arXiv:2302.04022v1 [math.CO] 8 Feb 2023

# 由循环生成的对称群上的正规凯莱图的第二大特征值

Yuxuan Li、Binzhou Xia 和 Sanming Zhou

墨尔本大学数学与统计学院，澳大利亚维多利亚州 Parkville，邮编 3010

2023年2月9日

**摘要**

我们研究对称群 $S_n$ 上的正规凯莱图 Cay($S_n, C(n, I)$)，其中 $I \subseteq \{2, 3, \ldots, n\}$，且 $C(n, I)$ 是 $S_n$ 中所有长度属于 $I$ 的循环的集合。我们证明，Cay($S_n, C(n, I)$) 的严格次大特征值至多由 $S_n$ 的四个不可约表示取得，并进一步确定了若干特殊情形下该特征值的重数。作为推论，在 $I$ 既不包含 $n-1$ 也不包含 $n$ 的情形下，我们准确判定了 Cay($S_n, C(n, I)$) 何时具有 Aldous 性质，即严格次大特征值由 $S_n$ 的标准表示取得；并且得到，只要 $n \in I$，Cay($S_n, C(n, I)$) 就不具有 Aldous 性质。作为主要结果的另一推论，我们证明了关于 Cay($S_n, C(n, \{k\})$) 的一个近期猜想，其中 $2 \le k \le n-2$。

## 1 引言

本文中所有图均为有限、无向、简单图，所有群均为有限群。设 $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ 是一个顶点集为 $V(\Gamma)$、边集为 $E(\Gamma)$ 的图。那么，$\Gamma$ 的邻接矩阵 $A(\Gamma)$ 的所有特征值均为实数，称为 $\Gamma$ 的特征值。我们总是按非递增顺序排列这些特征值，记作 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$，其中 $n = |V(\Gamma)|$ 是 $\Gamma$ 的阶。若要强调图 $\Gamma$ 或实对称矩阵 $M$ 的第 $i$ 大特征值对它们的依赖关系，我们用 $\lambda_i(\Gamma)$ 或 $\lambda_i(M)$ 代替 $\lambda_i$。已知，任意正则图的最大特征值等于其度，且其重数等于该图的连通分支数。如 [13]，中所述，我们将正则图的严格次大特征值定义为严格小于该图度的最大特征值。

设 $G$ 是一个有限群，其单位元为 $e$，且 $S$ 是 $G\setminus\{e\}$ 的一个逆封闭子集。关于 $S$ 的 $G$ 上的凯莱图 记为 Cay($G, S$)，它是一个 $|S|$-正则图，顶点集为 $G$，边集为 $\{\{g, gs\} \mid g \in G, s \in S\}$。显然，Cay($G, S$) 连通，当且仅当其连接集 $S$ 是 $G$ 的一个生成子集。当 $S$ 在共轭下封闭时，凯莱图 Cay($G, S$) 称为正规。

众所周知，图 $\Gamma$ 的扩展性可以用其等周数来衡量，其定义为 $h(\Gamma) = \min\left\{\frac{|\partial S|}{|S|} \mid \emptyset \ne S \subset V(\Gamma), |S| \le \left\lfloor \frac{|V(\Gamma)|}{2} \right\rfloor\right\}$，其中 $\partial S = \{\{x, y\} \in$ ——

电子邮箱地址：yuxuan11@student.unimelb.edu.au（Yuxuan Li）、binzhoux@unimelb.edu.au（Binzhou Xia）、sanming@unimelb.edu.au（Sanming Zhou）

$E(\Gamma) \mid x \in S, y \in V(\Gamma)\backslash S\}$。众所周知，连通的 $k$-正则图 $\Gamma$ 的等周数由其谱隙 $k-\lambda_2(\Gamma)$决定，这可由以下著名不等式（[1, 2, 7, 16]）得出：$\frac{k-\lambda_2(\Gamma)}{2} \leq h(\Gamma) \leq \sqrt{2k(k-\lambda_2(\Gamma))}$。因此，研究连通正则图的第二大特征值至关重要。特别是，由于许多重要的扩展子图都是凯莱图，凯莱图的第二大特征值长期以来一直是研究的重点。粗略地说，扩展子图是指度较小而等周数较大的图。关于扩展图及其应用的综述，参见 [9]；关于凯莱图第二大特征值的结果汇总，参见 [14, 第 8] 节。著名的 Aldous 谱隙猜想断言，关于一组换位的对称群 $S_n$ 上的任意连通凯莱图，其第二大特征值由交错群的标准表示达到。该猜想的一般形式在历经近二十年后，于 [3] 得到证明。一般而言，若对称群 $S_n$ 上的凯莱图 Cay($S_n, S$) 的严格次大特征值由交错群的标准表示 $S_n$达到，则称该图具有 Aldous 性质 [13] 。在 [13], 中，本文作者确定了三族具有 Aldous 性质的对称群 $S_n$ 上的正规凯莱图，其中一族可视为 Aldous 谱隙猜想“正规”情形的推广。

Aldous 谱隙猜想激发了人们极大的兴趣，促使研究者确定对称群或交错群上的某些连通凯莱图的第二大特征值的精确值，而这些图的连接集不一定仅由换位构成。对于 $1 \leq i \leq j \leq n$, 令$r_{ij} \in S_n$ 为这样的置换：它将 $i, i+1, \ldots, j-1, j$ 分别映射到 $j, j-1, \ldots, i+1, i$，并固定 $[n] =$ {1, 2, . . . , $n$}中的所有其他点。 $S_n$ 上的凯莱图，其连接集分别为 $\{r_{1,j} \mid 2 \leq j \leq n\}$ 和 $\{r_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$，称为煎饼图 $P_n$ 和反转图$R_n$。在 [4], 中，Cesi 除其他结果外，还确定了 $P_n$ 的第二大特征值。随后，Chung 和 Tobin [5] 将这一结果推广到一个图族，该图族包含所有煎饼图。在同一篇论文中，Chung 和 Tobin 还通过递归地将 $R_n$ 分解为 $P_n$ 及其副本 $R_{n-1}$，确定了 $R_n$ 的第二大特征值。Huang 和 Huang [10] 进一步运用这一方法，分别确定了交错群 $A_n$ 上的凯莱图的第二大特征值，其连接集为 {(1 2 $i$), (1 $i$ 2) $\mid 3 \leq i \leq n$}、{(1 $i$ $j$), (1 $j$ $i$) $\mid 2 \leq i < j \leq n$} 和 {($i$ $j$ $k$), ($i$ $k$ $j$) $\mid 1 \leq i < j < k \leq n$}。借助对称群的表示论，Siemons 和 Zalesski [19] 确定了 Cay($G, C(n,k)$) 的第二大特征值，其中 $G = S_n$ 或 $A_n$，且 $k = n$ 或 $n-1$，而 $C(n,k)$ 是 $S_n$中所有 $k$-循环构成的集合。在 [15, 定理 1.2], 中，Maleki 和 Razafimahatratra 证明，若 $n-k \geq 2$ 相对于 $n$ 足够小，则 Cay($S_n, C(n,k)$) 的第二大特征值由 $S_n$的标准表示取得。他们提出猜想 [15,猜想 1.4]：对任意介于 2 和 $n-2$之间的 $k$，上述结论均成立。也就是说，对于任意 $n \geq 4$和 $2 \leq k \leq n-2$，Cay($S_n, C(n,k)$) 的严格次大特征值由 $S_n$的标准表示取得，其值为 $\frac{n-k-1}{n-1}\binom{n}{k}(k-1)!$。正如先前证明的，该猜想对 $k=2$ [6], $k=3$ [10] 成立（另见 [13, 备注 4.1]）以及 $k=4$ [11]；而在 [15]中，研究者证明该猜想对 $k=5$ 也成立。

受上述研究启发，本文研究正凯莱图 Cay($S_n, C(n,I)$)，其中 $\emptyset \neq I \subseteq$ {2,3, . . . , $n$} 且

$$C(n,I) = \cup_{k \in I} C(n,k) \tag{1}$$

其中 $C(n, k)$ 是 $S_n$ 中所有 $k$-循环的集合。我们证明，对于任意 $\emptyset \neq I \subseteq \{2, 3, \ldots\ldots, n\}$, Cay($S_n$, $C(n, I)$) 的严格次大特征值至多由 $S_n$ 的四个不同不可约表示取得；对于某些特殊子集 $I \subseteq \{2, 3, \ldots\ldots, n\}$，我们进一步得到了该特征值的精确值及其重数（定理 3.5,

4.6、5.4 和 6.3）。作为推论，我们给出了在 $I$ 既不包含 $n$ 也不包含 $n-1$ (推论 3.6) 的情况下，Cay($S_n$, $C(n,\ I)$) 具有 Aldous 性质的充要条件；并且我们证明，只要 $n \in I$ (推论 5.5 和 6.4)，该图就不具有 Aldous 性质。作为另一条推论，我们证明了上述猜想 [15, 猜想 1。4] (推论 3.7)，从而解决了 Siemons 和 Zalesski 在 [19]提出的一个开放问题。主要结果汇总于表 1，其中第三列列出了所有能取得严格次大特征值的 的分拆，最后一列则给出了该特征值的重数。

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们给出一些基本定义，并介绍若干已知结果，这些结果将在证明主要结果时发挥关键作用。由于 $(n-1)$-循环和 $n$-循环的不可约特征标，与长度不超过 $n-2$ 的循环的不可约特征标表现不同，我们将图族 Cay($S_n$, $C(n,\ I)$) 分为四个子族，并在四个章节中分别加以研究。具体而言，在第 3–6 节中，我们分别讨论 $I \cap \{n-1,\ n\} = \emptyset$、$n-1 \in I$ 但 $n \notin I$、$n \in I$ 但 $n-1 \notin I$，或 $\{n-1,\ n\} \subseteq I$ 的情形。下文将会看到，在证明主要结果时，我们将结合有限群的表示论与特征标理论工具，以及组合技巧。

## 2 预备知识

本节中的所有定义均可在 [18] 中找到。下文中，我们用

$$\widehat{G} = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k\}$$

表示群 $G$ 的一组完备且两两不等价的（复）不可约矩阵表示，并约定 $\rho_1$ 为平凡表示。对于任意 $\rho_i \in G$，映射

$$\chi_i : g \mapsto \mathrm{Trace}(\rho_i(g)),\ g \in G$$

是 $\rho_i$ 的特征标，而比值

$$\tilde{\chi}_i(g) := \frac{\chi_i(g)}{\chi_i(e)}$$

称为 $\rho_i$ 在 $g \in G$ 上的归一化特征标，其中 $\chi_i(e)$ 等于 $\rho_i$ 的维数 $\dim \rho_i$。注意，对于平凡表示 $\rho_1$，$\dim \rho_1 = 1$。

以下命题使我们能够用 $G$ 的不可约特征标来表示 $G$ 上任意正规凯莱图的特征值。

**命题 2.1**。 [6, 20] 设$\{\chi_1、\ \chi_2、\ \ldots\ldots、\ \chi_k\}$ 是群 $G$ 的一组完备的不等价不可约特征标。则任意正规凯莱图$\mathrm{Cay}(G、\ S)$ 在 $G$ 上的特征值为

$$\mu_j = \frac{1}{\chi_j(e)} \sum_{s \in S} \chi_j(s) = \sum_{s \in S} \tilde{\chi}_j(s), \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

此外，$\mu_j$ 的重数等于 $\sum_{1 \le i \le k,\ \mu_i = \mu_j} \chi_i(e)^2$.

我们称 Cay($G$, $S$) 的严格次大特征值由 $\rho_i \in G$ 取得或达到，如果

$$\lambda_{c+1}(\mathrm{Cay}(G, S)) = \sum_{s \in S} \tilde{\chi}_i(s),$$

| 子族 | | 分拆 | 重数 |
|---|---|---|---|
| $I\cap\{n-1,n\}=\emptyset$ | $I\cap N_2=\emptyset$ | $(n-1,1)$ 和 $(2,1^{n-2})$ | $2(n-1)^2$ |
| | $I=\{2,3\}$ | $(n-1,1)$ 和 $(1^n)$ | $(n-1)^2+1$ |
| | $I\neq\{2,3\}$<br>$I_{\max}\in N_1$<br>$I\cap N_2\neq\emptyset$ | $(1^n)$ | 1 |
| | $I_{\max}\in N_2$ | $(n-1,1)$ | $(n-1)^2$ |
| $n-1\in I,\ n\notin I$ | $n\in N_2$<br>$I\cap N_2\neq\emptyset$ | $(1^n)$ | 1 |
| | $n\in N_2$<br>$I\cap N_2=\emptyset$ | $[(n-1,1)$ 和 $(2,1^{n-2})]$ 或<br>$[(n-3,2,1)$ 和 $(3,2,1^{n-3})]$ | 未知 |
| | $n\in N_1$ | $(n-1,1),(n-3,2,1),$<br>$(2_2,1^{n-4})$ 或 $(2,1^{n-2})$ | 未知 |
| $n-1\notin I,\ n\in I$ | $n\in N_1$<br>$I\cap N_2\neq\emptyset$ | $(1^n)$ | 1 |
| | $n\in N_1$<br>$I\cap N_2=\emptyset$ | $(n-2,1_2)$ 和 $(3,1^{n-3})$ | $\frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2}$ |
| | $n\in N_2$ | $(n-2,1_2)$ 或 $(2,1^{n-2})$ | 未知 |
| $\{n-1,n\}\subseteq I$ | $n\in N_2$ | $(1^n),(n-2,1_2)$ 或 $(2,1^{n-2})$ | 未知 |
| | $n\in N_1$ | $(1^n),(n-2,1_2),(3,1^{n-3})$<br>或（$2_2,1^{n-4}$） | 未知 |

表 1：主要结果汇总，其中 $\emptyset\neq I\subseteq\{2,3,\ldots\ldots,n-1,n\}$ 中的 $I_{\max}$ 是 $I$ 中的最大数，$N_1$ 是奇正整数集，$N_2$ 是偶正整数集

其中 $c=[G:\langle S\rangle]$ 是子群 $\langle S\rangle$ 在 $G$ 中的指数。注意，Cay$(G,S)$ 的最大特征值 $|S|$ 的重数为 $c$，因为 Cay$(G,S)$ 是 $c$ 个连通凯莱图 Cay$(\langle S\rangle, S)$ 的并，每个图的度为 $|S|$。因此，$\lambda_{c+1}$(Cay$(G,S)$) 确实是 Cay$(G,S)$ 的严格次大特征值。

正整数 $n$ 的一个分拆是满足 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \cdots \geq \gamma_m$ 且 $n=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_m$ 的正整数序列 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m)$。我们用 $\gamma \vdash n$ 表示 $\gamma$ 是 $n$ 的一个分拆，并令 $c_i(\gamma)$ 表示 $\gamma$ 中等于 $i$ 的项数。杨图是由排列成左对齐各行的有限个方格组成的图形，且各行的大小按弱递减排列。与分拆 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m)$ 相关联的杨图具有 $m$ 行，第 $i$ 行有 $\gamma_i$ 个方格。由于分拆与杨图之间存在明确的一一对应关系，我们交替使用这两个术语。

$\sigma$ 的每个置换都可以分解为若干个不相交循环。$\sigma$ 的循环类型是一个 $n$ 的分拆，其各部分为该置换分解中循环的长度。众所周知，$S_n$ 中的两个元素共轭，当且仅当它们具有相同的循环类型。这意味着，$S_n$ 的共轭类由循环类型刻画，因此与 $n$的分拆一一对应。用 $C(S_n,\gamma)$表示与分拆 $\gamma\vdash n$对应的 $S_n$ 共轭类。我们用 sgn$(\gamma)$ 表示 $C(S_n,\gamma)$中置换的符号。

对于每个分拆 $\zeta\vdash n$，我们用$\rho_\zeta$ 表示与 $\zeta$对应的 $S_n$ 的 Specht 模。众所周知，$S_n=\{\rho_\zeta \mid \zeta\vdash n\}$是 $S_n$的一个完备的两两不等价不可约表示列表。Specht 模$\rho_{(n)}$ 和$\rho_{(1^n)}$分别称为 $S_n$ 的平凡表示和符号表示。$S_n$ 的标准表示即指$\rho_{(n-1,1)}$。令$\chi_\zeta(\cdot)$和 $\tilde{\chi}_\zeta(\cdot)$分别表示$\rho_\zeta$的特征标和归一化特征标。对于任意 $\sigma\in S_n$，有$\chi_{(n)}(\sigma)=\tilde{\chi}_{(n)}(\sigma)=1$，且$\chi_{(1^n)}(\sigma)=\tilde{\chi}_{(1^n)}(\sigma)=$ sgn$(\sigma)$。由于$\chi_\zeta(\cdot)$（分别为$\tilde{\chi}_\zeta(\cdot)$）是 $S_n$上的类函数，我们用$\chi_\zeta(\gamma)$（分别用 $\tilde{\chi}_\zeta(\gamma)$）表示$\chi_\zeta(\cdot)$（分别为 $\tilde{\chi}_\zeta(\cdot)$）在共轭类 $C(S_n,\gamma)$上的取值。

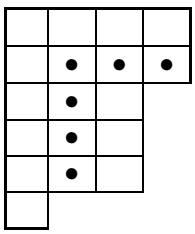
用 $a=(i,\ j)$ 表示杨图 $\zeta$ 中第 $i$ 行、第 $j$ 列的方格。该方格的钩子

$$H_a=H_{i,j}=\{(i,j')\in\zeta : j'\geq j\}\cup\{(i',j)\in\zeta : i'\geq i\}$$

对应钩长

$$h_a=h_{i,j}=|H_{i,j}|.$$

举例来说，若 $\zeta=(4^2,\ 3_3,\ 1)$，则



中的带点方格就是钩子 $H_{2,\ 2}$，其钩长为 $h_{2,\ 2}=6$。以下定理给出了著名的钩长公式，用于计算任意 Specht 模 $\rho_\zeta\in S_n$ 的维数 $\chi_\zeta(\mathbf{1})$，其中 $\mathbf{1}$ 是 $S_n$的单位元。

**定理 2.2**。[18, 定理 3.10。2] 若 $\zeta\vdash n$，则

$$\chi_\zeta(\mathbf{1})=\frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\zeta}h_{i,j}}.$$

众所周知，[8] 任意 $\rho_\zeta \in S_n$ 在 $S_n$ 的任一共轭类上的特征标都是整数，其绝对值不超过 $\rho_\zeta$的维数。因此 $\tilde{\chi}_\zeta(\gamma)$ 是区间 $[-1,1]$ 内的有理数，对所有 $\zeta \vdash n$ 以及 $\gamma \vdash n$均成立。为方便读者并给出自包含的证明，我们列出 [17], 中的表 2，该表给出了 $S_n$的一些 Specht 模的维数和特征标。

| $\zeta \vdash n$ | $\dim \rho_\zeta = \chi_\zeta(1)$ | $\chi_\zeta(\gamma)$ 与 $c_i(\gamma) = c_i$ |
|---|---|---|
| $(n)$ | $1$ | $1$ |
| $(n-1,1)$ | $n-1$ | $c_1 - 1$ |
| $(n-2,2)$ | $\frac{n(n-3)}{2}$ | $\frac{c_1(c_1-3)}{2} + c_2$ |
| $(n-2,1^2)$ | $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ | $\frac{(c_1-1)(c_1-2)}{2} - c_2$ |
| $(n-3,\ 3)$ | $\frac{n(n-1)(n-5)}{6}$ | $\frac{c_1(c_1-1)(c_1-5)}{6} + (c_1-1)c_2 + c_3$ |
| $(n-3,2,1)$ | $\frac{n(n-2)(n-4)}{3}$ | $\frac{c_1(c_1-2)(c_1-4)}{3} - c_3$ |
| $(n-3,\ 1^3)$ | $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ | $\frac{(c_1-1)(c_1-2)(c_1-3)}{6} - (c_1-1)c_2 + c_3$ |
| $(n-4,\ 2,\ 1^2)$ | $\frac{n(n-2)(n-3)(n-5)}{8}$ | $\frac{c_1(c_1-2)(c_1-3)(c_1-5)}{8} - \frac{(c_1^2-3c_1-1)c_2}{2} - \frac{c_2^2}{2} + c_4$ |

表 2： $S_n$的若干 Specht 模的维数和特征标

分拆 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m) \vdash n$的共轭 或转置 定义为 $\zeta' = (\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_h) \vdash n$，其中 $\zeta'_i$ 是 $\zeta$的第 $i$ 列的长度。换言之， $\zeta'$ 的杨图正是 $\zeta$的杨图的转置。$\chi_\zeta(\cdot)$ 与 $\chi_{\zeta'}(\cdot)$ 之间的关系体现在以下引理中。

**引理 2.3.** ([12, 2.1.8]) 对于任意 $\zeta \vdash n$ 和 $\gamma \vdash n$，有

$$\chi_{\zeta'}(\gamma) = \operatorname{sgn}(\gamma) \cdot \chi_\zeta(\gamma).$$

特别地，$\dim \rho_{\zeta'} = \chi_{\zeta'}(1) = \chi_\zeta(1) = \dim \rho_\zeta$。也就是说，$\rho_{\zeta'}$ 与$\rho_\zeta$具有相同的维数。以下两个引理分别给出了 $n$-循环和 $(n-1)$-循环上的归一化特征标。

**Lemma 2.4.** [18, 引理 4.10。3] 设 $\zeta$ 和 $\gamma$ 是 $n$的两个分拆。如果 $\gamma = (n)$，则 $en$

$$\chi_\zeta(\gamma) = \begin{cases} (-1)^m, & \text{if } \zeta = (n-m, 1^m) \text{ with } 0 \le m \le n-1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**引理 2.5**。 [19, 引理 4。3] 设 $\zeta$和 $\gamma$是 $n$的两个分拆。如果 $\gamma = (n-1,1)$，则

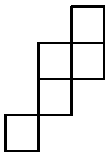
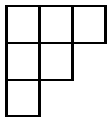
$$\chi_\zeta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{if } \zeta = (n); \\ (-1)^{n-2}, & \text{if } \zeta = (1^n); \\ (-1)^{m-1}, & \text{if } \zeta = (n-m, 2, 1^{m-2}) \text{ with } 2 \le m \le n-2; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于任意分拆 $\gamma$，令 $\ell(\gamma)$ 表示 $\gamma$ 的部分数。设 $m$ 和 $n$ 为正整数。给定分别属于 $m$ 和 $m+n$ 的分拆 $\mu$ 和 $\zeta$，若对于 $1 \le i \le \ell(\mu)$， $\mu(\mu) \le \ell(\zeta)$，且 $\mu_i \le \zeta_i$，则称 $\mu$ 是 $\zeta$ 的子分拆，记作 $\mu \subseteq \zeta$。斜形图 $\zeta/\mu$ 定义为

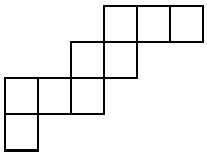
由 $\zeta$ 中不属于 $\mu$ 的方格组成的集合。用 ht($\zeta/\mu$) 表示 $\zeta/\mu$ 中非空行的数目减一。若斜形图 $\zeta/\mu$ 不包含大小为 $2\times 2$ 的方格子集，则称其为边条带



且以 $\zeta/\mu$ 的方格为顶点，并在同一行或同一列的两个相邻方格之间连边所得的图是连通的。例如，若 $\zeta_0 = (3, 3, 2, 1)$、$\mu_1 = (2, 1, 1)$ 和 $\mu_2 = (3)$，则斜形图为

$\zeta_0/\mu_1 =$  $\zeta_0/\mu_2 =$ 

其中 ht($\zeta_0/\mu_1$) $= 3$，且 ht($\zeta_0/\mu_2$) $= 2$。注意，这两个斜形图不是边条带，而下面这个是边条带:



本文的主要工具如下。

**定理 2.6** (Murnaghan-Nakayama 法则)。[18, 定理 4.10。2] 给定正整数 $m$和 $n$，令 $\rho \in S_{m+n}$ 为一个交错群 $An$ $m$-循环，并令 $\pi$ 为 $n$ 的其余$[m+n]$个元素的一个置换。那么对任意 $\zeta \vdash m+n$,

$$\chi_\zeta(\pi\rho) = \sum(-1)^{\mathrm{ht}(\zeta/\mu)}\chi_\mu(\pi),$$

其中求和遍及所有满足 $\mu \subset \zeta$ 且 $\zeta/\mu$ 是边条带的 $\mu \vdash n$ 。

Murnaghan-Nakayama 法则的一个特殊情形是， $\rho$ 仅为一个 1-循环，也就是一个不动点，这称为分支规则。具体来说，若 $\zeta$ 和 $\gamma$ 是 $n+1$ 的分拆，且$c_1(\gamma) \geq 1$，令 $\gamma'$ 为 $n$ 的分拆，其中除 $c_1(\gamma') = c_1(\gamma) - 1$外，所有 $c_i(\gamma') = c_i(\gamma)$均满足条件，那么

$$\chi_\zeta(\gamma) = \sum_{\zeta-\square}\chi_{\zeta-\square}(\gamma'),$$

其中，求和遍历所有由 $\zeta$ 去掉一个方格后得到的 $n$ 的分拆。

回顾式 (1)， $C(n, I)$ 是 $S_n$ 中所有长度属于 $I$ 的循环的集合，其中 $\emptyset \neq I \subseteq \{2, 3, \ldots, n\}$。由于 Cay($S_n, C(n, I)$) 是正规图，根据命题 2.1，我们可以用 $S_n$ 的不可约特征标来表示它的特征值。具体而言，若将对应于 $\zeta \vdash n$ 的 Cay($S_n, C(n, I)$) 的特征值记为 $\lambda_\zeta^I$，则

$$\begin{aligned}\lambda_\zeta^I &= \sum_{\sigma\in C(n,I)}\tilde{\chi}_\zeta(\sigma)\\ &= \sum_{k\in I}|C(n,k)|\cdot\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k}))\end{aligned}$$

$$= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\cdot\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k})). \tag{2}$$

此外， $\lambda_\zeta^I$ 的重数等于

$$\sum_{\substack{\mu\vdash n\\ \lambda_\mu^I=\lambda_\zeta^I}}\chi_\mu(\mathbf{1})^2. \tag{3}$$

特别地，由 (2)、表 2 和引理 2.3 可知，对于任意 $\emptyset\neq I\subseteq\{2,3,\ldots\ldots,n\}$，Cay($S_n$，$C(n,I)$) 中与符号表示和标准表示对应的两个特征值分别为

$$\lambda_{(1^n)}^I=\sum_{k\in I}|C(n,k)|\cdot\tilde{\chi}_{(1^n)}((k,1^{n-k}))=\sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\cdot(-1)^{k-1} \tag{4}$$

and

$$\lambda_{(n-1,1)}^I=\sum_{k\in I}|C(n,k)|\cdot\tilde{\chi}_{(n-1,1)}((k,1^{n-k}))=\sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\cdot\frac{n-k-1}{n-1}, \tag{5}$$

。

## 3 Cay($S_n$，$C(n,I)$) 在 $I\cap\{n-1,n\}=\emptyset$

**引理 3.1.** 设 $n\geq 8$。令 $\gamma=(k,1^{n-k})$ 为 $S_n$ 中一个具有 $2\leq k\leq n-3$的 $k$-循环的循环类型。对于除$(n)$、$(1^n)$、$(n-1,1)$ 和 $(2,1^{n-2})$以外的任意 $\zeta\vdash n$，我们有

$$\tilde{\chi}_\zeta(\gamma)<\frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}. \tag{6}$$

证明。容易验证，当 $n=8$ 时结论成立。假设对于某个 $n-1\geq 8$，结论成立。现在我们证明 $n\geq 9$ 和 $2\leq k\leq n-3$时的 (6)。先考虑 $k=n-3$。我们在表 3 中列出 $n$ 的所有具有 $n-3$ 个方格的边条带的分拆。表 3 中的维数和特征标借助 Murnaghan-Nakayama 法则和钩长公式计算得出。根据 Murnaghan-Nakayama 法则，我们还知道，不在此列表中的 $n$ 的分拆在任意 $(n-3)$-循环上的归一化特征标必为零。借助表 3 进行简单计算，即可验证 $k=n-3$时的 (6)。

现在假设 $2\leq k\leq n-4$。利用表 2 和引理 2.3，我们可以证明，对于$\zeta=(n-2,2),(2_2,1^{n-4}),(n-2,1_2),(3,1^{n-3})$，式 (6) 成立。下文中，令 $\zeta$为 $n$的任意一个分拆，其第一行之外和第一列之外的方格均至少有三个。因此，根据分支规则，我们得到

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_\zeta(\gamma)&=\frac{\sum_{\zeta-\square}\chi_{\zeta-\square}(k,1^{n-1-k})}{\sum_{\zeta-\square}\chi_{\zeta-\square}(\mathbf{1})}\\&\leq\max_{\zeta-\square}\tilde{\chi}_{\zeta-\square}((k,1^{n-1-k}))\\&<\frac{(n-k-1)(n-k-2)}{(n-1)(n-2)}\\&<\frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)},\end{aligned}$$

其中倒数第二个不等式由我们的归纳假设得出。我们可以使用这一假设，因为上面的每个 $\zeta-\square$ 都是 $n-1$ 的一个分拆，在第一行之外至少有两个方格，且在第一列之外也至少有两个方格。

□

| $\zeta \vdash n$ | $\rho_\zeta = \chi_\zeta$(1)的维数 | $\lvert\chi_\zeta((n-3,1_3))\rvert$ |
|---|---|---|
| $(n)$ 或 $(1^n)$ | 1 | 1 |
| $(n-1,1)$ 或 $(2,1^{n-2})$ | $n-1$ | 2 |
| $(n-2,\ 1_2)$ 或 $(3,\ 1^{n-3})$ | $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ | 1 |
| $(n-3,\ 2,\ 1)$ 或 $(3,\ 2,\ 1^{n-5})$ | $\frac{n(n-2)(n-4)}{3}$ | 1 |
| $(n-3,3)$ 或 $(2_3,1^{n-6})$ | $\frac{n(n-1)(n-5)}{6}$ | 2 |
| $(n-4,\ 2_2)$ 或 $(3_2,\ 1^{n-6})$ | $\frac{n(n-1)(n-4)(n-5)}{12}$ | 1 |
| $(n-m,\ 3,\ 2,\ 1^{m-5})$ | $\frac{n!}{3(n-3)(n-m+1)(n-m-1)(m-1)(m-3)(m-5)!(n-m-3)!}$ | 2 |
| $(n-m,\ 4,\ 1^{m-4})$ | $\frac{n!}{6(n-3)(n-m)(n-m-1)(n-m-2)m(m-4)!(n-m-4)!}$ | 1 |
| $(n-m,\ 2_3,\ 1^{m-6})$ | $\frac{n!}{6(n-3)(n-m+2)(m-2)(m-3)(m-4)(m-6)!(n-m-2)!}$ | 1 |

表 3： $S_n$ 在（$n-3,\ 1_3$）上的不可约表示的所有非零特征标

下一个引理表明，在 $S_n$ 中长度至多为 $n-2$ 的任意循环上，标准表示的归一化特征标大于那些不对应于 $(n),(1^n),(n-1,1)$ 或 $(2,1^{n-2})$ 的 Specht 模的归一化特征标。

**引理 3.2**。设 $n \geq 7$。设 $\gamma = (k,1^{n-k})$ 是 $S_n$ 中一个 $k$-循环的循环类型，且满足 $2 \leq k \leq n-2$。对于除$(n)$、$(1^n)$、$(n-1,1)$ 和 $(2,1^{n-2})$以外的任意 $\zeta \vdash n$，有

$$\tilde{\chi}_\zeta(\gamma) < \tilde{\chi}_{(n-1,1)}(\gamma).$$

证明。首先，设 $\gamma = (n-2,1_2)$。表4列出了 $n$ 的所有分拆，它们含有 $n-2$ 个方格的边条带，因此在任意 $(n-2)$-循环上都取得非零特征标，循环取自$S_n$。由于 $n \geq 7$，由表4可知，当$\zeta \neq (n),(1^n),(n-1,1),(2,1^{n-2})$ 时，$\tilde{\chi}_{(n-1,1)}(\gamma) = \frac{1}{n-1}$ 且 $\tilde{\chi}_\zeta(\gamma) < \frac{1}{n-1}$。

| $\zeta \vdash n$ | $\dim \rho_\zeta = \chi_\zeta$(1) | $\chi_\zeta((n-2,\ 1,\ 1))$ |
|---|---|---|
| $(n)$ | 1 | 1 |
| $(1^n)$ | 1 | $(-1)^{n-3}$ |
| $(n-1,1)$ | $n-1$ | 1 |
| $(2,\ 1^{n-2})$ | $n-1$ | $(-1)^{n-3}$ |
| $(n-2,\ 2)$ | $\frac{n(n-3)}{2}$ | $-1$ |
| $(2_2,\ 1^{n-4})$ | $\frac{n(n-3)}{2}$ | $(-1)^{n-2}$ |
| $(n-m,\ 3,\ 1^{m-3})$ | $\frac{n!}{2m(n-2)(n-m)(n-m-1)(m-3)!(n-m-3)!}$ | $(-1)^{m-2}$ |
| $(n-m,\ 2_2,\ 1^{m-4})$ | $\frac{n!}{2(m-1)(m-2)(n-2)(n-m+1)(m-4)!(n-m-2)!}$ | $(-1)^{m-2}$ |

表4： $S_n$ 在（$n-2,\ 1_2$）上不可约表示的所有非零特征标

现在假设 $\gamma = (k,\ 1^{n-k})$，且 $2 \leq k \leq n-3$。可以验证，若 $n = 7$，则

对于任意 $\zeta \neq (7), (1^7), (6,1), (2,1^5)$，$\tilde{\chi}_\zeta(\gamma) < \tilde{\chi}_{(6,1)}(\gamma)$ 成立。若 $n \geq 8$，则由引理 3.1 可得

$$\tilde{\chi}_\zeta(\gamma) < \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} < \frac{n-k-1}{n-1} = \tilde{\chi}_{(n-1,1)}(\gamma).$$

证明至此完成。 □

接下来的两个引理比较 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 对任意 $I \subseteq \{2,3,\ldots,n-1\}$ 的特征值 $\lambda^I_{(1^n)}$ 和 $\lambda^I_{(n-1,1)}$。

**引理 3.3**。设 $n \geq 7$。若 $I = \{2,3\}$，则 $\lambda^I_{(1^n)} = \lambda^I_{(n-1,1)}$；若 $\{2,3\} \neq I \subseteq \{2,3,\ldots,n-1\}$，且 $I$ 中的最大数是奇数，则 $\lambda^I_{(1^n)} > \lambda^I_{(n-1,1)}$。

证明。若 $I = \{2,3\}$，则利用 (4) 和 (5) 进行直接计算可得 $\lambda^I_{(1^n)} = \lambda^I_{(n-1,1)}$。现在设 $I \neq \{2,3\}$，且 $I$ 中的最大数（记作 $k_0$）是奇数。若 $k_0 = 3$，则由 (4) 和 (5) 得 $I = \{3\}$ 且 $\lambda^{\{3\}}{}_{(1^n)} > \lambda^{\{3\}}{}_{(n-1,1)}$。剩下的情况是 $5 \leq k_0 \leq n-1$。此时，由 (4) 和 (5)，我们有

$$\begin{aligned}
& \lambda^I_{(1^n)} - \lambda^I_{(n-1,1)} \\
= \; & \binom{n}{k_0}(k_0-1)!\frac{k_0}{n-1} + \sum_{k \in I \setminus \{k_0\}} \binom{n}{k}(k-1)!\left((-1)^{k-1} - \frac{n-k-1}{n-1}\right) \\
\geq \; & \binom{n}{k_0}(k_0-1)!\frac{k_0}{n-1} - \sum_{\substack{2 \leq k \leq k_0-1 \\ k \text{ is even}}} \binom{n}{k}(k-1)!\frac{2n-k-2}{n-1} \\
= \; & n(n-2)!\left(\frac{1}{(n-k_0)!} - \sum_{\substack{2 \leq k \leq k_0-1 \\ k \text{ is even}}} \frac{2n-k-2}{k(n-k)!}\right) \\
= \; & n(n-2)!\left(\frac{1}{(n-5)!} - \sum_{\substack{2 \leq k \leq 5 \\ k \text{ is even}}} \frac{2n-k-2}{k(n-k)!}\right) + \\
& n(n-2)!\left(\sum_{\substack{6 \leq k \leq k_0-1 \\ k \text{ is even}}} \left(\frac{1}{(n-k-1)!} - \frac{1}{(n-k+1)!} - \frac{2n-k-2}{k(n-k)!}\right)\right). \qquad (7)
\end{aligned}$$

由于 $n \geq 7$，我们看到下界 (7) 的第一部分为正。注意，当 $k_0 = 5$ 时，这个下界的第二部分消失。此外，对于 $6 \leq k \leq n-2$，我们有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n-k-1)!} - \frac{1}{(n-k+1)!} - \frac{2n-k-2}{k(n-k)!} \\
> \; & \frac{1}{(n-k-1)!} - \frac{k-2}{k(n-k)!} - \frac{2n-k-2}{k(n-k)!} \\
= \; & \frac{1}{(n-k-1)!} - \frac{2n-4}{k(n-k)!} \\
\geq \; & 0.
\end{aligned}$$

因此，下界 (7) 的第二部分也为正，从而完成证明。

□

**引理 3.4.** 设 $n \geq 7$。若 $\emptyset \neq I \subseteq \{2,3,\ldots,n-1\}$ 且 $I$ 中的最大数为偶数，则 $\lambda^I_{(n-1,1)} > \lambda^I_{(1^n)}$。

证明。记 $k_0$ 为 $I$ 中的最大数。根据我们的假设，$k_0$ 为偶数。如果 $k_0 = 2$，则根据 (4) 和 (5)，有 $I = \{2\}$ 和 $\lambda^{\{2\}}{}_{(n-1,\,1)} > \lambda^{\{2\}}{}_{(1^n)}$。

现在假设 $4 \leq k_0 \leq n-1$。根据 (4) 和 (5)，我们有

$$\begin{aligned}
&\lambda^I_{(n-1,1)} - \lambda^I_{(1^n)} \\
= \;& \binom{n}{k_0}(k_0-1)!\frac{2n-k_0-2}{n-1} + \sum_{k\in I\setminus\{k_0\}}\binom{n}{k}(k-1)!\left(\frac{n-k-1}{n-1}+(-1)^k\right) \\
\geq \;& \binom{n}{k_0}(k_0-1)!\frac{2n-k_0-2}{n-1} - \sum_{\substack{2\leq k\leq k_0-1\\ k \text{ is odd}}}\binom{n}{k}(k-1)!\frac{k}{n-1} \\
= \;& n(n-2)!\left(\frac{2n-k_0-2}{k_0(n-k_0)!} - \sum_{\substack{2\leq k\leq k_0-1\\ k \text{ is odd}}}\frac{1}{(n-k)!}\right) \\
= \;& n(n-2)!\left(\frac{2n-6}{4(n-4)!} - \sum_{\substack{2\leq k\leq 4\\ k \text{ is odd}}}\frac{1}{(n-k)!}\right) + \\
& n(n-2)!\left(\sum_{\substack{5\leq k\leq k_0-1\\ k \text{ is odd}}}\left(\frac{2n-k-3}{(k+1)(n-k-1)!} - \frac{2n-k-1}{(k-1)(n-k+1)!} - \frac{1}{(n-k)!}\right)\right). \qquad (8)
\end{aligned}$$

由于 $n \geq 7$，下界 (8) 的第一部分为正。注意，当 $k_0 = 4$ 时，(8) 的第二部分为零。还要注意，对于 $5 \leq k \leq n-2$，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{2n-k-3}{(k+1)(n-k-1)!} - \frac{2n-k-1}{(k-1)(n-k+1)!} - \frac{1}{(n-k)!} \\
&> \frac{2n-k-3}{(k+1)(n-k-1)!} - \frac{2}{(n-k)!} \\
&= \frac{(2n-k-3)(n-k)-2(k+1)}{(k+1)(n-k)!} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

因此，下界 (8) 的第二部分也为正。证明完毕。 □

本节的主要结果如下。

**定理 3.5**。设 $n \geq 7$ 且 $\emptyset \neq I \subseteq \{2、3、\ldots\ldots、n-2\}$。则以下陈述成立：

(a) 如果 $I$ 只包含奇数，那么 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 有两个连通分支，其严格次大特征值由 $(n-1, 1)$ 和 $(2, 1^{n-2})$ 取得，重数为 $2(n-1)^2$；

(b) $\mathrm{Cay}(S_n、C(n、\{2、3\}))$ 是连通的，其第二大特征值由 $(n-1、1)$ 和 $(1^n)$ 取得，重数为 $(n-1)^2+1$；

(c) 如果 $I$ 同时包含偶数和奇数，且其中最大的数为奇数并且至少为5，那么$\mathrm{Cay}(S_n、C(n、I))$ 是连通的，其第二大特征值唯一由$(1^n)$取得，重数为1；

(d) 若 $I$ 中的最大数为偶数，则 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n, I))$ 是连通的，其第二大特征值仅由 $(n-1,1)$ 取得，重数为 $(n-1)^2$。

证明。 由 (2) 和引理 3.2 可知，对于除 $(n)$,$(1^n)$,$(n-1,1)$ 和 $(2,1^{n-2})$ 之外的任意 $\zeta \vdash n$，我们有

$$\begin{aligned}\lambda_\zeta^I &= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\cdot\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k}))\\ &< \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\cdot\tilde{\chi}_{(n-1,1)}((k,1^{n-k}))\\ &= \lambda_{(n-1,1)}^I.\end{aligned}$$

另一方面，由 (5) 可知， $\lambda_{(n-1,1)}^I$ 严格小于

$$\lambda_{(n)}^I = \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)! = |C(n,I)|,$$

这是 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 的度。因此，$\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 的严格次大特征值只能由分拆 $(1^n)$,$(n-1,1)$ 和 $(2,1^{n-2})$ 取得。根据引理 2.3，我们有

$$\begin{aligned}\lambda_{(2,1^{n-2})}^I &= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\cdot\tilde{\chi}_{(2,1^{n-2})}((k,1^{n-k}))\\ &= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\cdot(-1)^{k-1}\tilde{\chi}_{(n-1,1)}((k,1^{n-k}))\\ &= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\cdot(-1)^{k-1}\frac{n-k-1}{n-1}.\end{aligned}$$

与 (5) 比较可得 $\lambda_{(n-1,1)}^I \geq \lambda_{(2,1^{n-2})}^I$，并且严格不等式 $\lambda_{(n-1,1)}^I > \lambda_{(2,1^{n-2})}^I$ 在 $I$ 中至少包含一个偶数时成立。

当 $I$ 仅包含奇数时，$\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 有两个连通分支，分别同构于 $\mathrm{Cay}(A_n, C(n,I))$，且 $\lambda_{(n)}^I = \lambda_{(1^n)}^I > \lambda_{(n-1,1)}^I = \lambda_{(2,1^{n-2})}^I$。因此，其严格次大特征值仅在 $(n-1,1)$ 和 $(2,1^{n-2})$ 处取到。注意，根据表 2 和引理 2.3，$\rho_{(n-1,1)}$ 和 $\rho_{(2,1^{n-2})}$ 的维数均为 $n-1$。由等式 (3) 进一步可得，严格次大特征值的重数为 $2(n-1)^2$。这证明了结论 (a)。在其余三种情形中，$I$ 至少包含一个偶数，因此 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 是连通的，且 $\lambda_{(n-1,1)}^I > \lambda_{(2,1^{n-2})}^I$。所以，$\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 的第二大特征值只能在 $(1^n)$ 或 $(n-1,1)$ 处取到。结合引理 3.3 和引理 3.4，可得 (b)、(c) 和 (d)，其中重数借助等式 (3) 直接计算得出。

□

定理 3.5 蕴含以下结果。

**推论 3.6.** 设 $n \geq 7$ 和 $\emptyset \neq I \subseteq \{2,3,\ldots,n-2\}$。那么，当且仅当以下条件之一成立时，$\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 具有 *Aldous* 性质：

(a) $I = \{2,3\}$; (b) $I$ 仅包含奇数;
(c) $I$ 中的最大数为偶数。

定理 3.5 的下一个推论证实了猜想 1.4 在 [15] 中成立。

**推论 3.7**。 对于任意 $n \geq 4$ 和 $2 \leq k \leq n-2$，$\mathrm{Cay}(S_n, C(n,k))$ 的严格次大特征值由 $S_n$ 的标准表示取得，其值为

$$\lambda^{\{k\}}_{(n-1,1)} = \frac{n-k-1}{n-1}\binom{n}{k}(k-1)!. \tag{9}$$

证明。 当 $n$ 为 4、5 或 6 时，很容易验证该结果。现在假设 $n \geq 7$。定理 3.5 中的 (a) 和 (d) 表明，对于奇数 $k$ 和偶数 $k$，标准表示 $\rho_{(n-1,1)}$ 分别取得 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,k))$ 的严格次大特征值。(9) 中的值可直接由 (5) 得出。

□

## 4 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 其中 $I \cap \{n-1, n\} = \{n-1\}$

**引理 4.1.** 假设 $n \geq 8$ 为偶数，且 $\{n-1\} \subseteq I \subseteq \{2,3,\ldots,n-1\}$。则

$$\lambda^I_{(1^n)} - \lambda^I_{(n-1,1)} > \frac{n(n-5)}{3}(n-3)!.$$

证明。 由于 $n \geq 8$ 为偶数， $I$ 中的最大数 $k_0 = n-1$ 为奇数，因此可以将 (7) 应用于当前情形。由此不等式可得

$$\begin{aligned}
\lambda^I_{(1^n)} - \lambda^I_{(n-1,1)} &\geq n(n-2)!\left(\frac{1}{(n-5)!} - \sum_{\substack{2\leq k\leq 5\\ k \text{ is even}}} \frac{2n-k-2}{k(n-k)!}\right) + \\
&\quad n(n-2)!\left(\sum_{\substack{6\leq k\leq n-2\\ k \text{ is even}}} \frac{1}{(n-k-1)!} - \frac{1}{(n-k+1)!} - \frac{2n-k-2}{k(n-k)!}\right) \\
&> n(n-2)!\left(\sum_{\substack{k=n-2\\ k \text{ is even}}} \frac{1}{(n-k-1)!} - \frac{1}{(n-k+1)!} - \frac{2n-k-2}{k(n-k)!}\right) \\
&= \frac{n(n-5)}{3}(n-3)!
\end{aligned}$$

如所需。 □

**引理 4.2.** 假设 $n \geq 7$。以下结论成立:

(a) 若 $k = n-1$、$n-2$ 或 $n-3$，且 $\zeta = (n-m, 1^m)$ 满足 $3 \leq m \leq n-4$，则

$$\tilde{\chi}_\zeta((k, 1^{n-k})) = 0;$$

(b) 若 $2 \leq k \leq n-4$ 和 $\zeta = (n-m, 1^m)$ 满足 $4 \leq m \leq n-5$，则

$$\tilde{\chi}_\zeta((k, 1^{n-k})) < \tilde{\chi}_{(n-3,1^3)}((k, 1^{n-k})) < \tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k, 1^{n-k})). \tag{10}$$

证明。（a）若 $k=n-1,\ n-2$ 或 $n-3$，则 $\zeta=(n-m,\ 1^m)$ 不含任何 $k$-边条带。因此，根据 Murnaghan-Nakayama 法则，$\tilde{\chi}_\zeta((k,\ 1^{n-k}))=0$。

(b) 假设 $2\le k\le n-4$ and $\zeta=(n-m,1^m)$，其中 $n\ge 7$ and $4\le m\le n-5$。根据表 2，我们有

$$\tilde{\chi}_{(n-3,1^3)}((k,1^{n-k}))=\frac{(n-k-1)(n-k-2)(n-k-3)-6(n-k-1)c_2+6c_3}{(n-1)(n-2)(n-3)} \tag{11}$$

$$\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k}))=\frac{(n-k-1)(n-k-2)-2c_2}{(n-1)(n-2)},$$

其中，$c_i$ 是 $(k,1^{n-k})$ 中等于 $i$ 的项数。利用这些表达式，可以很容易验证 (10) 中的第二个不等式。

剩下需要证明 (10) 中的第一个不等式对 $n\ge 9$ 成立。（注意，当 $n=7$ or 8 as $4\le m\le n-5$ in $\zeta$ 时，该不等式不成立。）我们通过对 $n\ge 9$ 使用归纳法来证明。由 (11) 和引理 2.3 可知

$$0<\tilde{\chi}_{(n-3,1^3)}((k,1^{n-k}))=|\tilde{\chi}_{(4,1^{n-4})}((k,1^{n-k}))|. \tag{12}$$

很容易验证，当 $n=9,\ 2\le k\le 5$ and$\zeta=(5,1^4)$ 时，(10) 中的第一个不等式成立。假设 $n-1\ge 9$，并且对于每个满足 $4\le m\le n-6$ 的 $\zeta=(n-1-m,1^m)$ 以及任意 $2\le k\le n-5$，以下结论成立：

$$\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-1-k}))<\tilde{\chi}_{(n-4,1^3)}((k,1^{n-1-k}))=|\tilde{\chi}_{(4,1^{n-5})}((k,1^{n-1-k}))|. \tag{13}$$

现在考虑 $\zeta=(n-m,\ 1^m)\vdash n$，其中 $4\le m\le n-5$ 且 $2\le k\le n-4$。若 $k=n-4$，则对于任意满足 $4\le m\le n-5$ 的 $\zeta=(n-m,\ 1^m)$，其杨图不含 $(n-4)$-边条带。因此，根据 Murnaghan-Nakayama 法则和不等式 (12)，我们知道对于$4\le m\le n-5$,

$$0=\tilde{\chi}_{(n-m,1^m)}((n-4,1^4))<\tilde{\chi}_{(n-3,1^3)}((n-4,1^4)).$$

若 $2\le k\le n-5$，则对于任意满足 $4\le m\le n-5$ 的 $\zeta=(n-m,\ 1^m)$，我们将分支规则应用于以下归一化特征标，并得到

$$\begin{aligned}
&\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k}))\\
=\ &\frac{\sum\limits_{\zeta-\square}\chi_{\zeta-\square}((k,1^{n-1-k}))}{\sum\limits_{\zeta-\square}\chi_{\zeta-\square}((1^{n-1}))}\\
=\ &\frac{\chi_{(n-m,1^{m-1})}((k,1^{n-1-k}))+\chi_{(n-m-1,1^m)}((k,1^{n-1-k}))}{\chi_{(n-m,1^{m-1})}((1^{n-1}))+\chi_{(n-m-1,1^m)}((1^{n-1}))}\\
\le\ &\max\left\{\frac{\chi_{(n-m,1^{m-1})}((k,1^{n-1-k}))}{\chi_{(n-m,1^{m-1})}((1^{n-1}))},\frac{\chi_{(n-m-1,1^m)}((k,1^{n-1-k}))}{\chi_{(n-m-1,1^m)}((1^{n-1}))}\right\}\\
\le\ &\tilde{\chi}_{(n-4,1^3)}((k,1^{n-1-k}))\\
=\ &\frac{(n-1-k-1)(n-1-k-2)(n-1-k-3)-6(n-1-k-1)c_2+6c_3}{(n-2)(n-3)(n-4)}\\
<\ &\frac{(n-k-1)(n-k-2)(n-k-3)-6(n-k-1)c_2+6c_3}{(n-1)(n-2)(n-3)}\\
=\ &\tilde{\chi}_{(n-3,1^3)}((k,1^{n-k})),
\end{aligned} \tag{14}$$

其中，式 (14) 由归纳假设 (13) 得出。 □

**引理 4.3**。设 $n \geq 7$ 和 $n \in I \subseteq \{2、3、\ldots\ldots、n\}$。则有以下结论：

*(a)* $\max_{1\leq m\leq n-1} \lambda^I_{(n-m,1^m)}$ 只能由 $m = 1,2, n-3, n-2$ 或 $n-1$ 取得；*(b)* $\lambda^I_{(n-2,1^2)} \geq \lambda^I_{(n-1,1)}$，且当且仅当 $I = \{2,3,\ldots,n-2,n\}$ 或 $I = \{2,3,\ldots,n-1,n\}$ 时等号成立；*(c)* 若 $n$ 是偶数，且 $I = \{2,3,\ldots,n-2,n\}$ 或 $\{2,3,\ldots,n-1,n\}$，则 $\lambda^I_{(2,1^{n-2})} > \lambda^I_{(n-1,1)} = \lambda^I_{(n-2,1^2)}$；

(d) $\lambda^I_{(n-2,1^2)} \geq \lambda^I_{(3,1^{n-3})}$，且当且仅当 $I$ 仅包含除 $n-1$ 和 $n-2$ 以外的奇数时等号成立。

证明。(a) 从表 2 可知 $\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((n-3,1^3)) > 0$ 和 $\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((n-2,1^2)) = \tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((n-1,1)) = 0$。结合前一个引理与引理 2.4，我们得到，对于 $2 \leq k \leq n-3$ 或 $k = n$，

$$\tilde{\chi}_{(n-m,1^m)}((k,1^{n-k})) < \tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k})), \quad 3 \leq m \leq n-4$$

对于 $k = n-1$ 或 $n-2$，

$$\tilde{\chi}_{(n-m,1^m)}((k,1^{n-k})) = 0, \quad 2 \leq m \leq n-3.$$

因此，等式 (2) 表明，只要 $n \in I \subseteq \{2,3,\ldots,n\}$，就有 $\lambda^I_{(n-m,1^m)} < \lambda^I_{(n-2,1^2)}$ 对每个 $3 \leq m \leq n-4$ 都成立，因此 $\lambda^I_{(n-m,1^m)}$ 在 $1 \leq m \leq n-1$ 上的最大值只能由 $m = 1,2, n-3, n-2$ 或 $n-1$ 取得。

(b) 我们有

$$\begin{aligned}
& \lambda^I_{(n-2,1^2)} - \lambda^I_{(n-1,1)} \\
= & \sum_{k\in I\setminus\{n\}} \binom{n}{k}(k-1)!\left(\frac{(n-k-1)(n-k-2)-2c_2}{(n-1)(n-2)} - \frac{n-k-1}{n-1}\right) + 2(n-3)! + (n-2)! \\
\geq & -\sum_{2\leq k\leq n-2} \binom{n}{k}(k-1)!\frac{k(n-k-1)+2c_2}{(n-1)(n-2)} + 2(n-3)! + (n-2)! \\
= & \; n(n-3)! - \sum_{2\leq k\leq n-2} \frac{n(n-3)!}{(n-k)(n-k-2)!} - \frac{n}{n-2} \\
= & \; n(n-3)!\left(1 - \sum_{2\leq k\leq n-2} \frac{1}{(n-k)(n-k-2)!}\right) - \frac{n}{n-2} \\
= & \; n(n-3)!\cdot\frac{1}{(n-2)!} - \frac{n}{n-2} \\
= & \; 0.
\end{aligned}$$

因此 $\lambda^I_{(n-2,1^2)} \geq \lambda^I_{(n-1,1)}$，且等号成立当且仅当 $I = \{2,3,\ldots,n-2,n\}$ 或 $I = \{2,3,\ldots,n-1,n\}$。

(c) 由 (b) 可得 $\lambda^I_{(n-1,1)} = \lambda^I_{(n-2,1^2)}$。我们声称，在这种情况下，分拆 $(2,1^{n-2})$ 得到的特征值大于 $(n-2,1^2)$ 和 $(n-1,1)$ 对应的特征值。事实上，

$$\lambda^I_{(2,1^{n-2})} - \lambda^I_{(n-1,1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{k}(k-1)!(-1)^{k-1}\frac{n-k-1}{n-1}+(n-2)!\\
&\quad -\left(\sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{k}(k-1)!\frac{n-k-1}{n-1}-(n-2)!\right)\\
&= -2\sum_{\substack{2\le k\le n-2\\ k \text{ is even}}}\binom{n}{k}(k-1)!\frac{n-k-1}{n-1}+2(n-2)!\\
&= 2(n-2)!\left(1-\sum_{\substack{2\le k\le n-2\\ k \text{ is even}}}\frac{n}{k(n-k)(n-k-2)!}\right)\\
&> 0.
\end{aligned}
$$

上面的最后一个不等式是根据以下事实推导出的： $n$ 至少为 8，且

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{2\le k\le n-2\\ k \text{ is even}}}\frac{n}{k(n-k)(n-k-2)!} &= \frac{n}{2(n-2)}+\frac{n}{8(n-4)}+\sum_{\substack{2\le k\le n-6\\ k \text{ is even}}}\frac{n}{k(n-k)(n-k-2)!}\\
&< \frac{n}{2(n-2)}+\frac{n}{8(n-4)}+\sum_{\substack{2\le k\le n-6\\ k \text{ is even}}}\frac{1}{(n-k-2)!}\\
&< \frac{8}{12}+\frac{8}{32}+\frac{2}{4!}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

(d) 由表 2 可知，对于任意 $2\le k\le n$，$\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k}))\ge 0$，且 $\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k}))=$ 当且仅当 $k=n-1$ 或 $n-2$ 时为 0。因此，对于任意 $2\le k\le n$，有 $\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k}))\ge\tilde{\chi}_{(3,1^{n-3})}((k,1^{n-k}))=(-1)^{k-1}\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k}))$。这意味着 $\lambda^I_{(n-2,1^2)}\ge\lambda^I_{(3,1^{n-3})}$，且等号成立当且仅当 $I$ 仅包含除 $n-1$ 和 $n-2$ 以外的奇数。 □

**引理 4.4**。假设 $n\ge 7$。若 $2\le k\le n-5$ 且 $\zeta=(n-m,\ 2,\ 1^{m-2})$，其中 $4\le m\le n-4$，则

$$
\tilde{\chi}_{\zeta}((k,1^{n-k}))<\tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((k,1^{n-k}))<\tilde{\chi}_{(n-2,2)}((k,1^{n-k})). \tag{15}
$$

证明。由表 2 可得

$$
\tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((k,1^{n-k}))=\frac{(n-k)(n-k-2)(n-k-4)-3c_3}{n(n-2)(n-4)},
$$

$$
\tilde{\chi}_{(n-2,2)}((k,1^{n-k}))=\frac{(n-k)(n-k-3)+2c_2}{n(n-3)},
$$

其中 $c_i$ 是 $(k,\ 1^{n-k})$ 中等于 $i$ 的项数。利用这些表达式和引理 2.3，可以很容易地验证

$$
|\tilde{\chi}_{(3,2,1^{n-5})}((k,1^{n-k}))|=\tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((k,1^{n-k}))<\tilde{\chi}_{(n-2,2)}((k,1^{n-k}))
$$

对于 $n\ge 7$ 和 $2\le k\le n-5$。注意，正如我们在 $\zeta$中要求的那样，当 $n=7$ 时，(15) 中的第一个不等式取等号。下面我们通过对 $n\ge 8$ 进行归纳，证明对于$2\le k\le n-5$,

$$
\tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((k,1^{n-k}))<\tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((k,1^{n-k}))
$$

对于 $4 \le m \le n-4$成立。容易验证，对于 $n = 8$ 和 9，该结论成立。假设上述不等式对于某个 $n-1 \ge 9$成立，即对于 $2 \le k \le n-6$,

$$\tilde{\chi}_{(n-1-m,2,1^{m-2})}((k,1^{n-1-k})) < \tilde{\chi}_{(n-4,2,1)}((k,1^{n-1-k})) = |\tilde{\chi}_{(3,2,1^{n-6})}((k,1^{n-1-k}))| \tag{16}$$

对 $4 \le m \le n-5$ 成立。

现在我们考虑 $\tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((k,\ 1^{n-k}))$，其中 $4 \le m \le n-4$ 且 $2 \le k \le n-5$。注意，$\tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((k,\ 1^{n-k})) > 0$，对于 $n \ge 8$ 和 $2 \le k \le n-5$。首先，令 $k = n-5$。由 Murnaghan–Nakayama 规则可知，若 $m \ne 5,\ n-5$，则 $\tilde{\chi}_\zeta((n-5,\ 1_5)) = 0 < \tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((n-5,\ 1_5))$，因为 $\zeta$ 中不存在 $(n-5)$-边条带。若 $m = 5$ 或 $n-5$，则通过简单计算仍可得到

$$0 < |\tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((n-5,1^5))| < \tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((n-5,1^5)).$$

因此，对于 $4 \le m \le n-4$,

$$\tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((n-5,1^5)) < \tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((n-5,1^5)).$$

接下来，令 $2 \le k \le n-6$。对于每个满足 $4 \le m \le n-4$ 的 $\zeta = (n-m,\ 2,\ 1^{m-2})$，我们有

$$\begin{aligned}
& \tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k})) \\
= & \frac{\sum\limits_{\zeta-\square} \chi_{\zeta-\square}((k,1^{n-1-k}))}{\sum\limits_{\zeta-\square} \chi_{\zeta-\square}((1^{n-1}))} \\
= & \frac{\chi_{(n-m-1,2,1^{m-2})}((k,1^{n-1-k})) + \chi_{(n-m,2,1^{m-3})}((k,1^{n-1-k})) + \chi_{(n-m,1^{m-1})}((k,1^{n-1-k}))}{\chi_{(n-m-1,2,1^{m-2})}((1^{n-1})) + \chi_{(n-m,2,1^{m-3})}((1^{n-1})) + \chi_{(n-m,1^{m-1})}((1^{n-1}))} \\
\le & \max\left\{\tilde{\chi}_{(n-m-1,2,1^{m-2})}((k,1^{n-1-k})), \tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-3})}((k,1^{n-1-k})), \tilde{\chi}_{(n-m,1^{m-1})}((k,1^{n-1-k})\right\} \\
\le & \max\left\{\tilde{\chi}_{(n-4,2,1)}((k,1^{n-1-k})), \tilde{\chi}_{(n-4,1^3)}((k,1^{n-1-k})\right\} \qquad (17) \\
= & \max\left\{\frac{(n-1-k)(n-1-k-2)(n-1-k-4)-3c_3}{(n-1)(n-3)(n-5)},\right. \\
& \left.\frac{(n-k-2)(n-k-3)(n-k-4)-6(n-k-2)c_2+6c_3}{(n-2)(n-3)(n-4)}\right\} \\
< & \frac{(n-k)(n-k-2)(n-k-4)-3c_3}{n(n-2)(n-4)} \\
= & \tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((k,1^{n-k})),
\end{aligned}$$

其中，(17) 由归纳假设 (16) 以及引理 4.2 推出。 □

**引理 4.5**。假设 $n \ge 7$。那么对于任意满足 $4 \le m \le n-4$ 的 $\zeta = (n-m、2、1^{m-2})$，以下结论成立：

(a) $\tilde{\chi}_\zeta(n-1,\ 1) < \tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}(n-1,\ 1) < |\tilde{\chi}_{(n-2,2)}(n-1,\ 1)|$；(b) $\sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)! \tilde{\chi}_\zeta(k,\ 1^{n-k}) < \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\ \tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}(k,\ 1^{n-k})$ 对于每个 $I$ 满足 $n-1 \in I \subseteq \{n-4,\ n-3,\ n-1\}$。

证明。(a) 直接使用引理2.5和钩长公式可得到以下事实：如果 $n = 7$，那么 $\tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((n-1,\ 1)) < |\tilde{\chi}_{(n-2,2)}((n-1,\ 1))|$；如果 $n = 8$或 9，那么

$|\tilde{\chi}_{(n-4,2,1^2)}((n-1,\ 1))| < \tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((n-1,\ 1)) < |\tilde{\chi}_{(n-2,2)}((n-1,\ 1))|$；如果 $n \geq 10$，那么对于任意$5 \leq m \leq n-5$,

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((n-1,1)) &\leq \tilde{\chi}_{(n-5,2,1^3)}((n-1,1))\\ &< |\tilde{\chi}_{(n-4,2,1^2)}((n-1,1))|\\ &< \tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((n-1,1))\\ &< |\tilde{\chi}_{(n-2,2)}((n-1,1))|.\end{aligned}$$

(b) 可以验证，当 $n = 8,9$ 时，不等式成立。现在假设 $n \geq 10$。若 $k = n-4$，则对于满足 $3 \leq m \leq n-3$ 的 $\zeta = (n-m,2,1^{m-2})$，有 $\tilde{\chi}_\zeta((n-4,1_4)) \neq 0$ 当且仅当$m = 4$ 或 $n-4$。利用表 2，我们得到

$$(-1)^{n-5}\tilde{\chi}_{(4,2,1^{n-6})}((n-4,1^4)) = \tilde{\chi}_{(n-4,2,1^2))}((n-4,1^4)) < 0 = \tilde{\chi}_{(n-3,2,1))}((n-4,1^4)).$$

If $k = n-3$，则对于满足 $4 \leq m \leq n-4$ 的 $\zeta = (n-m,2,1^{m-2})$，有 $\tilde{\chi}_\zeta((n-3,1_3)) = 0$

$$(-1)^{n-4} \cdot \tilde{\chi}_{(3,2,1^{n-5})}((n-3,1^3)) = \tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((n-3,1^3)) = \frac{-3}{n(n-2)(n-4)}.$$

结合这些事实与本引理的第一部分，对于每个 $\zeta = (n-m,2,1^{m-2})$（其中 $5 \leq m \leq n-5$），以及每个满足 $n-1 \in I \subseteq \{n-4, n-3, n-1\}$ 的 $I$，我们有,

$$\sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k})) \leq \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_{(n-5,2,1^3)}((k,1^{n-k})).$$

为了完成证明，还需对 $\zeta = (n-m,2,1^{m-2})$ 且 $m = 4,5$，或 $n-4$ 且 $n-1 \in I \subseteq \{n-4, n-3, n-1\}$，证明所需的不等式。借助引理 2.5 和表 2，通过直接计算即可得到。

□

**注 4.1.** 从表4可知，对于 $3 \leq m \leq n-3$，$\tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((n-2,1_2)) = 0$；而由引理 2.4 可知，对于 $2 \leq m \leq n-2$，$\tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((n)) = 0$。结合引理4.4和引理4.5可得，对于任意满足 $4 \leq m \leq n-4$ 的 $\zeta = (n-m,2,1^{m-2})$，以及每个满足$n-1 \in I \subseteq \{2,3,\ldots,n-1,n\}$的 $I$,

$$\begin{aligned}\lambda_\zeta^I &= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)! \cdot \tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k}))\\ &< \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)! \cdot \tilde{\chi}_{(n-3,2,1)}((k,1^{n-k}))\\ &= \lambda_{(n-3,2,1)}^I.\end{aligned}$$

因此，$\lambda_{(n-m,2,1^{m-2})}^I$ 对于 $2 \leq m \leq n-2$ 的最大值只能在 $m = 2,3,n-3,n-2$ 处取得。

现在我们可以证明本节的主要结果了。

**定理 4.6.** 设 $n \geq 7$ 和 $\{n-1\} \subseteq I \subseteq \{2,3,\ldots,n-1\}$。则以下结论成立:

(a) 若 $n$ 为偶数且 $I$ 至少包含一个偶数，则 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 的第二大特征值唯一由 $(1^n)$ 取得，此外该特征值的重数为 1;

(b) 若 $n$ 为偶数且 $I$ 只包含奇数，则 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 的严格次大特征值只能由 $(n-1,1)$ 和 $(2,1^{n-2})$，或 $(n-3,2,1)$和 $(3,2,1^{n-5})$取得；

(c) 如果 $n$ 为奇数，则 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 的第二大特征值由 $(n-1,1)$、$(n-3,2,1)$、$(2^2,1^{n-4})$) 或 $(2,1^{n-2})$取得。

证明。(a) 对任意 $\zeta \vdash n$，有

$$\begin{aligned}\lambda_\zeta^I &= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k})) \\ &= \sum_{k\in I\setminus\{n-1\}}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k})) + n(n-2)!\tilde{\chi}_\zeta((n-1,1)).\end{aligned}$$

根据引理 2.5，上式中的第二项除非 $\zeta=(n)$，$(1^n)$ 或 $(n-m,\ 2,\ 1^{m-2})$ 且满足 $2\le m\le n-2$，否则为零。结合引理 3.2 可知，对于 $\zeta\neq(n)$，$(1^n)$，$(n-1,\ 1)$，$(2,\ 1^{n-2})$、$(n-m,\ 2,\ 1^{m-2})$ 且满足 $2\le m\le n-2$，有

$$\begin{aligned}\lambda_\zeta^I &= \sum_{k\in I\setminus\{n-1\}}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k})) \\ &< \sum_{k\in I\setminus\{n-1\}}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_{(n-1,1)}((k,1^{n-k})) \\ &= \lambda_{(n-1,1)}^I. \end{aligned}\tag{18}$$

由于 $n$ 为偶数，而 $I$ 中的最大数 $n-1$ 为奇数，根据引理 3.3 可知 $\lambda_{(1^n)}^I > \lambda_{(n-1,1)}^I$。此外，由于 $I$ 至少包含一个小于 $n-1$ 的偶数，我们还得到

$$\begin{aligned}\lambda_{(n-1,1)}^I &= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\cdot\frac{n-k-1}{n-1} \\ &> \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\cdot(-1)^{k-1}\frac{n-k-1}{n-1} \\ &= \lambda_{(2,1^{n-2})}^I. \end{aligned}\tag{19}$$

因此，$\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 的第二大特征值只能由 $(1^n)$ 或 $(n-m,2,1^{m-2})$ 在 $2\le m\le n-2$ 时取得。

下面我们假设 $\zeta=(n-m,2,1^{m-2})$ 且 $2\le m\le n-2$，并旨在证明 $\zeta$ 不会给出 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 的第二大特征值。事实上，根据引理 3.2，

$$\begin{aligned}\lambda_\zeta^I &= \sum_{k\in I\setminus\{n-1\}}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k})) + n(n-2)!\tilde{\chi}_\zeta((n-1,1)) \\ &< \sum_{k\in I\setminus\{n-1\}}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_{(n-1,1)}((k,1^{n-k})) + n(n-2)!\tilde{\chi}_\zeta((n-1,1)) \\ &= \lambda_{(n-1,1)}^I + n(n-2)!\tilde{\chi}_\zeta((n-1,1)).\end{aligned}$$

另一方面，根据引理 2.5，

$$n(n-2)!\tilde{\chi}_\zeta((n-1,1)) = n(n-2)!\frac{\chi_\zeta((n-1,1))}{\chi_\zeta((1^n))}$$

$$
\begin{aligned}
&= n(n-2)!\frac{(-1)^{m-1}(n-1)(n-m)(n-m-2)!m(m-2)!}{n!}\\
&\le n(n-2)!\frac{3(n-1)(n-3)(n-5)!}{n!}\\
&= 3(n-3)(n-5)!,
\end{aligned}
$$

其中倒数第二步利用了 $n$ 为偶数这一事实，因此最大

$$
\max_{2\le m\le n-2}\frac{(-1)^{m-1}(n-1)(n-m)(n-m-2)!m(m-2)!}{n!}
$$

由 $m\in\{3,n-3\}$ 取得。结合引理 4.1，可得

$$
\begin{aligned}
\lambda^I_{(1^n)} &> \lambda^I_{(n-1,1)}+\frac{n(n-5)}{3}(n-3)!\\
&> \lambda^I_{(n-1,1)}+3(n-3)(n-5)!\\
&\ge \lambda^I_{(n-1,1)}+n(n-2)!\tilde{\chi}_\zeta((n-1,1))\\
&> \lambda^I_{(n-m,2,1^{m-2})}
\end{aligned}
$$

对 $2\le m\le n-2$ 成立。因此，Cay$(S_n,C(n,I))$ 的第二大特征值唯一地由 $(1^n)$ 取得。此外，该特征值的重数等于 $\rho_{(1^n)}$ 的维数的平方，即 1。

(b) 由于 $I$ 只包含奇数，根据引理 2.3，对于任意 $\zeta\vdash n$，有 $\lambda^I_\zeta=\lambda^I_{\zeta'}$。根据 (18)，严格次大特征值只能由满足 $2\le m\le n-2$ 的 $(n-1,1),(2,1^{n-2})$ 或 $(n-m,2,1^{m-2})$ 取得。利用表 2 直接计算可验证，对于 $2\le k\le n-1$ 且 $m=2$ 或 $n-2$，有 $\tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((k,1^{n-k}))<\tilde{\chi}_{(n-1,1)}((k,1^{n-k}))$，这意味着当 $m=2$ 或 $n-2$ 时，$\lambda^I_{(n-m,2,1^{m-2})}<\lambda^I_{(n-1,1)}=\lambda^I_{(2,1^{n-2})}$。另一方面，根据注 4.1，对于 $4\le m\le n-4$，有 $\lambda^I_{(n-m,2,1^{m-2})}<\lambda^I_{(n-3,2,1)}=\lambda^I_{(3,2,1^{n-5})}$。由这些不等式即可得出结论。

(c) 与上文 (a) 的证明类似，对于 $\zeta\ne(n),(1^n),(n-1,1),(2,1^{n-2}),(n-m,2,1^{m-2})$，其中 $2\le m\le n-2$，我们有 $\lambda^I_\zeta<\lambda^I_{(n-1,1)}$。引理 3.4 表明，当 $n\ge 7$ 为奇数且 $n-1$ 是 $I$ 中的最大数时，$\lambda^I_{(n-1,1)}>\lambda^I_{(1^n)}$。因此，Cay$(S_n,C(n,I))$ 的第二大特征值只能由 $(n-1,1),(2,1^{n-2})$ 或 $(n-m,2,1^{m-2})$（其中 $2\le m\le n-2$）取得。

根据注 4.1，当 $2\le m\le n-2$ 时，$\lambda^I_{(n-m,2,1^{m-2})}$ 的最大值由 $m=2,3,n-3$ 或 $n-2$ 取得。此外，当 $m=2,n-3$ 时，引理 2.5 和 3.2 分别推出 $\tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((n-1,1))<0=\tilde{\chi}_{(n-1,1)}((n-1,1))$ 以及 $\tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((k,1^{n-k}))<\tilde{\chi}_{(n-1,1)}((k,1^{n-k}))$，对于 $2\le k\le n-2$ 均成立。因此，对于 $m=2,n-3$，我们有 $\lambda^I_{(n-m,2,1^{m-2})}<\lambda^I_{(n-1,1)}$。由此，Cay$(S_n,C(n,I))$ 的第二大特征值只能由 $(n-1,1)$、$(2,1^{n-2})$ 或 $(n-m,2,1^{m-2})$（其中 $m=3,n-2$）取得，证毕。

□

**注 4.2.** 可以验证，Cay$(S_8,C(8,7))$ 和 Cay$(S_8,C(8,\{3,7\}))$ 的严格次大特征值分别由 $(5,2,1)$ 和 $(3,2,1^3)$ 取得，而 Cay$(S_8,C(8,\{5,7\}))$ 和 Cay$(S_8,C(8,\{3,5,7\}))$ 的严格次大特征值分别由 $(7,1)$ 和 $(2,1^6)$ 取得。这表明定理 4.6 的（b）部分中的两种情形都可能出现。然而，我们不知道（b）部分中的四个分拆能否同时达到严格次大特征值。

定理 4.6 的（a）部分推出以下结果。

**推论 4.7**。 假设 $n \geq 8$ 为偶数，且 $\{n-1\} \subseteq I \subseteq \{2,3,\ldots,n-1\}$。如果 $I$ 至少包含一个偶数，那么 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 不具有 *Aldous* 性质。

在定理 4.6 的 (b) 和 (c) 部分所给条件下，仍需进一步研究 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 何时具有 Aldous 性质。

在 (19) 中我们看到，只要 $I \subseteq \{2,3\ldots,n-1\}$ 至少包含一个小于 $n-1$ 的偶数，$\lambda^I_{(n-1,1)} > \lambda^I_{(2,1^{n-2})}$ 便成立。一般而言，根据引理 2.3 和 (5)，对于任意 $I \subseteq \{2,3\ldots,n-1\}$，我们有

$$\begin{aligned}
\lambda^I_{(2,1^{n-2})} &= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_{(2,1^{n-2})}((k,1^{n-k})) \\
&= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!(-1)^{k-1}\tilde{\chi}_{(n-1,1)}((k,1^{n-k})) \\
&= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!(-1)^{k-1}\frac{n-k-1}{n-1}, \\
&\leq \lambda^I_{(n-1,1)}.
\end{aligned}$$

我们猜想，定理 4.6 的 (c) 部分中 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 的第二大特征值只能由 $(n-1,1)$、$(2_2,1^{n-4})$ 或 $(2,1^{n-2})$ 取得：

**猜想 4.1**。 假设 $n \geq 7$ 为奇数，且 $\{n-1\} \subseteq I \subseteq \{2,3,\ldots,n-1\}$。则

$$\lambda^I_{(n-3,2,1)} < \max\left\{\lambda^I_{(n-1,1)}, \lambda^I_{(2^2,1^{n-4})}\right\}.$$

## 5 $\mathrm{Cay}(S_n,\ C(n,\ I))$ 其中 $I \cap \{n-1,\ n\} = \{n\}$

**引理 5.1.** 假设 $n \geq 7$ 为奇数，且 $\{n\} \subseteq I \subseteq \{2,3,\ldots,n-2,n\}$。那么

$$\lambda^I_{(1^n)} - \lambda^I_{(n-1,1)} > \frac{n}{2}(n-2)!.$$

证明。 与引理 3.3 的证明类似，我们有

$$\begin{aligned}
\lambda^I_{(1^n)} - \lambda^I_{(n-1,1)} &= n(n-2)! + \sum_{k\in I\setminus\{n\}}\binom{n}{k}(k-1)!\left((-1)^{k-1} - \frac{n-k-1}{n-1}\right) \\
&\geq n(n-2)! - \sum_{\substack{2\leq k\leq n-3 \\ k \text{ is even}}}\binom{n}{k}(k-1)!\frac{2n-k-2}{n-1} \\
&= n(n-2)!\left(1 - \sum_{\substack{2\leq k\leq n-3 \\ k \text{ is even}}}\frac{2n-k-2}{k(n-k)!}\right) \\
&= n(n-2)!\left(\frac{1}{(n-5)!} - \sum_{\substack{2\leq k\leq 5 \\ k \text{ is even}}}\frac{2n-k-2}{k(n-k)!}\right) \\
&\quad + n(n-2)!\left(\sum_{\substack{6\leq k\leq n-3 \\ k \text{ is even}}}\frac{1}{(n-k-1)!} - \frac{1}{(n-k+1)!} - \frac{2n-k-2}{k(n-k)!}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+n(n-2)!\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
>\ &\frac{n}{2}(n-2)!,
\end{aligned}
$$

其中，最后一步源于取$k_0=n-2$时（7）的右端为正这一事实。

□

**引理 5.2.** 假设 $n\geq 8$ 为偶数，且 $\{n\}\subseteq I\subseteq\{2,3,\ldots,n-2,n\}$。则 $\lambda^I_{(n-1,1)}>\lambda^I_{(1^n)}$.

证明。与引理 3.4 的证明类似，我们有

$$
\begin{aligned}
&\lambda^I_{(n-1,1)}-\lambda^I_{(1^n)}\\
&\geq n(n-2)!\left(\frac{n-2}{n}-\sum_{\substack{2\leq k\leq n-3\\ k\text{ is odd}}}\frac{1}{(n-k)!}\right)\\
&=n(n-2)!\left(\frac{2n-6}{4(n-4)!}-\sum_{\substack{2\leq k\leq 4\\ k\text{ is odd}}}\frac{1}{(n-k)!}\right)\\
&+n(n-2)!\left(\sum_{\substack{5\leq k\leq n-3\\ k\text{ is odd}}}\frac{2n-k-3}{(k+1)(n-k-1)!}-\frac{2n-k-1}{(k-1)(n-k+1)!}-\frac{1}{(n-k)!}\right)\\
&+n(n-2)!\left(\frac{n-2}{n}-\frac{n}{2(n-2)}\right)\\
&>0.
\end{aligned}
$$

□

**引理 5.3。** 假设 $n\geq 9$，且 $\{n\}\subseteq I\subseteq\{2,3,\ldots,n-2,n\}$。那么对任意满足 $0\leq m\leq n-1$ 的 $\zeta\neq(2_2,1^{n-4}),(n-m,1^m)$，有 $\lambda^I_\zeta<\lambda^I_{(n-2,1^2)}$。

证明。设 $\zeta$ 是 $n$ 的任意一个分拆，且不等于 $(2_2,1^{n-4})$ 和 $(n-m,1^m)$，其中 $0\leq m\leq n-1$。由引理 3.1，我们有 $\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k}))<\frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$，对 $2\leq k\leq n-3$ 成立。根据表4，我们有 $\tilde{\chi}_\zeta((n-2,1_2))\leq\frac{6}{n(n-1)(n-5)}$ 定义

$$
f(n,k)=\begin{cases}\frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}, & \text{if } 2\leq k\leq n-3;\\ \frac{6}{n(n-1)(n-5)}, & \text{if } k=n-2.\end{cases}
$$

注意，根据引理 2.4，$\tilde{\chi}_\zeta((n))=0$。因此，

$$
\lambda^I_\zeta=\sum_{k\in I\setminus\{n\}}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k}))\leq\sum_{k\in I\setminus\{n\}}\binom{n}{k}(k-1)!f(n,k).
$$

还可以进一步验证，对于 $2\leq k\leq n-2$，$\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k}))<f(n,k)$。因此

$$
\begin{aligned}
&\lambda^I_{(n-2,1^2)}-\lambda^I_\zeta\\
\geq\ &2(n-3)!+\sum_{k\in I\setminus\{n\}}\binom{n}{k}(k-1)!\left(\frac{(n-k-1)(n-k-2)-2c_2}{(n-1)(n-2)}-f(n,k)\right)\\
\geq\ &2(n-3)!+\sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{k}(k-1)!\left(\frac{(n-k-1)(n-k-2)-2c_2}{(n-1)(n-2)}-f(n,k)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(n-3)! + \sum_{k=2}^{n-3} \binom{n}{k} (k-1)! \left( \frac{(n-k-1)(n-k-2) - 2c_2}{(n-1)(n-2)} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} \right) \\
&\quad - \frac{3(n-3)!}{n-5} \\
&= 2(n-3)! - \sum_{k=2}^{n-3} \frac{2(n-3)!}{(n-k)(n-k-2)!} - \frac{n}{n-2} - \frac{3(n-3)!}{n-5} \\
&= 2(n-3)! \left( 1 - \sum_{k=2}^{n-3} \frac{1}{(n-k)(n-k-2)!} \right) - \frac{n}{n-2} - \frac{3(n-3)!}{n-5} \\
&= 2(n-3)! \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{(n-2)!} \right) - \frac{n}{n-2} - \frac{3(n-3)!}{n-5} \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

证明至此完成。 □

以下是本节的主要结果。

**定理 5.4**。 设 $n \geq 7$ 且 $\{n\} \subseteq I \subseteq \{2, 3, \ldots, n-2, n\}$。则以下陈述成立：

(a) 若 $n$ 为奇数且 $I$ 至少包含一个偶数，则 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n, I))$ 的第二大特征值唯一地由 $(1^n)$ 取得，并且该特征值的重数为 1；

(b) 若 $n$ 为奇数且 $I$ 仅包含奇数，则 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n, I))$ 的严格次大特征值由 $(n-2, 1^2)$ 和 $(3, 1^{n-3})$ 取得，并且该特征值的重数为 $\frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2}$；

(c) 若 $n$ 为偶数，则 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n, I))$ 的第二大特征值由 $(n-2, 1^2)$ 或 $(2, 1^{n-2})$ 取得。

证明。 (a) 对于任意 $\zeta \vdash n$，我们有

$$
\lambda_\zeta^I = \sum_{k \in I \setminus \{n\}} \binom{n}{k} (k-1)! \tilde{\chi}_\zeta((k, 1^{n-k})) + (n-1)! \tilde{\chi}_\zeta((n)).
$$

根据引理 2.4，若 $\zeta \neq (n-m, 1^m)$ 满足 $0 \leq m \leq n-1$，则 $\tilde{\chi}_\zeta((n)) = 0$。因此，由引理 3.2 可知，对于任意满足 $0 \leq m \leq n-1$ 的 $\zeta \neq (n-m, 1^m)$，

$$
\begin{aligned}
\lambda_\zeta^I &= \sum_{k \in I \setminus \{n\}} \binom{n}{k} (k-1)! \tilde{\chi}_\zeta((k, 1^{n-k})) \\
&< \sum_{k \in I \setminus \{n\}} \binom{n}{k} (k-1)! \tilde{\chi}_{(n-1,1)}((k, 1^{n-k})) \\
&= \lambda_{(n-1,1)}^I - (n-1)! \tilde{\chi}_{(n-1,1)}((n)) \\
&= \lambda_{(n-1,1)}^I + (n-2)!. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

现在假设 $\zeta = (n-m, 1^m)$，其中 $2 \leq m \leq n-2$。由于 $n \geq 7$ 为奇数，$\{n\} \subset I \subseteq \{2, 3, \ldots\ldots, n-2, n\}$，且 $I$ 中包含至少一个小于 $n-2$ 的偶数，由引理 2.4 和 3.2 可得

$$
\lambda_\zeta^I = \sum_{k \in I \setminus \{n\}} \binom{n}{k} (k-1)! \tilde{\chi}_\zeta((k, 1^{n-k})) + (n-1)! \frac{\chi_\zeta((n))}{\chi_\zeta(\mathbf{1})}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in I\setminus\{n\}} \binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_\zeta((k,1^{n-k})) + (-1)^m(n-m-1)!m! \\
&< \sum_{k\in I\setminus\{n\}} \binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_{(n-1,1)}((k,1^{n-k})) + 2(n-3)! \\
&= \lambda^I_{(n-1,1)} + (n-2)! + 2(n-3)! \\
&= \lambda^I_{(n-1,1)} + n(n-3)! \\
&< \lambda^I_{(n-1,1)} + 2(n-2)!. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

另一方面，由引理 5.1 可得

$$
\lambda^I_{(1^n)} - \lambda^I_{(n-1,1)} > \frac{n}{2}(n-2)!. \qquad (22)
$$

由 (20)、(21) 和 (22) 可知，$(1^n)$ 是 $n$ 的唯一一个分拆，其对应的 Specht 模取得 Cay$(S_n, C(n, I))$ 的第二大特征值。根据 (3)，该特征值的重数等于符号表示 $\rho_{(1^n)}$ 的度的平方，即 1。

(b) 很容易验证 $n = 7$ 的情形。现在假设 $n \geq 9$。由于 $I$ 中只有奇数，Cay$(S_n, C(n, I))$ 恰有两个连通分支，并且对于任意 $\zeta \vdash n$，$\lambda^I_\zeta = \lambda^I_{\zeta'}$。因此，Cay$(S_n, C(n, I))$ 的最大特征值由 $(n)$ 和 $(1^n)$ 取得。由于 $n$ 是奇数，可以验证，在引理 5.3 的证明中定义的函数 $f(n, k)$ 也满足 $f(n, k) \geq \tilde{\chi}_{(2^2,1^{n-4})}((k, 1^{n-k}))$，其中 $2 \leq k \leq n-2$。因此，引理 5.3 的结论实际上适用于任意满足 $0 \leq m \leq n-1$ 的 $\zeta \neq (n-m, 1^m)$，即 $\lambda^I_\zeta < \lambda^I_{(n-2,1^2)}$。由于 $I$ 只包含奇数，我们有 $I \neq \{2, 3, \ldots, n-2, n\}$。因此，由引理 4.3 的 (a) 和 (b) 两部分可得 $\lambda^I_{(n-2,1^2)} > \lambda^I_{(n-1,1)} = \lambda^I_{(2,1^{n-2})}$，且当 $1 \leq m \leq n-2$ 时，$\lambda^I_{(n-m,1^m)}$ 的最大值只能由 $m = 2, n-3$ 取得。也就是说，Cay$(S_n, C(n, I))$ 的严格次大特征值由 $(n-2, 12)$ 和 $(3, 1^{n-3})$ 取得。由于 $\rho_{(n-2,1^2)}$ 和 $\rho_{(3,1^{n-3})}$ 的维数都为 $(n-1)(n-2)$ 2，根据等式 (3)，该特征值的重数为 $(n-1)^2\binom{n-2}{2}$。

(c) 可以验证，当 $n = 8$ 时结论成立。现在设 $n \geq 10$。首先，根据引理 5.3，对于任意 $\zeta \neq (22, 1^{n-4})$、$(n-m, 1^m)$，若 $0 \leq m \leq n-1$，则有 $\lambda^I_\zeta < \lambda^I_{(n-2,1^2)}$。其次，根据引理 4.3 的 (a) 和 (b) 部分，对于 $1 \leq m \leq n-1$，$\lambda^I_{(n-m,1^m)}$ 的最大值只能由 $m = 1$、$2$、$n-3$、$n-2$ 或 $n-1$ 取得，并且 $\lambda^I_{(n-2,1^2)} > \lambda^I_{(3,1^{n-3})}$，因为 $I$ 包含偶数 $n$。第三，根据引理 5.2 以及引理 4.3 的 (b) 和 (c) 部分，有 $\lambda^I_{(1^n)} < \lambda^I_{(n-1,1)} < \max\left\{\lambda^I_{(n-2,1^2)}, \lambda^I_{(2,1^{n-2})}\right\}$。因此，Cay$(S_n, C(n, I))$ 的第二大特征值只能由 $(n-2, 12)$、$(2, 1^{n-2})$ 和 $(22, 1^{n-4})$ 取得。下面说明可以排除 $(22, 1^{n-4})$。事实上，由于 $n$ 是偶数，对于除 $k = n-2$ 之外的每个 $2 \leq k \leq n$，都有 $\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k, 1^{n-k})) > \tilde{\chi}_{(2^2,1^{n-4})}((k, 1^{n-k}))$。因此，

$$
\begin{aligned}
&\lambda^I_{(n-2,1^2)} - \lambda^I_{(2^2,1^{n-4})} \\
&= \sum_{k\in I} \binom{n}{k}(k-1)!\left(\frac{(n-k-1)(n-k-2)-2c_2}{(n-1)(n-2)} + (-1)^k\frac{(n-k)(n-k-3)+2c_2}{n(n-3)}\right) \\
&\geq \sum_{k\in\{n-2,n\}} \binom{n}{k}(k-1)!\left(\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k})) - \tilde{\chi}_{(2^2,1^{n-4})}((k,1^{n-k}))\right) \\
&= 2(n-3)! - (n-1)(n-4)! \\
&> 0, \qquad (23)
\end{aligned}
$$

所需结论随即得到。 □

以下是定理 5.4 的一个直接推论。

**推论 5.5.** 设 $n \geq 7$ *and* $\{n\} \subseteq I \subseteq \{2,3,\ldots,n-2,n\}$。那么 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 不具有 *Aldous* 性质。

## 6 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n,I))$ 其中 $\{n-1,n\} \subseteq I$

**引理 6.1.** 设 $n \geq 7$ 为奇数，且 $\{n-1,n\} \subseteq I \subseteq \{2,3,\ldots,n-1,n\}$。则以下结论成立：

(a) 如果 $I \setminus \{n-1,n\}$ 中的最大数为奇数，且 $I \neq \{2,3,n-1,n\}$，那么 $\lambda^I_{(1^n)} > \lambda^I_{(n-1,1)}$;

(b) 若 $I \setminus \{n-1,n\}$ 中的最大数为偶数，则 $\lambda^I_{(n-1,1)} > \lambda^I_{(1^n)}$;

(c) *if* $I = \{2,3,n-1,n\}$ *or* $\{n-1,n\}$, *then* $\lambda^I_{(n-1,1)} = \lambda^I_{(1^n)}$.

证明。 注意到

$$\begin{aligned}
\lambda^I_{(1^n)} - \lambda^I_{(n-1,1)} &= \sum_{k\in I}\binom{n}{k}(k-1)!\left((-1)^{k-1} - \frac{n-k-1}{n-1}\right) \\
&= \sum_{k\in I\setminus\{n-1,n\}}\binom{n}{k}(k-1)!\left((-1)^{k-1} - \frac{n-k-1}{n-1}\right) \\
&= \lambda^{I\setminus\{n-1,n\}}_{(1^n)} - \lambda^{I\setminus\{n-1,n\}}_{(n-1,1)}.
\end{aligned}$$

因此，若 $I = \{n-1,n\}$，则 $\lambda^I_{(1^n)} = \lambda^I_{(n-1,1)}$；若 $I \neq \{n-1,n\}$，则直接将引理 3.3 和引理 3.4 应用于 $I \setminus \{n-1,n\} \neq \emptyset$，即可得到所需结果。 □

**引理 6.2**。 设 $n \geq 7$ 且 $\{n,n-1\} \subseteq I \subseteq \{2,3,\ldots,n\}$。若 $n$ 为偶数，则 $\lambda^I_{(n-2,1^2)} > \lambda^I_{(n-m,2,1^{m-2})}$，其中 $m = 2,3,n-3,n-2$；若 $n$ 为奇数，则 $\lambda^I_{(n-2,1^2)} > \lambda^I_{(n-m,2,1^{m-2})}$，其中 $m = 2,3,n-3$。

证明。 借助表 2，可以验证对于 $m = 3, n-3$，我们有

$$\sum_{k=n-1}^{n}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k})) > \sum_{k=n-1}^{n}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((k,1^{n-k}))$$

and

$$\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k})) \geq \tilde{\chi}_{(n-m,2,1^{m-2})}((k,1^{n-k})) \quad \text{for any } 2 \leq k \leq n-2.$$

由于 $\{n-1,n\} \subseteq I \subseteq \{2,3,\ldots,n\}$，因此对于 $m = 3, n-3$，有 $\lambda^I_{(n-2,1^2)} > \lambda^I_{(n-m,2,1^{m-2})}$。

对于 $3 \leq k \leq n$，我们有 $\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k})) > \tilde{\chi}_{(n-2,2)}((k,1^{n-k}))$。我们还有 $\sum_{k\in\{2,n\}}\binom{n}{k}(k-1)!\,\tilde{\chi}_{(n-2,1^2)}((k,1^{n-k})) > \sum_{k\in\{2,n\}}\binom{n}{k}(k-1)!\tilde{\chi}_{(n-2,2)}((k,1^{n-k}))$。因此，只要 $n \in I \subseteq \{2,3,\ldots,n\}$，就有 $\lambda^I_{(n-2,1^2)} > \lambda^I_{(n-2,2)}$。不等式（23）意味着，当 $n$ 为偶数且 $n \in I \subseteq \{2,3,\ldots,n\}$ 时，$\lambda^I_{(n-2,1^2)} > \lambda^I_{(2^2,1^{n-4})}$。 □

本节的主要结果如下。

**定理 6.3**。 假设 $n \geq 7$ 和 $\{n,n-1\} \subseteq I \subseteq \{2,3,\ldots,n\}$。则以下结论成立：

*(a)* 若 $n$ 为偶数，则 *Cay*$(S_n, C(n, I))$ 的第二大特征值只能由 $(1^n)$、$(n-2, 12)$ 或 $(2, 1^{n-2})$ 取得；*(b)* 若 $n$ 为奇数，则 *Cay*$(S_n, C(n, I))$ 的第二大特征值只能由 $(1^n)$、$(n-2, 12)$、$(3, 1^{n-3})$ 或 $(22, 1^{n-4})$ 取得。

证明。（a）可以验证，当 $n = 8$ 时结论成立。现在假设 $n \geq 10$ 和$n$为偶数。根据引理 2.5 和 5.3，若 $\zeta \neq (n-m, 1^m)$、$(n-m, 2, 1^{m-2})$，则$\lambda_\zeta^I = \lambda_\zeta^{I\setminus\{n-1\}} < \lambda_{n-2\,1^2}^{I\setminus\{n-1\}}(\,,\,) = \lambda_{(n-2,1^2)}^I$。另一方面，由引理 4.3 可得，对于满足 $3 \leq m \leq n-3$ 的 $\zeta = (n-m, 1^m)$，有 $\lambda_{(n-1,1)}^I < \max\left\{\lambda_{(n-2,1^2)}^I, \lambda_{(2,1^{n-2})}^I\right\}$ 和 $\lambda_\zeta^I < \lambda_{(n-2,1^2)}^I$。因此，对于任意满足$2 \leq m \leq n-2$的 $\zeta \neq (n)$、$(1^n)$、$(n-2, 12)$、$(2, 1^{n-2})$、$(n-m, 2, 1^{m-2})$，都有$\lambda_\zeta^I < \max\left\{\lambda_{(n-2,1^2)}^I, \lambda_{(2,1^{n-2})}^I\right\}$。

由于 $n-1 \in I \subseteq \{2, 3, \ldots, n-1, n\}$，由注 4.1 可知，$\lambda_{(n-m,2,1^{m-2})}^I$ 在$2 \leq m \leq n-2$ 上的最大值只能由 $m = 2, 3, n-3$ 或 $n-2$ 取得。此外，引理 6.2 蕴含，对于 $m = 2, 3, n-3, n-2$，$\lambda_{(n-m,2,1^{m-2})}^I < \lambda_{(n-2,1^2)}^I$。因此，Cay$(, C(n, I))$ 的第二大特征值只能由 $(1^n)$,$(n-2, 1^2)$ 或 $(2, 1^{n-2})$ 取得。

（b）对于 $n = 7$，很容易验证这一结果。现在假设 $n \geq 9$ 和 $n$ 为奇数。与上文（a）部分的证明类似，可以证明，对于除 $(n-m, 1^m)$ 和 $(n-m, 2, 1^{m-2})$ 以外的任意$\zeta$，$\lambda_\zeta^I = \lambda_\zeta^{I\setminus\{n-1\}} < \lambda_{n-2\,1^2}^{I\setminus\{n-1\}}(\,,\,) = \lambda_{(n-2,1^2)}^I$。由引理 4.3，针对 $3 \leq m \leq n-4$，我们有 $\lambda_{(n-1,1)}^I \leq \lambda_{(n-2,1^2)}^I$，且$\lambda_{(n-m,1^m)}^I < \lambda_{(n-2,1^2)}^I$。注意，若 $\lambda_{(n-1,1)}^I = \lambda_{(n-2,1^2)}^I$，则 $I = \{2, 3, \ldots, n\}$，因此由引理 6.1 可得 $\lambda_{(1^n)}^I > \lambda_{(n-1,1)}^I$。直接计算可得 $\lambda_{(2,1^{n-2})}^I \leq \lambda_{(n-1,1)}^I < \max\left\{\lambda_{(n-2,1^2)}^I, \lambda_{(1^n)}^I\right\}$。最后，由引理 6.2，对于$m = 2, 3, n-3$，我们有 $\lambda_{(n-2,1^2)}^I > \lambda_{(n-m,2,1^{m-2})}^I$。结合以上各点与注 4.1，即可得到所需结果。 □

定理 6.3 蕴含以下结果。

**推论 6.4**。 设 $n \geq 7$ 且 $\{n, n-1\} \subseteq I \subseteq \{2, 3, \ldots, n\}$。则 $\mathrm{Cay}(S_n, C(n, I))$ 不具有 *Aldous* 性质。

我们猜想，定理 6.3 的（b）部分中 Cay$(S_n, C(n, I))$ 的第二大特征值只能由 $(1^n)$、$(n-2, 1^2)$ 或 $(2^2, 1^{n-4})$ 达到：

**猜想 6.1**。 设 $n \geq 7$ 为奇数且 $\{n-1, n\} \subseteq I \subseteq \{2, 3, \ldots, n\}$。则

$$\lambda_{(3,1^{n-3})}^I < \max\left\{\lambda_{(1^n)}^I, \lambda_{(n-2,1^2)}^I, \lambda_{(2^2,1^{n-4})}^I\right\}.$$

注意，根据引理 4.3，我们已经知道 $\lambda_{(3,1^{n-3})}^I \leq \lambda_{(n-2,1^2)}^I$，且当且仅当 $I$ 仅包含除 $n-1$ 和 $n-2$以外的奇数时等号成立。

**致谢**

第一作者获得了墨尔本大学提供的墨尔本研究奖学金资助。

## 参考文献

[1] N. Alon. 特征值与扩展图。Combinatorica, 6(2):83–96, 1986。

[2] N. Alon andV. D. Milman. $\lambda_1$、图的等周不等式与超集中器。组合理论杂志 B 辑, 38(1):73–88，1985年。

[3] P. Caputo、T. M. Liggett 和 T. Richthammer。Aldous 谱隙猜想的证明。美国数学会杂志，23(3):831–851，2010年。[4] F. Cesi。由初始反转生成的对称群凯莱图具有单位谱隙。电子组合学杂志，16(1):N29，2009年。[5] F. Chung 和 J. Tobin。由子串反转产生的图的谱隙。电子组合学杂志，24(3):P3.4，2017年。[6] P. Diaconis 和 M. Shahshahani。用随机换位生成随机排列。Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.，57(2):159–179，1981年。[7] J. Dodziuk。差分方程、等周不等式与某些随机游走的暂态性。Trans. Amer. Math. Soc.，284(2):787–794，1984年。[8] W. Fulton。《杨表：及其在表示论与几何学中的应用》。第35卷。剑桥大学出版社，1997年。[9] S. Hoory、N. Linial 和 A. Wigderson。扩展图及其应用。Bull. Amer. Math. Soc.，43(4):439–561，2006年。[10] X. Huang 和 Q. Huang。交错群上一些凯莱图的第二大特征值。J. Algebraic Combin.，50(1):99–111，2019年。[11] X. Huang、Q. Huang 和 S. M. Cioab˘a。一些高度传递群的正规凯莱图的第二特征值。电子组合学杂志，26(2):P2.44，2019年。[12] G. James 和 A. Kerber。《对称群的表示论》。Addison-Wesley，伦敦，1981年。[13] Y. Li、B. Xia 和 S. Zhou。对称群上正规凯莱图的Aldous谱隙性质。欧洲组合学杂志，110:103657，2023年。[14] X. Liu 和 S. Zhou。Cayley图的特征值。电子组合学杂志，29(2):P2.9，2022年。[15] R. Maleki 和 A. S. Razafimahatratra。关于对称群凯莱图的第二特征值。https://arxiv.org/abs/2108.13585，2021年。[16] B. Mohar。图的等周数。组合理论杂志 B 辑，47(3):274–291，1989年。[17] O. Parzanchevski 和 D. Puder。正规集合的Aldous谱隙猜想。Trans. Amer. Math. Soc.，373(10):7067–7086，2020年。[18] B. Sagan。《对称群：表示、组合算法与对称函数》。第203卷。施普林格科学与商业媒体，2001年。[19] J. Siemons 和 A. Zalesski。关于对称群某些凯莱图的第二大特征值。J. Algebraic Combin.，55(3):989–1005，2022年。[20] P. H. Zieschang。有限群的凯莱图。J. Algebra，118(2):447–454，1988年。