arXiv:2302.04020v1 [math.QA] 8 Feb 2023

# 关于量子群簇实现的多项式性猜想

Ivan Chi-Ho Ip*、Jeff York Ye*

2023年2月9日

摘要

本文给出了量子簇代数 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 中一个正则元素成为普适多项式的充要条件。这解决了第一作者提出的若干猜想，这些猜想涉及量子群生成元在不同族的正表示中的簇实现的多项式性。

## 目录

1. 引言 2

2. 簇代数预备知识 **4**
2.1 基本定义与性质.4 2.2 $c$和 $g$-向量.7 2.3 量子化.10 2.4 amalgamation.11

**3. Q量子群与正表示** **11**
3.1 根系.11 3.2 量子群 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 和 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$.12 3.3 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$ 的簇实现.13

4. 多项式条件 **15**
4.1 主要结果.15 4.2 簇折叠.20 4.3 推广到一般的 $G$-局部系统.23

5. 正则正表示 23

参考文献 **24**

*数学系，香港科技大学 电子邮箱：ivan.ip@ust.hk 电子邮箱：jyye@connect.ust.hk 第一作者由香港研究资助局一般研究基金 GRF #16305122 资助。

# 1 引言

设 $\mathfrak{g}$ 为一个半单李代数。量子群 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$最初由 Drinfeld[Dri90] 和 Jimbo [Jim85], 定义，它是对万有包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$进行变形得到的 Hopf代数。Drinfeld 双 $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$对应于 Borel 部分 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b})$的双。为了研究量子群的结构，可以将其嵌入量子环面代数$\mathbb{C}_q[\mathbb{T}]$ 或其有理函数斜域 $\mathbb{C}_q(\mathbb{T})$等更简单的代数中。Gerasimov–Kharchev–Lebedev–Oblezin 在 [GKL05] 和 [GKLO05] 中对最初为经典李群定义的 Gelfand–Tsetlin表示进行了推广，开展了这方面的研究，并获得了将 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$嵌入 $\mathbb{C}_q(\mathbb{T})$的结果。Feigin同态还提供了将正Borel部分 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}_+)$嵌入量子环面代数 [Ber96]的方法。然而，将整个量子群 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$嵌入$\mathbb{C}_q[\mathbb{T}]$ 则更加困难。对于 $A_n$型，这一问题由 Kashaev–Volkov [KV98]解决。

与此同时，这些嵌入与物理学中的量子Liouville理论相关，在该理论中， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$的Chevalley生成元在 $L^2(\mathbb{R})$上作为正自伴算子作用。Schm¨udgen [Sch96], Ponsot–Teschner [PT99][PT01]研究了 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$情形。

为了研究一般李类型下的这一问题，Frenkel和第一作者在 [FI14]中引入了分裂实量子群的正表示概念。Faddeev在 [Fad95] 中发展了分裂实量子群，并在 [Fad99], 中将其扩展为模双，这一发展受到了弦理论和共形场论的启发。基于Schrader–Shapiro在类型 $A_n$ [SS19], 情形下的思想，通过遗忘实结构，正表示给出了将一般李类型的量子群 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$嵌入某个量子环面代数的商$\mathcal{O}_q(\mathcal{X}_{\mathbf{D}(\mathsf{i}_0)})$中的嵌入；该量子环面代数与箭图D($\mathsf{i}_0$) [Ip18]相关。箭图D($\mathsf{i}_0$)与带框 $G$-局部系统的模空间$\mathscr{P}_{G,\odot}$的箭图变异等价，其中 $\odot$ 表示边界上有两个特殊点的一次穿孔圆盘 [GS22]。在后续工作中，这一嵌入在 [Ip20] 和 [IM22] 中得到了修改，从而给出了与经典抛物诱导的量子化以及广义Casimir算子的某种退化相关的正表示。

人们在 [Ip18, 第 1 节1] 和 [Ip20, 猜想 71]中提出猜想：对于量子环面代数的变异类中的任意一个簇， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的 Chevalley生成元的像都是簇变量的多项式。人们也怀疑，对于 [IM22] 中引入的同态，同样的结论也成立。本文的主要目标是解决这些猜想。

主定理（定理4.9）。对于同态

$$\kappa : \mathfrak{D}_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{O}_q(\mathcal{X})$$
$$\overline{\kappa} : \mathfrak{D}_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{O}_q(\overline{\mathcal{X}})$$
$$\kappa_0 : \mathfrak{D}_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{O}_q(\mathcal{X}^0)$$

在第3.3节中描述的，Chevalley生成元 $\mathsf{E}_i$、$\mathsf{F}_i$、$\mathsf{K}_i$、$\mathsf{K}_i'$ 的像都是量子簇变量的多项式，其系数属于 $\mathbb{N}[q^{\pm 1}]$；这一结论对变异类中的任意一个簇都成立。

证明思路是利用 $c$ 和 $g$-向量；已知对于斜对称种子数据，它们具有符号相干性 [GHKK14]。这使我们能够控制每次突变后簇 $\mathcal{X}$-变量的次数，并由此直接得到证明。

理解量子群在量子簇代数中的像所具有的多项式性的几何意义，将十分重要。正如 Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[X_k, X_k^{-1}]$

描述环面上的正则函数一样，多项式环 $\mathbb{C}[X_k]$ 通常与仿射空间上的正则函数相关联。因此，我们可以期待将量子群的诠释从量子环面代数中的元素推广到与量子平面相关联的元素；这一想法受 [Ip13], 启发，其中可以运用 $C^*$-和冯·诺依曼代数技术研究其像的乘子霍普夫结构，从而在 Drinfeld–Jimbo 型量子群与非交换几何之间建立新的联系。

此外，理解多项式像的组合描述将会很有意思，其中的系数预计计数与给定簇种子相关的某些典范对象。在 [SS17], 中，针对 $A_n$ 型量子群的标准嵌入情形，这一问题得到了明确解答：Borel 部分 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b})$ 的多项式像的系数，给出了与相应基本箭图的对偶平面双极图周围的同调圈的加权计数。在 [GS22] 中描述的 Lusztig 辫群作用 $T_{\mathrm{i}_0}$，可以解释为一系列突变；对于曲面上的每个三角形，这些突变为量子群嵌入提供了一个 $S_3$ 作用。本文结果表明，这些嵌入仍然是多项式。例如，在 $E_8$ 型中，以 Coxeter 词作为初始种子，通过大量暴力检验，$\mathbf{f}_0$ 生成元在化简到最终构型之前，经过突变得到一个含有 825887337 项的多项式，其中系数十分奇特，在 $\mathbb{N}[q^{\pm 1}]$ 中用 $q$-数之比表示 [Ip20]。对这些多项式及其系数给出更具组合性的描述将十分重要。

最后，在 [IM22], 中，我们提出了一项计划，旨在按照第5节所述对正则正表示进行分类。其中一个定义条件是，存在一个从量子群到某个量子簇簇的普适 Laurent 多项式的同态。本文的结果表明，目前为止考察的所有类别中，量子群的像都落在量子簇簇的普适多项式部分内。理解这是否构成了这类表示的特征，抑或是否还存在有待发现的中间类型，将至关重要。

本文的组织结构如下。第2节一般性地给出簇簇和量子簇代数的定义。第3节给出量子群的定义。接着，我们概述第一作者和 Man [Ip18], [Ip20], [IM22], as well as Goncharov 与 Shen [GS22], [She22] 关于将 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 嵌入簇代数的相关工作。第4节中，我们利用 $c$-向量的符号相干性，给出量子簇代数 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 中正则元素成为普适多项式的一个充分条件。借此，我们证明了第一作者提出的多项式性猜想。我们还利用 $G$-矩阵表述了另一个更抽象但充要的条件。对于零 Casimir 表示的多项式性，我们通过群作用定义簇折叠，并联系量子簇代数 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 与 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X}^G)$。最后，我们给出主定理的一些推广，包括将箭图的多个副本进行 amalgamation，这对应于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 中的余乘。第5节中，结合第4节得到的新结果，我们对 Ip 和 Man 在 [IM22], 中提出的正则正表示这一概念作一些评论。

# 2 簇代数预备知识

## 2.1 基本定义和性质

对于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{X}$ 簇簇，我们主要沿用 [FG09] 和 [GHK13] 中的记号。不过，我们稍作修改，按照 [Nak21, 第 6], 节中的定义，使 $A$ 和 $X$ 变量的变异公式与第一作者在 [Ip18], [Ip20] 中使用的公式以及 [FZ02] 中的原始定义相一致。（见注 2.8。）

定义 2.1. 一个固定数据 $\Gamma$ 由以下部分组成：

- 一个有限秩格 $N$，配备一个斜对称双线性型

$$\{\cdot,\cdot\} : N \times N \to \mathbb{Q}. \tag{2.1}$$

- An 非冻结子格 $N_{\mathrm{uf}} \subset N$，它是饱和的，即若 $kn \in N_{\mathrm{uf}}$，对于某个 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $n \in N$, then $n \in N_{\mathrm{uf}}$。若 $N_{\mathrm{uf}} = N$，则称该固定数据不含冻结变量。
- 一个指标集 $I$，其 $|I| = n$ :=秩为 $N$，且有一个子集 $I_{\mathrm{uf}}$，其$|I_{\mathrm{uf}}|$ = 秩为 $N_{\mathrm{uf}}$。
- 最大公约数为 1 的正整数 $d_i$，其中 $i \in I$。
- 一个有限指数子格 $N^\circ \subset N$，满足 $\{N^\circ, N_{\mathrm{uf}}\} \subset \mathbb{Z}$且 $\{N_{\mathrm{uf}} \cap N^\circ, N\} \subset \mathbb{Z}$。该子格 $N^\circ$ 依照下文定义 2.2 中的描述取决于 $d_i$。
- 格 $M$: $=$Hom$(N, \mathbb{Z})$ 和 $M^\circ$: $=$Hom$(N^\circ, \mathbb{Z})$。

定义 2.2。对于任意固定数据 $\Gamma$，种子 s := $(\mathbf{e}_i)_{i\in I}$ 是 $N$中元素的一个标记集合，使得 $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in I}$是 $N$的 $\mathbb{Z}$-基，$\{\mathbf{e}_i\}_{i\in I_{\mathrm{uf}}}$是 $N_{\mathrm{uf}}$的 $\mathbb{Z}$-基，且 $\{d_i\mathbf{e}_i\}_{i\in I}$是 $N^\circ$的 $\mathbb{Z}$-基。

给定一个种子 $\{\mathbf{e}_i^*\}$，我们得到 $M$ 的对偶基 $\{\mathbf{f}_i\}$，以及由下式给出的 $M^\circ$ 的基

$$\mathbf{f}_i := d_i^{-1}\mathbf{e}_i^*. \tag{2.2}$$

我们将交换矩阵定义为

$$\varepsilon_{ij} := d_i\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}, \tag{2.3}$$

当 $i$、$j$ 中至少有一个属于 $I_{\mathrm{uf}}$ 时，它属于 $\mathbb{Z}$。交换矩阵是可斜对称化的，其左斜对称化子为 diag($d_i^{-1}$ )。

交换矩阵对应于一个箭图 $Q$，其顶点由 $I$ 标记。对于每个 $i$、$j \in I$，如果 $\{\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j\} > 0$，则存在 $\{\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j\}$ 条从 $i$ 指向 $j$ 的箭头；如果 $\{\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j\} < 0$，则存在 $-\{\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j\}$ 条从 $j$ 指向 $i$ 的箭头。

定义 2.3。映射

$$n \mapsto \{\cdot, n\} \tag{2.4}$$

由条件 $\{N^\circ, N_{\mathrm{uf}}\} \subseteq \mathbb{Z}$ 和 $\{N_{\mathrm{uf}} \cap N^\circ, N\} \subseteq \mathbb{Z}$，分别可知映射 $p_1$: $N_{\mathrm{uf}} \to M^\circ$ 和 $p_2$: $N \to M^\circ/N^\perp{}_{\mathrm{uf}}$是良定义的。这里，对 $N_{\mathrm{uf}} \cap N^\circ \to N^\circ$ 取对偶得到满射$M^\circ \to$Hom$(N_{\mathrm{uf}}\cap N^\circ, \mathbb{Z})$，其核为 $N^\perp{}_{\mathrm{uf}}$，并且对于 $p_2$，我们有同一化 Hom$(N_{\mathrm{uf}}\cap N^\circ, \mathbb{Z}) \simeq M^\circ/N^\perp{}_{\mathrm{uf}}$。我们通过限制或取商，选取一个映射 $p$: $N \to M^\circ$，使其同时与 $p_1$ 和 $p_2$ 相容。

令 $[a]_+ := \max(0, a)$，且 $[a]_- := \min(0, a)$。

定义 2.4. 给定一个种子 $\mathbf{s}$ 和 $k \in I_{\mathrm{uf}}$，我们定义突变 $\mu_k$： $N \to N$ 为

$$\mu_k(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \mathbf{e}_i + [\varepsilon_{ki}]_+ \mathbf{e}_k & i \neq k \\ -\mathbf{e}_k & i = k \end{cases}. \tag{2.5}$$

显然， $\{\mu_k(\mathbf{e}_i)\}_{i \in I}$ 仍然是 $N$的一组基， $\{\mu_k(\mathbf{e}_i)\}_{i \in I_{\mathrm{uf}}}$ 仍然是 $N_{\mathrm{uf}}$的一组基，并且$\{d_i \mu_k(\mathbf{e}_i)\}$仍然是 $N^\circ$的一组基。于是，对于新种子 $\mu_k(\mathbf{s})$: $= \{\mu_k(\mathbf{e}_i)\}_{i \in I}$，可以验证

$$\mu_k(\mathbf{f}_i) := d_i^{-1} \mu_k(\mathbf{e}_i)^* = \begin{cases} \mathbf{f}_i & i \neq k \\ -\mathbf{f}_k + \sum_j [-\varepsilon_{jk}]_+ \mathbf{f}_j & i = k \end{cases}, \tag{2.6}$$

交换矩阵则变为

$$\mu_k(\varepsilon_{ij}) := d_i \{\mu_k(\mathbf{e}_i), \mu_k(\mathbf{e}_j)\} = \begin{cases} -\varepsilon_{ij} & k \in \{i, j\} \\ \varepsilon_{ij} & \varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} \leq 0, k \notin \{i, j\} \\ \varepsilon_{ij} + |\varepsilon_{ik}|\varepsilon_{kj} & \varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} > 0, k \notin \{i, j\} \end{cases}. \tag{2.7}$$

注意，这个矩阵突变与 [FZ02] 中定义的交换矩阵突变一致。它也可以写成

$$\mu_k(\varepsilon_{ij}) = \begin{cases} -\varepsilon_{ij} & k \in \{i, j\} \\ \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ik}[\varepsilon_{kj}]_+ + [-\varepsilon_{ik}]_+ \varepsilon_{kj} & k \notin \{i, j\} \end{cases}. \tag{2.8}$$

设 $\mathfrak{T}$ 为一棵无限定向根树，每个顶点有 $|I_{\mathrm{uf}}|$ 条出边，并以 $I_{\mathrm{uf}}$中的元素标记。我们将 $\mathfrak{T}$ 的根标记为 $t_0$，并将一个种子 $\mathbf{s}_0$ 附着到 $t_0$，称为初始种子。每个节点 $t \in \mathfrak{T}$ 都对应一个突变序列，以及由初始种子得到的种子 $\mathbf{s}_t$ 。我们将使用下标 $t \in \mathfrak{T}$ 来标明各项是由哪个种子得到的；如果无需强调种子，则可能省略 $t = t_0$ 的下标。例如，若 $t_0 \xrightarrow{k} t_1$，则 $\varepsilon_{ij;t_1} := \mu_k(\varepsilon_{ij})$。

设 $\Bbbk$ 为零特征域。对于任意满足 $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ 的格 $N$，定义在 $\Bbbk$ 上的代数环面 $T_N$ 是概形 $T_N$:=Spec $\Bbbk[M]$，其中 $\Bbbk[M]$ 同构于由 $\Bbbk$-线性组合 $z^m$ （ $m \in M$ ）构成的群环， $z$ 是形式变量。

对于给定的种子 $\mathbf{s}$，我们考虑代数环面

$$\mathcal{X}_{\mathbf{s}} := T_{M,\mathbf{s}} = \operatorname{Spec} \Bbbk[N] \tag{2.9}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbf{s}} := T_{N^\circ,\mathbf{s}} = \operatorname{Spec} \Bbbk[M^\circ], \tag{2.10}$$

其中下标 $\mathbf{s}$ 表示种子的选择。

定义 2.5。对于 $k \in I_{\mathrm{uf}}$ ，我们定义双有理映射

$$\mu_k : \mathcal{X}_{\mathbf{s}} \dashrightarrow \mathcal{X}_{\mu_k(\mathbf{s})}$$
$$\mu_k : \mathcal{A}_{\mathbf{s}} \dashrightarrow \mathcal{A}_{\mu_k(\mathbf{s})}$$

通过函数的拉回

$$\mu_k^*(z^n) = z^n (1 + z^{\mathbf{e}_k})^{-\{d_k \mathbf{e}_k, n\}} \qquad n \in N \tag{2.11}$$

$$\mu_k^*(z^m) = z^m (1 + z^{\mathbf{v}_k})^{-\langle d_k \mathbf{e}_k, m \rangle} \qquad m \in M^\circ \tag{2.12}$$

其中，$\mathbf{v}_k = p(\mathbf{e}_k) = \{\cdot, \mathbf{e}_k\} \in M^\circ$，而 $\langle \cdot, \cdot \rangle$是 $N^\circ$与 $M^\circ$之间的配对。注意，这些映射隐式依赖于 $\mathbf{s} = (\mathbf{e}_i)_{i \in I}$的选取。

对于 $X_i := z^{\mathbf{e}_i}$, $A_i := z^{\mathbf{f}_i}$, $X_i' := z^{\mu_k(\mathbf{e}_i)}$，以及 $A_i' := z^{\mu_k(\mathbf{f}_i)}$，变异公式等价于

$$\mu_k^*(X_i') = \begin{cases} X_i X_k^{[\varepsilon_{ki}]_+}(1+X_k)^{-\varepsilon_{ki}} & i \neq k \\ X_k^{-1} & i = k \end{cases} \tag{2.13}$$

and

$$\mu_k^*(A_i') = \begin{cases} A_i & i \neq k \\ A_i^{-1}\left(\prod_j A_j^{[\varepsilon_{jk}]_+} + \prod_j A_j^{[-\varepsilon_{jk}]_+}\right) & i = k \end{cases}. \tag{2.14}$$

如开篇所述，这些公式与 [FZ02] 和 [FZ07] 中定义的簇变量及通用有理函数的突变公式相差一个 $\varepsilon_{jk}$的转置。

定义 2.6。Fock-Goncharov $\mathcal{A}$, $\mathcal{X}$ 簇簇是通过变异双有理映射，将所有与初始种子 $\mathsf{s}_0$ 变异等价的种子 $\mathsf{s}$ 对应的 $\mathcal{A}_{\mathsf{s}}$ 和 $\mathcal{X}_{\mathsf{s}}$粘合而得到的。

映射 $p\colon N \to M^\circ$ 诱导出映射 $p\colon \mathcal{A} \to \mathcal{X}$，其定义为 $p^*(z^n) = z^{p(n)}$，直接检验可得

$$p^*(\mu_k^*(z^n)) = z^{p(n)}(1+z^{p(\mathbf{e}_k)})^{-\{d_k\mathbf{e}_k,n\}},$$
$$\mu_k^*(p^*(z^n)) = z^{p(n)}(1+z^{\mathbf{v}_k})^{-\langle d_k\mathbf{e}_k,p(n)\rangle},$$

因此，根据 $p$的定义， $p^*(\mu_k^*(z^n)) = \mu_k^*(p^*(z^n))$。用 $A$ 和 $X$ 变量表示，映射 $p$ 定义为

$$p^*(X_i) = \mathbb{A}\prod_{j\in I_{\mathrm{uf}}} A_j^{\varepsilon_{ji}}, \tag{2.15}$$

其中， $\mathbb{A}$ 是对冻结的 $k \in I \setminus I_{\mathrm{uf}}$取 $A_k$ 乘积，它取决于 $p$的选择。

Laurent 现象是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{X}$上函数正则性的一个著名结果。证明见 [FZ02], [GHK13，第 3]节。

定理 2.7（Laurent 现象）。对于任意种子 $\mathsf{s}$,

1. 设 $z^m \in \Bbbk[M^\circ]$，使得对于每个 $i \in I_{\mathrm{uf}}$， $\langle m, d_i\mathbf{e}_i\rangle \geq 0$。那么 $z^m \in \mathcal{O}(\mathcal{A}$ ).
2. 设 $z^n \in \Bbbk[N]$，使得对于每个 $i \in I_{\mathrm{uf}}$， $\{\mathbf{e}_i, n\} \geq 0$。那么 $z^n \in \mathcal{O}(\mathcal{X})$。

特别地，任意簇 $\mathcal{A}$-变量 $A_i := z^{\mathbf{f}_i}$ 都是 $\mathcal{A}$上的正则函数。

在 [GHKK14]中，这类函数称为全局单项式。在其他文献中，它们分别称为 $\mathcal{A}$ 的簇单项式和 $\mathcal{X}$ 的标准单项式。

最后，我们回顾热带化 $\mathcal{X}(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$如下。设 $\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}}$ 为半域 $(\mathbb{Z}, +, \min)$，且 $Q_{sf}(M)$为 $\Bbbk[N]$的分式域中的无减法有理函数集合，该集合是一个半域。我们定义 $T_M(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}}) := \mathrm{Hom}^{sf}(Q_{sf}(M)\ \mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$。由于单项式 $\{z^n\}_{n\in N}$生成 $Q_{sf}(M)$，我们得到一个双射

$$\mathrm{Hom}_{sf}(Q_{sf}(M), \mathbb{Z}^{\mathrm{trop}}) \to \mathrm{Hom}_{group}(N, \mathbb{Z}) = M.$$

根据变异公式，每个在 $\Bbbk[N]$ 上的突变 $\mu_k^*$ 都是可逆的，且只涉及无减法表达式，因此它在 $Q_{sf}(M)$上诱导出一个同构。这使我们能够粘合 $T_M(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$，从而得到$\mathcal{X}(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$。在 $\mathfrak{T}$中选择每个顶点，都会给出一个同一化 $\mathcal{X}(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}}) = M$。

我们固定使用一个初始种子 $\mathsf{s}_0$ 来进行此同一化，从而确定 $\mathbf{e}_i^* \in \mathcal{X}(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$ 的一种选择。对于每个 $t \in \mathfrak{T}$，令

$$x_{ij;t} := \mathbf{e}_i^*(\mu_t^*(X_{j;t})) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{trop}}, \tag{2.16}$$

其中 $\mu_t$ 是由 $t$确定的拉回的复合。于是对于 $\mathfrak{T}$中的 $t \overset{k}{\to} t'$，将 $\mathbf{e}_i^*$ 作用于变异公式可得

$$x_{ij,t'} = \begin{cases} -x_{ik;t} & \text{if } j = k \\ x_{ij;t} + [\varepsilon_{kj;t}]_+ x_{ik;t} + \varepsilon_{kj;t}[-x_{ik;t}]_+ & \text{if } j \neq k \end{cases}. \tag{2.17}$$

我们还给出另一种热带化的方法。我们不固定初始种子和 $\mathbf{e}_i^* \in \mathcal{X}(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$，而是令

$$y_{ij;t} := \mathbf{e}_{i;t}^*((\mu_t^{-1})^*(X_j)) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{trop}}.$$

这里 $\mathbf{e}_{i;t}^*$ 随 $t$变化，但我们固定初始种子中的簇单项式 $X_j$。

注 2.8. 在簇 $\mathcal{A}$-变量和 $\mathcal{X}$-变量的层面上，这里采用的定义与 [FG09] 及 [GHKK14] 中的定义，通过对交换矩阵 $(\varepsilon_{ij})$取转置而相关；该交换矩阵在 [FG09 第 1]节中有详细介绍。然而，对于 $G$-局部系统的研究，由于 Cartan 矩阵的选取不同（同样相差一个转置），这两种记法给出的簇代数完全相同。

## 2.2 $c$和 $g$-向量

本节介绍 $c$ 和 $g$-向量，它们最初由 [FZ07] 引入，用于描述带主系数的簇代数的突变。这里我们采用 [GHKK14], 中的重新诠释；借助这一诠释，他们证明了可斜对称化情形下的符号相干猜想。

我们首先需要定义主固定数据，它构造了带主系数的簇簇。

定义 2.9. 给定固定数据 $\Gamma$，主固定数据 $\Gamma_{\mathrm{prin}}$ 是满足以下条件的固定数据：：

- $\widetilde{N} = N \oplus M^\circ$ 配备取值于 $\mathbb{Q}$ 的斜对称双线性型

$$\{(n_1, m_1), (n_2, m_2)\} = \{n_1, n_2\} - \langle n_1, m_2\rangle + \langle n_2, m_1\rangle. \tag{2.18}$$

  这里，配对 $M^\circ \times N^\circ \to \mathbb{Z}$通过 $\langle \mathbf{e}_i, m\rangle = d_i^{-1}\langle d_i \mathbf{e}_i, m\rangle$ 扩展到 $M^\circ \times N \to \mathbb{Q}$。

- $\widetilde{N_{\mathrm{uf}}} = N_{\mathrm{uf}} \oplus 0 \subset N$.~
- $N^\circ = N^\circ \oplus M$.
- $\widetilde{M} = M \oplus \widetilde{N^\circ}$, $M^\circ = M^\circ \oplus N$。
- 指标集 $I$ 是 $I$ 的两个副本的不交并，其中 $d_i$ 与 $\Gamma$ 中相同。未冻结指标是第一个 $I$ 副本中的原始 $I_{\mathrm{uf}}$。

定义 2.10。对于 $\Gamma$ 的任意初始种子 $\mathsf{s} = (\mathsf{e}_1, \cdots, \mathsf{e}_n)$，将 $\Gamma_{\mathrm{prin}}$ 的 $\widetilde{\mathsf{s}}$ 的初始种子选为

$$\widetilde{\mathbf{s}} := ((\mathbf{e}_1, 0), \cdots, (\mathbf{e}_n, 0), (0, \mathbf{f}_1), \cdots, (0, \mathbf{f}_n)) \tag{2.19}$$

并给出一个变异类 $[\widetilde{\mathsf{s}}]$。对于每个 $t \in \mathfrak{T}$，我们将沿着由 $t$定义的未冻结指标序列，将 $\widetilde{\mathsf{s}}$ 突变记为 $\widetilde{\mathsf{s}}_t$。

我们将相应的 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{X}$ 簇簇（对应于 $\Gamma_{\mathrm{prin}}$）分别记为 $\mathcal{A}_{\mathrm{prin}}$ 和 $\mathcal{X}_{\mathrm{prin}}$。

注意，对于 $\mathsf{s}_t = (\mathsf{e}_{1;t}, \cdots, \mathsf{e}_{n;t})$，以下等式并不成立：

$$\widetilde{\mathbf{s}}_t = ((\mathbf{e}_{1;t}, 0), \cdots, (\mathbf{e}_{n;t}, 0), (0, \mathbf{f}_{1;t}), \cdots, (0, \mathbf{f}_{n;t})).$$

然而，根据突变规则的定义，前半部分仍然正确。因此，我们仍有一个从 $\mathcal{A}_{\mathbf{s}_t} \subset \mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}_{\mathrm{prin},\mathbf{s}_t} \subset \mathcal{A}_{\mathrm{prin}}$ 的提升 $A_{i;t} = z^{\mathbf{f}_{i;t}}$，其中我们将 $\mathbf{f}_{i;t}$ 与 $(\mathbf{f}_{i;t}, 0) \in \widetilde{M^\circ}$ 视为相同。

我们将第二份 $I$ 中的指标记为 $i'$，它们分别对应于第一份 $I$ 中的每个 $i$。就箭图 $Q$ 而言，这相当于对于 $Q$ 中的每个 $i$ 添加一个冻结顶点 $i'$ 以及一个箭头 $i' \to i$，因为根据定义，$\{(\mathbf{e}_i, 0), (0, \mathbf{f}_i)\} = -1$。

定义 2.11. 对每个 $t \in \mathfrak{T}$，$\mathsf{s}_t$ 的 $C$-矩阵 $C_t$ 是一个 $n \times n$-矩阵，其元素为

$$c_{ij} = \widetilde{\varepsilon}_{i'j;t} := d_i\{\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_j\}, \quad i, j \in I \tag{2.20}$$

$C_t$ 的列向量 $\mathsf{c}_{j;t}$ 称为 $c$-向量。

对于 $g$-向量，考虑由 $(m, n) \mapsto m - p(n)$ 给出的满射 $M^\circ \to M^\circ$。这给出了 $T_{\widetilde{N}^\circ}$ 上的 $T_{N^\circ}$ 环面作用。具体地，令 $m - p(n) = \sum_{i \in I} c_i \mathbf{f}_i \in M^\circ$。则点 $(a_i) \in T_{N^\circ}$ 的作用为

$$(a_i) \cdot z^{(m,n)} = \prod_{i \in I} a_i^{c_i} z^{(m,n)}.$$

该作用与突变 2.12 相容，因为我们有 $\{\cdot, (\mathbf{e}_k, 0)\} = (p(\mathbf{e}_k), \mathbf{e}_k)$，所以 $z^{\{\cdot, (\mathbf{e}_k, 0)\}}$ 的权为 0。因此我们得到 $\mathcal{A}_{\mathrm{prin}}$ 上的 $T_{N^\circ}$ 环面作用。显然，任意簇单项式 $z^{(m,n)}$ 在此作用下都是一个 $T_{N^\circ}$- 本征函数，其权为 $m - p(n)$。

定义 2.12。$g$-向量 $\mathsf{g}_{j;t}$ 是将 $A_{j;t}$ 提升到 $\mathcal{A}_{\mathrm{prin}}$后所得提升的 $T_{N^\circ}$-权。它通过基 $(\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_n)$ 与 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个向量相对应。

关于 $c$ 和 $g$-向量的符号相干性的下述定理，在 [FZ07 第6] 节中被猜想，并在 [GHKK14 第 5] 节中得到证明。

定理 2.13。对于每个 $j \in I$，$\mathsf{c}_{j;t}$ 的各项要么全非负，要么全非正。对于每个 $i \in I$，任意 $j \in I$ 的 $\mathsf{g}_{j;t}$ 的 $i$ 坐标要么全非负，要么全非正。

为便于后续使用，我们需要一个关于 $c$ 和 $g$-向量的显式变异公式，该公式最初见于 [FZ07]。

引理 2.14。$c$-向量由以下初始条件给出

$$c_{ij;t_0} = \delta_{ij} \tag{2.21}$$

以及以下变异公式

$$c_{ij;t'} = \begin{cases} -c_{ik;t} & \text{if } j = k \\ c_{ij} + c_{ik}[\varepsilon_{kj}]_+ + [-c_{ik}]_+ \varepsilon_{kj} & \text{if } j \neq k \end{cases} \tag{2.22}$$

对于 $t \overset{k}{\to} t'$ 中的 $\mathfrak{T}$。

证明。由 2.7 中的变异公式和 2.9 中的初始条件可立即得出。 □

引理 2.15。 $g$-向量由初始条件

$$g_{ij;t_0} = \delta_{ij} \tag{2.23}$$

和变异公式

$$g_{ij;t'} = \begin{cases} g_{ij;t} & \text{if } j \neq k \\ -g_{ik;t} + \sum_{l\in I} g_{il;t}[\varepsilon_{lk;t}]_+ - \sum_{l\in I} \varepsilon_{il;t_0}[c_{lk;t}]_+ & \text{if } j = k \end{cases} \tag{2.24}$$

给出，其中 $t \overset{k}{\rightarrow} t'$ 属于 $\mathfrak{T}$。

证明。根据 2.14 中的变异公式,

$$\mu_k^*(A_{j;t'}) = A_{j;t}^{-1}\left(\prod_{l\in I} A_{l;t}^{[\varepsilon_{lk;t}]_+}\prod_{l\in I} A_{l';t}^{[\varepsilon_{l'k;t}]_+} + \prod_{l\in I} A_{l;t}^{[-\varepsilon_{lk;t}]_+}\prod_{l\in I} A_{l';t}^{[-\varepsilon_{l'k;t}]_+}\right).$$

注意，$A_{l';\,t} = A_{l';\,t_0}$ 在突变下保持不变，因为 $l'$ 是冻结的。

上面的变异公式中的两个单项式必须具有相同的 $T_{N^\circ}$-权重，因为$\mu_k^*(A_{j;t'})$以及每个 $A_{l;t}$、$A_{l';\,t}$都是 $T_{N^\circ}$-特征向量。因此，我们可以使用第一项计算权重。根据定义 $c_{lk;t} = \varepsilon_{l'k;\,t}$，而 $A_{l';\,t_0} = z^{(0,\mathbf{e}_l)}$ 的权重为 $-p(\mathbf{e}_l)$。因此， $T_{N^\circ}$的 $A_{j;t'}$ -权重为

$$\mathbf{g}_{j;t'} = -\mathbf{g}_{j;t} + \sum_{l\in I}[\varepsilon_{lk;t}]_+\mathbf{g}_{l;t} - \sum_{l\in I}[c_{lk;t}]_+ p(\mathbf{e}_{l;t_0}).$$

在根 $t_0 \in \mathfrak{T}$ 上， $p(\mathbf{e}_l)$ 的 $\mathbf{f}_i$ 系数为

$$d_i\langle \mathbf{e}_i, p(\mathbf{e}_l)\rangle = d_i\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l\} = \varepsilon_{il},$$

结论由此得出。 □

注 2.16. 通过改用第二项进行计算，变异公式 2.24 也可以写成

$$g_{ij;t'} = \begin{cases} g_{ij;t} & \text{if } j \neq k \\ -g_{ik;t} + \sum_{l\in I} g_{il;t}[-\varepsilon_{lk;t}]_+ - \sum_{l\in I} \varepsilon_{il;t_0}[-c_{lk;t}]_+ & \text{if } j = k \end{cases}. \tag{2.25}$$

最后，我们注意到 2.22 中 $c$-向量的突变与热带化变异 2.17 一致。因此得到以下引理

引理 2.17. 对任意 $t \in \mathfrak{T}$, $x_{ij;t} = c_{ij;t}$。

同时，利用 [NZ12、式 (1.13)] 和定理 2.13，我们得到以下引理

引理 2.18. 设 $g_{ij}^\dagger$ 为注 2.8 中定义的转置种子所关联的 $g$-向量。则对于任意 $t \in \mathfrak{T}$,

$$y_{ij;t} = g_{ji;t}^\dagger. \tag{2.26}$$

## 2.3 量子化

为定义量子簇代数，我们将第 2.1 节中的定义量子化如下:

定义 2.19. 设 $q$ 为一个形式参数。对于任意有限秩格 $N$，若其带有取值于 $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$ 的斜对称双线性形式 $\{\cdot,\cdot\}$，则量子环面代数 $\mathbb{k}_q[N]$ 定义为由 $z^n$（$n \in N$）生成的 $\mathbb{k}_q = \mathbb{k}[q^{\pm 1/d}]$ 上的非交换代数，并满足以下关系:

$$q^{\{n_1,n_2\}} z^{n_1} z^{n_2} = z^{n_1+n_2}.$$

对于 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X}_{\mathbf{s}}) := \mathbb{k}_q[N]$ 和 $\mathcal{O}_q(\mathcal{A}_{\mathbf{s}}) := \mathbb{k}_q[M^\circ]$，突变 2.11 和 2.12 的量子化由拉回映射给出，而其像是除环中的元素（由 Ore 条件保证定义良好）:

$$\mu_k^*(z^n) := \mathrm{Ad}_{\Psi_{q_k}(z^{\mathbf{e}_k})} z^n, \qquad n \in N \tag{2.27}$$

$$\mu_k^*(z^m) := \mathrm{Ad}_{\Psi_{q_k}(z^{\mathbf{v}_k})} z^m \qquad m \in M^\circ, \tag{2.28}$$

其中 $q_k := q^{1/d_k}$，而 $\Psi_{q_k}(z^{\mathbf{e}_k})$ 是由下式定义的量子对数函数:

$$\Psi_q(x) := \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^{2r-1}x}, \tag{2.29}$$

而 $\mathrm{Ad}_\Psi$ 表示由 $\Psi$ 进行的共轭。

与 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{A}$ 的定义类似，我们将量子上簇代数 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 和 $\mathcal{O}_q(\mathcal{A})$ 定义为

$$\mathcal{O}_q(\mathcal{X}) := \bigcap_{t\in\mathfrak{T}} \mu_t^*(\mathcal{O}_q(\mathcal{X}_{\mathbf{s}_t})), \tag{2.30}$$

$$\mathcal{O}_q(\mathcal{A}) := \bigcap_{t\in\mathfrak{T}} \mu_t^*(\mathcal{O}_q(\mathcal{A}_{\mathbf{s}_t})), \tag{2.31}$$

其中包含在任意种子中都正则的有理函数。

对于 $X_i = z^{\mathbf{e}_i}$ 和 $X_i' = z^{\mathbf{e}_i'}$，直接计算表明，2.27 可改写为

$$\mu_k^*(X_i') = \begin{cases} X_k^{-1} & i = k \\ X_i \prod_{r=1}^{|\varepsilon_{ki}|}(1+q_k^{2r-1}X_k) & i \neq k, \varepsilon_{ik} \leq 0 \\ X_i \prod_{r=1}^{|\varepsilon_{ki}|}(1+q_k^{2r-1}X_k^{-1})^{-1} & i \neq k, \varepsilon_{ik} \geq 0 \end{cases}, \tag{2.32}$$

而对于 $A_i' = z^{\mathbf{f}_i'}$，2.28 可改写为

$$\mu_k^*(A_i') = \begin{cases} A_i & i \neq k \\ z^{\mathbf{f}_k'} + z^{\mathbf{f}_k'+\mathbf{v}_k} & i = k \end{cases}, \tag{2.33}$$

注意，取 $q = 1$ 后，我们可以恢复经典突变公式 2.13 和 2.14。

为便于后续使用，我们记

$$X_{i_1,\cdots,i_k} := z^{\mathbf{e}_{i_1}+\cdots+\mathbf{e}_{i_k}}$$

对于 $i_1$、$\cdots$、$i_k \in I$。注意，$X_{i_1,\ \cdots,\ i_k} \neq X_{i_1}\cdots X_{i_k}$。

经典簇代数中的许多良好性质都可以推广到量子簇代数。例如，我们仍有单射 $p^*: \mathcal{O}_q(\mathcal{X}) \to \mathcal{O}_q(\mathcal{A})$。量子 Laurent 现象在 [BZ05] 中对 $A$ 变量得到了证明，并在 [GS22]中借助 $p^*$ 推广到了 $X$ 变量。

定理 2.20（量子 Laurent 现象）。对于任意种子 s,

1. 设 $z^v \in \mathbb{k}_q[M^\circ]$ 满足对每个 $i \in I_{\mathrm{uf}}$都有 $\langle v, e_i\rangle \geq 0$。则 $z^v \in \mathcal{O}_q(\mathcal{A})$。
2. 设 $z^v \in \mathbb{k}_q[N]$ 满足对每个 $i \in I_{\mathrm{uf}}$都有 $\{e_i, v\} \geq 0$。则 $z^v \in \mathcal{O}_q(\mathcal{X})$。

特别地，任意量子簇代数的 $\mathcal{A}$-变量 $A_i = z^{\mathbf{f}_i}$ 都属于 $\mathcal{O}_q(\mathcal{A}_q)$。

第 2.1 节中引入的热带化可以通过限制到将 $q^{\pm 1/D}$ 映为 0 的半域同态，扩展到 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$。容易验证，量子 $X$ 变量的热带突变与经典情形完全一致。

## 2.4 amalgamation

簇代数的另一种重要构造是 amalgamation，它对应于沿冻结变量粘合两个箭图。该构造由 [FG06] 引入，自然地出现在对高阶 Teichm¨uller 理论中簇代数的研究里，因为我们将与三角形相关的箭图沿其边界粘合，从而得到一般曲面的箭图。

定义 2.21. 设 $\{(\Gamma_a, \mathrm{s}_a)\}_{a\in A}$ 是一组有限的种子数据。对于任意带有满射的指标集 $I$

$$\rho : \bigsqcup_{a\in A} I_a \to I$$

使得:

- 限制 $\rho_a := \rho|_{I_a}$ 对所有 $a \in A$ 都是单射,
- 若 $\rho(j) = \rho(k)$ 对于 $j \in I_a$ 和 $k \in I_{a'}$ 成立，则 $j, k$ 是冻结的，且 $d_j = d_k$。

amalgamation 是一个新的种子数据 $(\Gamma, \mathrm{s})$，其中

- $N$ 是由 $\mathrm{s} = \{\mathbf{e}_i\}_{i\in I}$ 张成的 $\bigoplus_{a\in A} N_a$ 的子格，其中

$$\mathbf{e}_i = \sum_{\rho(j)=i} \mathbf{e}_j,$$

- 双线性形式 $\{\cdot,\cdot\}$ 由直和 $\bigoplus_{a\in A} N_a$诱导而来。
- 对于每个 $i \in I$，任意 $j \in \rho^{-1}(i)$ 均有 $d_i = d_j$。

容易看出，簇代数 $\mathcal{O}(\mathcal{A}_\Gamma)$ 是张量积 $\bigotimes_{a\in A} \mathcal{O}(\mathcal{A}_{\Gamma_a})$ 的子代数，并且存在自然单射 $\mathcal{O}(\mathcal{A}_{\Gamma_a}) \to \mathcal{O}(\mathcal{A}_\Gamma)$，由 $A_j \mapsto A_{\rho(j)}$ 给出。相同的构造也适用于簇 $\mathcal{X}$ 一侧及其量子化。

# 3 量子群与正表示

## 3.1 根系

设 $\mathfrak{g}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、秩为 $r$ 的有限维半单李代数。设 $I = \{1, \cdots, r\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图的指标集。设 $\Phi$ 是 $\mathfrak{g}$ 的根系，其内积为 $(\cdot,\cdot)$，$\Pi_+ = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ 是一组单正根，$\Phi_+$ 是正根集。设

$$a_{ij} := \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \qquad i, j \in I \tag{3.1}$$

且 $A := (a_{ij})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵。每个简单正根都带有一个整数乘子 $d_i$ ，满足

$$d_i^{-1} := \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_i) \tag{3.2}$$

使得 $d_i^{-1}a_{ij} = d_j^{-1}a_{ji}$.[1] 我们有 $d_i \in \{1, 2, 3\}$。

我们还有简单正余根 $\{\alpha_i^\vee\}_{i\in I}$，使得 $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = a_{ij}$；以及基本权 $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$，使得 $\langle \Lambda_j, \alpha_i^\vee \rangle = \delta_{ij}$。

Weyl 群 $W$ 是由简单反射 $s_i := s_{\alpha_i}$生成的 $\Phi$ 的等距变换群。它有唯一的最长元 $w_0$，该元诱导一个对合 $*$: $I \to I$，使得

$$\alpha_{i^*} = -w_0(\alpha_i). \tag{3.3}$$

## 3.2 量子群 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 和 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$

令 $q_i = q^{1/d_i}$，与第 2.3 节中的定义相同，并令 $d = lcm\{d_i\}_{i\in I}$。对于 $n$、$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，定义

$$[n]_q := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \qquad [n]_q! := \prod_{s=1}^{n}[s]_q, \qquad \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[m]_q![n-m]_q!}.$$

定义 3.1。我们将 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$ 定义为由 $\{\mathrm{E}_i、\mathrm{F}_i、\mathrm{K}_i^{\pm 1}、\mathrm{K}_i'^{\pm 1}\}_{i\in I}$ 生成的 $\mathbb{C}(q^{1/d})$-代数，其满足以下关系：

$$\mathbf{K}_i\mathbf{K}_j = \mathbf{K}_j\mathbf{K}_i, \qquad \mathbf{K}_i'\mathbf{K}_j' = \mathbf{K}_j'\mathbf{K}_i', \tag{3.4}$$

$$\mathbf{K}_i\mathbf{K}_j' = \mathbf{K}_j'\mathbf{K}_i, \qquad [\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_j] = \delta_{ij}(q_i - q_i^{-1})(\mathbf{K}_i' - \mathbf{K}_i), \tag{3.5}$$

$$\mathrm{K}_i\mathrm{E}_j = q^{a_{ij}}\mathrm{E}_j\mathrm{K}_i, \qquad \mathbf{K}_i\mathbf{F}_j = q^{-a_{ij}}\mathbf{F}_j\mathbf{K}_i, \tag{3.6}$$

$$\mathrm{K}_i'\mathrm{E}_j = q^{-a_{ij}}\mathrm{E}_j\mathrm{K}_i', \qquad \mathbf{K}_i'\mathbf{F}_j = q^{a_{ij}}\mathbf{F}_j\mathbf{K}_i', \tag{3.7}$$

以及量子Serre关系

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_q \mathbf{E}_i^k\mathbf{E}_j\mathbf{E}_i^{1-a_{ij}-k} = 0, \tag{3.8}$$

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_q \mathbf{F}_i^k\mathbf{F}_j\mathbf{F}_i^{1-a_{ij}-k} = 0. \tag{3.9}$$

定义 3.2. $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$ 具有 Hopf代数结构，其余乘为

$$\Delta(\mathbf{E}_i) = 1 \otimes \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{K}_i, \qquad \Delta(\mathbf{K}_i) = \mathbf{K}_i \otimes \mathbf{K}_i, \tag{3.10}$$

$$\Delta(\mathbf{F}_i) = \mathbf{F}_i \otimes 1 + \mathbf{K}_i' \otimes \mathbf{F}_i, \qquad \Delta(\mathbf{K}_i') = \mathbf{K}_i' \otimes \mathbf{K}_i', \tag{3.11}$$

余单位

$$\varepsilon(\mathbf{E}_i) = \varepsilon(\mathbf{F}_i) = 0, \qquad \varepsilon(\mathbf{K}_i) = \varepsilon(\mathbf{K}_i') = 1, \tag{3.12}$$

以及反 antipode

$$S(\mathbf{E}_i) = -\mathbf{K}_i^{-1}\mathbf{E}_i, \qquad S(\mathbf{K}_i) = \mathbf{K}_i^{-1}, \tag{3.13}$$

$$S(\mathbf{F}_i) = -\mathbf{F}_i\mathbf{K}_i, \qquad S(\mathbf{K}_i') = \mathbf{K}_i'^{-1}. \tag{3.14}$$

[1]这里对 $d_i$ 的定义是 [Ip18] 中定义的逆映射，目的是使其与固定数据中的乘子相匹配。参数 $q_i$ 一致，因此量子簇代数和量子群的定义与 [Ip18]中的相同。

定义 3.3. 量子群 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$由以下商给出

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})/\langle \mathbf{K}_i\mathbf{K}_i' = 1\rangle_{i\in I}. \tag{3.15}$$

注意， $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$ 可以与量子群的 Borel 部分 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b})$ 的 Drinfeld 双相识别。

## 3.3 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$ 的簇实现

### 3.3.1 带穿孔圆盘实现

在 [Ip18], 中，第一作者为任意约化词 $\mathrm{i}_0$ 构造了一个箭图 $\mathrm{D}(\mathrm{i}_0)$，并证明存在一个嵌入 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$，将其嵌入该箭图对应的量子簇代数 $\mathcal{O}_q$ 中。$\mathrm{F}_i$ 的像是沿某些 $F_i$-路径的望远镜和，而 $\mathrm{K}_i'$ 生成元的像是沿 $F_i$-路径的单项式。当 $\mathrm{i}_0$ 的选取恰当时，例如当 $i_N = i$ 且 $N = l(w_0)$ 时，$\mathrm{E}_i$ 和 $\mathrm{K}_i'$ 的像也如此。

定理 3.4（[Ip18，定理 4.14]）。给定 Weyl 群最长元的一个约化词 $\mathrm{i}_0$，存在一个秩为 $2l(w_0) + 2r$ 的箭图 $\mathrm{D}(\mathrm{i}_0)$，它给出量子环面代数 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X}_{\mathbf{D}(\mathrm{i}_0)})$，并存在一个嵌入

$$\iota : \mathfrak{D}_q(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(\mathcal{X}_{q,\mathbf{D}(\mathrm{i}_0)}), \tag{3.16}$$

它下降为一个嵌入

$$\iota : \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(\mathcal{X}_{q,\mathbf{D}(\mathrm{i}_0)})/\langle \iota(\mathbf{K}_i)\iota(\mathbf{K}_i') = 1\rangle_{i\in I}. \tag{3.17}$$

这些嵌入原则上取决于约化词 $\mathrm{i}_0$ 的选择。在 [Ip18 第 7], 节中还证明了，对于 $\mathrm{i}_0$, 的不同选择，每个辫子关系对应的箭图 $\mathrm{D}(\mathrm{i}_0)$ 都通过变异彼此关联。基于这一观察，第一作者猜想存在一些嵌入

$$\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(\mathcal{X}), \qquad\qquad \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(\mathcal{X})/\mathcal{I}, \tag{3.18}$$

它们不依赖于 $\mathrm{i}_0$。

这一猜想在 [GS22] 中得到证明。Goncharov 和 Shen 构造了 $G$-局部系统$\mathscr{P}_{G,\mathbb{S}}$的模空间，其中 $G$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂半单伴随群，而 $\mathbb{S}$ 是满足一些温和条件的装饰定向曲面。$\mathscr{P}_{G,\mathbb{S}}$ 上的一个 $G$-局部系统是一个主 $G$-丛 $\mathcal{L}$，定义在 $\mathbb{S}$ 上，带有平坦联络以及以下额外数据：

1. 在边界特殊点 $m$ 处，在 $m$ 的一个小邻域上，关联装饰旗丛 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}\times_G \mathcal{A}$ 的一个平坦截面。

2. 在每个穿孔 $p$ 处，在 $p$ 的一个小邻域上，关联旗丛 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \mathcal{L} \times_G \mathcal{B}$ 的一个平坦截面。

GS22 第 10] 节证明了 [$\mathscr{P}_{G,\ \mathbb{S}}$ 具有簇泊松结构，也就是说，它对应于一个簇 $\mathcal{X}$-簇簇。对于 $\mathbb{S}$ 的每种理想三角剖分选择，以及每个三角形的一个顶点选择和 $w_0$ 的一个约化词选择，都有一个图册。这些图册彼此之间由一系列突变联系起来。随后，我们对这个簇代数进行量子化，并得到量子上簇代数 $\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\ \mathbb{S}})$。

对于每个边界特殊点 $s$ 和 $i \in I$，都有函数 $\mathcal{W}_{s,\ i}$,$\mathcal{K}_{s,\ i} \in \mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\ \mathbb{S}})$。这些函数由 $\mathscr{P}_{G,\ \mathbb{S}}$ 的 $G$-局部系统定义通过几何方式构造，然后提升到量子簇代数中。函数 $\mathcal{W}_{s,\ i}$ 称为势函数；猜想它们是镜像对称中的朗道-金兹堡势。

当 $\mathbb{S}=\odot$ 是一个具有两个边界特殊点 $s$、$t$ 的一次穿孔圆盘时，$\mathscr{P}_{G,\odot}$ 的箭图与 [Ip18] 中构造的箭图变异等价。存在一个外单值映射

$$\mu_{out}:\mathscr{P}_{G,\odot}\to H,$$

使得对所有 $i\in I$，条件 $\mu_{out}=1$ 对应于 $\mathcal{K}_{s,i}\mathcal{K}_{t,i^*}=1$。根据 [GS22，引理 15，函数 $\mathcal{W}_{s,i}$ 和 $\mathcal{K}_{s,i}$ 经过一系列突变后成为单项式，并满足定理 2.20 中的假设。因此，$\mathcal{W}_{s,i},\mathcal{K}_{s,i}\in\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\odot})$，并且我们有如下映射，它们映入通常的量子上簇代数 $\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\odot})$，以及 $\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\odot})_{\mu_{out}=1}$，从而改进了定理 3.4。

定理 3.5（[GS22，定理 3.21]）。存在一个典范嵌入

$$\kappa:\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})\to\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\odot}) \tag{3.19}$$

由 $\mathrm{E}_i\mapsto\mathcal{W}_{s,i}$、$\mathrm{F}_i\mapsto\mathcal{W}_{t,i^*}$、$\mathrm{K}_i\mapsto\mathcal{K}_{s,i}$、$\mathrm{K}_i'\mapsto\mathcal{K}_{t,i^*}$给出，它下降为一个嵌入

$$\kappa:\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\to\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\odot})_{\mu_{out}=1}. \tag{3.20}$$

事实上，该像在穿孔处由 [GS22 第 13]，节定义的魏尔群作用下保持不变，但我们并不需要这一点，因此这里不作详细描述。

在 [She22]，中，文中证明了当 $\mathfrak{g}$ 是单连通时，嵌入 $\kappa:\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\to\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\odot})$ 可下降为一个同构

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\simeq\mathcal{O}_q(\mathscr{L}_{G,\odot}),$$

其中 $\mathscr{L}_{G,\odot}$ 由 $\mathscr{P}_{G,\odot}$ 先遗忘穿孔处的标架得到空间 $\mathrm{Loc}_{G,\odot}$，然后取单位元 $1\in H$ 上方的纤维 $\mu_{out}^{-1}(1)$ 得到。我们也猜想这对一般的 $\mathfrak{g}$ 成立。注意，遗忘标架的映射

$$\mathscr{P}_{G,\odot}\to\mathrm{Loc}_{G,\odot}$$

是一个伽罗瓦 $W$-覆盖，因此映射 $\kappa$ 恰好由于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的像在魏尔群作用下不变，而下降到 $\mathcal{O}_q(\mathrm{Loc}_{G,\odot})$。

### 3.3.2 抛物实现

基于定理 3.4，第一作者为每个抛物子群 $P_J\subset G$ 构造了 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$ 的簇实现，其中 $J\subset I$ 是 Dynkin 节点 [Ip20] 的任意子集。简单反射 $(s_j)_{j\in J}$ 生成魏尔群的抛物子群 $W_J\subset W$。设 $w_J$ 为 $W_J$ 的最长元。那么我们可以将 $w_0$ 分解为

$$w_0=w_J\overline{w}$$

对于唯一的 $\overline{w}\in W$，以及任意 $\overline{w}$ 的约化词 $\overline{\mathrm{i}}$，都会得到一个箭图 $\mathrm{D}(\overline{\mathrm{i}})$。

设 $\mathcal{O}_q(\overline{\mathcal{X}})$ 为与 $\mathrm{D}(\overline{\mathrm{i}})$ 相关联的量子簇代数。

定理 3.6（[Ip20，定理 5.2]）。存在一个同态

$$\overline{\kappa}:\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})\to\mathcal{O}_q(\overline{\mathcal{X}}). \tag{3.21}$$

### 3.3.3 零 Casimir 元素实现

In [SS17], Schrader 和 Shapiro 描述了 D(i) 的一个变异序列，其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ 和

$$\mathbf{i} = (1, 2, 1, 3, 2, 1, \cdots, n, n-1, \cdots, 1), \tag{3.22}$$

使得新的箭图包含一个具有 $n+1$ 变量的对称部分。基于这一变异序列，第一作者和 Man 对这些变量进行了折叠，得到一个新的箭图和新的量子簇代数 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X}^0)$ [IM22]。鉴于 3.16 中的嵌入，簇变量的折叠与 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$ 中的卡西米尔算子 $\mathbf{C}_k$ 相关，从而得到以下结果：

定理 3.7（[IM22，定理 4.5]）。存在一个嵌入

$$\kappa_0 : \mathfrak{D}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})/\langle \mathbf{C}_k = 0 \rangle \to \mathcal{O}_q(\mathcal{X}^0). \tag{3.23}$$

利用一般李类型 $\mathfrak{g}$ 中抛物 $A_k$ 部分的包含关系，嵌入 3.23 可推广如下：

定理 3.8（[IM22，定理 5.1]）。对于任意 $A_k$ 型的抛物子群 $P_J \subset G$，存在一个同态

$$\kappa_0 : \mathfrak{D}_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{O}_q(\mathcal{X}^0). \tag{3.24}$$

其中，$\mathcal{O}_q(\mathcal{X}^0)$ 是通过对箭图 $\mathsf{D}(\mathbf{i}_0)$ 的抛物 $A_k$ 部分的对称部分进行折叠而得到的。

# 4 多项式条件

## 4.1 主要结果

为主定理做准备，我们首先讨论一个种子的簇 $\mathcal{X}$-变量中的单项式或多项式成为普适单项式或普适多项式的充分条件。考虑一个固定数据 $\Gamma$，它具有如定义 2.1–2.2 中所述的固定初始种子 $\mathsf{s}_0 = (\mathbf{e}_i)_{i \in I}$。

引理 4.1. 设 $z^v \in \mathbb{k}_q[N]$ 满足：对于每个 $i \in I_{\mathrm{uf}}$，$\{\mathbf{e}_i, v\} = 0$。那么，对于变异类中 $\mathsf{s}_0$ 的任意种子，$z^v$ 总是量子簇变量的单项式。

证明. 由于 $z^v$ 和 $z^{-v}$ 均满足定理 2.20 中的假设，它们对于变异类中的任意种子都是簇变量的 Laurent 多项式，因此必定是单项式。 □

命题 4.2. 对于任意种子 $\mathsf{s}_t$，$t \in \mathfrak{T}$，令

$$v = \sum_{i \in I - I_{\mathrm{uf}}} a_i \mathbf{e}_{i;t},$$

对某个 $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，并假设对于每个 $j \in I_{\mathrm{uf}}$，$\{\mathbf{e}_{j;t}, v\} \geq 0$。那么，对于变异类中的任意种子，$z^v \in \mathbb{k}_q[N]$ 仍然是量子簇变量的多项式。

证明。只需在初始种子处验证。根据定理 2.20，$\mu_t^*(z^v)$ 是一个 Laurent 多项式。同时，考虑热带化 (2.16)。对于每个 $l \in I$，利用引理 2.17，我们得到

$$\mathbf{e}_l^*(\mu_t^*(z^v)) = \sum_{i \in I - I_{\mathrm{uf}}} a_i x_{li;t} = \sum_{i \in I - I_{\mathrm{uf}}} a_i c_{li;t}.$$

由于冻结顶点 $i \in I - I_{\mathrm{uf}}$ 永不发生突变，按照定义，$c_{ii;t} = 1$。由 $c$-向量的符号相干性可知，对于所有 $l \in I$，$c_{li;t} \geq 0$。这表明，对于所有 $l \in I$，$\mathbf{e}_l^*(\mu_t^*(z^v)) \geq 0$，因此 $\mu_t^*(z^v)$ 中每个 $X_l$ 的幂都是非负的，且 $\mu_t^*(z^v)$ 是一个多项式。 □

命题 4.2 中的条件是充分但非必要的。例如，对于与马尔可夫箭图（不含冻结顶点）相关联的量子簇代数，单项式 $X_1X_2X_3$ 在突变下保持不变，因此是普适多项式。

有趣的是，可以问究竟哪些标准单项式是普适多项式；更一般地，可以问 $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ 或 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 中的全局多项式子环究竟是什么。一个必要条件如下所示。

固定一个初始种子 $\mathsf{s}_0$，其对应的簇 $\mathcal{X}$-变量为 $X_1$、$\cdots$、$X_n$。令 $f \in \mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 为 $\widetilde{\ } X_i$ 中的一个多项式，且其中出现的每个单项式都确定 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 中的一个向量 $\vec{v}$。令 $G_t$ 为 $g^{\dagger}_{ji;t}$ 的矩阵，如引理 2.18 中所述。

$\widetilde{\ }$命题 4.3. $f$ 是普适多项式，当且仅当对所有 $t \in \mathfrak{T}$ 和所有 $\vec{v}$，都有 $G_t\vec{v} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$。

$\widetilde{\ }$证明。正向结论的证明与命题 4.2 的证明相同。反之，设对某些 $t \in \mathfrak{T}$ 和 $\vec{v}$，有 $G_t\vec{v} \notin \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$。由 [NZ12、命题 4.2] 和定理 2.13 可知，$G_t$ 可逆，因此不同的 $\vec{v}$ $\widetilde{\ }$对应不同的 $G_t\vec{v}$ $\widetilde{\ }$。回顾引理 2.18 以及 $y_{ij;t}$ 的定义可知，$G_t\vec{v}$ 对应于关于 $\mathsf{s}_t$ 的最低次项。这表明其负次幂不会相互抵消，且 $f$ 在种子 $\mathsf{s}_t$ 中含有负次幂项。 □

虽然命题 4.3 刻画了所有通用多项式，但我们不知道如何妥善地$\widetilde{\ }$计算确切条件，因为一般而言，当 $t$ 遍历$\mathfrak{T}$时，$G_t$ 有无穷多个。不过，借助 [GHKK14]的语言，$g$-向量是簇复形 $\Delta^+(\mathbb{Z})$中各室的生成元；簇复形由簇室构成，每个簇室都是热带化 $\mathcal{A}^\vee(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$中的一个锥。因此，我们可以将该条件重新表述如下。

推论 4.4. 设 $f \in \mathcal{O}_q(\mathcal{X})$。那么，$f$ 是普适多项式，当且仅当对于某个种子 $\mathsf{s}$ 中 $f$ 出现的每个单项式$z^n$，$\langle n,$ 对于每个 $m \in \Delta^+(\mathbb{Z}),\ m\rangle \geq 0$。

例 4.5. 如果 $\mathcal{A}$ 的簇复形很大，那么 $\Delta^+(\mathbb{Z})$不包含在任何半空间中，因此 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$中不存在非平凡的通用多项式。例如，当 $\mathcal{A}$ 具有无环种子，或具有带极大绿色序列的种子时，就会出现这种情况 [GHKK14，推论 8.30]。

这表明，在许多情况下，包括 GS22 定理2中讨论的局部系统模空间，冻结变量对于使 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 具有非平凡的通用多项式是必要的。

例4.6。考虑第3.3节中描述的标准箭图，它对应于图1中 $\mathfrak{D}_q(_2)$ 的嵌入，其中 1、3 为冻结的。

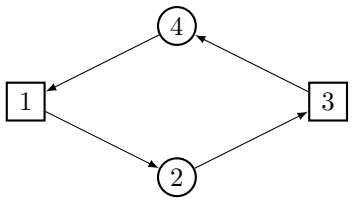


图1： $\mathcal{X}_q^{\mathrm{std}}$ 的箭图。

容易计算得出

$$\mathcal{O}(\mathcal{X}) = \Bbbk[X_2^{\pm}, X_4^{\pm}, (X_1X_3)^{\pm}, X_3(1+X_4), X_1(1+X_2)]. \tag{4.1}$$

~这个箭图是斜对称的，因此转置种子就是它本身。4 种可能的种子对应的矩阵 $G_t$ 为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

分别，因此命题 4.3 中的条件就是对每个单项式都有 $d_1 \geq d_2$ 和 $d_3 \geq d_4$ mial $X_1^{d_1}X_2^{d_2}X_3^{d_3}X_4^{d_4}$，且包含所有 $d_i \geq 0$。于是，全局多项式子环可明确写为 y

$$\Bbbk[X_1(1+X_2), X_3(1+X_4), X_1X_3, X_1X_2X_3, X_1X_3X_4, X_1X_2X_3X_4], \tag{4.2}$$

（其中用 ′ 表示变异种子中的变量）也可以写成

$$\Bbbk[X_1X_3, \mu_2^*(X_1'), \mu_2^*(X_1'X_3'), \mu_4^*(X_3''), \mu_4^*(X_1''X_3''), \mu_2^*\mu_4^*(X_1'''X_3''')].$$

因此，在这种情况下，命题 4.2 中的单项式生成通用多项式。

注 4.7。在命题 4.3 中，该判据无法确定 $f \in \Bbbk_q[X_1, \cdots, X_n]$是否属于 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$，因此我们需要假设 $f \in \mathcal{O}_q(\mathcal{X})$。这引出了一个问题：$\mathcal{O}(\mathcal{X})$ 或 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 的确切大小是多少，例如它是否由标准单项式生成。这个关于 $\mathcal{X}$ 一侧的问题，与簇代数是否等于其上簇代数的问题相类似；后者在 $\mathcal{A}$ 一侧成立 [BFZ05]。

下面的引理给出了一类普适多项式函数。

引理 4.8. 设 $\mathcal{X}$ 是由箭图 $Q$ 定义的簇簇。假设 $Q$ 包含一个类型为 $A_n$ 的子箭图 $Q'$，其顶点由 $1, \ldots, n$ 编号，其中顶点 1 和 $n$ 是冻结顶点，并且对每个 $i = 1, ..., n-1$，都有一个箭头 $(i \to i+1)$。假设对于任意非冻结顶点 $v \in Q - Q'$，

- 不存在箭头 $(1 \to v)$，
- 对于任意 $v' \in Q'$，至多存在一个箭头 $(v \to v')$ 或 $(v' \to v)$，
- 每当存在一个箭头 $v \to v'$ 时，就存在另一个 $v'' \in Q'$，使得 $(v'' > v')$，且其上有一个箭头 $(v'' \to v)$；并且 $v$ 与 $Q'$ 中位于 $v'$ 和 $v''$ 之间的任何顶点都不相邻。

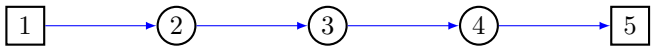


图2： $n = 5$的 $A_n$ 型箭图。

那么这些多项式

$$X_1 + X_{1,2} + \cdots + X_{1,2,\cdots,n-1} := z^{\mathbf{e}_1} + z^{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + \cdots + z^{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\cdots+\mathbf{e}_{n-1}} \tag{4.3}$$

$$X_{1,2,\cdots,n} := z^{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\cdots+\mathbf{e}_n} \tag{4.4}$$

是普适多项式。

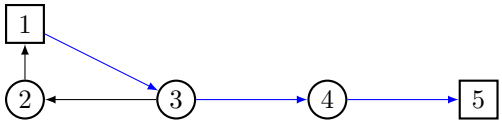


图3：图2中的箭图在顶点 2 处突变后得到的箭图。

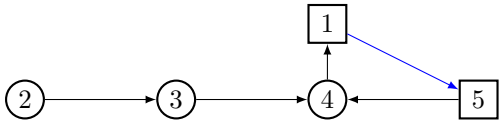


图4：图2中的箭图在顶点 $2,\cdots,n-1$处突变后得到的箭图。

证明。从图2出发，我们首先在2处进行变异，得到图3中的箭图。通过直接计算，

$$\mu_2^*(X_1'+X_{1,3}'+X_{1,3,4}'+\cdots+X_{1,3,4,\cdots,n-1}')=X_1+X_{1,2}+\cdots+X_{1,2,\cdots,n-1},$$
$$\mu_2^*(X_{1,3,4,\cdots,n}')=X_{1,2,\cdots,n}.$$

然后我们在 $3,\cdots,n-1$ 处进行突变，得到图4中的箭图。
归纳可得结果

$$\mu^*(X_1'')=X_1+X_{1,2}+\cdots+X_{1,2,\cdots,n-1},$$
$$\mu^*(X_{1,n}'')=X_{1,2,\cdots,n}.$$

为了应用命题 4.2，我们需要描述 $1,n$ 与$Q-Q'$中的顶点之间的箭头。对于任意 $v\in Q-Q'$，最初若 $v$与 1 之间存在箭头，则必为单个箭头（$v\to 1$）；根据假设，还存在另一个带有箭头（$v'\to v$）的 $v'\in Q'$。然后，箭头（$v\to 1$）在 $(2,3,\ldots,v')$ 处突变后消失。类似地， $v$与 $n$之间的所有箭头在突变后都会消失。因此，如图4所示，在最后一步突变时，与 1 和 $n$ 相连的箭头仅有（$n\to n-1$）和（$n-1\to n$），故满足命题 4.2 中的假设。 □

最后，我们介绍并证明本文的主定理。

定理4.9。对于

$$\kappa:\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})\to\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$$
$$\overline{\kappa}:\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})\to\mathcal{O}_q(\overline{\mathcal{X}})$$
$$\kappa_0:\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})\to\mathcal{O}_q(\mathcal{X}^0)$$

第3.3节中所描述的同态，Chevalley生成元 $E_i$、$F_i$、$K_i$、$K_i'$ 的像，对于变异类中的任意簇，都是以 $\mathbb{N}[q^{\pm1}]$ 中的系数表示的量子簇变量的多项式。

证明。$F_i$ 和 $K_i'$ 在 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 中的像由下式给出

$$\mathbf{F}_i\mapsto X_{\binom{i}{-n_i}}+X_{\binom{i}{-n_i},\binom{i}{-n_i+1}}+\cdots+X_{\binom{i}{-n_i},\cdots,\binom{i}{n_i-1}},$$
$$\mathbf{K}_i'\mapsto X_{\binom{i}{-n_i},\binom{i}{-n_i+1},\cdots,\binom{i}{n_i-1}}.$$

这里，$\binom{i}{k}$ 是 [GS22], 中使用的指标，其中每个 $i$ 对应一个正简单根 $\alpha_i$，而 $n_i$是 $\alpha_i$ 在为$\mathcal{X}$选择种子时所用的 $w_0$ 的约化表达式中出现的次数。根据构造，箭图 D(i) 是由基于 Dynkin 图的三角箭图粘合而成的，因此满足引理 4.8 中的假设，并且对于变异类中的任意种子，$\mathrm{F}_i$、$\mathrm{K}_i'$ 都映射为簇变量的多项式。

对于 $\mathrm{E}_i$ 和 $\mathrm{K}_i$，我们可以为 $w_0$ 选择一个约化词 i，使得 $i_N = i$。随后，已知[Ip18] ，$\mathrm{E}_i$ 和 $\mathrm{K}_i$ 的像分别与 (4.3)–(4.4) 中的伸缩和与单项式变异等价，它们沿着 $E_i$-路径排列，而该路径恰好是一个 $A_3$ 箭图。引理 4.8 再次表明，对于变异类中的任意一个簇，$\mathrm{E}_i$、$\mathrm{K}_i$ 都映射为簇变量的多项式。

对于抛物表示，$\mathrm{F}_i$ 和 $\mathrm{K}_i'$ 的论证相同，因为 $F_i$ 路径仍属于类型 $A_n$。对于 $\mathrm{E}_i$ 和 $\mathrm{K}_i$，由于分解 $w_0 = w_J\overline{w}$ 的限制，我们可能无法再自由选择约化词$i_N = i$ 。因此，我们采用证明 [Ip20, 引理 5.18], 中涉及的变异，这表明 $\mathrm{E}_i$、$\mathrm{F}_i$、$\mathrm{K}_i$、$\mathrm{K}_i'$ 的像都是正则的。文中证明了，存在一系列量子簇变异，可将这些像变为一个单项式（对于 $\mathrm{E}_i$ 和 $\mathrm{F}_i$，则变为单个变量），并使其与标准嵌入 $\kappa$ 中 D(i) 的箭图具有相同的邻接关系。因此，这些像也满足命题 4.2 的条件，对于 $\mathcal{O}_q(\overline{\mathcal{X}})$ 同样可以得出结论。

对于零 Casimir 表示，该结果立即由簇折叠的一般性质 Corollary4.14 得出，我们将在第 4.2 节中对此进行讨论。

至于系数，该结果由 [DM21], 的主定理得出，其中 Davison 和 Mandel 证明了，对于斜对称量子簇代数，量子 theta 函数在任意种子中的系数均属于 $\mathbb{N}[q^{\pm 1}]$ 。由于标准单项式是 theta 函数，当 $G$ 是单连通时，这立即推出了我们的结果。对于一般的 $G$，我们可以将簇代数展开为一个斜对称簇代数。折叠簇代数中的标准单项式来源于展开簇代数中的标准单项式，因此它们在任意种子中的系数也属于 $\mathbb{N}[q^{\pm 1}]$ 。 □

例 4.10. 对于任意简单 $\mathfrak{g}$，广义 Casimir 元素 [KS98] 可表示为

$$\mathbf{C}_k := (1 \otimes \mathrm{tr}|_{V_k}^q)(RR_{21}) \tag{4.5}$$

其中

- $V_k$ 是 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的第 $k$ 个基本表示，其中 $k = 1$、$\cdots$、$n$,
- $\mathrm{tr}|_{V_k}^q$ 是对 $V_k$的量子迹，并且
- $R$ 是通用的 $R$-矩阵。

广义 Casimir 元位于 $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$ 中：$= \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})[\mathrm{K}_i^{\pm\frac{1}{h}}]$，其中 $h$ 是 $\mathfrak{g}$的 Coxeter数，$\widehat{\ }$，并且它们生成了 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$的中心。我们也可以将这一构造修改为 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$，并且可以$\widehat{\ }$证明，在 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$ 中，

$$\mathbf{C}_k = \mathcal{K}_k\mathcal{C}_k \tag{4.6}$$

对每个 $k$，其中 $\mathcal{K}_k$ 是 Cartan 部分，由 $\mathrm{K}_i$、$\mathrm{K}_i'$ 的有理幂乘积构成，而 $\mathcal{C}_k$ 是 $\mathrm{E}_i$、$\mathrm{F}_i$、$\mathrm{K}_i$、$\mathrm{K}_i'$ 的多项式。然后，定理4.9表明，多项式部分是普适

$\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 中的多项式。

例如，在 $\mathfrak{sl}_2$ 中，唯一的广义 Casimir 元素为

$$\mathbf{C} = \mathbf{FE} - q\mathbf{K} - q^{-1}\mathbf{K}'. \tag{4.7}$$

这里没有 Cartan 部分，并且 C 确实是 $E_i$、$F_i$、$K_i$、$K_i'$ 的多项式。

在标准嵌入 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{sl}_2) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 中，C 的像为 $X_{1,\,2,\,3,\,4} + X_{1,\,3}$，如 (4.2) 所示，它确实是普适多项式。

## 4.2 簇折叠

Casimir 元素为零的正表示涉及簇折叠，簇折叠最初定义于 [FG09 第 6] 版第 [ 节以及 FG06 第 3.6] 节，用于将根系的折叠应用于 $G$-局部系统的模空间。为了应用定理4.9，我们将定义一个限制稍多的版本，要求更多对称性以获得更好的性质。

定义 4.11. 对于任意固定数据 $\Gamma$，其种子为 $\mathsf{s} = (\mathbf{e}_i)_{i\in I}$，假设存在一个有限群 $\Sigma$ 作用于 $I$ 并保持 $I_{\mathrm{uf}} \subset I$，使得

$$\{\mathbf{e}_{\sigma(i)}, \cdot\} = \{\mathbf{e}_i, \cdot\} \tag{4.8}$$

对于所有的 $i \in I$ 和 $\sigma \in \Sigma$。显然，$\Sigma$ 诱导了 $N$的一个自同构。接下来我们定义 $\Gamma$ 为 由以下内容组成的固定数据 $\Gamma^\Sigma$：

- 指标集 $\overline{I} := I/\Sigma$，$\overline{I}_{\mathrm{uf}} := I_{\mathrm{uf}}/\Sigma$，$d_{\overline{i}} := d_i/|O(i)|$，其中 $O(i)$ 是 $i \in I$ 在.....下的轨道 $\Sigma$.
- $N^\Sigma$ 是由 $\mathsf{s} = (\mathbf{e}_{\overline{i}})_{\overline{i}\in\overline{I}}$ 生成的不变子格，其中

$$\mathbf{e}_{\overline{i}} := \sum_{j\in O(i)} \mathbf{e}_j, \tag{4.9}$$

由 $(\mathbf{e}_{\overline{i}})_{\overline{i}\in\overline{I}_{\mathrm{uf}}}$ 生成的 $N^\Sigma{}_{\mathrm{uf}}$，以及由 $(d_{\overline{i}}\mathbf{e}_{\overline{i}})_{\overline{i}\in\overline{I}}$ 生成的 $(N^\Sigma)^\circ$。

- $N^\Sigma$ 上的斜对称双线性型继承自 $N$ 上的斜对称双线性型，因此

$$\{\mathbf{e}_{\overline{i}}, \mathbf{e}_{\overline{j}}\} := |O(i)||O(j)|\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}. \tag{4.10}$$

- 格 $M^\Sigma := \mathrm{Hom}(N^\Sigma, \mathbb{Z})$，$(M^\Sigma)^\circ := \mathrm{Hom}((N^\Sigma)^\circ, \mathbb{Z})$。

根据定义，显然条件 $\{(N^\Sigma)^\circ,\ N^\Sigma{}_{\mathrm{uf}}\} \subset \mathbb{Z}$、$\{N^\Sigma_{\mathrm{uf}} \cap (N^\Sigma)^\circ,\ N^\Sigma\} \subset \mathbb{Z}$ 总是成立。数值 $d_{\overline{i}}$ 可能不是整数，但这不会影响任何计算；如有必要，我们总能通过重新缩放来解决这个问题。

在本节余下部分，我们将始终假设 $\Gamma$ 有一个使用初始种子 $\mathsf{s}_0$ 定义的折叠 $\overline{\Gamma}$。

类似地定义 $\mathbf{f}_{\overline{i}} := d_{\overline{i}}^{-1}\mathbf{e}^*_{\overline{i}}$、$\varepsilon_{\overline{i}\overline{j}} := d_{\overline{i}}\{\mathbf{e}_{\overline{i}},\ \mathbf{e}_{\overline{j}}\}$，以及簇簇 $\mathcal{X}^\Sigma := \mathcal{X}_{\Gamma^\Sigma}$、$\mathcal{A}^\Sigma := \mathcal{A}_{\Gamma^\Sigma}$，并分别类似地定义 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X}^\Sigma)$、$\mathcal{O}_q(\mathcal{A}^\Sigma)$。

令 $\overline{\mathfrak{T}}$ 为 $\Gamma^\Sigma$的无限定向根树。我们定义单射 $\iota\colon \overline{\mathfrak{T}} \to \mathfrak{T}$ 如下：

1. 将 $\overline{\mathfrak{T}}$ 的根 $\bar{t}_0$ 映射到 $\mathfrak{T}$的根 $t_0$。

2. 归纳地，假设 $\iota(t)$ 已经定义，且 $t \xrightarrow{\bar{k}} t'$ 属于 $\overline{\mathfrak{T}}$。我们任意选取 $k$ 的轨道 $O(k)$ 中的一个顺序 $k_1, \cdots, k_{|O(k)|}$，并沿着依次标记为 $k_1, \cdots, k_{|O(k)|}$ 的边从 $\iota(t)$ 出发，得到顶点 $\iota(t')$。

下面的引理表明，对于 $t \in \iota(\overline{\mathfrak{T}})$，折叠 $\Gamma^\Sigma$ 与种子 $\mathsf{s}_t$ 的选取无关。

引理 4.12. 对任意 $\bar{t} \in \overline{\mathfrak{T}}$，种子 $\mathsf{s}_{\iota(\bar{t})}$ 也定义了一个折叠。于是 $N^\Sigma_{\bar{t}} = N^\Sigma$，且下图交换

$$\begin{array}{ccc} N^\Sigma & \longrightarrow & N \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{\bar{t}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{\iota(\bar{t})}} \\ N^\Sigma & \longrightarrow & N \end{array}$$

其中水平映射是包含映射。

证明. 我们通过归纳将问题归结为 $\bar{t}_0 \xrightarrow{\bar{k}} \bar{t}$ 的情形。

根据定义 4.11 中的假设以及第 2.1 节中的变异公式，如果 $i$ 和 $j$ 属于同一轨道，那么突变 $\mu_i$ 和 $\mu_j$ 除了交换 $i$ 和 $j$ 外完全相同。在这种情况下，$\varepsilon_{ij} = 0$，并且众所周知，突变 $\mu_i$ 和 $\mu_j$ 也可交换。因此我们仍有

$$\{\mu_i\mu_j(\mathbf{e}_i), \cdot\} = \{\mu_i\mu_j(\mathbf{e}_j), \cdot\}.$$

这表明定义 4.11 中的假设仍然成立，因此归纳地，$\mathsf{s}_{\iota(\bar{t})}$ 也定义了一个折叠。

条件 $N^\Sigma_{\bar{t}} = N^\Sigma$ 显然成立，因为突变将 $N^\Sigma$ 映到自身。令 $\mu_{O(k)}$ 为所有 $l \in O(k)$ 上的交换突变 $\mu_l$ 的复合。那么

$$\mu_{O(k)}(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \mathbf{e}_i + [\varepsilon_{ki}]_+\mathbf{e}_k & i \notin O(k) \\ -\mathbf{e}_i & i \in O(k) \end{cases},$$

因此我们有

$$\mu_{O(k)} \circ (\mathbf{e}_{\bar{i}}) = \begin{cases} \mathbf{e}_{\bar{i}} + |O_i|[\varepsilon_{ki}]_+\mathbf{e}_{\bar{k}} & i \notin O(k) \\ -\mathbf{e}_{\bar{i}} & i \in O(k) \end{cases}.$$

由于

$$|O(i)|\varepsilon_{ki} = |O(i)|d_k\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i\} = \varepsilon_{\bar{k}i},$$

我们在 $N^G$ 上得到 $\mu_{\bar{t}} = \mu_{\iota(\bar{t})}$。 □

包含关系 $N^\Sigma \to N$ 也诱导出一个单射 $\iota\colon \Bbbk_q[N^\Sigma] \to \Bbbk_q[N]$。与上面的 $N$ 不同，$\mathcal{X}$ 的突变与 $\iota$ 不交换，因此我们无法将它们全局粘合成一个单射 $\mathcal{O}_q(\mathcal{X}^\Sigma) \to \mathcal{O}_q(\mathcal{X})$。

然而，我们注意到，$\iota$ 的像位于不变子环 $\Bbbk_q[N]^\Sigma$ 中。众所周知，$\Bbbk_q[N]^\Sigma$ 由 $\Bbbk_q$ 上的 $\mathcal{E}_{i,\ a}$ 生成，其中 $i \in I$, $|a| \le |O(i)|$，这里 $\mathcal{E}_{i,\ a}$ 是变量 $X_j$ （$a > 0$）和 $X_j^{-1}$ （$a < 0$）中，关于所有 $j \in O(i)$ 的 $|a|$ 次基本对称多项式。我们有 $\iota(X_{\bar{i}}) = \mathcal{E}_{i,\ |O(i)|}$。

那么，通过将映射 $\iota$ 和突变映射扩展到 $\Bbbk_q[N^G]$ 和 $\Bbbk_q[N]^\Sigma$ 关于由簇变量 $X_i$ 生成的理想的完备化，我们仍然可以保留以下事实：

命题 4.13。单射 $\iota : \mathrm{Frac}(\mathbb{k}_q[N^\Sigma]) \to \mathrm{Frac}(\mathbb{k}_q[N]^\Sigma)$ 存在一个 $\mathbb{k}_q$-线性逆映射 $\pi$，使得以下交换图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Frac}(\widehat{\mathbb{k}_q[N]^\Sigma}) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Frac}(\widehat{\mathbb{k}_q[N^\Sigma]}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{\iota(\overline{t})}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{\cdot}} \\ \mathrm{Frac}(\widehat{\mathbb{k}_q[N]^\Sigma}) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Frac}(\widehat{\mathbb{k}_q[N^\Sigma]}) \end{array}$$

证明。对于任意满足 $\varepsilon_{ki} \le 0$ 的 $j \in O(i)$ 和 $k \notin O(i)$，我们有

$$X_k X_j = q^{-2\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j\}} X_j X_k = q_k^{2|\varepsilon_{ki}|} X_j X_k.$$

这表明，对于 $i_1, \cdots, i_a \in O(i)$，

$$\begin{aligned} \mu_k^*(X'_{i_1} \cdots X'_{i_a}) &= X_{i_1} \prod_{r=1}^{|\varepsilon_{ki}|} (1 + q_k^{2r-1} X_k) \cdots X_{i_a} \prod_{r=1}^{|\varepsilon_{ik}|} (1 + q_k^{2r-1} X_k) \\ &= X_{i_1} \cdots X_{i_a} \prod_{r=1}^{|\varepsilon_{ki}|} \prod_{s=0}^{a-1} (1 + q_k^{2r+2s|\varepsilon_{ik}|-1} X_k) \\ &= X_{i_1} \cdots X_{i_a} \prod_{r=1}^{a|\varepsilon_{ki}|} (1 + q_k^{2r-1} X_k). \end{aligned}$$

当 $\varepsilon_{ik} \ge 0$ 时，我们也有类似的公式。

那么，基本对称多项式上的突变 $\mu^*_{O(k)}$ 由下式给出

$$\mu^*_{O(k)}(\mathcal{E}'_{i,a}) = \begin{cases} \mathcal{E}_{i,-a}^{-1} & O(i) = O(k) \\ \mathcal{E}_{i,a} \prod_{r=1}^{a|\varepsilon_{ki}|} (\sum_{b=0}^{|O(k)|} q_k^{(2r-1)b} \mathcal{E}_{k,b}) & O(i) \ne O(k), \varepsilon_{ki} \le 0 \\ \mathcal{E}_{i,a} \prod_{r=1}^{a|\varepsilon_{ki}|} (\sum_{b=0}^{|O(k)|} q_k^{(2r-1)b} \mathcal{E}_{k,-b})^{-1} & O(i) \ne O(k), \varepsilon_{ki} \ge 0 \end{cases}. \tag{4.11}$$

与此同时，

$$\mu^*_{\overline{k}}(X'_{\overline{i}}) = \begin{cases} X_{\overline{k}}^{-1} & \overline{i} = \overline{k} \\ X_{\overline{i}} \prod_{r=1}^{|O(i)||\varepsilon_{ki}|} (1 + q_{\overline{k}}^{2r-1} X_{\overline{k}}) & \overline{i} \ne \overline{k}, \varepsilon_{\overline{ik}} \le 0 \\ X_{\overline{i}} \prod_{r=1}^{|O(i)||\varepsilon_{ki}|} (1 + q_{\overline{k}}^{2r-1} X_{\overline{k}}^{-1})^{-1} & \overline{i} \ne \overline{k}, \varepsilon_{\overline{ik}} \ge 0 \end{cases}. \tag{4.12}$$

注意，$q_{\overline{k}} = q_k^{|O(i)|}$。直接比较可知，$\iota$ 将 $X_{\overline{i}}$ 的突变与 $\mathcal{E}_i$ 的突变中 $\mathrm{Frac}(\mathbb{k}_q[N]^G)$ 内仅涉及 $\mathcal{E}_j$ 的 $\frown$ 项相对应，$|O(i)|$ 对于 $j \in I$。这表明，将 $\mathcal{E}_i$ 映至 $X_{\overline{i}}^b$、并将所有其他 $\mathcal{E}_i$ 映至 0 的 $\mathbb{k}_q$-线性映射 $\pi$ 是 $\iota$ 的逆映射，且与突变交换。

□

我们立即得到以下推论，从而完成定理4.9的证明。

推论 4.14. 假设 $f \in \mathbb{k}_q[N]$ 是对于 s 的变异类中任意种子而言，量子簇变量的一个多项式。那么对于 s 的变异类中任意种子，$\pi(f)$ 也是如此。

### 4.3 推广到一般的 $G$-局部系统

我们的结果可以推广到一般 $G$-局部系统下，将 $\mathfrak{D}_q(\mathfrak{g})$ 嵌入 $\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\ \mathbb{S}})$。主要例子是 $\odot_n$，即具有 $n$ 个穿孔和两个边界特殊点的圆盘。量子群与多重穿孔圆盘之间的关系，最早由 [Kas01] 针对 $n=2$、[SS19] 针对一般的 $n$ 和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{r+1}$，以及 [GS22] 针对一般的 $\mathfrak{g}$ 进行了研究。

从几何上看，$\odot_n$ 是通过沿边界区间粘合 $n$ 个 $\odot$ 得到的，因此通过拼合，簇代数 $\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\odot_n})$ 是张量积 $\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\odot})^{\otimes n}$ 的子代数。例如，可以验证对于 $n=2$,

$$\mathcal{W}_{s,i,\odot_2}=\mathcal{W}_{s,i,\odot}\otimes 1+\mathcal{K}_{s,i,\odot}\otimes\mathcal{W}_{s,i,\odot} \tag{4.13}$$
$$\mathcal{K}_{s,i,\odot_2}=\mathcal{K}_{s,i,\odot}\otimes\mathcal{K}_{s,i,\odot} \tag{4.14}$$

一般 $n$ 的公式可以通过归纳得到。结合嵌入 $\kappa$，我们得到 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 中余乘的公式。

推论 4.15. $\mathcal{W}_{s,i,\odot_n}$ 和 $\mathcal{K}_{s,i,\odot_n}$ 对于变异类中的任意簇，仍然是系数属于 $\mathbb{N}[q^{\pm 1}]$ 的量子簇变量的多项式。

证明。对于每个 $i$，出现在 $\mathcal{W}_{s,i,\odot_n}$ 和 $\mathcal{K}_{s,i,\odot_n}$ 中的簇 $\mathcal{X}$-变量仍处于一个 $A_n$ 型箭图的构型中。因此，多项式性结果由引理 4.8 得出。关于系数的陈述同样由 [DM21] 的主定理得出。 □

注 4.16。注意，4.9 中抛物情形的证明也依赖于通过突变得到仅涉及冻结变量的多项式，并且可以分别对每个 $\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\ \odot})$应用折叠。因此，如果对于某些 $\odot$副本，将 $\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\ \odot})$的箭图替换为抛物变体或零卡西米尔变体，相同的结果仍然成立。

F对于一般的标记曲面，我们不再具有 $\odot$ 或 $\odot_n$中的对称性，因此对于任意边界 ry 特定点 $s$，嵌入仅限于

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{b})\to\mathcal{O}_q(\mathscr{P}_{G,\mathbb{S}}),$$

其中，Borel 子代数 $\mathfrak{b}$ 的选择由来自 $s$[处标架的 Borel 子群决定（GS22，定理 3.21]）。引理 4.8 再次表明，在这种情况下，$\mathrm{E}_i$ 和 $\mathrm{K}_i$ 的像也都是普适多项式。

如 [GS22，注 15.3], 中所述，上述结果可以推广到任意 Kac-Moody $\mathfrak{b}$，此时映射不再是单射，且右端直接通过一个不使用 $G$-局部系统的箭图来定义。我们的多项式性结果也自然地得到推广。此外，我们的结果也适用于罕见的例子 [Ip20，命题 4.10]：该例通过求值模将整个量子$\widehat{}$仿射代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$映射到某个量子簇代数。

## 5 正则正表示

在证明定理4.9之后，我们想讨论 IM22 第6]节提出的另一个猜想。第一作者和 Man 引入了正则正表示的概念，它们是由某个种子 s 对应的量子环面代数$\mathcal{O}_q(\mathcal{X}_\mathbf{s})$经适当极化后，从同态 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ $\to\mathcal{O}_q(\mathcal{X})$诱导到某个簇簇 $\mathcal{X}$的正则函数的 $\mathcal{P}$ of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$的正表示。

文献 [Ip18], [Ip20] and [IM22] 已证明，已知的不可约正则正表示如下:

(1) 标准表示 $\mathcal{P}_\lambda$，(2) 对于 $W_J \subset W$ 的抛物表示 $\mathcal{P}_\lambda^J$，(3) 对于 $W_J \subset W$、类型为 $A_{k_1} \times \cdots \times A_{k_m}$ 的退化表示 $\mathcal{P}^{0,\ {}_\lambda{}^J}$，(4) $\mathcal{P}^0$ 的模双 $\mathcal{P}^{0,\ {}_{\widetilde{\lambda}}{}^J{}_\lambda{}^J}$，(5) 对 Dynkin指标的不连通子集取 (2)–(4) 型表示的混合。

根据构造，所有这些表示都源自标准表示。 [IM22 的第 6] 节猜想上述列表是完备的。

为便于理解，请回忆同构

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{O}_q(\mathscr{L}_{G,\odot})$$

对于单连通的 $\mathfrak{g}$，而对于一般的 $\mathfrak{g}$，则是一个猜想。基于这一同构，自然可以猜想，所有不可约正则正表示都必定源自标准表示。然而，很难确定我们是否能对标准表示进行其他修改，从而生成更多不可约正则正表示。

结合定理4.9，我们猜想，对于任意不可约正则正表示，同态 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{O}_q(\mathcal{X})$ 必须将Chevalley生成元映为通用多项式。即使列表中遗漏了其他表示，探究通用多项式性是否总是成立也很有意义。

# 参考文献


[Ber96] A. Berenstein. “量子群中的类群元素与Feigin猜想”。载于：arXiv预印本 q-alg/9605016（1996）。[BFZ05] A. Berenstein、S. Fomin 和 A. Zelevinsky. “丛代数III：上界与双Bruhat胞腔”。载于：《杜克数学杂志》126.1（2005），第1–52页。[BZ05] A. Berenstein 和 A. Zelevinsky. “量子簇代数”。载于：Advances in Mathematics 195.2（2005），第405–455页。[DM21] B. Davison 和 T. Mandel. “量子簇代数量子theta基的强正性”。载于：《数学创立》226（2021），第725–843页。[Dri90] V. Drinfeld. “Hopf代数与量子Yang–Baxter方程”。载于：（1990），第264–268页。[Fad95] L. D. Faddeev. “离散Heisenberg–Weyl群与模群”。载于：《数学物理快报》34.3（1995），第249–254页。[Fad99] L. D. Faddeev. “量子群的模双”。载于：《数学物理研究》21卷I（第戎）（1999），第149–156页。[FG06] V. Fock 和 A. Goncharov. “簇 $\mathcal{X}$簇簇、amalgamation与Poisson–Lie群”。载于：（2006），第27–68页。[FG09] V. Fock 和 A. Goncharov. “丛系、量子化与二重对数”。载于：Annales scientifiques de l’Ecole normale supérieure 42.6（2009），第865–930页。

[FI14] I. B. Frenkel 和 I. Ip. “分裂实量子群的正表示与未来展望”。载于：《国际数学研究通知》2014.8（2014），第2126–2164页。[FZ02] S. Fomin 和 A. Zelevinsky. “丛代数I：基础”。载于：Journal of the American Mathematical Society 15.2（2002），第497–529页。[FZ07] S. Fomin 和 A. Zelevinsky. “丛代数IV：系数”。载于：Compositio Mathematica 143.1（2007），第112–164页。[GHK13] M. Gross、P. Hacking 和 S. Keel. “簇代数的双有理几何”。载于：arXiv预印本 arXiv:1309.2573（2013）。[GHKK14] M. Gross、P. Hacking、S. Keel 和 M. Kontsevich. “簇代数的典范基”。载于：arXiv预印本 arXiv:1411.1394（2014）。[GKL05] A. Gerasimov、S. Kharchev 和 D. Lebedev. “表示论与量子可积性”。载于：Progr. in Math 237（2005），第133–156页。[GKLO05] A. Gerasimov、S. Kharchev、D. Lebedev 和 S. Oblezin. “关于一类量子群表示”。载于：Contemp. Math. 391（2005），第101–110页。[GS22] A. Goncharov 和 L. Shen. “局部系统模空间的量子几何与表示论”。载于：arXiv预印本 arXiv:1904.10491v3（2022）。[IM22] I. Ip 和 R. Man. “Casimir 元素为零的正表示”。载于：arXiv预印本 arXiv:2203.14828（2022）。[Ip13] I. Ip. “量子平面及其量子双的表示，以及 $GL_q^+(2,\mathbb{R})$上的调和分析”。载于：Selecta Mathematica 19.4（2013），第987–1082页。[Ip18] I. Ip. “ $U_q(\mathfrak{g})$的簇实现与普适 $R$-矩阵的分解”。载于：Selecta Mathematica 24.5（2018），第4461–4553页。[Ip20] I. Ip. “$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$的抛物型正表示”。载于：arXiv预印本 arXiv:2008.08589（2020）。[Jim85] M. Jimbo. “ $q$-差分模拟的 $U(\mathfrak{g})$与Yang–Baxter方程”。载于：《数学物理快报》10.1（1985），第63–69页。[Kas01] R. M. Kashaev. “量子Teichmüller理论中德恩扭转的谱”。载于：（2001），第63–81页。[KS98] L. I. Korogodski 和 Y. S. Soibelman. 量子群上的函数代数：第一部分。第56卷。美国数学学会，1998。[KV98] R. M. Kashaev 和 A. Y. Volkov. “从四面体方程到普适R矩阵”。载于：arXiv预印本 math/9812017（1998）。[Nak21] T. Nakanishi. “丛代数与散射图，第二部分：簇模式与散射图”。载于：arXiv预印本 arXiv:2103.16309（2021）。[NZ12] T. Nakanishi 和 A. Zelevinsky. “关于簇代数中的热带对偶”。载于：Algebraic groups and quantum groups 565（2012），第217–226页。[PT01] B. Ponsot 和 J. Teschner. “ $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ 连续系列表示的 Clebsch–Gordan 与拉卡 – 维格纳系数 ”。载于：《数学物理通讯》224.3（2001），第613–655页。[PT99] B. Ponsot 和 J. Teschner. “通过非紧量子群上的调和分析实现刘维尔自举”。载于：arXiv预印本 hep-th/9911110（1999）。

[Sch96] K. Schm¨udgen. “ $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ 的算子表示”. In: 《数学物理快报》37.2 (1996), pp. 211–222.[She22] L. Shen. “量子群的簇性质”. In: arXiv 预印本 arXiv:2209.06258 (2022).[SS17] G. Schrader and A. Shapiro. “量子群的连续张量范畴 I：代数方面”. In: arXiv 预印本 arXiv:1708.08107 (2017).[SS19] G. Schrader and A. Shapiro. “来自量子特征簇的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$的簇实现”. In: 《数学发明》 (2019).