty) = y(M+1,\infty)$。这就证明了该引理的倒数第二个结论。

由于 F 对限制封闭，因此对所有 $M \in \mathbb{N}$，$G^u_M \subseteq G^u_{M+1}$ 成立。于是，关于分解 $G^u = \bigcup_M G^u_M$ 的归纳极限拓扑是良定义的。由于对所有 $M \in \mathbb{N}$，$G^u_{\beta,\ M} \subseteq G^u_M \subseteq G^u_{\beta,\ M+l}$，该拓扑等于由分解$G^u = \bigcup_M G^u_{\beta,\ M}$所给出的拓扑。□

设 (X,τ) 是一个不可约 Smale 空间，并回忆 $G^u \rtimes \mathbb{Z} = \{(\eta,l,\xi) \in X \times \mathbb{Z} \times X : (\tau^{-l}(\eta)\ \xi) \in G^u\}$。在 [28], Putnam 和 Spielberg 证明，对于任意点 $x \in X$，群胚 $G^u_x \rtimes \mathbb{Z}$ 定义为

$$G^u_x \rtimes \mathbb{Z} := \{(\eta,n,\varepsilon) \in G^u \rtimes \mathbb{Z} \mid (x,\eta),(x,\varepsilon) \in G^s\}, \tag{8.3}$$

赋予适当的拓扑后，当 (X,τ) 是混合时，它是一个 ´étale 群胚，且等价于 $G^u \rtimes \mathbb{Z}$，并利用这一点研究 Smale 空间的非稳定 C^*-代数直至 Morita 等价。我们将在此处采用相同的技巧。

设 E 是一个没有汇点或源点的有限有向图，且 (G,E) 是一个收缩正则自相似群胚作用。设 $(\mathcal{S}, d_{\mathcal{S}}, \tilde{\tau}, \varepsilon_S, \frac{1}{c})$ 是推论 5.5 中的 Smale 空间。设 $\beta > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 如引理 8.3 所述。考虑 $x \in E^{\mathbb{Z}}$。按照 [28], 全局稳定等价类

$$\mathcal{S}^s([x]) := \{\xi \in \mathcal{S} : ([x],\xi) \in G^s\} \tag{8.4}$$

赋予其由分解 $\mathcal{S}^s([x]) = \bigcup_M \mathcal{S}^s_{\beta,\ M}([x])$ 所诱导的归纳极限拓扑，其中

$$\mathcal{S}^s_{\beta,M}([x]) = \{\xi \in \mathcal{S} \mid d_{\mathcal{S}}(\tilde{\tau}^n([x]), \tilde{\tau}^n(\xi)) < \beta,\ \forall\ n \geq M\}$$

赋予其相对于 $\mathcal{S}$ 的子空间拓扑。对于 $M \in \mathbb{N}$，定义

$$\mathcal{S}^s_M([x]) = \{[y] \in \mathcal{S} : [x(-\infty,M)] = [y(-\infty,M)]\}.$$

于是，引理 8.3 表明 $\mathcal{S}^s_{\beta,\ M}([x]) \subseteq \mathcal{S}^s_M([x]) \subseteq \mathcal{S}^s_{\beta,\ M+k}([x])$。因此，$\mathcal{S}^s([x])$ 上的归纳极限拓扑等价于由分解 $\mathcal{S}^s([x]) = \bigcup_M \mathcal{S}^s_M([x])$ 所诱导的归纳极限拓扑。注意，在此拓扑下，$\mathcal{S}^s([x])$ 并非紧致，尽管 $\mathcal{S}$ 是紧致的。

我们为群胚 $G^u_{[x]} \rtimes \mathbb{Z} = (G^u \rtimes \mathbb{Z}) \cap (\mathcal{S}^s([x]) \times \mathbb{Z} \times \mathcal{S}^s([x]))$ 配备由以下子基生成的拓扑

$$\big\{U \cap r^{-1}(V) \cap s^{-1}(W) \mid U \subseteq G^u \rtimes \mathbb{Z} \text{ and } V,W \subseteq \mathcal{S}^s([x]) \text{ are open}\big\}.$$

固定 $\tilde{\tau}$ 的一个周期轨道 $P = \{\tilde{\tau}^l(p_0) : l \in \mathbb{Z}\} = \{\tilde{\tau}^l(p_0) : 0 \le l < N\}$。那么，对于互不相同的 p、$q \in P$，有 $\mathcal{S}^s(p) \cap S^s(q) = \emptyset$。因此，$\mathcal{S}^s(P) := \bigcup_{p\in P} \mathcal{S}^s(p)$ 是集合 $\mathcal{S}^s(p)$ 的拓扑不交并。考虑群胚 $G^u(P) \rtimes \mathbb{Z} := (G^u \rtimes \mathbb{Z}) \cap (\mathcal{S}^s(P) \times \mathbb{Z} \times \mathcal{S}^s(P))$。与前一段一样，我们为 $G^u(P) \rtimes \mathbb{Z}$ 配备由以下子基生成的拓扑

$$\big\{U \cap r^{-1}(V) \cap s^{-1}(W) \mid U \subseteq G^u \rtimes \mathbb{Z} \text{ and } V, W \subseteq \mathcal{S}^s(P) \text{ are open}\big\}.$$

那么，$G^u(P) \rtimes \mathbb{Z}$ 是一个局部紧 ´étale 豪斯多夫群胚 [13, Section 3], ，并且$G^u(P) \rtimes \mathbb{Z}$ 与 $G^u \rtimes \mathbb{Z}$ [27, Section 2]群胚等价。

我们声称，对于任意 $p \in P$，子集 $G^u_p \rtimes \mathbb{Z}$ 也是一个局部紧豪斯多夫群胚，并且与 $G^u \rtimes \mathbb{Z}$等价。事实上，开子群胚 $G^u(P) \rtimes \mathbb{Z}|_{\mathcal{S}^s(p)} = \{g \in G^u(P) \rtimes \mathbb{Z} : r(g) \in \mathcal{S}^s(p)\}$ 等于 $G^u_p \rtimes \mathbb{Z}$，而$G^u_p \rtimes \mathbb{Z}$ 从 $G^u(P) \rtimes \mathbb{Z}$ 继承的相对拓扑，等于上文所述的 $G^u_p \rtimes \mathbb{Z}$ 上的拓扑。因此，$G^u_p \rtimes \mathbb{Z}$ 是一个局部紧 ´étale 豪斯多夫群胚。

我们证明 $G^u_p \rtimes \mathbb{Z}$ 与 $G^u(P) \rtimes \mathbb{Z}$等价，因此也与 $G^u \rtimes \mathbb{Z}$等价。由于 $H = \{g \in G^u(P) \rtimes \mathbb{Z} : r(g) \in \mathcal{S}^s(p)\}$ 是一个开闭子集，根据 [20, 例 2.7] ，H 在且仅在源映射限制在 H 上满射到 $\mathcal{S}^s(P)$时，才实现 $G^u_p \rtimes \mathbb{Z}$ 与 $G^u(P) \rtimes \mathbb{Z}$ 之间的群胚等价。对 $q \in P$ 和 $z \in \mathcal{S}^s(q)$而言，存在 $n \in \mathbb{N}$使得 $\tilde{\tau}^n(q) = p$。因此 $(\tilde{\tau}^n(z), n, z) \in H$，从而证明了满射性。

我们描述 $\mathcal{G}_{G,\,E}$ 的一个放大，并将在定理 8.12 中证明它与 $G^u \rtimes \mathbb{Z}$Morita 等价。

对于 $x \in E^{\mathbb{Z}}$，我们记

$$E^{\mathbb{Z}}_x := \{y \in E^{\mathbb{Z}} \mid y(-\infty, -M) = x(-\infty, -M) \text{ for some } M \in \mathbb{N}\}. \tag{8.5}$$

对于 $M \in \mathbb{N}$，令

$$E^{\mathbb{Z}}_x(M) := \{y \in E^{\mathbb{Z}} : y(-\infty, -M) = x(-\infty, -M)\},$$

赋予从 $E^{\mathbb{Z}}$继承的相对拓扑。我们赋予 $E^{\mathbb{Z}}_x$由此分解所确定的归纳极限拓扑。

映射 $\pi_x : E^{\mathbb{Z}}_x \mapsto E^\infty$ 将 $z \in E^{\mathbb{Z}}_x$ 映到 $\pi_x(z) = z(1, \infty)$，是一个开连续映射（事实上，它是映到 E^∞中某个开集上的局部同胚）。当 E 强连通时，它是满射。我们证明放大 $\mathcal{G}^{\pi_x}_{G,\,E}$ 与 $G^u_{[x]} \rtimes \mathbb{Z}$同构。我们从分析空间 $E^{\mathbb{Z}}_x$开始。

我们首先证明，对于任意$n \in \mathbb{Z}$，元素 $x \in E^{\mathbb{Z}}$ 完全由它在定义 5.3 的极限溶胶 $\mathcal{S}$中的等价类 $[x]$ 以及尾部 $\ldots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}$ 确定。

引理 8.7. 设 E 是一个没有汇点或源点的有限有向图。设 (G, E) 是一个收缩正则自相似群胚作用。设 $\mathcal{S}$ 是定义 5.3 中的极限溶胶。假设 $x, y \in E^{\mathbb{Z}}$ 满足 $[x] = [y] \in \mathcal{S}$，并且假设存在 n 属于 $\mathbb{Z}$，使得对所有 $m \le n$都有 $x_m = y_m$。那么 $x = y$。

证明。固定满足 $x_m = y_m$ （对所有 $m \le n$ 均成立）的 n。令 k 如引理 4.4 中所述，并取有限集 $F' = \mathcal{N} \cup G^0$。由于 $x \sim_{\text{ae}} y$，引理 3.6 表明存在一个取自 $\mathcal{N}$ 的序列 $(g_m)_{m\in\mathbb{Z}}$，使得对所有 $m \in \mathbb{Z}$ 均有 $g_m \cdot x_m x_{m+1} \cdots = y_m y_{m+1} \ldots$，且对所有 $m \le l$ 均有 $g_m|_{x_m \ldots x_{l-1}} = g_l$。特别地，

$$g_m \cdot x_{-n-k} \ldots x_{-n-1} = y_{-n-k} \ldots y_{-n-1} = x_{-n-k} \ldots x_{-n-1}.$$

由于 $v := r(x_{-n-k}) \in G^{(0)} \subseteq F'$，且还满足 $v \cdot x_{-n-k} \dots x_{-n-1} = x_{-n-k} \dots x_{-n-1}$，选择 k 可保证 $g_m|_{x_{-n-k}\dots x_{-n-1}} = v|_{x_{-n-k}\dots x_{-n-1}} = r(x_n)$。于是我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1}y_{n+2}\dots &= g_{n-1} \cdot x_{n+1}x_{n+2}\dots \\ &= g_m|_{x_{-n-k}\dots x_{-n-1}} \cdot x_{n+1}x_{n+2}\dots = v \cdot x_{n+1}x_{n+2}\dots = x_{n+1}x_{n+2}\dots \end{aligned}$$

由于我们已经有了 $x_m = y_m$ 对于 $m \le n$，因此得出 $x = y$。 □

引理 8.7 表明，对于 $x \in E^{\mathbb{Z}}$，从 $E^{\mathbb{Z}}$ 到 $\mathcal{S}$ 的商映射 $y \mapsto [y]$ 限制为一个单射 $E_x^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{S}^s([x])$。我们证明，关于归纳极限拓扑，这是一个同胚。

引理 8.8. 设 E 是一个没有汇点或源点的有限有向图，并设 (G, E) 是一个收缩正则自相似群胚作用。固定 $x \in E^{\mathbb{Z}}$。映射 $y \mapsto [y]$ 关于 (8.4) 和 (8.5) 中所述的归纳极限拓扑，是从 $E_x^{\mathbb{Z}}$ 到 $\mathcal{S}^s([x])$ 的同胚。

证明. 固定 $n \in \mathbb{N}$。于是 $y \mapsto [y]$ 限制为从 $E_x^{\mathbb{Z}}(n)$ 到 $\mathcal{S}_n^s([x])$ 的双射。根据归纳极限拓扑的定义，只需证明该映射连续且为开映射。对于固定的 n，集合 $E_x^{\mathbb{Z}}(n)$ 是紧致的，因为它在 $E^{\mathbb{Z}}$中是闭的；集合$\mathcal{S}_n^s([x])$ 是豪斯多夫的，因为 $\mathcal{S}$ 是豪斯多夫的。由于 $y \mapsto [y]$ 是商映射，它在 $E_x^{\mathbb{Z}}(n)$ 上连续，因此可得它是一个同胚。□

现在我们分析任意 $x \in E^{\mathbb{Z}}$ 下 $G_{[x]}^u \rtimes \mathbb{Z}$ 的拓扑。

注 8.9. 对于任意满足 $m \le M$ 的 m、$M \in \mathbb{N}$，我们有

$$G_{\beta,m}^u = G_{\beta,M}^u \bigcap_{k:m\le k\le M} \{(\eta,\xi) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S} : d_{\mathcal{S}}(\tau^{-k}(\eta), \tau^{-k}(\xi)) < \beta\}.$$

因此，$G_{\beta,\ m}^u$ 在 G^u 中是开集，从而 $G_{\beta,\ m}^u \rtimes \{l\} := \{(\eta, l, \xi) : (\tilde{\tau}^{-l}(\eta)\ \ \xi) \in G_{\beta,\ m}^u\}$ 在 $G^u \rtimes \mathbb{Z}$ 中是开集。

引理 8.10. 设 E 是一个无源点的有限有向图，并设 (G, E) 是一个收缩的正则自相似作用。固定 $x \in E^{\mathbb{Z}}$。对于 k、$m \in \mathbb{N}$ 和 $l \in \mathbb{Z}$，令

$$X_{k,l,m} := \{([z], l, [y]) \in G_{\beta,m}^u \rtimes \{l\} : x(-\infty, -m) = y(-\infty, -m) = z(-\infty, -m)\}.$$

于是，$X_{k,\ l,\ m}$ 是 $G_{[x]}^u \rtimes \mathbb{Z}$ 的一个开子集，并且它从 $G_{[x]}^u \rtimes \mathbb{Z}$ 继承的相对拓扑与从 $\mathcal{S}\times\mathbb{Z}\times\mathcal{S}$ 继承的相对拓扑一致。

证明。我们有 $X_{k、\ l、\ m} = G_{\beta、\ k}^u \rtimes \{l\} \bigcap r^{-1}(q(E_x^{\mathbb{Z}}(m))) \cap s^{-1}(q(E_x^{\mathbb{Z}}(m)))$。根据注 8.9，第一个因子在 $G^u \rtimes \mathbb{Z}$ 中是开集。根据引理 8.8，像 $q(E_x^{\mathbb{Z}}(m))$ 在 $\mathcal{S}^s([x])$ 中是开集。因此，$X_{k、\ l、\ m}$ 在 $G_{[x]}^u \rtimes \mathbb{Z}$ 中是开集。$G_{\beta、\ k}^u \rtimes \{l\}$ 以及 $q(E_x^{\mathbb{Z}}(m))$ 上的拓扑分别是相对于 $\mathcal{S}\times\mathbb{Z}\times\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$ 的子空间拓扑。因此，对于开集三元组 $U \subseteq G^u \rtimes \mathbb{Z}$ 和 V、$W \subseteq \mathcal{S}^s([x])$，存在开集 $U' \subseteq \mathcal{S}\times\mathbb{Z}\times\mathcal{S}$ 和 V'、$W' \subseteq \mathcal{S}$，使得

$$\begin{aligned} &X_{k,l,m} \cap U \cap r^{-1}(V) \cap s^{-1}(W) \\ &\quad = \big(U \cap G_{\beta,k}^u \rtimes \{l\}\big) \cap \big(r^{-1}(V) \cap r^{-1}(q(E_x^{\mathbb{Z}}(m)))\big) \cap \big(s^{-1}(W) \cap s^{-1}(q(E_x^{\mathbb{Z}}(m)))\big) \\ &\quad = X_{k,l,m} \cap U' \cap r^{-1}(V') \cap s^{-1}(W'). \end{aligned}$$

由于 r、s 关于子空间拓扑连续，因此 $U' \cap r^{-1}(V') \cap s^{-1}(W')$ 在 $\mathcal{S}\times\mathbb{Z}\times\mathcal{S}$ 中是开集。因此，$X_{k,l,m}$ 相对于 $\mathcal{S}\times\mathbb{Z}\times\mathcal{S}$ 具有子空间拓扑。□

为简化记号，对于所有 z、$y \in E_x^{\mathbb{Z}}$，所有 m、$n \in \mathbb{N}$，以及所有满足 $g \cdot \sigma^n(\pi_x(y)) = \sigma^m(\pi_x(z))$ 的 $g \in G$，我们定义

$$[z, m, g, n, y] := (z, [\pi_x(z), m, g, n, \pi_x(y)], y) \in \mathcal{G}_{G,E}^{\pi_x}. \tag{8.6}$$

记号 8.11. 取有限路径 $\mu_-, \mu_+, \nu_-, \nu_+ \in E^*$，使得 $s(\mu_-) = r(\mu_+), s(\nu_-) = r(\nu_+)$，$|\mu_-| = |\nu_-|$，以及一个满足 $s(\nu_+) = d(g)$，$s(\mu_+) = c(g)$ 的元素 $g \in G$，我们定义

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+) = \{z \in E_x^{\mathbb{Z}} : z(-|\mu_-|, |\mu_+|) = \mu_-\mu_+ \\ \text{and } z(-\infty, -|\mu_-| - 1) = x(-\infty, -|\mu_-| - 1)\},\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+) = \{[z, |\mu_+|, g, |\nu_-|, y] \in \mathcal{G}_{G,E}^{\pi_x} : z \in \mathcal{Z}(\mu_-\mu_+), y \in \mathcal{Z}(\nu_-\nu_+)\}.$$

这两个集分别构成 $E_x^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{G}_{G,E}^{\pi_x}$ 上拓扑的基 .

我们证明 $\mathcal{G}_{G,E}^{\pi_x}$ 和 $G_{[x]}^u \rtimes \mathbb{Z}$ 同构。

定理 8.12. 设 E 是一个没有汇点或源点的有限有向图，并设 (G, E) 是一个收缩正则自相似群胚作用。固定 $x \in E^{\mathbb{Z}}$。映射 $\theta : \mathcal{G}_{G,E}^{\pi_x} \to G_{[x]}^u \rtimes \mathbb{Z}$ 满足 $\theta([z, m, g, n, y]) = ([z], m - n, [y])$，是拓扑群胚之间的同构。

证明。若 $[z, m, g, n, y] = [z', m', g', n'y']$，则由 (8.6) 得到 $z = z'$ 和 $y = y'$，并且根据定义 $m - n = m' - n'$，其中该定义关系定义了 $\mathcal{G}_{G,E}$。因此存在一个良定义的映射 θ，满足 $\theta([z, m, g, n, y]) = ([z], m - n, [y])$。

若对核 $\mathcal{N}$ 中的 g 有 $[z, m, h, n, y] \in \mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+)$，则 $g \cdot y(|\nu_+| + 1, \infty) = z(|\nu_+| + 1 + (m - n), \infty)$。引理 8.6 给出 $l \in \mathbb{N}$，使得 $([z], m - n, [y]) \in G_{\beta,|\nu_+|+l}^u \rtimes \{n - m\}$。我们有 $([z], m - n, [y]) \in r^{-1}(q(\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+))) \cap s^{-1}(q(\mathcal{Z}(\nu_-\nu_+)))$，因此 $([z], m - n, [y]) \in X_{|\nu_+|+l, |\mu_+|-|\nu_+|, |\nu_-|}$。于是，

$$\theta(\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+)) \subseteq X_{|\nu_+|+l, |\mu_+|-|\nu_+|, |\nu_-|}, \ g \in \mathcal{N}. \tag{8.7}$$

因此 $\theta(\mathcal{G}_{G,E}^{\pi_x}) \subseteq G_{[x]}^u \rtimes \mathbb{Z}$。

显然，θ 是一个群胚同态。

我们证明 θ 是连续的。只需证明，对于注记 8.11 中的所有 μ_+、μ_-、ν_+、ν_-，θ 限制为从 $\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+)$ 到 $X_{|\nu_+|+l, |\mu_+|-|\nu_+|, |\nu_-|}$ 的连续映射。由引理 8.10，$X_{|\nu_+|+l, |\mu_+|-|\nu_+|, |\nu_-|}$ 具有从 $\mathcal{S} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{S}$ 继承的子空间拓扑，因此只需证明 $\theta : \mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+) \mapsto \mathcal{S} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{S}$ 是连续的。

设 $([z_\lambda, m_\lambda, h_\lambda, n_\lambda, y_\lambda])_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+)$ 中收敛到 $[z, m, h, n, y]$ 的一个网。由于 r、s 是连续的，因此 $z_\lambda \to z$ 属于 $\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+)$，且 $y_\lambda \to y$ 属于 $\mathcal{Z}(\nu_-\nu_+)$。由于 $\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+)$ 和 $\mathcal{Z}(\nu_-\nu_+)$ 赋有相对于 $E^{\mathbb{Z}}$ 的子空间拓扑，我们有 $y_n \to y$，且 $z_n \to z$ 属于 $E^{\mathbb{Z}}$。由于商映射 $q : E^{\mathbb{Z}} \mapsto \mathcal{S}$ 是连续的，

$$([z_\lambda], m_\lambda - n_\lambda, [y_\lambda]) \to ([z], m_\lambda - n_\lambda, [y]) = ([z], m - n, [y])$$

在 $\mathcal{S} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{S}$ 中。因此，θ 是连续的。

现在，我们证明 θ 是开映射。只需证明每个 $\theta(\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+))$ 都是开的。

根据 (8.7) 和引理 8.10，只需证明 $\theta(\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+))$ 是 $X_{|\nu_+|+l, |\mu_+|-|\nu_+|, |\nu_-|}$ 的开子集。记 $n = |\nu_+|$, $m = |\mu_+|$ 和 $k = |\nu_-|$。令

$$\begin{aligned}\tilde{X} = \{([z], m - n, [y]) \mid \exists h \in F : h \cdot z(m + l + 1, \infty) = y(n + l + 1, \infty) \\ \text{and } x(-\infty, -k) = z(-\infty, -k) = y(-\infty, -k)\}.\end{aligned}$$

˜于是引理 8.6 给出 $X_{n+l,m-n,k} \subseteq X$。因此，只需证明 $\theta(\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+))$ 在从 $\mathcal{S}_k^s([x]) \times \{m-n\} \times \mathcal{S}_k^s([x])$ 继承的相对拓扑中是开的。

令 j 为将引理 4.4 应用于集合 $F = E^0 \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{N}^2$所得的数。令$L = \max\{(m+l+1+j)\ k, (n+l+1+j)\}$。固定 $(u, m, g, n, v) \in \mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+)$。令$W = q(\mathcal{Z}(u(-L,-1)u(1,L))) \times \{m-n\} \times q(\mathcal{Z}(v(-L,-1)v(l,L)))$。那么 W在 $\mathcal{S}_k^s([x]) \times \{m-n\} \times \mathcal{S}_k^s([x])$中是开集˜。我们证明 $W \cap X \subseteq \theta(\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+))$。

固定 $a, b \in E_x^{\mathbb{Z}}$, $m, n \in \mathbb{N}$和 $h \in F$，使得 $h \cdot a(m+l+1, \infty) = b(n+l+1, \infty)$, 且 $x(-\infty, -k) = a(-\infty, -k) = b(-\infty, -k)$。假设 $([a], m-n, [b]) \in W \cap X$。对于 $L \geq m, n, k$，路径 $\mu_-\mu_+, \nu_-\nu_+$ 分别是 $u(-L,-1)u(1,L)$、$v(-L,-1)v(1,L)$的子词。因此，由于 $q\colon E_x^{\mathbb{Z}} \mapsto \mathcal{S}^s([x])$ 是双射（引理 8.8），$([a], m-n, [b]) \in W$意味着 $a \in \mathcal{Z}(\mu_-\mu_+)$ 和 $b \in \mathcal{Z}(\nu_-\nu_+)$。只需证明 $g \cdot a(m+1, \infty) = b(n+1, \infty)$。

根据 L 的选择，我们有 $a(m+l+1, m+l+j) = u(m+l+1, m+l+j) =: p$ and $g|_{u(m+1,m+l+1)} \cdot p = h \cdot p$。根据 j 的选择，我们有 $g|_{u(m+1,m+l+j)} = h|_{a(m+l+1,m+l+j)}$。因此，

$$\begin{aligned} g \cdot a(m+1, \infty) &= v(n+1, n+l+j)(g|_{u(m+1,m+l+j)}) \cdot a(m+l+1+j, \infty) \\ &= b(n+1, n+l+j)(h|_{a(m+l+1,m+l+j)}) \cdot a(m+l+1+j, \infty) \\ &= b(n+1, \infty). \end{aligned}$$

˜我们已经证明，$\theta([u, m, g, n, v])$ 的开邻域 $W \cap X$ 包含于 $\theta(\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+))$ 中。因此，$\theta(\mathcal{Z}(\mu_-\mu_+, g, \nu_-\nu_+))$ 是开的，故 θ 是开映射。

现在，我们证明 θ 是一个双射。首先证明单射性。由于 $q\colon E_x^{\mathbb{Z}} \mapsto \mathcal{S}^s([x])$ 是一个双射，$\theta([z, m, g, n, y]) = \theta([z', m', g', n', y'])$ 意味着 $z = z'$ 和 $y = y'$。由于 $m - n = m' - n' = l$, 对于足够大的 k，我们有 $g|_{y(n,k)} \cdot y(k+1, \infty) = g'|_{y(n',k)} \cdot y(k+1, \infty)$。根据正则性，对于某个 $K \geq k$, $g|_{y(n,K)} = g'|_{y(n,K)}$。因此，$[z, m, g, n, y] = [z', m', g', n', y']$.

最后，我们证明满射性。固定 $([z], l, [y]) \in G_{[x]}^u \rtimes \mathbb{Z}$。由引理 8.6，存在$M \in \mathbb{N}$和 $g \in F$，使得 $M + l \geq 0$ 且 $g \cdot y(M+1, \infty) = z(M+l+1, \infty)$。因此$[z, M+l, g, M, y] \in \mathcal{G}_{G,\,E}^{\pi_x}$满足 $\theta([z, M+l, g, M, y]) = ([z], l, [y])$。□

推论 8.13. 设 E 是一个有限强连通有向图，且 (G, E) 是一个收缩正则自相似群胚作用。那么，第 6 节中的 C^*-代数 $\mathcal{O}(G, E)$ 与推论 5.5 中 Smale 空间 $(\mathcal{S}, \tilde{\tau})$ 的不稳定 Ruelle 代数 $C^*(G^u \rtimes \mathbb{Z})$ Morita 等价。

证明。固定 $x \in E^{\mathbb{Z}}$，使得 $[x]$ 在 $\tilde{\tau}$ 的作用下是周期的。由于假设 E 强连通，推论 5.5 蕴含 $(\mathcal{S}, \tilde{\tau})$ 不可约。因此，正如引理 8.10 上文所示，$G^u \rtimes \mathbb{Z}$ 与 $G_{[x]}^u \rtimes \mathbb{Z}$ 群胚等价。于是，$C^*(G^u \rtimes \mathbb{Z})$ 与 $C^*(G_{[x]}^u \rtimes \mathbb{Z})$ Morita 等价。定理 8.12 蕴含 $C^*(G_{[x]}^u \rtimes \mathbb{Z}) \cong C^*\left(\mathcal{G}_G^{\pi_x}, E\right)$。由于 E 强连通，π_x 是开满射，因此命题 3.10] 蕴含 $C^*(\mathcal{G}_{G,E})$ 与 $C^*(\mathcal{G}_G^{\pi_x}, E)$ Morita 等价，而命题 6.5 表明 $\mathcal{O}(G, E) \cong C^*(\mathcal{G}_{G,E})$。将这些同构和 Morita 等价串联起来，即得到所需的 Morita 等价 $C^*(G^u \rtimes \mathbb{Z}) \sim_{\mathrm{Me}} \mathcal{O}(G, E)$。□

注记 8.14. 如果 E 不是强连通的，那么 π_x 不一定是满射，并且$\mathcal{G}_{G,\,E}^{\pi_x}$ 仅与$\mathcal{G}_{G,\,E}$ 到 π_x的像（它是开的）的约化$\mathcal{G}_{G,\,E}|_{\pi_x(E_x^{\mathbb{Z}})}$ 群胚等价。不过，如果$\mathcal{G}_{G,\,E}$ 是极小的，那么$\mathcal{G}_{G,\,E}|_{\pi_x(E_x^{\mathbb{Z}})}$ 仍与$\mathcal{G}_{G,\,E}$群胚等价。

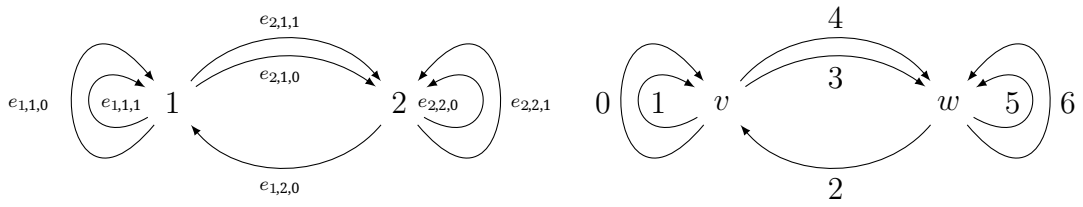


FIGURE 6. 邻接矩阵 A 由（8.8）定义了左侧的图 E。右侧我们重新标记了该图，以简化下文 Schreier 图的标记。

现在我们可以证明主要定理。

定理 8.1 的证明。推论 5.5 表明 $(\mathcal{S}, \tilde{\tau})$ 是一个不可约 Smale 空间。因此，[13] 的定理 1.1 表明，存在类 δ 属于 $KK^1\big(\mathbb{C}, C^*(G^s \rtimes \mathbb{Z}) \otimes C^*(G^u \rtimes \mathbb{Z})\big)$，以及 Δ 属于 $KK^1\big(C^*(G^s \rtimes \mathbb{Z}) \otimes C^*(G^u \rtimes \mathbb{Z})\ \mathbb{C}\big)$，使得 $\delta \widehat{\otimes}_{C^*(G^u \rtimes \mathbb{Z})} \Delta = \mathrm{id}_{\mathbb{K}(C^*(G^s \rtimes \mathbb{Z}))}$ 且 $\delta \widehat{\otimes}_{C^*(G^s \rtimes \mathbb{Z})} \Delta = -\mathrm{id}_{\mathbb{K}(C^*(G^u \rtimes \mathbb{Z}))}$。

推论 8.5 给出了 $C^*(G^s \rtimes \mathbb{Z})$ 与 $\widehat{\mathcal{O}}(G, E)$ 之间的 Morita 等价双模 K-等价 $\hat{\alpha} \in \widehat{K}K^0\big(\widehat{\mathcal{O}}(G, E)\ C^*(G^s \rtimes \mathbb{Z})\big)$。同样，推论 8.13 给出了一个 KK-等价 α in $KK\big(\mathcal{O}(G, E)\ C^*(G^u \rtimes \mathbb{Z})\big)$。因此，Kasparov 乘积

$$\beta := (\hat{\alpha} \otimes \alpha) \,\widehat{\otimes}\, \delta \,\widehat{\otimes}\, (\hat{\alpha} \otimes \alpha)^{-1} \quad \text{and} \quad \mu := (\hat{\alpha} \otimes \alpha) \,\widehat{\otimes}\, \Delta \,\widehat{\otimes}\, (\hat{\alpha} \otimes \alpha)^{-1}$$

实现了所需的对偶性。 □

例8.15. 含幺 Katsura 代数 [15] 来自非递归的自相似群胚，除非图只有一个顶点。Katsura 群胚由两个矩阵 A 和 B定义，其中 A 是图的邻接矩阵，而 B 决定了限制映射。

设 (G, E) 是由以下方式定义的 Katsura 群胚作用

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.8}$$

参见 [7, 定义 18.1] 或 [18, 例 7.7]。与 A相关联的图 E 如图 6 所示。

根据 [7, 备注 18.3], 的假设，群胚 G 是 $E^0 \times \mathbb{Z}$，其单位空间为 E^0，并且每个单位上方的各向同性群都是 $\mathbb{Z}$ 的一个副本。我们用 a_i 表示图 E 左侧（见图 6）顶点 i 上方的 $\mathbb{Z}$ 副本的生成元。对于 $\mu \in jE^*$，作用和限制映射由以下公式定义：

$$a_i \cdot e_{i,j,m}\mu = e_{i,j,n}(a_j^l \cdot \mu) \quad \text{where} \quad b_{ij} + m = la_{ij} + n \text{ and } 0 \le n < a_i. \tag{8.9}$$

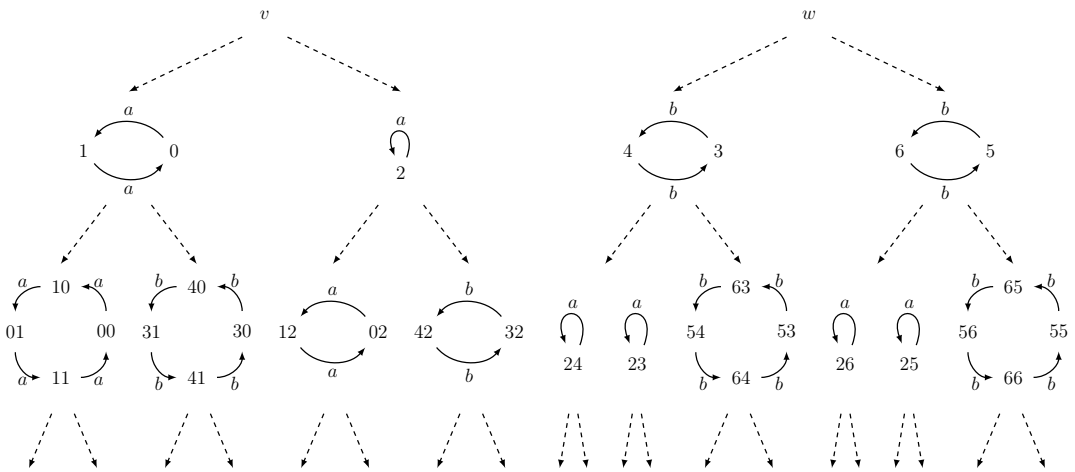


FIGURE 7. 与 Katsura 群胚（G， E）相关的前三个 Schreier 图： Γ_0、Γ_1 和 Γ_2。

因此，对于 (8.8) 中的矩阵，按照图 6 右侧重新标记的图的记号，并重新标记 $a := a_1$、 $b := a_2$，我们得到：

$$\begin{aligned} a\cdot 0 = 1,\ a|_0 = v; \qquad & b\cdot 3 = 4,\ b|_3 = v;\\ a\cdot 1 = 0,\ a|_1 = a; \qquad & b\cdot 4 = 3,\ b|_4 = a;\\ a\cdot 2 = 2,\ a|_2 = w; \qquad & b\cdot 5 = 6,\ b|_5 = w;\\ & b\cdot 6 = 5,\ b|_6 = b; \end{aligned}$$

利用 [7, 注 18，3], 由该 Katsura 群胚给出的 Kirchberg 代数 $\mathcal{O}(G,\ E)$ 的 K-理论为

$$\begin{aligned} K_0(\mathcal{O}(G,E)) &= \operatorname{coker}(I-A)\oplus\ker(I-B) = \mathbb{Z} \quad \text{and}\\ K_1(\mathcal{O}(G,E)) &= \operatorname{coker}(I-B)\oplus\ker(I-A) = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

前三个 Schreier 图 Γ_0、 Γ_1 和 Γ_2 如图 7 所示，各层由虚线分隔。对于收缩的自相似群（胚），虚线与实线的组合按照 Nekrashevych [22,第 3.7 节1]的定义构成一个自相似图。该自相似图的 Gromov 边界就是极限空间[22, 定理 3.78]。请注意，我们省略了顶点处的单位环。

极限空间 $\mathcal{J}$ 是一个圆的 Cantor 集，并带有一个覆盖映射 σ： $\mathcal{J}\to\mathcal{J}$该映射与图 E中的正向路径相一致。于是，Poincar´e 对偶性给出了由该以 Cantor 集为底的圆纤维丛上的移位映射所诱导的溶胶体的K-群。□

REFERENCES

[1] C. Anantharaman-Delaroche 和 J.N. Renault，《可容群胚》，前言由 Georges Skandalis 撰写，附录 B 由 E. Germain 撰写，L'Enseignement Math´ematique，日内瓦，2000，196。[2] J.H. Brown、L.O. Clark、C. Farthing 和 A. Sims，与 ´etale 群胚相关的代数的简单性，《Semigroup Forum》88（2014），433–452。[3] D. Burago、Y. Burago、S. Ivanov，《度量几何教程》，Graduate Studies in Mathematics，第 31 卷，美国数学会，普罗维登斯，2001。[4] A. Connes，《非交换几何》，Academic Press，伦敦和圣迭戈，1994。[5] R. Engelking，《一般拓扑学》，Sigma Series in Pure Mathematics，第 6 卷，Heldermann Verlag，柏林，1989。

[6] R. Exel，逆半群与组合 C^*-代数，《Bull. Braz. Math. Soc.》39（2008），191–313。[7] R. Exel 和 E. Pardo，自相似图：Katsura 与 Nekrashevych C^*-代数的统一处理，《Adv. Math.》306（2017），1046–1129。[8] C. Farsi、A. Kumjian、D. Pask 和 A. Sims，充足群胚：等价、同调与 Matui 的 HK 猜想，《M¨unster J. Math.》12（2019），411–451。[9] C. Fujita、H. Kato、M. Matsumoto，Ruelle 扩张映射的分形度量与扩张比，《Topol. Appl.》157(3)（2010），615–628。[10] Gelfand，I. 和 Na˘imark，M.，关于将赋范环嵌入希尔伯特空间中的算子环，《Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.》12（1943），197–213。[11] R. I. Grigorchuk，关于周期群的 Burnside 问题，《Func. Anal. Appl.》14（1980），41–43。[12]J. B. Hume，与有理函数相关的 C*-代数的 K-理论，预印本，arXiv:2307.13420 [math.KT]，（2023）。[13] J. Kaminker、I.F. Putnam 和 M.F. Whittaker，双曲动力系统的 K-理论对偶，《J. reine angew. Math.》730（2017），263–299。[14] J. Kaminker、C. L. Schochet，Spanier-Whitehead K-对偶性与 C^*-代数，《J. Topol. Anal.》11（2019），21–52。[15] T. Katsura，构造在 Kirchberg 代数上的作用，使其在相应K-群上诱导给定作用，《J. reine angew. Math.》617（2008），27–65。[16] B. Kitchens，《符号动力学：单边、双边及可数状态马尔可夫移位》，Universitext，Springer，1998。[17] M. Laca、I. Raeburn、J. Ramagge 和 M.F. Whittaker，自相似作用的 Cuntz–Pimsner 代数上的平衡态，《J. Funct. Anal.》266（2014），6619–6661。[18] M. Laca、I. Raeburn、J. Ramagge 和 M.F. Whittaker，群胚在图上的自相似作用所关联算子代数上的平衡态，《Adv. Math.》331（2018），268–325。[19] D. Maharam，关于齐次测度代数，《Proc.Nat. Acad. Sci. U.S.A.》28（1942），108–111。[20] P.S. Muhly、J.N. Renault 和 D.P. Williams，关于群胚 C^*-代数的等价与同构，《J. Operator Th.》17（1987），3–22。[21] V. Nekrashevych，群作用的 Cuntz–Pimsner 代数，《J. Operator Th.》52（2004），223–249。[22] V. Nekrashevych，《自相似群》，《数学调查与专著》第 117 卷，美国数学会，普罗维登斯，2005。[23] V. Nekrashevych， C^*-代数与自相似群，《J. reine angew. Math.》630（2009），59–123。[24] A.L.T. Paterson，《群胚、逆半群及其算子代数》，Progress in Math- ematics 第 170 卷，Birkh¨auser Boston，马萨诸塞州，1999。[25] V. Proietti 和 M. Yamashita，动力系统的同调与 K-理论 III：超越全不连通情形，预印本，arXiv 2207.03118，1–22。[26] I.F. Putnam，来自 Smale 空间的 C^*-代数，《Canad. J. Math.》48（1996），175-195。[27] I.F. Putnam，与双曲动力系统相关的 C^*-代数的函子性，《J. Lond. Math. Soc.》62(3)（2000），873–884。[28] I.F. Putnam 和 J. Spielberg，与双曲动力系统相关的 C^*-代数的结构，《J. Func. Anal.》163（1999），279–299。[29] I. Raeburn，《图代数》，CBMS 数学区域会议系列，第 103 卷，美国数学会，普罗维登斯，2005。[30] D. Ruelle，双曲微分同胚的非交换代数，《Invent. Math.》93（1988），1–13。[31] I.E. Segal，测度空间的等价，《American J. Math.》73（1951），275–313。[32] S. Wieler，通过逆极限得到 Smale 空间，《Erg. Th. Dynam. Sys.》34（2014），2066–2092。[33] I. Yi，来自一维广义螺线体的 C^*-代数的 K-理论，《J. Operator Th.》50（2000），283–295。

Nathan Brownlowe, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney电子邮箱地址：nathan.brownlowe@sydney.edu.au

Alcides Buss and Daniel Gonçalves, Departamento de Matemática, UniversidadeFederal de Santa Catarina电子邮箱：alcides.buss@ufsc.br, daemig@gmail.comJeremy B. Hume and Michael F. Whittaker, School of Mathematics and Statistics,University of Glasgow电子邮箱：jeremybhume@gmail.com, Mike.Whittaker@glasgow.ac.ukAidan Sims, School of Mathematics and Applied Statistics, University of Wollon-gong电子邮箱：asims@uow.edu.au