arXiv:2302.04036v1 [math.AG] 8 Feb 2023

导出辛约化与 $\mathscr{L}$-等变几何

ALBIN GRATALOUP

日期：2023年2月9日。

致谢

我谨向我的博士生导师 Damien Calaque 致以最诚挚的谢意。能够有机会在您的指导下攻读博士学位，我深感荣幸。感谢您在整个博士阶段给予我的支持——无论经历起伏、进展还是挫折；感谢您总是随时愿意与我讨论并给予帮助，也感谢您在回答我所有问题（有时还要反复回答）时表现出的无限耐心。

感谢 Giovanni Felder 和 Domenico Fiorenza 同意担任本论文的评审人。也感谢 Grégory Ginot、Benjamin Hennion、Pavel Safronov、Alexander Schenkel 和 Chenchang Zhu 担任我的论文答辩委员会成员。

如果要指出我踏上导出几何之旅、开始在几何与数学物理中运用同伦方法的起点，我会说那是五年前，在里昂卡米耶·若尔当研究所举行的一场研讨会报告上。Alexander Schenkel 当时介绍了同伦代数量子场论。这场报告让我看到了新的数学可能性，而我当时并不知道，不到一年后，我便会前往汉堡大学，在 Marco Benini 的指导下工作数月；他是 Alexander Schenkel 的亲密合作者。

我想感谢 Marco Benini，在那段时间里，他向我传授了许多关于其同伦代数量子场论研究的知识，尤其是 Quillen 同伦论的基础知识；这些都成为我博士期间研究工作的重要工具。

尽管很难尝试逐一感谢所有影响过我论文的来源，但对我影响最大的数学家当然包括 Damien Calaque（关于对称代数、拉格朗日对应，以及许多其他方面），Joost Nuiten（凭借其在李代数丛及一般导出几何方面的专长）和 Pelle Steffens（在诸多 ∞ 相关主题上给予我的帮助）。
至于其他数学方面的影响，我想感谢 Ricardo Campos，在我们撰写关于拟运算变形理论的综述时，他向我传授了许多关于拟运算和变形理论的知识。

我还想感谢 Corina Keller，感谢我们那个短暂却前景可期的爆破与群胚项目。

我无法用言语表达对 Ricardo、Joost、Pelle 和 Corina 的感激之情，感谢你们在蒙彼利埃如此热情地接纳我。我从未感受过如此热情的欢迎，也认为我们共度的时光是我在蒙彼利埃期间最珍贵的回忆。除了在 Broc 度过的无数个小时和一起玩 Bang 之外，能有机会认识你们每一个人，哪怕只是略微了解一些，也让我由衷地感到愉快。

致 Ricardo：感谢你总是为夜晚带来魔力和 cardos。无论是一起工作，还是一起玩 Bang、喝酒等等，我都非常享受与你共度的时光。祝你开启为人父母的新旅程后一切顺利。

Joost，能与你共度这么多时光，实在是一件令人愉快的事。我怀念我们一起喝酒、听音乐会，以及共度的其他美好时光。

Pelle，这些年来，感谢你一直与我相伴。我们关于数学、物理学、心灵哲学和僵尸的讨论，对我而言是难得的莫大乐趣。我也由衷感谢你带我领略荷兰菜的方方面面。

Corina，和你一起去海滩、听音乐会，还有许多其他活动，都让我度过了许多美好时光。但最重要的是，我很感激我们之间那些精彩的交谈。也谢谢你让我领略了爆米花艺术，还信任我、教我好好掌握这门技艺，尽管我初次尝试时烟雾缭绕，还赶上了新冠病毒肆虐的时期。

我还想感谢蒙彼利埃，它始终美丽宜人的天气、颇具挑战性的骑行道路、附近的海滩为我的夏日增添了乐趣，而且整座城市也十分宜居。

最后，我想向我的父母表达由衷的感谢，感谢他们在我的博士论文研究期间始终给予我坚定不移的支持。

本项目获得了欧洲研究委员会（ERC）在欧盟地平线2020研究与创新计划下的资助（资助协议编号768679）。

目录

致谢 3 引言 7 符号与约定 15 1. 导出代数几何 24 1.1. 导出代数几何导论 24 1.2. 线性与半线性叠 37 1.3. 形式导出几何 55 1.4. 德拉姆代数与（闭） p-形式 66 2. 导出辛几何中的新构造 75 2.1. 导出辛几何 75 2.2. 从旧构造得到新构造 84 2.3. 拉格朗日纤维化构造示例 97 3. 李代数丛的导出几何 108 3.1. 李代数与 $\mathscr{L}_\infty$代数丛 109 3.2. 李代数丛的无穷小商及几何性质114 3.3. 李代数丛的无穷小作用 135 3.4. 同伦传递定理 141 4. 等变辛几何 144 4.1. $\mathscr{G}$-等变辛几何 144 4.2. $\mathscr{L}$-等变辛几何 159 4.3. 移位动量映射与导出辛约化 179 5. BV复形的导出视角 204 5.1. BV作为广义导出辛约化 205 5.2. 严格化与BV荷 212 5.3. BV构造示例 230 附录 A. 模型范畴框架 237 A.1. 良好模型结构 237 A.2. $\mathscr{M}$ 239中的余切复形附录 B. 滤过与完备化 242 B.1. 过滤代数与完备滤过对象 242 B.2. 过滤代数与过滤完备代数 246 附录 C. 分次混合对象 249 C.1. 分次混合复形 249 C.2 弱分次混合对象与完备滤过对象 252 附录 D. 形式模空间问题与 Koszul 对偶背景 255 D.1. 形式模空间问题 255 D.2. 形式模空间问题与 Koszul 对偶 259 参考文献 264

引言

本论文最初的研究动机，是从导出几何的角度研究经典 BV（Batalin–Vilkovisky）形式体系。这一构造最初由 [BV81] 和 [BV83], 提出，最初用于研究规范理论的量子化。它是构造可观测量代数的工具，这些代数在量子化方面具有良好的性质。它在现代量子场论中也发挥着重要作用，并且近年来在这一背景下受到广泛研究（例如参见[CG21、Rej11、FR12、FR13]）。在本文中，我们只研究经典BV 形式体系。

为了理解研究经典 BV 形式体系所需的几何工具，我们将研究（无穷小）等变导出辛几何，并在李代数丛与群胚的框架下定义（移位）动量映射和（移位）辛约化的概念。

与某个泛函相关的经典 BV 代数有多种不同的定义，但现有的所有构造都产生代数对象，尽管正如我们即将说明的，这些构造似乎旨在表示某些几何运算。我们将重点讨论两类构造。对于第一类，遵循[FK14], 中的思路，构造如下（有关该构造的更准确描述，参见构造5.1.1 ）：

构造 0.0.1。

(1) 首先，我们考虑作用泛函的临界点集（即欧拉–拉格朗日方程的解空间）。为此，对泛函的临界点集取一个称为 Koszul–Tate 分解的上同调分解。该分解通过在负次数上依次添加反场和反鬼场而得到。(2) 随后，我们构造一个 (-1)-移位辛分次代数（利用前述 Koszul–Tate 分解得到的移位余切丛）。本质上，它会在 Koszul–Tate 分解中添加正次数的鬼场，这些鬼场通过辛结构与反鬼场“对偶”。(3) 接着，我们通过求解经典主方程，在该分次代数上构造哈密顿微分；这个方程的解称为*BV*荷：

$$\{Q, Q\}$$

从几何角度看，这一构造相当于先对作用泛函的临界点集进行分解（通过添加反场和反鬼场），然后再对其取“最大对称性”之商（通过添加鬼场），使该商具有辛结构。

我们将要考察的另一种 BV 构造方法，与 [CG21 第 1 部分第 4] 节所描述的方法类似。其思路是取诱导的“商映射”的导出临界轨迹。

构造 0.0.2.

(1) 首先，我们选取欧拉–拉格朗日方程解空间中一点的形式邻域，该邻域由一个 $\mathscr{L}_\infty$-代数给出。这相当于引入鬼场，并对应于对该选定点的无穷小对称性取无穷小商。之后，我们将改为考虑所有 “解”的形式邻域，并考虑一个对称性的李代数丛。(2) 随后，所得到的 BV 代数由某种导出临界轨迹及其典范的（-1）移位辛结构构成。第二步相当于创建与鬼场对偶的反场和反鬼场。

在这两种构造中，我们都给出了基于几何操作的描述，例如“取商”和“取零点轨迹”。然而在实践中，这些操作只能通过代数方式处理，而代数构造与其几何对应物之间的对应关系并不十分精确；本文旨在解决这一问题。

由于我们描述的两种 BV 构造都涉及上同调技术，因此我们自然需要转向导出几何，以便理解那些仅在“同伦意义下”定义的几何对象，因为可观测量的交换微分分次代数只有其上同调才具有物理意义。对于这一问题，采用导出几何更是尤为合适，因为导出几何非常适合处理交与商，而它们正是 BV 构造的基石。

简而言之，导出几何是同伦论与几何的融合。它的发展可参见以下文献（仅列举其中几篇）：[TV05，TV08，Lur04，Lur09a],它提供了强大的工具，可用于处理从变形理论、交理论、等变几何到其他领域的各种问题。我们的目标是阐明如何从几何角度理解 BV 代数的代数构造。

我们将讨论置于导出代数几何的背景下，在这一背景中，我们所需的大多数几何工具，例如导出辛几何和形式几何，都已得到充分发展。此外，对于 BV 构造，我们将只考虑如下情形：取微分形式f 上的泛函： $X \to \mathbb{A}^1_k$，其中 X 是一个光滑仿射代数簇。在涉及物理学中的具体实例时，这些假设非常严格，因为物理学中典型的空间 X 通常是无限维微分流形。我们的限制使我们得以避开无限维情形下由几何和分析带来的困难，并为 BV 构造提供一种更具几何性的研究思路。

我们希望这些想法能够适用于导出微分几何的背景，并在之后推广到无限维情形。

为了尝试理解经典 BV 构造，我们从以下内容出发：

注 0.0.3。 导出临界轨迹是一个经典 BV 代数。它是最简单的经典 BV 代数，因为其中没有鬼场或反鬼场。换言之，它不是对称性作用下的商。众所周知，这一事实可追溯至 [PTVV13],：导出临界轨迹具有典范的(-1)-移位辛结构。

事实上，沿用构造 0.0.2 的思路，经典 BV 代数是与 f 相关的“等变映射”的导出临界轨迹。但 f 自身在平凡作用下是等变的，其对应的 BV 构造正是注 0.0.3 中提到的导出临界轨迹。我们稍后会回到这个思路；不过目前看来，要涵盖构造 0.0.1，我们需要一个更一般的框架。事实上，该构造一般而言并非导出临界轨迹[1]。

沿用并推广[FK14], 的构造，我们可以从取导出临界轨迹开始构造：$\mathbf{Crit}(f)$，然后“添加反鬼场”。添加足够多的反鬼场，就能得到[FK14]中使用的 Koszul–Tate 分解，以构造0.0.1。然而，构造0.0.2 并不适用于这一框架。因此，我们可以自由选择添加任意多（或少）的反鬼场，本质上就是选择要考虑或不考虑系统的哪些（高阶）对称性。这便引出了“几乎导出临界轨迹”的概念（定义 1.2.24）。这类对象“介于”由 Koszul–Tate 构造给出的严格临界轨迹（它在某种意义上给出“极大”的 BV 构造）与导出临界轨迹（“平凡”的 BV 构造）之间。

注 0.0.4. 经典 BV 构造（在代数情形下）由与几乎导出临界轨迹上的“对称性”李代数丛相关联的切瓦利–埃伦伯格代数给出。

BV 构造是基于这个 Chevalley–Eilenberg 代数建立的，原因在于它表示了相对于李代数丛的无穷小作用 的“导出无穷小不变量”代数。换言之，它表示了一种导出无穷小商的概念。不过，从几何视角来看，这种启发式解释很难得到论证。几何与代数概念之间的对应关系确实不清晰，我们稍后会再讨论这些概念。

在此之前，我们需要指出，并非所有“对称性”的李代数丛都能奏效。事实上，经典 BV 代数最重要的特征之一是，它是 (-1)-移位辛的。因此，为了在（无穷小）商上获得辛结构，我们需要对“最大对称性”取商，这相当于要求鬼元与

[1]本质上是因为，对临界点集进行分解 会产生一个过于复杂的微分，不可能来自导出的临界点集。

反鬼场之间具有非退化对偶性。我们将把这一取“最大对称性的商”的过程几何地解释为进行<style id='1'>导出辛约化。

W我们可以将涉及的概念总结为以下不正确的对照表 :

概念	几何侧	代数侧
……的解 欧拉-拉格朗日方程	（几乎）导出的 临界点集	Koszul–Tate 分解 反鬼场
通过……约化 最大对称性	李代数丛 无穷小作用/商	CE 代数 鬼场
代数 可观测量	(-1) 移位辛 几何与约化	P_0-代数

在本文中，我们旨在阐明几何列和经典 BV 构造的意义，并且只使用几何运算。随后，我们将尝试将它们与代数侧所得结果进行比较。这种几何构造还将自然地推广到群胚作用，从而产生新的经典 BV 几何对象构造。

为了理解我们所需的几何对象，我们将详细研究（无穷小）作用与商的概念，以及它们如何与导出辛几何相适应。

导出辛几何的发展，可举出的例子包括 [PTVV13、CPT+17、Cal15、Cal19、Cal21 和 AC21]。事实证明，在构造新的（移位）辛结构方面，导出辛几何实际上比非导出几何具有更好的性质。事实上，第 2.2 节专门研究此类构造；特别是，该节解释了为何导出临界点集（定义为导出交）具有典范的 (-1)-移位辛结构。这是 [CG21] 中 BV 构造的一项关键事实。我们还提出了一些新的拉格朗日纤维化构造（见 [Gra22]，另见 [Saf20]），事实证明，这与移位辛结构的量子化有关（见 [Saf20]）。我们还可以从某种拉格朗日交中构造新的拉格朗日对应（见第 2.2.3 节，尤其是定理 2.2.23）。

为了将导出辛几何与 BV 构造联系起来，我们来总结一下 BV 构造需要满足的条件：

– 取一个几乎导出临界轨迹 S。它带有沿自然映射 $S \to \mathrm{Crit}(f)$ 拉回的预辛结构。– 取一个李代数丛 $\mathscr{L}$ 的“商”，使该商为 (-1)-移位辛。

我们可以将这一构造与辛约化的概念类比。用经典术语来说，辛约化由与李群 G 在 X 上的作用相关联的动量映射 $\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*$ 构造而成，具体如下：

– 取动量映射 $Z(\mu) := \ker(\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*)$ 的核。它带有从 X 拉回的预辛结构。– 取关于积分了 $\mathfrak{g}$ 的李群 G 的商 X/G，使得该商是辛的。

这促使我们研究导出辛约化这一概念。众所周知，经典辛约化只有在 X 和作用满足某些条件、从而商存在时才有意义。只要我们愿意在商栈上工作，导出几何便不受此类限制。事实上，辛约化在导出背景下是通过以下导出拉回得到的：

$$\begin{array}{ccc} \left[Z(\mu)/G\right] & \longrightarrow & \mathbf{B}G := \left[\star/G\right] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[X/G\right] & \xrightarrow{[\mu]} & \left[\mathfrak{g}^*/G\right] \end{array}$$

我们将看到，这个拉回作为 1-移位辛导出栈中的拉格朗日态射的导出交，自然带有辛结构；该导出栈由余伴随作用下的商栈给出。

从导出观点研究动量映射的工作见[AC21]，我们将在第4.3.1节中详细回顾。该节的主要内容如下：

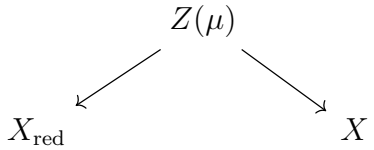
– 动量可以定义为一个 G-等变映射 $\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*$ 使得我们有一个导出辛栈的等价（定义 4.3.2）：

$$X \simeq \left[X/G\right] \times_{\left[\mathfrak{g}^*/G\right]} \mathfrak{g}^*$$

– X 的约化空间（其辛约化）定义为拉回（定义 4.3.2）：

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathrm{red}} & \longrightarrow & \mathbf{B}G := \left[\star/G\right] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[X/G\right] & \xrightarrow{[\mu]} & \left[\mathfrak{g}^*/G\right] \end{array}$$

– 存在一个拉格朗日对应（命题 4.3.6）：



此外，对于恰当定义的具有“拉格朗日约化”的拉格朗日对象，动量映射还具有一个良好性质：在“拉格朗日交”下保持稳定（定理4.3.10）。特别地，我们得到一个 (-1)-平移动量映射：

$$\mu_{-1} : \mathbf{Crit}(f) \to \mathfrak{g}^*[-1]$$

其辛　约化给出了映射的等变导出临界轨迹　：

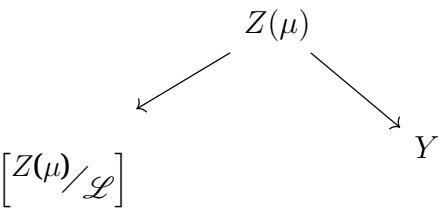
$$[f] : \left[X/G\right] \to \mathbb{A}^1_k$$

这个动量映射的辛约化，是一种基于对称群的 BV 构造。该构造已在 [BSS21] 中研究，并将在第 5.3.2 节进一步讨论。我们将在该节看到，这一构造同时符合构造 0.0.1和 0.0.2 的启发式思路。

然而，在这两种启发式思路中，通常的经典 BV 构造并不涉及群作用，而是涉及“无穷小作用”。在群的情形下，这对应于群的相关李代数的作用；但在一般情形下，我们需要提出一种恰当的无穷小商与无穷小作用概念。

稍后我们会说明，如何理解这些概念。这样，我们便可以将之前关于群的论述，调整到李代数丛的情形，讨论“无穷小作用与商”。不过，这方面的理论更为复杂，需要采用略有不同的动量映射概念。本质上，我们考虑一个足够良好的导出栈之间的映射，$\mu : Y \to L^*$ 其中 $\mathscr{L}$ 是定义在一个导出栈 X 上的李代数丛，而 Y 是一个辛导出栈。于是，动量映射的结构如下（见定义4.3.12）：

– 李代数丛 $\mathscr{L}$ 在 $Z(\mu)$ 上的作用 $:= \ker(\mu)$。– 无穷小商[1], $\left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]$ 上的 n- 移位辛结构，以及一个拉格朗日对应：



[1]如果 Y 不够良好，那么无穷小商的概念会有些复杂。一般情况下，我们需要引入“弱无穷小商”的概念。

那么 $Y_{\mathrm{red}} := \left[Z(\mu)/\!\!/\mathscr{L}\right]$ 称为 Y 沿着 μ 的无穷小辛约化。

这类动量映射的典型例子是锚映射的对偶 $T^*X \to L^*$。此外，关于导出交，这一动量映射的概念表现得同样良好（见定理4.3.20）。特别地，存在一个 (-1)-移位动量映射：

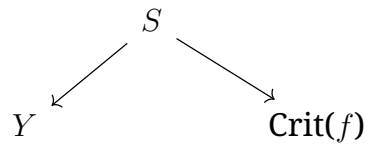
$$\mathbf{Crit}(f) \to L^*[-1]$$

对于 $\mathscr{L}$ 在 f 上、关于 X 的一个“对称性”李代数丛（当 X 满足某些技术假设时）。此外，该动量映射的辛约化恰好是$\mathbf{Crit}([f])$ （例 4.3.21）。

那么，与构造 0.0.2 中的 BV 形式体系的类比在于：给定 $\mathscr{L}$，一个对称性的李代数丛，$\mathbf{Crit}([f])$ 按定义就是我们所关注的 BV 构造，同时它也是 (-1)-移位动量映射 μ_{-1}： $\mathbf{Crit}(f) \to \mathscr{L}^*[-1]$的辛约化。因此，它也可以看作由 $Z(\mu_{-1})$给出的几乎导出临界轨迹的商，因而契合构造 0.0.1的一个推广版本。

我们现在已经看到，构造 0.0.2 似乎是定义在 (-1)-移位动量映射上的辛约化，该映射定义于 $\mathbf{Crit}(f)$上。问题在于，构造0.0.1 并不能完全适用于这种情形，因为一般不存在这样的动量映射，其核能够恢复完整的 Koszul–Tate 分解。因此，我们提出对前述思想作出推广，并将 BV 构造定义为对 $S \to \mathbf{Crit}(f)$ 的一种“广义辛约化”（定义 5.1.3 和 5.1.4），其中 S 是 f的一个“几乎导出临界轨迹”。如果一个导出栈 Y相对于给定的几乎导出临界轨迹 S，满足以下条件（见定义 5.1.7 和5.1.8）：

– Y 是 S的一个“（无穷小）商”。– Y 是(-1)-移位辛的，并且属于一个拉格朗日对应：



这是对两种 BV 构造相当广泛的推广，因为辛结构可能具有复杂的同伦论（参见定理 5.2.8），而且不需要 具有 BV 荷。

尽管如此，我们仍将讨论为什么这类对象仍应“看起来像”经典 BV 代数，这是对构造 0.0.1 的推广（参见第 5.2.1节）。

最后，将无穷小作用、商、动量映射等替换为 *Segal* 群胚 中的类似概念后，整个理论也能非常自然地推广。事实上，

群胚图景适用范围更广，而且比其无穷小对应物的性质好得多[1]。群胚图景将我们之前讨论过的群和李代数丛的类似理论统一推广。这引出了 BV 构造的一种新概念，它回顾的是对称性的整体作用，而不只是与之相关的无穷小作用。

我们对 BV 的定义所面临的主要问题是：给定一个几乎导出临界轨迹 S（这相当于固定我们要考虑的对称性），我们很难控制 $S \to \mathbf{Crit}(f)$上 BV 结构的存在性和唯一性。事实上，这类结构可能构成一个完整的（也可能为空的）拓扑空间。在第 5.3 节中，我们将展示，实际上我们有一大类 BV 构造的例子，其中包括一些能够复现构造 0.0.1 和 0.0.2 的例子。

最后，我们迄今讨论的许多内容都依赖于一套完善的（无穷小）等变几何理论，换言之，即对（无穷小）商的几何进行研究。在第 4.1 节中，我们讨论了进行辛几何和辛约化所需的 $\mathscr{G}$-等变几何的主要结果。这套理论表现得非常好；我们希望将其思路用于无穷小等变几何，也就是相对于李代数丛作用而言的等变几何。

主要问题之一是为李代数丛的无穷小商提出一个恰当的概念。在第 3 节中，我们定义了这样一个概念，并研究其主要性质。遗憾的是，这一概念只在非常受限的情形下成立（即底空间满足假设 3.2.2 时）。尤其是，许多值得关注的例子并不适用于这一框架。

然而，从几何观点来看，这种方法才是无穷小商的“正确”概念；其含义将在第 4.2.1 节中得到精确说明。在该节中，我们解释了这样一种启发式观点：李代数丛是群胚的无穷小版本。我们描述了一种导子与积分过程，表明在一些温和条件下，导出栈按李代数丛取无穷小商，等于该导出栈按一个对其进行“积分”的群胚取商后的形式完备化，从而阐明了“无穷小商”这一术语的由来。

为了缓解只能在非常受限的情形下定义无穷小商这一问题，并受到第 4.1 节一些结果的启发，我们提出了“弱无穷小商”的概念，以涵盖假设 3.2.2 所不允许的缺失示例。唯一的缺点是，这一概念不再涉及实际作用（即第 3.3 节中所述意义下的作用），而无穷小商则成为数据的一部分。因此，它们既不一定存在，也不一定唯一。然而，我们所关注的大多数示例都是弱无穷小

[1]尤其是在这种情形下，无需引入“弱”商的概念。

商，并且与群胚情形类似的所需性质仍然成立。

有了这些工具，我们就可以几乎以讨论群胚时完全相同的方式来讨论 $\mathscr{L}$-等变几何（尽管这里的设定更受限制）。在整个讨论过程中，我们会特别说明，所有无穷小构造（BV、辛约化、作用与商……）恰好都是群胚中相应全局对象的形式完备化（同样需要满足一些温和条件）。

记号与约定。

– 始终用 k 表示一个特征为 0 的域。– 我们采用上同调约定，即微分的次数为 $+1$。我们用 Mod_k 表示 k 上的上链复形范畴及其投射模型结构。– 除非另有说明，所有对象均为微分分次的。例如，当我们说“模”和“代数”时，指的是“微分分次模”和“微分分次交换代数”。对象 a 的次数，以及微分分次对象中齐次元素的次数，记作 $|a|$。– 所有代数和幺半群均为含幺交换代数和交换幺半群。事实上，代数定义为给定对称幺半范畴中的交换幺半群（默认取 Mod_k）。交换微分分次代数（在 Mod_k 中）范畴记作 cdga，并带有由 Mod_k 上的模型结构诱导的投射模型结构。将 Mod_k 替换为“良好”的模型范畴时，这些模型结构的变化及其性质见附录 A.1。– 我们不区分模型范畴及其相应 ∞-范畴的记号。除非另有说明，所有内容都可以视为来自模型范畴构造。例如，默认所有函子都是 Quillen 函子，除非称作“∞-函子”。– 我们考虑的所有 ∞-范畴都是 $(\infty, 1)$-范畴。– 除非另有说明（通常通过使用“严格”“经典”或“未导出”等形容词），所有内容均“在同伦意义下”成立。特别地，所有图表都只在同伦意义下交换[1]，并且默认所有函子都是导出的，例如：

- 极限与余极限，包括拉回与推出。
- （富集）Hom 函子与映射空间。– 一直以来，我们的几何对象（导出概形、栈等）都将在点 $\star :=\mathrm{Spec}(k)$ 上增广，从而成为导出 k-概形、导出 k-栈等…… Kee

ping 牢记这一点，k 可以从

[1]换言之，所有图表都附带使图表交换的同伦数据。

记号中省略。以对偶的方式，所有代数都将是 k-代数，我们也会在记号中省略 k 。

– 若 A 是一个代数，则Mod_A 是 A上的模范畴。有时我们会在更一般的良好模型范畴中考虑代数和模。有关这些范畴和模的更多内容，请参见附录 A.1 。

– $\mathscr{S}$ 是拓扑空间的 ∞-范畴，它等价于 ∞-群胚的 ∞-范畴，记作 $\mathbf{Gpd}_\infty$。这种等价由几何实现函子给出：

$$|-|_\Delta : \mathbf{Gpd}_\infty \to \mathscr{S}$$

– 范畴 $\mathscr{C}$ 的 Hom 集记作：

$$\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Hom}} \quad \textbf{or} \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}$$

– 给定一个 ∞-范畴 $\mathscr{C}$，我们将其记作：

$$\mathrm{Map}_{\mathscr{C}}(-,-) \in \mathscr{S}$$

的映射空间，对应于 $\mathscr{C}$。

– 一般而言，对于一个 $\mathscr{V}$ 富集范畴 $\mathscr{C}$，我们用以下符号表示：

$$\mathrm{Hom}^{\mathscr{V}}_{\mathscr{C}}(-,-)$$

$\mathscr{V}$ 富化 Hom 函子。如果 $\mathscr{V} = \mathbf{Mod}_k$，我们将记作：

$$\underline{\mathrm{Hom}}(-,-) := \mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}_k}(-,-)$$

– 为简化某些记号，我们也将记作：

$$\mathrm{Hom}_B(-,-) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_B}(-,-)$$

映射空间或富化 Hom 函子也类似。

– 线性栈的零截面（参见第 1.2.3 节）记作 s_0。

– 若 V 和 W 是上链复形，且 $f : V \to W$ 是它们之间的态射，则我们用以下符号表示：

$$V[1] \oplus^f W$$

底层模为 $V[1] \oplus W$ 的上链复形，其微分是 V 上的微分、 W 上的微分与 f （视为次数 1 的映射）之和。这是 f 的同伦纤维的一个模型：

$$\mathrm{fiber}\left(M \xrightarrow{f} N\right)$$

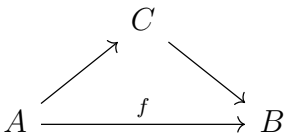
– 设 $f : F \to E$ 是定义在 X 上的线性栈之间的线性态射（见第1.2.3节）。则我们记：

$$Z(f) := \mathrm{fiber}_{s_0}\left(M \xrightarrow{f} N\right)$$

f 在 G的零截面处的纤维。我们将在第1.2.3 节看到，这就是与 $\mathscr{F}[1] \oplus^f \mathscr{E}$ 相关联的线性栈，其中 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{E}$ 是定义在 X 上的拟凝聚层，分别关联于 F 和 E。

– 我们用 $\mathscr{C}_{/A}$ 表示在 A 上的切片范畴，用 $\mathscr{C}_{A/}$ 表示在 A下的切片范畴。

– 给定一个态射 $f : A \to B$，我们用 $\mathscr{C}_{A//B}$ 表示其对象为满足下列交换图的元素 $C \in \mathscr{C}$ 的范畴：



该范畴中的态射是 $\mathscr{C}$、 $C \to C'$ 中的态射，它们与来自 A 以及指向 B的所有映射交换。

本论文旨在从导出几何的角度研究 BV形式体系。我们发展了必要的形式体系，以讨论无穷小商和无穷小辛约化，它们作为 BV构造的几何版本出现。

第 1 本节介绍后文所需的导出几何工具。

第 1.1 – 本节旨在介绍导出高阶层的相关概念和记号。

第 1.1.1 – 经典概形通常没有适用于一般作用的良定义商。为了解决这一问题，我们考察它们的点函子，并将点集替换为 单纯集合。由此定义高阶层的概念。第 1.1.3 – 经典概形也并非总有“良好的交理论”。导出几何最初的动机之一，是解决非横截交的问题。因此我们在此定义导出概形。第 1.1.3– 将前两节的内容结合起来，我们便得到导出场的概念，借此可以毫无障碍地进行交与商。第 1.1.4– 最后，我们讨论仿射和相对仿射导出场，并描述用于刻画导出场函数代数的微分分次代数。第 1.2 – 本节讨论底空间上的线性层概念，类比向量空间的概念。第 1.2.1– 我们回顾底空间 X 上拟凝聚层与完美层的概念。它们将起到向量丛“截面模”的作用。第 1.2.2 – 我们将余切复形与切复形定义为模层，分别表示微分形式（Kähler微分形式，但取导出意义

é)

以及导子。第 1.2.3节——我们定义了底空间上与该底空间上的拟相干层相关联的线性层的概念。这使我们能够定义切丛和余切丛。接着，我们证明了拉回的一些性质，这些性质与向量丛的预期性质类似。

第 1.2.4节——我们证明，线性层的相对切复形 $\mathbb{T}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/X}$ 自然等价于 $\pi^*\mathscr{F}$。它是与线性层相关联的垂直空间。

第 1.2.5 节 – 当底空间为仿射时，我们引入线性层上的联络概念（再次类比向量丛上的联络）。这使我们能够计算线性层的切丛。

第 1.3 节 – 我们引入形式几何、形式完备化和形式层的概念。

第 1.3.1 节 – 在本节中，我们定义形式层、德拉姆层和形式完备化的概念。这为我们提供了讨论无穷小邻域的语言，而我们将在等变无穷小几何的研究中广泛使用这一语言。 第 1.3.2 节– 我们阐述一个关键结果，该结果将（在适当假设下）某个底空间的形式增厚与 X 下的形式模问题对应起来 X。随后我们讨论形式谱，以及这些对象的相对切空间计算。

第 1.4 节 – 本节介绍用于导出框架中微分演算的对象。

第 1.4.1 节 – 我们在导出框架中引入德拉姆复形及其混合分次复形结构。它由一个泛性质（作为左伴随）定义，我们还说明它实际上自然等价于对称代数：

$$\mathrm{Sym}_A \mathbb{L}_A[-1]$$

第 1.4.2节 – 我们定义移位微分形式 的概念，它们对于讨论移位辛几何至关重要。

第 2 节 – 我们回顾导出辛几何的基本定义，并通过“拉格朗日交”过程详细研究此类结构的构造。

小节 2.1 – 我们介绍导出辛几何。

小节 2.1.1– 我们回顾辛结构 n-移位

我们还描述了移位余切丛上的典范辛结构。第 2.1.2 节——我们定义态射上的拉格朗日结构 $L \to X$。我们描述了一些经典例子，并引入拉格朗日对应的概念，这一概念将在本论文后续部分发挥关键作用。第 2.1.3 节——与前一节类似，我们引入拉格朗日纤维化的概念，并给出这些结构的一些有用例子。

第 2.2 节——本节展示了通过“拉格朗日交”得到的不同构造。

第 2.2.1 节——我们首先回顾这样一个结果：在 n-移位辛栈中进行拉格朗日交，会得到一个 $(n-1)$-移位辛栈。特别地，导出临界 locus 总是 (-1)-移位辛的。

第2.2.2节 – 我们将这一结果推广到拉格朗日纤维化之上的拉格朗日交。特别地，自然态射：

$$\mathbf{Crit}(f) \to X$$

是一个拉格朗日纤维化。

第2.2.3节 – 这些拉格朗日交过程可以推广，并且
在拉格朗日对象空间上诱导出一个范畴（甚至是高阶范畴）结构
。特别是，这一形式化方法使我们能够
证明一个新的构造：对应
拉格朗日交的舞蹈，通过拉格朗日交。

节2.3 – 我们讨论前面构造的一些例子。

第 2.3.1节——我们详细回顾导出临界点集的辛几何。第 2.3.2节——我们精确描述在泛函具有“非退化”临界点集的情况下，导出临界 locus 上的拉格朗日纤维化结构。第 2.3.3节——与导出临界点集类似，我们描述扭曲余切丛上通过拉格朗日交得到的辛几何。

第 3节——我们研究李代数胚的几何及其无穷小商。

第 3.1 – 我们引入李代数丛的概念。

第 3.1.1– 我们给出李代数丛的基本定义和例子。第 3.1.2 – 我们回顾李代数丛同伦理论的基础要素。第 3.2 – 我们引入并研究李代数丛的无穷小商这一概念。

第 3.2.1– 我们定义与李代数丛相关的导出场，并称之为“无穷小商”。我们展示这一构造的一些性质，并计算其相对切丛。第 3.2.2 – 本节旨在定义李代数丛的拉回和基变换的概念，并说明这些构造在非导出的切瓦利–埃伦伯格代数中也有对应形式。

第 3.3节 – 李代数丛作用。

第 3.3.1节 – 我们定义同伦意义下的表示这一概念，并证明 Chevalley–Eilenberg$^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})$的切复形与余切复形定义了同伦意义下的表示，我们可以将其视为伴随表示和余伴随表示。第 3.3.2节 – 我们定义李代数丛作用的一般概念，并证明同伦意义下的表示定义了这类作用。

第 3.4 节 – 我们在代数框架下给出同伦传递定理的证明。

第 4节 – 我们引入无穷小和整体框架下的等变几何概念，随后研究其辛几何。

第 4.1 节——我们从研究群胚作用下的等变几何开始。

第 4.1.1 节——我们定义群胚和等变映射的概念。我们还展示了群胚商以及群胚作用的商的拉回的一些重要性质。第 4.1.2 节——我们描述商栈的切丛和余切丛。第 4.1.3 节——我们回顾商栈（及其余切丛）上的辛几何。

章节 4.2 – 我们转而讨论等变几何的无穷小版本。

章节 4.2.1– 我们证明，李代数胚是群胚的无穷小版本。特别地，我们说明如何对李代数胚进行积分，以及如何对群胚及其作用进行微分。章节 4.2.2– 我们仿照第 4.1.1 节中关于群胚等变几何所述的定义和性质。章节 4.2.3– 同样，我们尽可能描述无穷小商的切丛和余切丛。

章节 4.3 – 我们在导出框架下研究动量映射和辛约化的概念。

章节 4.3.1 – 我们首先回顾群作用的动量映射概念。我们主要遵循 [AC21] 的结果，以此为后续推广提供依据。关键在于，我们解释了动量映射的本质性质与拉格朗日对应有关。章节 4.3.2 – 受群情形的启发，我们可以将动量映射和辛约化的概念推广到无穷小作用。此外，我们还有一个关于动量映射的拉格朗日交理论，可用于构造新的、有趣的移位动量映射。章节 4.3.3 – 上一节的概念可以逐字推广到群胚情形。

节 5 – 我们讨论了将关于等变几何的结果应用于 BV形式体系。

Se节 5.1 – 我们为 BV 形式体系提出一种几何方法 .

节 5.1.1– 我们从代数构造出发，并通过一种共同的几何解释对其进行说明和推广。我们解释道，BV构造在本质上是辛约化的一种推广版本。节 5.1.2– 我们将 BV 构造定义为一种推广的辛约化。节 5.1.3– 许多 BV 构造是通过“壳外”对称性获得的。对于整体情形，我们将此类对称性描述为无穷小对称性。节 5.2– 本节旨在将我们的几何定义与常见代数构造进行比较。

第 5.2.1节——在 [PS20], 的背景下，我们展示了，我们的几何概念类似于通常的 BV 构造，但更为一般，并且出现了非平凡的“同伦拓扑”项。第 5.2.2节——我们展示了，通过将范围限制在非导出框架中，可以找到一个 BV 荷。第 5.2.3节——这是一个技术性章节，其中展示了一个 Chevalley–Eilenberg 复形的德拉姆代数与底空间的德拉姆代数之间存在形变收缩。

第 5.3 节——我们给出了 BV 构造的重要实例。

第 5.3.1节——我们证明， [FK14] 的 BV 构造在几何意义上是一个 BV 构造。第 5.3.2节——我们证明，壳外对称群的作用会导出一个 BV 构造，重现 [BSS 21] 中的讨论。第 5.3.3 节——同样地，每个无穷小壳外作用都会导出一个由等变导出临界轨迹给出的 BV 构造。第 5.3.4节——同样地，每个壳外群胚作用都会导出一个由等变导出临界轨迹给出的 BV 构造。

1. 导出代数几何

在本节中，我们着重建立将要使用的几何背景，包括导出栈、切复形、线性栈、联络、形式几何、德拉姆代数以及移位的（闭）微分形式。

我们从第1.1 节开始，阐述引入导出概形和导出栈的动机，并介绍它们的切复形与余切复形，以及本书将使用的主要基础记号和构造。

接着，第1.2 节讨论底空间上的线性（及半线性表示）栈 X。我们描述这类对象的态射与拉回，并说明如何利用联络计算它们的余切复形和相对余切复形。随后，在第1.3节，我们转而研究导出形式几何。特别是，我们将关注由形式模问题产生的导出形式栈，因为它们将是第3节研究李代数丛及其无穷小商时的主要对象。

最后，在第1.4 节，我们回顾德拉姆代数的构造，以及导出栈上的 n移位（闭）p形式的概念，为第2节讨论导出辛几何做好准备。

1.1. **导出代数几何简介**。

导出几何背后的理念，是将同伦论与几何结合起来，从而得到“性质更好”的几何对象。我们对这类对象感兴趣的原因有很多。我们主要关注以下两个在导出几何中本质上具有良好性质的运算：

– 我们可以定义 同伦商 （从现在起我们将简称为商）。在高阶几何中，余极限是良定义的[1] ，我们可以利用它们定义商并研究 G-等变几何。– 我们拥有良好的交理论[2] ，甚至所有极限。特别是在第 2.2 节中，我们将看到导出交相对于导出辛几何具有多么良好的性质。

此外，导出几何的工具也非常适合研究 形式的 几何和无穷小邻域；在研究 无穷小商 时我们也将广泛使用这些工具（见第 3节）。

关于导出几何的一些奠基性著作，我们在模型范畴语境下参考[TV05] 和[TV08] ，在 [Lur04], [Lur07] 和 [Lur09a] ， 以及在 ∞-范畴语境下的相关著作。

[1]请注意，我们所说的余极限（分别为极限）始终指 同伦 余极限（分别为同伦 极限）。[2]“良好的交理论”是指，（同伦）交是存在的，并且相对于交数具有良好的性质，同时能够恢复塞尔公式（见 [Lur04]的导论）。

1.1.1. 商与高阶栈。

为了对几何空间 X 的“同伦意义下”的商进行编码，我们为其添加一个 由 *1*-单纯形构成的空间，使得当且仅当 x 和 y 在我们希望取商的关系下等价时，才存在一个从 x 到 y 的单纯形。这个想法可以用群胚的概念来编码：

$$\mathscr{G} \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} X$$

其中我们将 $\gamma \in \mathscr{G}$ 视为从 $x := s(\gamma)$ 到 $y := t(\gamma)$ 的等价，而关于这一等价关系的严格商对应于该群胚的严格等化子。

然而，我们所研究的“经典”几何对象范畴中，这样的严格余极限并不总是存在（例如，当 X 和 $\mathscr{G}$ 是光滑流形甚至是概形时）。为了解决这一问题，我们需要考虑一个更大的“高阶”[1]几何对象范畴。

首先，我们考虑仿射概形的 site 上的层， $\mathbf{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$，其动机来自概形的点函子概念（见例 1.1.12）。在这个层范畴中，余极限确实存在，但仍然具有病态性[2]，，因此我们将考虑取值不在 Set 范畴中，而是在 ∞-范畴的∞-群胚中，$\mathbf{Gpd}_\infty$ （见 [Lur09b，第 1.2 节5]）。

其背后的思想源于这样一个事实：奇异商的点集合可以由一个“点的单纯集合”来表示，在同伦意义下，其中π_0 恢复商的点集合，并且每个单纯形集合都是“良好的”。这样做不仅记住了商，还记住了两个点等价的方式、两个此类等价之间等价的方式，依此类推.....事实证明，这样做带来了许多技术上的优势，代价是必须在同伦意义下进行处理。由于我们希望在同伦意义下进行处理，自然地，我们所关注的对象是“∞-层”，也称为高阶栈：

定义 1.1.1。 经典仿射空间位点上的一个高阶叠 ，记作 $\mathbf{Aff} := (\mathbf{CAlg})^{\mathrm{op}}$ （交换代数范畴的对偶，集中在零次），是一个函子：

$$X : \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Gpd}_\infty$$

满足下降条件（参见 [TV05，定义 3.4。9]），使其成为取值于 ∞-范畴的 ∞-群胚层，Gpd。

[1]高阶几何不应与导出几何混淆，后者是我们将要看到的另一种推广形式。[2]其意义在于，“点的集合”并不是某个几何对象的点集。

请注意，这需要选择一个定义在[1] 仿射概形范畴上的格罗滕迪克拓扑。默认情况下，我们始终采用*étale* 拓扑（参见 [Mil80]）。

例 1.1.2.

– 点函子： 概形的点函子诱导出一个全忠实函子 Sch $\to$St，它将概形 X 映射到高阶叠：

$$X : \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set} \subset \mathbf{Gpd}_\infty$$
$$A \longmapsto \underset{\mathbf{Sch}}{\mathrm{Hom}}(\mathbf{Spec}(A), X)$$

其中，点的集合通过全忠实函子 集合 $\hookrightarrow$ 群胚$_\infty$ 被视为单纯集合，该函子将集合 X 映射为在每个单纯形上都取X 的常值单纯集合[2]。

– 商栈： 若 G 是一个作用于高阶栈 X 上的群对象，其作用为 ρ，则可将高阶商栈定义为以下余极限：

$$\left[X/G\right] := \mathrm{colim}\left(N\left(\; X \times G \underset{\rho}{\overset{\mathrm{pr_X}}{\rightrightarrows}} X \;\right)\right)$$

其中 N 是由该作用确定的群胚的神经。此例将在例 1.1.14 中详细展开。

1.1.2. 交与导出概形。

对于交的问题，症结在于函数代数缺乏足够的同伦论。关于交理论与导出几何之间关系的更详细说明，请参阅[Lur04] 的引言以及 [Cal14，第 1 讲。1]简言之，我们必须将交换代数的仿射空间替换为单纯代数范畴；该范畴具有非平凡的同伦论，可用于处理同伦意义下的交。

由于我们始终处理 k 代数，且 k 是特征为 0 的域，因此可以使用 Dold–Kan 对应，以连通交换微分分次 k 代数 $\mathsf{dAff} := \left(\mathsf{cdga}^{\leq 0}\right)^{\mathrm{op}}$ 来代替单纯代数。

[1]格罗滕迪克拓扑这一概念推广了光滑流形上开覆盖的思想。关于位点和格罗滕迪克拓扑的经典（非导出）概念，请参阅[MLM94] 和 [AGV72] 。[2]这个全忠实函子是连通分支函子的右伴随：

$$\pi_0 : \text{群胚}_\infty \to \text{集合}$$

定义 1.1.3. 一个导出概形是一个导出局部环化空间[1] $(X, \mathscr{O}_X)$，满足：

– $\mathscr{O}_X$ 是 X 上的连通交换微分分次代数的 ∞-层，即对于 $n \geq 0$，有 $H^n(\mathscr{O}_X) = 0$。– 底层局部环化空间 $(X, H^0(\mathscr{O}_X))$ 是一个概形。– 对所有 $n \geq 0$，层 $H^{-n}(\mathscr{O}_X)$ 都是拟凝聚的 $H^0(\mathscr{O}_X)$-模。

我们将导出概形的 ∞-范畴记为 dSch。当然，任何普通概形也是导出概形，这定义了一个全忠实的 ∞-函子，$\iota : \mathbf{Sch} \to \mathbf{dSch}$，它有一个左伴随：

$$t_0 : \mathbf{dSch} \rightleftarrows \mathbf{Sch} : \iota$$

由底层概形定义，$t_0(X, \mathscr{O}_X) = (X, H^0(\mathscr{O}_X))$。

与普通概形一样，也有一个谱函子 Spec，它是全局函数代数函子的右伴随：

$$\Gamma : \mathbf{dSch} \rightleftarrows \left(\mathrm{cdga}^{\leq 0}\right)^{\mathrm{op}} =: \mathbf{dAff} : \mathbf{Spec}$$

注1.1.4。 在 [Toe14], 中证明了，dAff 等价于截断为 $t_0(X)$ 为仿射概形的导出概形范畴。对于导出概形 $(X, \mathscr{O}_X)$，其底层概形 $t_0(X)$是局部仿射的。因此，这表明 $(X, \mathscr{O}_X)$在局部上等价于导出仿射概形。

定义 1.1.5。 如果导出概形 X 满足 局部几乎有限表示，即X 在局部上等价于几乎有限表示交换微分分次代数的谱[2]，则称其为 $t_0(X)$。特别地，$t_0(X)$ 是有限生成概形。在此情形下，$H^{-n}(\mathscr{O}_X)$ 是相干的 $H^0(\mathscr{O}_X)$-模。

例 1.1.6. 仿射导出概形的拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spec}(A) \times_{\mathbf{Spec}(C)} \mathbf{Spec}(B) & \longrightarrow & \mathbf{Spec}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Spec}(A) & \longrightarrow & \mathbf{Spec}(C) \end{array}$$

可以通过其<style id='1'>导出张量积的谱来计算：

$$\mathbf{Spec}(A) \times_{\mathbf{Spec}(C)} \mathbf{Spec}(B) \simeq \mathbf{Spec}(A \otimes^{\mathbb{L}}_{C} B)$$

采用这种导出设定的主要优点是，张量积现在是导出的。正如 [Lur04], 中所解释的，这使我们能够恢复塞尔公式，从而计算正确的交数。

[1] 导出局部环化空间是拓扑空间 X，带有一个 ∞-层连通交换微分分次代数，参见 [Toe14，第 2 节。2] 详见相关细节。[2] A 如果 $H^0(A)$ 是有限生成代数，且每个 $H^i(A)$都是有限表示的 $H^0(A)$-模，则称其为几乎有限表示交换微分分次代数。

从现在起，我们将省略记号 $\otimes^{\mathbb{L}}$，并用 $\otimes$ 表示导出张量积。回顾一下，按照约定，我们所有的函子都是导出的；除非另有说明，我们的构造和交换图表都“在同伦意义下成立”。

例 1.1.7。泛函 $f\colon X \to \mathbb{A}^1$ 的导出临界轨迹，其中 X 是一个光滑概形，定义为以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Crit}(f) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle df} \\ X & \xrightarrow{s_0} & T^*X \end{array}$$

作为一个导出概形，$\mathbf{Crit}(f)$ 可描述为如下局部环化空间：

$$(S, (i^{-1}(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathbb{T}_X[1]), \iota_{df}))$$

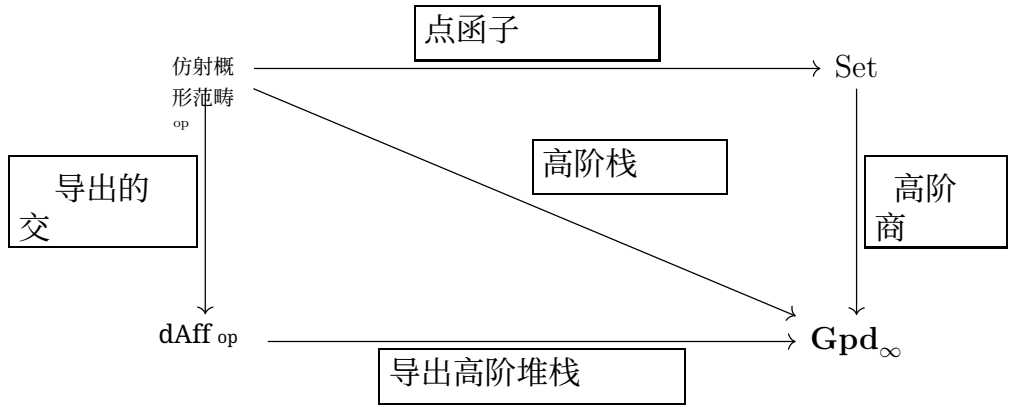
其中 $i\colon S \to X$ 是拓扑严格临界轨迹的包含映射[1]，$\mathbb{T}_X$ 是切复形[2] (参见第 1.2.2节)，交换微分分次代数层是将连通[3] 交换微分分次代数S 层限制到[4] 交换微分分次代数，对称代数$_{\mathscr{O}_X} \mathbb{T}_X[1]$，并配以由缩并给出的微分 ι_{df}。

注 1.1.8。 导出临界轨迹具有许多良好性质。在许多方面，它的行为几乎与移位余切丛 $T^*[-1]X$ (定义 1.2.11) 相同；事实上，当 (-1)时，它等价于 $df = 0$移位余切丛。特别是，我们将在第 2.2 节看到，$T^*[-1]X$ 的许多辛几何性质都可以推广到$\mathbf{Crit}(f)$。
我们将在第 2.3.1 节中更详细地研究导出交的（移位）辛几何。

1.1.3. 导出高阶堆栈。

当我们希望同时取同伦商和导出交时，就会用到导出高阶栈。为了得到导出高阶栈，对几何空间这一概念所作的逐步推广可以用下图概括：

[1]严格临界点集是由严格拉回给出的概形。[2]由于我们假设 X 光滑，$\mathbb{T}_X$ 实际上集中在次数 0，且没有微分。[3]由限制函子 i^{-1}: 交换微分分次代数$^{\leq 0}{}_{\text{拟凝聚层}(X)} \to$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}{}_{\text{拟凝聚层}(Y)}$ 给出。[4]只要 $\mathbb{T}_X[1]$ 集中在非正次数，对称代数便是连通的；当 X 光滑时，情况正是如此。



一种理解方式是：导出高阶栈之于导出概形，正如高阶栈之于概形。具体而言，导出概形的点函子（取值于 $\mathbf{Gpd}_\infty$）是一个导出栈，并诱导出一个全忠实的 ∞-函子 $\mathbf{dSch} \to \mathbf{dSt}$。特别是，与高阶栈类似，在处理同伦商和余极限时，它们比导出概形具有更好的性质。

定义 1.1.9。 一个 导出高阶叠 在 ∞-位点（见 [TV05，第3节。1]）$\mathbf{dAff}$ 上的导出仿射对象的函子：

$$F : \mathbf{dAff}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Gpd}_\infty$$

满足下降条件（见 [TV05，定义 3.4。9]），使其成为一个 ∞-层取值于 ∞-群胚。我们所考虑的所有栈都将视为导出高阶堆栈，因此从现在起我们将省略“高阶”和“导出”这些词，称它们为 导出栈 或仅称为 栈。

我们将使用连通交换微分分次代数[1] 作为仿射 $\mathbf{dAff} := (\text{交换微分分次代数}^{\leq 0})^{\mathrm{op}}$，并配备 étale 拓扑。由此，我们得到 D^--栈这一概念，按[TV08]的术语。采用这些选择后，我们将所有导出栈构成的 ∞-范畴记为$\mathbf{dSt}$。若选择其他位点和格罗滕迪克拓扑 τ，则将该拓扑下的导出栈记为$\mathbf{dSt}^\tau$。

记号 1.1.10。 函子 $F : \mathbf{dAff}^{\mathrm{op}} \to$ 群胚$_\infty$ 若不满足下降条件，则称为预栈，这类函子构成的范畴记为$\mathbf{dpSt}$。我们也会使用其他栈记号的变体，例如将 $\mathbf{dfpSt}$替代$\mathbf{dfSt}$，以表示形式导出预叠所对应的范畴（我们将在第1.3.1节中定义）。

W我们还需要将讨论限制在几乎有限呈现栈的范围内。

[1]事实上，从仿射概形范畴自然推广时，可以考虑单纯代数。不过，由于我们是在特征零的域上工作，可以利用 Dold–Kan 对应，转而使用连通交换微分分次代数。

定义 1.1.11。 几乎有限呈现的导出栈是指在几乎有限表示代数的 ∞-位点 $\mathbf{dAff}^{\mathrm{afp}}$ 上、配备 étale 拓扑的导出栈。换言之，它们是如下函子：

$$F : \left(\mathbf{dAff}^{\mathrm{afp}}\right)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Gpd}_{\infty}$$

满足下降条件（参见 [TV05，定义 3.4。9]），使其成为一个取值于 ∞-层的 ∞-群胚。我们将几乎有限呈现的导出栈范畴记为$\mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}}$。

例 1.1.12. 由于 dSch 是一个 ∞-范畴，它具有映射空间，因此我们可以定义给定导出概形 X 的点函子：

$$\begin{aligned} X : \mathbf{dAff}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Gpd}_{\infty} \\ \mathbf{Spec}(A) &\longmapsto \underset{\mathbf{dSch}}{\mathrm{Map}}(\mathbf{Spec}(A), X) \end{aligned}$$

这定义了一个全忠实函子 dSch $\to$ dSt。如果 Spec(A) $\in$ dAff，那么它所关联的栈（我们也记作 Spec(A)）是由下式给出的栈：

$$\begin{aligned} \mathbf{Spec}(A) : \mathrm{cdga}^{\leq 0} &\longrightarrow \mathbf{Gpd}_{\infty} \\ B &\longmapsto \underset{\mathrm{cdga}^{\leq 0}}{\mathrm{Map}}(A, B) \end{aligned}$$

这称为由 A余表示的导出栈。

注 1.1.13. dSt 中的对象可能非常复杂，其表现并不总是像我们出于几何目的所希望的那样良好。为了更好地把握导出栈，我们通常会将范围限制在导出栈的某些子类中。

一种限制方式是考虑可通过归纳方式构造的导出栈：从仿射导出栈开始，并沿某种类型的态射逐步将栈粘合在一起。这正是几何栈定义的思路（参见[TV08，第 1 章。3] 特别是 [TV08，命题 1.3.4。2]）。

选择沿以进行粘合的“态射类型”不同，便会得到不同的几何栈概念。我们只考虑光滑态射这一类。对于光滑态射而言，几何栈构成的范畴称为*Artin* 栈范畴（参见[TV08，定义 2.1.1。3]）。

遗憾的是，这类栈对我们来说还不够一般。在第 3 节研究李代数丛的无穷小商时，我们得到的不会是 Artin 栈，而是 导出形式栈 (见第 1.3 节）。

例 1.1.14。

– 我们将 $\mathbb{A}^1$ 记作由$k[x]$, $\mathbb{A}^1$:=Spec($k[x]$)所余表示的导出栈仿射直线。– 导出栈的任意拉回或推出仍是导出栈。– 在第 1.2.3 节中，我们将定义一类称为线性栈的栈，它对应于对 X上向量丛概念的推广。在 X 具有余切复形的情况下（见第 1.2.2 节），我们将能够定义 n移位的切栈和余切栈，分别记作 $T[n]X$ 和$T^*[n]X$ （定义 1.2.11）。– 在第 1.3 节中，我们将看到一种“形式导出栈”的构造（定义 1.3.1），它由形式模空间问题（定义 D.1.6 和命题 1.3.22）得到。这将使我们能够将李代数丛的导出无穷小商栈定义为与该李代数丛所诱导的形式模空间问题相关联的形式栈（见第 3.2.1 节）。

– 分类栈： 给定导出栈中的一个群对象 G，我们将其分类栈 定义为以下单纯栈[1]的余极限：

$$\mathbf{B}G := \operatorname{colim}\left(\star \longleftarrow G \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow}\; G^2 \cdots \right)$$

– 商栈： 与前一个例子类似，考虑一个作用于导出栈 X 上的导出栈中的群对象 G 。那么，我们可以将 X 按 G 的商栈 定义为以下余极限：

$$\left[X/G\right] := \operatorname{colim}\left(X \longleftarrow X \times G \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow}\; X \times G^2 \cdots \right)$$

– 更一般地，若 $\mathscr{G}$是定义在 X 上的群胚（定义 4.1.1）：

$$\mathscr{G} \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} X$$

那么，我们可以将其商栈定义为其神经[2]的余极限：

$$\left[X/\mathscr{G}\right] := \operatorname{colim}\left(X \underset{t}{\overset{s}{\longleftarrow}} \mathscr{G} \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow}\; \mathscr{G} \times_X \mathscr{G} \cdots \right)$$

特别地，如果 $\mathscr{G}$:= $G \times X$, $s := \mathrm{pr}_X : G \times X \to X$ 且 $t := \rho$ 是 G的一个作用，那么我们就重新得到前一个例子中的商栈。

此外，如果 X 和 $\mathscr{G}$ 都是 Artin 栈，且源映射与靶映射是“光滑”的，那么商也是 Artin 的（事实上，Artin 栈都是光滑 Segal 群胚的这类连续商，参见 光滑塞加尔群胚，[TV08，定义

[1]每个单纯形都是由 $G^{\times n}$给出的栈。映射 $G^{\times n} \to G^{\times n-1}$ 由对 $(n-1)$ 首个（以及 $n-1$ 末尾）分量的投影给出；对于每个 $i = 1 \cdots n-1$，它将 $(g_1, \cdots, g_n)$ 映射为 $(g_1, \cdots g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \cdots, g_n)$。[2]神经 $\mathscr{G} \times_X \to \mathscr{G}$的三个映射由自然投影和群胚乘法给出，更高阶单纯形的情形也类似。

1.3.4.1.] 和 [TV08，命题 1.3.4.2。]）。我们将在第4.1.1节讨论 Segal 群胚的概念。

命题 1.1.15 ([TV05，定理 4.2。9])。 导出栈范畴构成一个模型拓扑斯（见 [TV05]）。特别地，它满足模型拓扑斯的 *Giraud* 定理：

(1) 我们有不相交的同伦余积[1]。*(2)* 余极限

在基变换下保持不变：

$$\operatorname{colim}\left(A_i \times_B C\right) \simeq \operatorname{colim}\left(A_i \times_B C\right)$$

(3) Segal 等价关系是同伦有效的。关于该条件的确切含义，请参阅 [TV05，定义 4.9。1] 特别地，自然投影：

$$X \to \left[X/\mathscr{G}\right]$$

是有效满态射，意即存在一个等价：

$$\operatorname{colim}\left(N\left(\; X \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} X \rightrightarrows X \;\right)\right) \xrightarrow{\sim} \left[X/\mathscr{G}\right]$$

此外，自然态射：

$$\underbrace{\mathscr{G} \times_X \cdots \times_X \mathscr{G}}_{\mathrm{n-times}} \to \underbrace{X \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} \cdots \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} X}_{\mathrm{(n+1)-times}}$$

对所有 $n \geq 0$，都是等价。

1.1.4. 相对谱函子与函数代数。

本节将为谱函子及其相对版本建立记号，并描述导出栈的函数层。在导出概形的语境中，我们有一个函子 dAff $\to$dSch，它是以下伴随的一部分：

$$\Gamma : \mathbf{dSch} \rightleftarrows \mathbf{dAff} : \mathbf{Spec}$$

其中，Γ 是全局函数代数函子，$\Gamma(X) := \mathscr{O}_X(X)$。我们的目标是为导出栈给出类似的伴随，并给出它的相对版本。为此，我们需要讨论栈 X 的函数层 $\mathscr{O}_X$ 这一概念。

首先回顾，通过全忠实函子 dSch $\to$dSt，仿射导出概形Spec(B)被映射为由 B “余表示”的点函子，由此得到以下定义：

[1]余积 $A \coprod B$ 是不交余积，当且仅当它等价于余极限 $A \coprod B$，其中 $\emptyset$ 是初始对象$\emptyset$。

定义 1.1.16。称一个导出栈为仿射或由.....余表示，如果 $B \in$交换微分分次代数$^{\leq 0}$，且其形式为[1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{Spec}(B) : \mathbf{dAff}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Gpd}_{\infty} \\ A &\longmapsto \underset{\mathrm{cdga}^{\leq 0}}{\mathrm{Map}}(B, A) \end{aligned}$$

函子 Spec 定义了一个全忠实函子 dAff $\to$dSt。
这个定义可以轻松推广到无界代数。

定义 1.1.17。对于 $B \in$ 交换微分分次代数，即一个可能无界的代数，我们将前仿射 导出栈由 B 前核表示，定义为:

$$\begin{aligned} \mathbf{Spec}(B) : \mathbf{dAff}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Gpd}_{\infty} \\ A &\longmapsto \underset{\mathrm{cdga}}{\mathrm{Map}}(B, A) \end{aligned}$$

警告 1.1.18。尽管我们滥用记号，将 Spec(B) 用来表示与一个可能无界的交换微分分次代数 B 相关联的逆向余表征导出栈，但一般而言，这个导出栈并非仿射，甚至不一定是导出概形。我们将继续使用这一方便的记号，但读者应注意，只有当 X 对于 B 一个连通交换微分分次代数，且 $X = \mathbf{Spec}(B)$ 时，我们才称其为仿射导出栈。
我们还想考虑相对于另一个概形为“仿射”的概形。例如，向量丛，或者正如我们将在第 1.2 节中看到的那样，线性栈相对于其底空间是仿射的（或仅为前仿射）。我们希望能够对这类对象取“相对谱”。

定义 1.1.19. 存在一个函子[2]:

$$\mathbf{dSch}_{/X} \to \left(\mathrm{cdga}^{\leq 0}_{\mathbf{QC}(X)}\right)^{\mathrm{op}}$$

将 $p\colon Y \to X$ 映射到 $p_*\mathscr{O}_Y$。
该函子有一个右伴随，称为相对谱:

$$\mathbf{Spec}_X : \left(\mathrm{cdga}^{\leq 0}_{\mathbf{QC}(X)}\right)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{dSch}_{/X}$$

特别地，对于任意 $\mathscr{A} \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 拟凝聚层(X) 以及 $p : Y \to X$，我们有:

$$\underset{\mathrm{cdga}^{\leq 0}_{\mathbf{QC}(X)}}{\mathrm{Hom}}(\mathscr{A}, p_*\mathscr{O}_Y) \simeq \underset{\mathbf{dSch}_{/X}}{\mathrm{Hom}}(Y, \mathbf{Spec}_X(\mathscr{A}))$$

[1]回顾一下，导出栈谱(B) 是与导出概形相关联的点函子，该导出概形也记作谱(B)。[2]范畴交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 拟凝聚层(X) 是拟凝聚层(X)中的非正分次交换代数范畴，X （定义1.2.1）。

注意，对于 $X = \star$，这是通常的伴随 $\Gamma \dashv$ 谱，因为对于 $p : Y \to \star$，我们有 $p_*\mathscr{O}_X \simeq \mathscr{O}_X(X)$。
其思想是，交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 拟凝聚层(X) 中的对象是“相对于 X 的仿射对象”，而相对谱则由此构造出一个（在 X 上的）概形。
为了对导出栈做同样的事情，我们需要弄清楚导出栈的函数层是什么。

定义 1.1.20。 给定一个导出栈 X，其函数代数层 X 定义为以下栈（取值于交换微分分次代数），它定义在位点[1] $\mathbf{dAff}_{/X}$ 上：

$$\mathscr{O}_X(\mathbf{Spec}(A) \to X) = A$$

这可以左 Kan 延拓为一个从 $\mathbf{dSt}_{/X}$ 出发的函子，其中 $\mathbf{dSt}_{/X}$ 是所有在 X 上的导出栈构成的范畴。特别地，对于 $\mathrm{id} : Y = X \to X$，我们得到全局函数函子的定义：

$$\mathscr{O}_X(X) = \lim_{\mathbf{Spec}(A) \to X} A$$

此外，若 $f : X \to Z$ 是一个叠的映射，则存在一个 ∞-层在 $\mathbf{dSt}_{/Z}$ 上的态射 $\mathscr{O}_Z \to f_*\mathscr{O}_X$，它延拓了由下式定义的 $\mathbf{dAff}_{/Z}$ 上的函子：

$$f_*\mathscr{O}_X(\mathbf{Spec}(A) \to Z) := \mathscr{O}_X\left(\mathbf{Spec}(A) \times_Z X \to X\right)$$

这个映射：

$$\mathscr{O}_Z(\mathbf{Spec}(A) \to Z) := A \mapsto \lim_{\mathbf{Spec}(B) \to \mathbf{Spec}(A) \times_Z X} B$$

由以下映射的复合所得到的自然态射定义：$\mathbf{Spec}(B) \to \mathbf{Spec}(A) \times_Z X \to \mathbf{Spec}(A)$，它诱导出映射 $A \to B$。因此，我们得到一个从 A 到极限的唯一态射。

引理 1.1.21. 给定一个导出栈 X，其全局函数代数有以下几种等价描述：

(1)

$$\mathscr{O}_X(X) = \lim_{\mathbf{Spec}(A) \to X} A$$

(2) 作为映射“谱中的交换幺半群[2]”到 $\mathbb{A}^1$：

$$\mathscr{O}_X(X) = \mathrm{Map}_{\mathbf{dSt}}^{\mathbf{Com(Sp)}}\left(X, \mathbb{A}^1\right)$$

这个谱中的交换幺半群可以借助稳定 Dold–Kan 对应[3]识别为一个可能无界的交换微分分次代数。

[1] 上范畴 $\mathbf{dAff}_{/X}$ 具有一个自然的 étale 拓扑，它来自 $\mathbf{dAff}$ 上的 étale 拓扑。

[2] 映射谱可通过考虑由映射空间的自由稳定化所给出的谱对象来获得。由于 $\mathbb{A}^1$ 上的交换幺半群结构，这同样是谱中的交换幺半群（并非所有导出栈的映射谱都能自然地视为交换幺半群）。

[3] 谱中的 k-代数（k 特征零）与无界交换微分分次代数之间的等价，$\mathbf{Com(Sp)} \simeq$cdga 扩展了通常的 Dold–Kan 对应。

证明。 我们有：

$$X = \operatorname*{colim}_{\mathbf{Spec}(A)\to X} \mathbf{Spec}(A)$$

因此，利用 $\mathbb{A}^1$ 的结构将此映射叠丰富为单纯阿贝尔群后，我们得到：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}_{\mathbf{dSt}}^{\mathbf{Com(Sp)}}\left(X, \mathbb{A}^1\right) &\simeq \mathrm{Map}_{\mathbf{dSt}}^{\mathbf{Com(Sp)}}\left(\operatorname*{colim}_{\mathbf{Spec}(A)\to X} \mathbf{Spec}(A), \mathbb{A}^1\right) \\
&\simeq \lim_{\mathbf{Spec}(A)\to X} \mathrm{Map}_{\mathbf{dSt}}^{\mathbf{Com(Sp)}}\left(\mathbf{Spec}(A), \mathbb{A}^1\right) \\
&\simeq \lim_{\mathbf{Spec}(A)\to X} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{cdga}}\left(k[x], A\right) \\
&\simeq \lim_{\mathbf{Spec}(A)\to X} A
\end{aligned}$$

□

命题 1.1.22. 我们再次得到一个伴随：

$$\Gamma : \mathbf{dSt} \rightleftarrows \mathbf{dAff} : \mathbf{Spec}$$

证明。

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Map}_{\left(\mathrm{cdga}^{\leq 0}\right)^{\mathrm{op}}}(\Gamma(X), B) &\simeq \operatorname*{Map}_{\mathrm{cdga}^{\leq 0}}\left(B, \lim_{\mathbf{Spec}(A)\to X} A\right) \\
&\simeq \lim_{\mathbf{Spec}(A)\to X} \mathrm{Map}(B, A) \\
&\simeq \operatorname*{Map}_{\mathbf{dSt}}\left(\operatorname*{colim}_{\mathbf{Spec}(A)\to X} \mathbf{Spec}(A), \mathbf{Spec}(B)\right) \\
&\simeq \operatorname*{Map}_{\mathbf{dSt}}(X, \mathbf{Spec}(B))
\end{aligned}$$

□

注 1.1.23. 令 $B \in$ 交换微分分次代数 并考虑 谱(B) 这个由 B （定义 1.1.17）拟共表示的导出栈。则我们有：

$$\operatorname*{Map}_{\mathrm{cdga}}\left(k[x], B\right) \simeq B^{\mathrm{con}}$$

其中 B^{con} 是 B 的连通截断。特别地，映射空间 $\mathbf{Map}(X, \mathbb{A}^1)$ 会遗忘 B 的余连通部分。

现在我们将描述栈的谱函子的相对版本。类比导出概形的情形（定义 1.1.19），我们可以给出以下定义：

定义 1.1.24。 给定 X 一个导出栈，若一个导出栈具有如下形式，则称其为关于 X 由 $\mathscr{B} \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}_{\text{拟凝聚层}(X)}$ 余表示的：

$$\begin{aligned} \mathbf{Spec}_X(\mathscr{B}) : (\mathbf{dAff}_{/X})^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Gpd}_\infty \\ (\mathbf{Spec}(A) \to X) &\longmapsto \underset{\mathrm{cdga}^{\leq 0}_{\mathbf{QC}(X)}}{\mathrm{Map}} \left(\mathscr{B}, f_* \mathscr{O}_{\mathbf{Spec}(A)}\right) \end{aligned}$$

Spec$_X$ 定义了一个全忠实函子 $\left(\text{交换微分分次代数}^{\leq 0}_{\text{拟凝聚层}(X)}\right)^{\mathrm{op}} \to$ dSt$^{\mathbf{dAff}_{/X}}$（其中右侧表示 dAff$_{/X}$ 上关于 étale 拓扑的栈）。

我们也可以通过改为取 $\mathscr{B}$ in 交换微分分次代数$_{\mathbf{QC}(X)}$，来定义其上的逆向余表征 栈。

注记 1.1.25. 相对谱给出了 dAff$_{/X}$上的一个栈，但我们想要的是一个关于 X的栈。要获得这样的栈，可以沿遗忘函子 i: dAff$_{/X} \to$dAff 取左 Kan 延拓。限制给出一个函子 dSt $\to$ dSt$^{\mathbf{dAff}_{/X}}$，其左伴随是左 Kan 延拓函子 dSt$^{\mathbf{dAff}_{/X}} \to$ dSt。我们可以证明，这个函子可经由关于 X的栈分解：

$$\mathbf{dSt}^{\mathbf{dAff}_{/X}} \to \mathbf{dSt}_{/X} \to \mathbf{dSt}$$

注意，dSt$^{\mathbf{dAff}_{/X}}$ 有一个终对象 $\star$，它将所有对象都映到点 $\star$。因此，左 Kan 延拓的本质像中的任意对象都有一个到 Lan$_i(\star)$ 的典范态射。我们只需证明 Lan$_i(\star) \simeq X$：

$$\begin{aligned} \mathrm{Lan}_i(\star) &\simeq \int^{\mathbf{Spec}(A) \to X} \underset{\mathbf{dAff}^{\mathrm{op}}_{/X}}{\mathrm{Map}} (\mathbf{Spec}(A), -) \times \star(\mathbf{Spec}(A) \to X) \\ &\simeq \int^{\mathbf{Spec}(A) \to X} \underset{\mathbf{dAff}^{\mathrm{op}}_{/X}}{\mathrm{Map}} (\mathbf{Spec}(A), -) \\ &\simeq \int^{\mathbf{Spec}(A) \to X} \mathbf{Spec}(A) \\ &\simeq \underset{\mathbf{Spec}(A) \to X}{\mathrm{colim}} \mathbf{Spec}(A) \simeq X \end{aligned}$$

函子 dSt$^{\mathbf{dAff}_{/X}} \to$ dSt$_{/X}$ 是一个等价，其逆为：

$$\begin{aligned} \mathbf{dSt}_{/X} &\longrightarrow \mathbf{dSt}^{\mathbf{dAff}_{/X}} \\ (Y \to X) &\longmapsto \left((\mathbf{Spec}(A) \to X) \mapsto \underset{\mathbf{dSt}_{/X}}{\mathrm{Map}} (\mathbf{Spec}(A), Y) \right) \end{aligned}$$

注 1.1.26. 若 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 是仿射的，那么由半自由代数 $\mathrm{Spec}_X(\mathrm{Sym}_A \mathscr{F}^\vee)$ 的相对谱所给出的导出栈（其中 $\mathscr{F} \in \mathrm{Mod}_A$）由 $\mathrm{Sym}_A \mathscr{F}^\vee$前核表示。事实上，对所有 $B \in \mathrm{dAff}$，均有：

$$\underset{\mathbf{dSt}_{/X}}{\mathrm{Hom}}(\mathbf{Spec}(B), \mathbf{Spec}(\mathrm{Sym}_A \mathscr{F}^\vee)) \simeq \underset{\mathrm{cdga}_{A/}}{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Sym}_A \mathscr{F}^\vee, B)$$

这里的等价源于 Spec 是一个全忠实函子。此外，由于 X 是仿射的，在仿射叠之间取整体截面的函子也是全忠实的，因此我们得到：

$$\begin{aligned}\mathbf{Spec}_X(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee)(\mathbf{Spec}(B) \to X) &\simeq \underset{\mathrm{Sh}_X(\mathrm{cdga})_{\mathscr{O}_X/}}{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee, f_* \mathscr{O}_{\mathbf{Spec}(B)}) \\ &\simeq \underset{\mathrm{cdga}_{A/}}{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Sym}_A \mathscr{F}^\vee, B)\end{aligned}$$

1.2. 线性与半线性叠。

本节旨在介绍导出代数几何中向量丛的对应概念，并计算其（相对）切复形。我们将借助 Serre–Swan 定理的结果来引出从拟凝聚模层构造导出栈：该定理指出，向量丛等价于有限生成投射的（非微分分次）模层。这些构造将定义给定底空间 X 上模层所对应的“线性栈”概念。在导出几何的语境下，我们可以不再要求投射性，因为总可以取一个投射分解；而当需要使用拟凝聚层的对偶性质时，局部有限生成这一条件将由完美模层的概念取代。

我们将在第1.2.1节讨论拟凝聚和完美模层的概念。我们之所以考察拟凝聚层，是因为它们的行为类似于底空间 X上的“局部模”的粘合。这是在代数几何中工作时所需的概念，它确保仿射概形X =谱(A) 上的模层与一个 A-模相同。完美模层是可对偶的拟凝聚模层。

接下来，作为这类层的一个显著且重要的例子，我们将讨论切复形和余切复形。一般情形下余切复形的构造见附录A.2。这一构造仅适用于仿射栈；在第1.2.2节，我们将讨论如何将此定义推广到导出概形和栈。

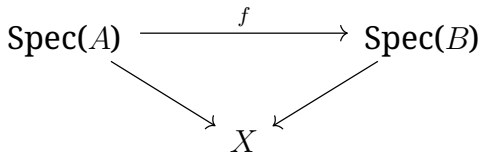
接下来，第1.2.4 节计算线性栈的相对切复形，而1.2.5 节则利用联络计算线性栈的完整切复形（在仿射基底上）。

1.2.1. 一些模层。

对于任意由粘合仿射对象得到的几何空间 X，我们关注其上的模层 X，这些模层可以看作是对这些仿射对象上的模进行某种粘合所得。它们正是 X上的拟凝聚层。

定义 1.2.1. 始终用 A 表示一个代数，用 X 表示一个导出栈。

– 我们用 QC(X) 表示拟凝聚层范畴。该范畴的对象可定义为：对每个映射 f : Spec(A) $\to X$，都赋予一个 A- 模，称为 M_A ；并且对每个交换图：



存在一个弱等价 α_f : $M_B \otimes_B A \to M_A$ 并满足一些相容条件（参见[TV08, 第 1.3 节。7]）。

– 我们也可以将栈 X 上的拟凝聚层范畴描述为以下极限：

$$\mathbf{QC}(X) = \lim_{\mathbf{Spec}(A)\to X} \mathrm{Mod}_A$$

这个公式是沿着 dAff $\to$dSt 对函子 QC 作左 Kan 延拓所得。

定义 1.2.2。取 $\mathscr{M}$ 一个闭对称幺半模型范畴，其单位记作1。我们可以定义对象 $V \in \mathscr{M}$ 的对偶为[1]:

$$V^\vee := \mathrm{Hom}^{\mathscr{M}}_{\mathscr{M}}(V, 1)$$

– 如果自然态射[2]为等价，则称对象 $V \in \mathscr{M}$ 是自反的:

$$V \to (V^\vee)^\vee$$

是一个等价。

– 存在一个完美模**Perf** 的栈(参见 [TV08，推论 1.3.7。4])，使得$\mathbf{Perf}(A)$ 是完美 A-模的范畴（参见[TV08，定义 1.2.3。6]），其中 V 属于$\mathbf{Perf}(A)$ 当且仅当自然态射:

$$V \otimes V^\vee \to \mathrm{Hom}^{\mathscr{M}}_{\mathscr{M}}(V, V)$$

是一个等价。

[1]回顾一下，$\mathrm{Hom}^{\mathscr{M}}_{\mathscr{M}}$ 表示 $\mathscr{M}$中的 $\mathscr{M}$ 富化 Hom 函子。[2]它是由恒等映射经复合得到的像：$\mathrm{Hom}^{\mathscr{M}}_{\mathscr{M}}(1, 1) \to \mathrm{Hom}^{\mathscr{M}}_{\mathscr{M}}(V \otimes V^\vee, 1) \to \mathrm{Hom}^{\mathscr{M}}_{\mathscr{M}}(V, \mathrm{Hom}^{\mathscr{M}}_{\mathscr{M}}(V^\vee, 1)) \simeq \mathrm{Hom}^{\mathscr{M}}_{\mathscr{M}}(V, (V^\vee)^\vee)$

F现在我们将回到这样的情形： $\mathscr{M}$ ： =模范畴$_A$ ，其中 $1 = A$。

命题 1.2.3. 对于 $\mathscr{F} \in \mathbf{Perf}(A)$ 和 M， $N \in$ 模范畴$_A$，有：

– 完美模是 模范畴$_A$ 中的强可对偶对象，且有（[TV08，命题 1.2.3.7]）：

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, \mathscr{F} \otimes_A N) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_A(M \otimes \mathscr{F}^\vee, N)$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathscr{F}, M) \simeq \mathscr{F}^\vee \otimes M$$

– 一个 A-模 $\mathscr{F}$ 是完美的，当且仅当它拟同构于一个有限表示射影 A-模（[TV08，引理 2.2.2.2]）。– 一个完美 A-模 $\mathscr{F}$ 是自反的，因为有如下自然等价：

$$\mathscr{F} \to \underline{\mathrm{Hom}}_A(A, \mathscr{F}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathscr{F}^\vee, A) := (\mathscr{F}^\vee)^\vee$$

命题 1.2.4. 任意代数映射 f： $B \to A$ 都会诱导出 *Quillen* 伴随[1]：

$$f^* : \mathrm{Mod}_B \rightleftarrows \mathrm{Mod}_A : f_*$$

其中 f^*M ： $= M \otimes_B A$ 是标量扩张， f_* 是标量限制。此结果也适用于拟凝聚层；给定一个态射 f： $X \to Y$，存在一个伴随：

$$f^{-1} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_Y} \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} : f_*$$

其中 f_* 是层之间的直接像函子，而 f^{-1} 是层限制函[2]子。此外， $\mathscr{O}_X$ 与 $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-模之间存在由标量扩张-限制给出的伴随。它与前一个伴随共同诱导出拟凝聚层之间的另一个伴[2]随：

$$f^* : \mathbf{QC}(Y) \rightleftarrows \mathbf{QC}(X) : f_*$$

其中 $f^*\mathscr{F} = f^{-1}\mathscr{F} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X \in$拟凝聚层$(X)$。

1.2.2. 栈上的相对（余）切复形。

回顾附录 A.2 中的内容， A-代数 B 的余切复形按定义是一个 B-模，它表示 A-线性导子，含义是对所有B-模 N，都存在一个自然等价（见定义 A.2.4）：

$$\mathrm{Hom}_B(\mathbb{L}_{B/A}, N) \simeq \mathrm{Der}_A(B, N)$$

在附录 A.2 中，该构造是在任意 良好模型范畴（定义 A.1.1）中进行的。目前我们只需将范围限制在 $\mathscr{M}$ = 模范畴$_k$。在进入一般复形之前，让我们先回顾一下 Kähler 微分的经典（未派生）构造：

[1]我们考虑 模范畴$_A$ ，并赋予其标准投射模型结构。这是附录 ***A.1*** 中定义的良好模型结构的一个实例。[2]它来自 Sh_X(交换微分分次代数$^{\leq 0}$) 与 Sh_Y(交换微分分次代数$^{\leq 0}$) 之间由 $f^{-1} \dashv f_*$给出的伴随。

定义 1.2.5。 给定一个代数态射 $A \to B$，由 A-线性 Kähler 微分构成的 B-模 $\Omega^1_{B/A}$ 被定义为表示（未派生的）A-线性导子的模：

$$\mathrm{Hom}_B\left(\Omega^1_{B/A}, M\right) \cong \mathrm{Der}_A(B, M) \cong \underset{\mathrm{cdga}_{A//B}}{\mathrm{Hom}}\left(B, B \boxplus M\right)$$

注意，在这个伴随中，Hom 函子不是导出的，并且根据定义，Ω 不是导出函子。

构造 1.2.6。具体而言，$\Omega^1_{B/A}$ 是由对于 $b \in B$ 记作 db 的项自由生成的 B-模，并满足以下关系：

– 对所有 b、$b' \in B$：

$$d(b.b') = b.db' + (-1)^{|b|} db.b'$$
$$d(b + b') = db + db'$$

– A-线性，对所有 $a \in A$：

$$da = 0$$

我们可以证明，这满足定义 1.2.5 中的条件，这也解释了为什么该构造给出了“微分形式”模。此外，余切复形与 Kähler 微分模的区别仅在于，定义中的伴随和函子是 导出的。因此，只要选取一个“良好替代”，我们就能为余切复形得到类似的表示。

在附录 A.2中，我们在任意“良好”的模型范畴中给出了余切复形的一般构造 $\mathscr{M}$（这里的“良好”依照定义 A.1.1）。该定义本质上与定义 1.2.5 相同，只不过这里的伴随是导出的。

利用附录 A.2，我们为仿射对象定义了余切复形和切复形。不过，仿射对象的余切复形是否能粘合成导出栈上的拟凝聚层 X尚不清楚。一般而言，答案是否定的：它们无法很好地粘合，因此我们需要限制所研究的栈。

注1.2.7。 根据定义，每个仿射导出栈都有一个全局余切复形，由 $\mathbb{L}_{\mathbf{Spec}(A)} := \mathbb{L}_A$ 给出（参见 [TV08，推论 2.2.3。3]以及注 1.1.13）。此外， [Lur17，定理 7.4.3。18]告诉我们，若 $H^0(A)$ 是有限生成的，那么 $\mathbb{L}_A$ 是完美的，当且仅当 A 是有限表示的。

更一般地，任意导出 Artin 叠都存在一个（相对）余切复形[1]；特别是，导出概形总是存在余切复形，因为它们本身也是导出 Artin 叠。此外，局部有限表示的导出 Artin 叠具有一个完美的余切复形。

[1]W我们称其为余切复形，尽管它是 X 上由复形构成的拟凝聚层 。

注1.2.8。 如果我们将范围限制在局部几乎有限表示的栈（定义1.1.11）上，那么所有具有全局余切复形的栈都具有相干且最终余连通的余切复形（参见[CPT+17，第2]节引言）。

1.2.3. 线性与半线性栈的定义及示例。

在本节中，我们将取一个定义在导出栈 $\mathscr{F} \in \mathbf{QC}(X)$ 上的拟凝聚层 X，并定义与 X 相关联的、定义在 $\mathscr{F}$ 上的线性栈。我们将证明，这些栈事实上是逆向余表征的（见命题 1.2.13）。随后，我们将这一概念扩展到栈的 半线性表示，它们本质上是由半自由代数层 X 在 $\mathscr{O}_X$下前核表示的栈，该半自由代数层为 $\mathscr{O}_X \to \mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee$，且满足 $\mathscr{F} \in \mathbf{QC}(X)$。栈的半线性表示对我们而言将十分重要，相关示例包括导出临界轨迹，以及称为 几乎导出临界轨迹的变体（定义 1.2.24）。

定义 1.2.9。 给定 $\mathscr{F} \in \mathrm{QC}(X)$，即定义在导出栈上的拟凝聚层，我们可以构造一个线性栈，记为 $\mathbb{A}(\mathscr{F})$，它是 $\mathbf{dAff}_{/X}$上的栈，定义为（作为 $\mathbf{dAff}_{/X}$上的栈）[1]，:

$$\mathbb{A}_X(\mathscr{F})\,(f : \mathbf{Spec}(A) \to X) := \mathrm{Map}_A\,(A, f^*\mathscr{F})$$

每个线性栈都带有一个自然投影 π：$\mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to X$。这定义了一个函子：

$$\mathbb{A}_X : \mathbf{QC}(X) \to \mathbf{dSt}_{/X}$$

如果 $\mathscr{F}$ 是完美的，那么 $\mathbb{A}_X(\mathscr{F})$ 就称为<风格 id='4'>完美线性栈</风格>。

记号 1.2.10。 拟凝聚层将用花体字母表示，例如 $\mathscr{F}$、 $\mathscr{E}$、 $\mathscr{L}$；其对应的线性栈通常用相应的大写正体字母 F、 E、 L 表示，以简化记号。

前面我们定义了切复形和余切复形的概念，它们分别是导子和微分形式的拟凝聚层。自然地，它们对应的线性栈分别定义了切栈和余切栈的概念。

定义 1.2.11。 假设 X 存在全局余切复形。则我们将 n-移位余切栈 定义为如下线性栈：

$$T^*[n]X := \mathbb{A}_X(\mathbb{L}_X[n])$$

类似地，我们将 n-移位切栈 定义为 X 上的线性栈：

$$T[n]X := \mathbb{A}_X(\mathbb{T}_X[n])$$

[1]我们在注 1.1.25 中看到，$\mathbf{dAff}_{/X}$ 上的栈自然地延拓为 在 X上的栈。我们不会区分 $\mathbf{dAff}_{/X}$ 上的栈及其延拓为 X 上的栈，因为这两种概念是等价的。

命题 1.2.12。 若 $\mathscr{F} \in \mathbf{Perf}(X)$ 是连通的，则 $\mathbb{A}_X(\mathscr{F})$ 相对于 X 是仿射的，也就是说，它由连通 $\mathscr{O}_X$-代数层的相对谱给出，并且有：

$$\mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \simeq \mathbf{Spec}_X(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee)$$

对于一般的 $\mathscr{F}$，由于警告 1.1.18中讨论的原因，线性栈将不是仿射栈。不过，它们仍可由一个可能非连通的自由交换微分分次代数（在 $\mathscr{O}_X$之下）“前核表示”。因此，命题 1.2.12 可由以下结果推出：

命题 1.2.13. 任意完美线性栈 $\mathbb{A}_X(\mathscr{F})$ 都可相对于 X 由 对称代数$_{\mathscr{O}_X}$ $\mathscr{F}^\vee$前核表示。换言之，对于所有 谱(A) $\to X$ ， 我们有：

$$\mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \simeq \mathbf{Spec}_X\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee\right)$$

Lemma 1.2.14. 设 $f\colon Y \to X$ 是导出栈之间的一个映射。那么我们有以下结果 *：*

$$\mathscr{O}_Y \simeq f^* \mathscr{O}_X$$

$$\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_Y} f^*\mathscr{F}^\vee \simeq f^{-1}\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee\right) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$$

$$\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_Y} f^*\mathscr{F}^\vee \simeq f^*\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee\right)$$

命题 *1.2.13*的证明。 首先，由于 $\mathscr{F}$ 是完美的，根据引理 1.2.14，我们有以下等价：

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_X(\mathscr{F})(f : \mathbf{Spec}(A) \to X) &\simeq \mathrm{Map}_A\left(A, f^*\mathscr{F}\right) \\
&\simeq \mathrm{Map}_A\left(f^*\mathscr{F}^\vee, A\right) \\
&\simeq \underset{\mathrm{cdga}_{A/}}{\mathrm{Map}}\left(\mathrm{Sym}_A f^*\mathscr{F}^\vee, A\right) \\
&\simeq \underset{\mathrm{cdga}_{\mathscr{O}_{\mathbf{Spec}(A)}/}}{\mathrm{Map}}\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_{\mathbf{Spec}(A)}} f^*\mathscr{F}^\vee, \mathscr{O}_{\mathbf{Spec}(A)}\right) \\
&\simeq \underset{\mathrm{cdga}_{\mathscr{O}_X/}}{\mathrm{Map}}\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee, f_*\mathscr{O}_{\mathbf{Spec}(A)}\right)
\end{aligned}$$

□

命题 1.2.15。 到完美线性栈的映射 $f\colon Y \to \mathbb{A}_X(\mathscr{F})$ 由以下内容确定：

– 一个映射

$$g = \pi \circ f : Y \to X$$

– 一个截面：

$$s \in \underset{\mathbf{QC}(Y)}{\mathrm{Map}}\left(\mathscr{O}_Y, g^*\mathscr{F}\right)$$

更准确地说，我们有一个拉回图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathbf{dSt}}\left(Y, \mathbb{A}_X(\mathscr{F})\right) & \longrightarrow & \left(\mathbf{QC}(Y)_{\mathscr{O}_Y/}\right)^{\simeq} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}(Y, X) & \xrightarrow{(-)^*\mathscr{F}} & \mathbf{QC}(Y)^{\simeq} \end{array}$$

证明。 映射 $Y \to X$ 由复合 $\pi \circ f$ 给出。于是， f 成为 $\mathbf{dSt}^{/X}$ 中的一个映射，并且我们有：

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{dSt}_{/X}}{\mathrm{Map}}\left(Y, \mathbf{Spec}_X\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F}^\vee\right)\right) &\simeq \underset{\mathrm{cdga}_{\mathscr{O}_X/}}{\mathrm{Map}}\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F}^\vee, g_*\mathscr{O}_Y\right) \\ &\simeq \underset{\mathrm{cdga}_{\mathscr{O}_Y/}}{\mathrm{Map}}\left(g^*\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F}^\vee\right), \mathscr{O}_Y\right) \\ &\simeq \underset{\mathrm{cdga}^{\mathbf{QC}(Y)}}{\mathrm{Map}}\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_Y} g^*\mathscr{F}^\vee, \mathscr{O}_Y\right) \\ &\simeq \underset{\mathbf{QC}(Y)}{\mathrm{Map}}\left(g^*\mathscr{F}^\vee, \mathscr{O}_Y\right) \\ &\simeq \underset{\mathbf{QC}(Y)}{\mathrm{Map}}\left(\mathscr{O}_Y, g^*\mathscr{F}\right) \end{aligned}$$

其中，第一个和第三个等价分别由定义 1.1.24 和引理1.2.14得出。 □

推论 1.2.16。 π： $\mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to X$ 的截面空间等价于 $\mathrm{Map}^{\mathbf{QC}(X)}\left(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}\right)$ 在 拟凝聚层(X)中的映射空间。特别地，该映射空间中的零元素确定了一个零截面 ：

$$s_0 : X \to \mathbb{A}_X(\mathscr{F})$$

命题 1.2.17。 设 $\mathscr{F} \in$ 拟凝聚层(X) 和 $\mathscr{G} \in$ 拟凝聚层(Y) 是导出栈 X 和 Y上的拟凝聚层。

– 线性栈的定义关于 $\mathscr{F}$是自然的。： f $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$在拟凝聚层$(X)$中的任意映射都会自然地诱导一个导出栈之间的映射[1] ：

$$f : \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to \mathbb{A}_X(\mathscr{G})$$

我们将这样的映射称为线性栈的线性映射。

– 考虑以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathbb{A}_Y(\mathscr{F}) & \longrightarrow & \mathbb{A}_Y(\mathscr{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

我们有一个自然等价 $\mathbb{A}_Y(f^*\mathscr{F}) \simeq f^*\mathbb{A}_X(\mathscr{F})$。

[1]作为一种记号上的滥用，我们将不区分准相干层之间的映射与其所诱导的相应线性栈之间的映射。

– 一个映射 $\phi\colon \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to \mathbb{A}_Y(\mathscr{G})$，使其与下方交换图相容：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) & \longrightarrow & \mathbb{A}_Y(\mathscr{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

等价于在 X 上给出一个映射 $\phi_f\colon \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to \mathbb{A}_X(f^*\mathscr{G})$。

此外，如果 ϕ 来自拟凝聚层的一个映射$\phi_f\colon \mathscr{F} \to f^*\mathscr{G}$，则称其为线性的；这恰好对应于在 f 上拟凝聚层之间的一个映射 $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$。

证明。

– 由于这两个栈都在同一个底空间上，线性栈之间的映射对每个 A-点 $g\colon \mathrm{Spec}(A) \to X$ 都由一个映射给出：

$$\mathrm{Map}_A(A, g^*\mathscr{F}) \to \mathrm{Map}_A(A, g^*\mathscr{G})$$

此映射由 $g^*f\colon g^*\mathscr{F} \to g^*\mathscr{G}$ 给出。

– 在拉回图上取一个锥。该锥由以下内容确定：

$$Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} Y$$

$$s \in \underset{\mathbf{QC}(Z)}{\mathrm{Map}}\left(\mathscr{O}_Z, g^*h^*\mathscr{F}\right)$$

由此可得唯一的映射 $Z \to \mathbb{A}_X(h^*\mathscr{F})$，使锥图表交换，因此可将 $\mathbb{A}_X(h^*\mathscr{F})$ 展示为拉回。该映射由下式给出：

– $g\colon Z \to X$– 在映射[1]下，s 的像：

$$\underset{\mathbf{QC}(Z)}{\mathrm{Map}}\left(\mathscr{O}_Z, g^*h^*\mathscr{F}\right) \simeq \underset{\mathbf{QC}(X)}{\mathrm{Map}}\left(g_*g^*\mathscr{O}_X, h^*\mathscr{F}\right) \to \underset{\mathbf{QC}(X)}{\mathrm{Map}}\left(\mathscr{O}_X, h^*\mathscr{F}\right)$$

– 第三个结论直接由前两个结论推出。

□

引理 1.2.18。给定 $\mathscr{F}$，$\mathscr{G}$，$\mathscr{H} \in$ 拟凝聚层(X)，则线性栈之间（在 X 上）的线性映射的拉回，由与模的拉回相关联的线性栈给出：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_X(\mathscr{H} \times_{\mathscr{G}} \mathscr{F}) & \longrightarrow & \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}_X(\mathscr{H}) & \longrightarrow & \mathbb{A}_X(\mathscr{G}) \end{array}$$

[1]使用扩张-限制标量伴随的单位 $\mathrm{id} \to g_*g^*$。

证明。 设 Y 是该拉回上的一个锥，且 $f\colon\ Y \to X$ 是自然映射。那么，从 Y 到该拉回的映射完全由 $\mathbf{Hom}(\mathscr{O}_Y, f^*\mathscr{F})$ 中的一个态射刻画（对 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{G}$ 也同样如此）。这些态射与 $\mathscr{F}$、$\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ 之间的映射相容。换言之，从该锥到拉回的映射在下列集合中诱导出唯一元素：

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_Y, f^*\mathscr{H}) \times_{\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_Y, f^*\mathscr{G})} \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_Y, f^*\mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_Y, f^*(\mathscr{H} \oplus_{\mathscr{G}} \mathscr{F}))$$

这恰好就是映射 $f\colon Y \to \mathbb{A}_X(\mathscr{H} \times_{\mathscr{G}} \mathscr{F})$ 的数据，证明 $\mathbb{A}_X(\mathscr{H} \times_{\mathscr{G}} \mathscr{F})$ 确实是拉回。 □

根据命题 1.2.13，每个完美线性栈都由定义在 $\mathscr{O}_X$ 上的自由代数层前核表示。接下来我们将把这一结果推广到半自由代数，以编码那些虽非线性、但行为几乎如同线性栈的栈。

定义 1.2.19。 导出栈的半线性表示在导出栈X 上的一个等价：

$$Y \simeq \mathbf{Spec}_X\big((\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee, \delta)\big)$$

其中 $\big((\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee, \delta)\big)$ 是 $\mathscr{O}_X$ 在交换微分分次代数$\mathbf{QC}(X)$中构成的半自由代数。注意，若 $\mathscr{F}$ 不是余连通的，那么 Y 不是仿射概形，而仅由半自由代数前核表示。若 $\mathscr{F}$ 是完美的，我们称之为完美表示。

定义 1.2.20。 设 X 为具有余切复形的导出栈，且$f\colon\ X \to \mathbb{A}^1$。则 f 的导出临界轨迹定义为以下拉回[1]：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Crit}(f) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle df} \\ X & \xrightarrow{s_0} & T^*X \end{array}$$

命题 1.2.21。 导出临界轨迹 $\mathbf{Crit}(f)$ 具有由半自由代数 $\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathbb{T}_X[1]$ 给出的半线性表示，其微分为 ι_{df}，再加上$\mathbb{T}_X[1]$和 $\mathscr{O}_X$上的微分。

证明。 我们需要对零映射 $\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathbb{T}_X \to \mathscr{O}_X$取一个余纤维分解。我们取包含映射 $\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathbb{T}_X \to \mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}(\mathbb{T}_X \oplus \mathbb{T}_X[1])$，其微分由恒等映射 $\mathbb{T}_X[1] \to \mathbb{T}_X$ 以及右侧 $\mathscr{O}_X$ 和 $\mathbb{T}_X$ 上的微分诱导。于是，利用这一点，$\mathbf{Crit}(f)$ 是由以下对象前核表示的半线性堆栈：

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_X \otimes_{\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathbb{T}_X} \mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}(\mathbb{T}_X \oplus \mathbb{T}_X[1]) &\simeq \mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}\left(0 \oplus_{\mathbb{T}_X} (\mathbb{T}_X \oplus \mathbb{T}_X[1])\right) \\ &\simeq \mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}\left(\mathbb{T}_X[1]\right) \end{aligned}$$

[1]该拉回可以在导出栈范畴、 X 上的导出栈范畴，或 $\mathbf{dAff}/X$ 上的导出栈范畴中取，因为函子 $\mathbf{dSt}^{\mathbf{dAff}/X} \to \mathbf{dSt}/X$ 是一个等价，且函子 $\mathbf{dSt}/X \to \mathbf{dSt}$ 保持并反映连通极限（包括拉回）。

其中，微分（在半自由代数的张量积上得到）恰好由 $\mathbb{T}_X[1]$、$\mathscr{O}_X$ 和 ι_{df} 上的微分给出，并视为一个次数 1 的映射：

$$\mathbb{T}_X[1] \to \mathscr{O}_X$$

□

在第5.1节中，我们将关注由某类特殊半线性堆栈给出的导出临界轨迹的温和推广。我们将在此描述这些对象，因为它们是半线性堆栈的典型例子。我们先给出最重要的半线性堆栈之一的构造，即全局函数的 Koszul–Tate 分解 $f : X \to \mathbb{A}^1$。

构造1.2.22. 若 $X := \mathrm{Spec}(B)$ 是光滑仿射概形，则 $df : X \to T^*X$ 在零截面下的严格拉回称为严格临界轨迹，记作 $\mathrm{Crit}(f)$。

若将 $\mathrm{Crit}(f)$ 视为导出概形，则映射 $i : \mathrm{Crit}(f) \to X$ 对应于投影（临界轨迹上的层的投影） $B \to B/I$，其中 I 是由元素 $df.X$ （ $X \in \mathbb{T}_B$）生成的 B 的理想。

f 的*Koszul–Tate* 分解记作 $\mathrm{KT}(f)$，它是由该映射的一个特定余纤维分解得到的导出概形，其构造如下：

(1) 考虑 对称代数$_B\, \mathbb{T}_B[1]$ ，其微分定义为 ι_{df}。根据命题1.2.21，这是导出临界轨迹的函数代数，但一般来说，它并不是该商的分解。不过，它在次数 0 的上同调同构于 B/I。

(2) 我们添加负次数（次数为 ≤ -2）的自由生成元，以“消去”导出临界轨迹在负次数上的上同调。这个过程可以按上同调次数归纳进行，具体描述参见 [Tat57] 。我们得到一个在B 上的如下形式的半自由代数：

$$\mathrm{KT}(f) := \mathrm{Sym}_B\left(\mathbb{T}_B[1] \oplus \mathscr{L}_{\mathrm{KT}}[2]\right)$$

其中 $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}} \in$ 模范畴$_B$ 是一个连通射影的 B-模（$\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}$ 甚至可以选为自由模）。限制在 $\mathbb{T}_B[1]$ 上的微分仍然是 ι_{df}，并且该复形在负次数上无环。

然后我们定义 $\mathrm{KT}(f) :=$ 谱$(\mathrm{KT}(f))$。由于这是严格临界轨迹的一个分解，因此存在一个自然的导出概形弱等价：

$$\mathrm{Crit}(f) \xrightarrow{\sim} \mathbf{KT}(f)$$

注 1.2.23。 这个半线性栈的例子，是添加“反场”和“反鬼场域”这一过程的一个实例。本质上，在我们的模型中， $\mathbb{T}_X[1]$ 的生成元称为 反场 ，而 $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}[2]$ 的生成元称为 反鬼场。我们将在第 5.1.1 节进一步讨论这一思想。

在第 5 节中，我们将关注这样一些对象：它们通过向导出临界轨迹添加反鬼场，但不一定得到严格临界轨迹的分解。这是 Koszul–Tate 构造的一种推广，它不会消去导出临界轨迹的全部上同调。

定义 1.2.24。 若仿射导出概形 S 等价于以下形式的导出概形，则称其为 f 的几乎导出临界轨迹：

$$S \simeq \mathbf{Spec}(\mathrm{Sym}_B(\mathbb{T}_B[1] \oplus \mathscr{L}[2]))$$

其中 $\mathrm{Sym}_B(\mathbb{T}_B[1] \oplus \mathscr{L}[2])$ 是一个半自由 B-代数，使得 B 是有限生成的光滑代数，限制在 $\mathbb{T}_B[1]$ 上的微分由 ι_{df} 给出，并且 $\mathscr{L}$ 是一个连通的 B-模。

注 1.2.25。 定义 1.2.24 与 的 Koszul–Tate 分解定义非常接近，唯一的区别在于它可能不是 的分解。不过，它配有一个到该商的映射，该映射诱导出一个映射：

$$\mathrm{Crit}(f) \to S$$

此外，通过添加更多元素来消去上同调，可以构造一个 Koszul–Tate 构造，它自然地投影到定义我们几乎导出临界轨迹的半自由代数上。这诱导出一个映射序列：

$$\mathrm{Crit}(f) \xrightarrow{\sim} \mathbf{KT}(f) \to S \to \mathbf{Crit}(f) \to X$$

映射的对偶：

$$B \to \mathrm{Sym}_B \mathbb{T}_B[1] \to \mathrm{Sym}_B(\mathbb{T}_B[1] \oplus \mathscr{L}[2]) \to \mathrm{Sym}_B(\mathbb{T}_B[1] \oplus \mathscr{L}_{\mathrm{KT}}[2]) \xrightarrow{\sim} {}^{B}\!/_{I}$$

因此， S 是 f 的几乎导出临界轨迹，即它是一个处于严格临界点集与导出临界轨迹“之间”的对象。

记号 1.2.26。 在本文中，所有“自然投影”均记作 π（或其变体，例如 π_S 或 $\pi_{\mathscr{F}}$），例如：

$$\pi : \mathbf{Crit}(f) \to X \qquad \pi_X : TX \to X \qquad \pi_{\mathscr{F}} : \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to X$$

从几乎导出临界轨迹到导出临界轨迹的自然映射记作：

$$i : S \to \mathbf{Crit}(f)$$

注 1.2.27. 我们将几乎导出临界轨迹之间的态射视为在 $\mathbf{Crit}(f)$ 上的导出概形之间的态射。因此，若 S 和 S' 是几乎导出临界轨迹，则 $S \times_{\mathbf{Crit}(f)} S'$ 也是几乎导出临界轨迹。

1.2.4. *(半)*线性栈的相对余切复形。

本节致力于研究来自线性栈的投影 $\pi\colon \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to X$ 的相对余切复形。给定 $\mathscr{F} \in \mathbf{Perf}(X)$，其中 X 是一个具有切复形的导出栈，本节的目标是证明存在一个等价：

$$\mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/X} \simeq \pi^* \mathscr{F}^\vee$$

并研究此等价关于 $\mathscr{F}$ 和 X 的函子性。

命题 1.2.28. 设 X 是一个具有切复形的导出栈，且 $\mathscr{F} \in \mathbf{Perf}(X)$ 是 X 上的完美拟凝聚层。记 $\pi\colon \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to X$ 为自然投影。则有：

$$\mathbb{L}_{\pi_X} \simeq \mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/X} \simeq \pi_X^* \mathscr{F}^\vee$$

证明。 我们将对任意 B-点 $y\colon \mathbf{Spec}(B) \to \mathbb{A}_X(\mathscr{F})$ 证明该结论，并记 $x = \pi \circ y\colon \mathbf{Spec}(B) \to X$。我们可以证明，对所有 $M \in$ 连通模范畴$_B$，均有：

$$\mathrm{Hom}_B\left(y^* \mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/X}, M\right) \simeq \mathrm{Hom}_B\left(x^* \mathscr{F}^\vee, M\right)$$

首先注意到 $\mathbf{Hom}_B\left(y^* \mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/X}, M\right)$，根据余切复形的泛性质，等价于以下在 y 处的同伦纤维：

$$\mathrm{hofiber}_y\left(\underset{\mathbf{dSt}_{/X}}{\mathrm{Hom}}\left(\mathbf{Spec}(B \boxplus M), \mathbb{A}_X(\mathscr{F})\right) \to \underset{\mathbf{dSt}_{/X}}{\mathrm{Hom}}\left(\mathbf{Spec}(B), \mathbb{A}_X(\mathscr{F})\right)\right)$$

其中 $\mathbf{Spec}(B \boxplus M) \to X$ 为以下复合：

$$\mathbf{Spec}(B \boxplus M) \xrightarrow{p} \mathbf{Spec}(B) \xrightarrow{x} X$$

因此，$\mathbf{Hom}_B\left(y^* \mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/X}, M\right)$ 中的映射完全由一个映射确定

p

$$\Phi : \mathbf{Spec}(B \boxplus M) \to \mathbb{A}_X(\mathscr{F})$$

使下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spec}(B) & & \\ \downarrow{\scriptstyle i} & \searrow^{y} & \\ \mathbf{Spec}(B \boxplus M) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_X} \\ \mathbf{Spec}(B) & \xrightarrow{x} & X \end{array}$$

因此，我们得到 $\mathbf{Hom}_B\left(y^* \mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/X}, M\right)$ 等价于

$$\mathrm{hofiber}_{s_y}\left(\mathrm{Map}_{B \boxplus M}\left(B \boxplus M, p^* x^* \mathscr{F}\right) \to \mathrm{Map}_B\left(B, x^* \mathscr{F}\right)\right)$$

其中 $s_y \in \mathrm{Map}_B(B, x^*\mathscr{F})$ 是与 $y\colon$谱$(B) \to \mathbb{A}_X(\mathscr{F})$相关联的截面，该截面来自命题 1.2.15。因此，该映射由与 i^*作前复合给出。现在我们可以观察到 $p^*x^*\mathscr{F} = x^*\mathscr{F} \oplus x^*\mathscr{F} \otimes_B M$ 并且：

$$\mathrm{Map}_{B\boxplus M}\left(B \boxplus M, p^*x^*\mathscr{F}\right) \simeq \mathrm{Map}_B\left(B, x^*\mathscr{F} \oplus x^*\mathscr{F} \otimes_B M\right)$$

.

我们得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_B\left(y^*\mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/X}, M\right) \simeq & \mathrm{hofiber}\left(\mathrm{Map}_B\left(B, x^*\mathscr{F} \oplus x^*\mathscr{F} \otimes_B M\right)\right. \\ & \left.\to \underset{B}{\mathrm{Map}}\left(B, x^*\mathscr{F}\right)\right) \\ \simeq & \mathrm{Map}_B\left(B, x^*\mathscr{F} \otimes_B M\right) \\ \simeq & \mathrm{Map}_B\left(x^*\mathscr{F}^\vee, M\right)\end{aligned}$$

现在，结论由以下事实得出：函子

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}_B &\longrightarrow \mathrm{Fun}\left(\mathrm{Mod}_B^{\leq 0}, \mathrm{sSet}\right) \\ N &\longmapsto \mathrm{Map}_B\left(N, \bullet\right)\end{aligned}$$

是全忠实的，并且我们所做的一切关于 B 都是自然的。 □

引理 1.2.29。设 $f\colon X \to Y$ 是导出 *Artin* 叠之间的一个态射。我们考虑$\mathscr{F} \in \mathbf{Perf}(Y)$。那么存在一个交换方块：

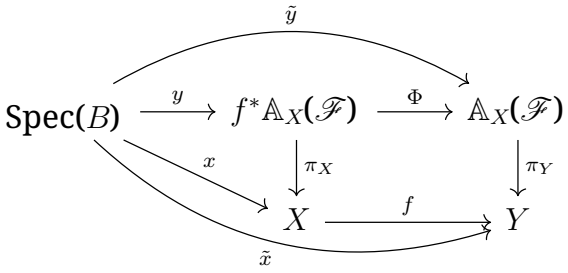
$$\begin{array}{ccc}\Phi^*\mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/X} & \longrightarrow & \mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(f^*\mathscr{F})/Y} \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \Phi^*\pi_Y^*\mathscr{F}^\vee & \xrightarrow{\simeq} & \pi_X^*f^*\mathscr{F}^\vee\end{array}$$

其中 Φ 是以下拉回中的自然态射：

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{A}_X(f^*\mathscr{F}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ X & \xrightarrow{f} & Y\end{array}$$

而下方的水平等价 $\Phi^*\pi_Y^*\mathscr{F}^\vee \to \pi_X^*f^*\mathscr{F}^\vee$ 则来自于这样一个事实：$\pi_Y \circ \Phi \simeq f \circ \pi_X$。

证明。我们首先观察到 $\mathbb{A}_X(f^*\mathscr{F}) \simeq f^*\mathbb{A}_X(\mathscr{F})$。和之前一样，我们考虑 B-点：



我们要证明下图是交换的:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}_B\left(y^*\mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(f^*\mathscr{F})/X}, M\right) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_B\left(\tilde{y}^*\mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/Y}, M\right) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \underline{\mathrm{Hom}}_B\left(y^*\pi_X^* f^*\mathscr{F}^\vee, M\right) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_B\left(\tilde{y}^*\pi_Y^*\mathscr{F}^\vee, M\right) \end{array} \tag{1}$$

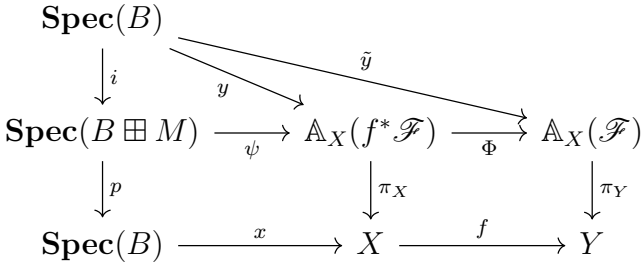
利用余切复形的泛性质，顶部的水平箭头自然等价于映射

$$\mathrm{hofiber}_y\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{dSt}_{/X}}\left(\mathbf{Spec}(B\boxplus M), \mathbb{A}_X(f^*\mathscr{F})\right) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{dSt}_{/X}}\left(\mathbf{Spec}(B), \mathbb{A}_X(f^*\mathscr{F})\right)\right)$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{hofiber}_{\tilde{y}}\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{dSt}_{/Y}}\left(\mathbf{Spec}(B\boxplus M), \mathbb{A}_X(\mathscr{F})\right) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{dSt}_{/Y}}\left(\mathbf{Spec}(B), \mathbb{A}_X(\mathscr{F})\right)\right)$$

由 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{dSt}}(-,\Phi)$ 诱导。在此同伦纤维中的映射 $\psi\colon \mathbf{Spec}(B\boxplus M) \to \mathbb{A}_X(f^*\mathscr{F})$ 可置于以下交换图中:



且同伦纤维之间的映射将 ψ 映至 $\Phi\circ\psi$。由于 ψ 的底层映射为 $\pi_X\circ\psi\colon \mathbf{Spec}(B\boxplus M)\to X$ 为 $x\circ p$，而 $\Phi\circ\psi$的底层映射为 $\pi_Y\circ\Phi\circ\psi\colon \mathbf{Spec}(B\boxplus M)\to Y$ 为 $f\circ x\circ p=\tilde{x}\circ p$，因此导出栈的同伦纤维之间的此映射自然等价于映射:

$$\begin{array}{c}\mathrm{hofiber}_{s_y}\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{B\boxplus M}\left(B\boxplus M, p^*x^*f^*\mathscr{F}\right)\right)\to\underline{\mathrm{Hom}}_B\left(B, p^*x^*f^*\mathscr{F}\right)\\ \downarrow\\ \mathrm{hofiber}_{s_{\tilde{y}}}\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{B\boxplus M}\left(B\boxplus M, p^*\tilde{x}^*\mathscr{F}\right)\right)\to\underline{\mathrm{Hom}}_B\left(B, p^*\tilde{x}^*\mathscr{F}\right)\end{array}$$

其中 s_y 和 $s_{\tilde{y}}$ 分别是与 y 和 $\tilde{y}$ 相关联的截面。事实上，此映射由自然识别 $p^*\tilde{x}^*\mathscr{F}\simeq p^*x^*f^*\mathscr{F}$（因为 $\tilde{x}=f\circ x$）诱导。但按照命题 1.2.28的证明步骤，此映射自然等价于映射

$$\mathrm{Hom}_B\left(y^*\pi_X^*f^*\mathscr{F}^\vee, M\right)\to\mathrm{Hom}_B\left(\tilde{y}^*\pi_Y^*\mathscr{F}^\vee, M\right)$$

我们使用的自然等价，是命题证明中使用的自然等价 1.2.28 该命题证明了图表 (1) 是交换的。现在再次利用函子这一事实即可得出结果

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Mod}_B & \longrightarrow & \mathrm{Fun}\left(\mathrm{Mod}_B^{\leq 0}, \mathrm{sSet}\right)\\ N & \longmapsto & \mathrm{Map}_B\left(N, \bullet\right)\end{array}$$

是全忠实的，并且我们所做的一切都关于 B 自然。 □

引理 1.2.30. 设 X 为导出 *Artin* 叠。考虑 $\mathscr{F},\mathscr{G}\in$ 拟凝聚层(X) 可对偶化，且 $h:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$。那么存在一个交换方块：

$$\begin{array}{ccc}\hat{h}^*\mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{G})/X} & \longrightarrow & \mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/X}\\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq\\ \pi_X^*\mathscr{G}^\vee & \xrightarrow{\pi_X^*h^\vee} & \pi_X^*\mathscr{F}^\vee\end{array}$$

ˆ其中 $h\colon\mathbb{A}_X(\mathscr{G})\to\mathbb{A}_X(\mathscr{F})$ 是由 h 诱导的映射。

证明。命题 1.2.28 的证明的每一步对于 $\mathscr{F}\in\mathbf{Perf}(X)$都具有函子性。

□

命题 1.2.31. 设 $f\colon X\to Y$ 是导出 *Artin* 叠之间的一个态射。我们考虑 $\mathscr{F}\in$ 拟凝聚层(X) 和 $\mathscr{G}\in$ 拟凝聚层(Y)，二者均可对偶，且有一个态射 $h\colon f^*\mathscr{F}\to\mathscr{G}$。于是存在一个交换方块：

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{F})/X} & \longrightarrow & \hat{f}^*\mathbb{L}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{G})/Y}\\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq\\ \pi_X^*\mathscr{F}^\vee & \xrightarrow{\pi_X^*h^\vee} & \pi_X^*f^*\mathscr{G}^\vee=\hat{f}^*\pi_Y^*\mathscr{G}^\vee\end{array}$$

证明。 由引理 1.2.29 和引理1.2.30 □

注 1.2.32. 若两个 X 上的半自由余纤维化代数具有相同的底层余纤维化分次自由代数（忘掉微分后），则它们的余切复形具有相同的底层分次 $\mathscr{O}_X$-模（对于由所选余纤维化半自由代数给出的模型而言）。特别地，若 Y:=谱$_X$(对称代数 $_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F}^\vee$) 是一个微分为 δ 的半线性栈。经过余纤维化替换后，我们可以假设 $\mathscr{F}^\vee$ 是射影的，并得到:

$$\mathbb{L}_{Y/X} \simeq (\pi^*\mathscr{F}^\sharp, \delta_{\text{lin}})$$

其中 $\pi^*\mathscr{F}^\sharp$ 配备了由半自由代数上的微分 δ 诱导的微分 δ_{lin}。特别地， δ_{lin} 包含 $\mathscr{F}$ 上的微分，也包含额外项。其形式为:

$$\delta_{\text{lin}} : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \text{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee$$

因此，可以沿着右侧对称代数的自然分次将此微分分解（参见记号 B.2.6），其中权重为零的部分 $\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 恢复了 $\mathscr{F}$上的微分。

1.2.5. （半）线性栈的联络与切复形。

本节的目标是找到一种计算线性（或半线性）栈的切复形的方法。为此需要使用联络，以便将线性栈的切丛分解为纤维部分和底空间部分。遗憾的是，在代数几何中，联络未必总是存在。我们将看到，若底空间是仿射的且截面模是射影的，则联络存在（见命题1.2.40）。在本节中， X 将是一个容许余切复形的导出栈。

定义 1.2.33。 设 $\mathscr{F} \in \text{QC}(X)$，其中 X 是一个导出栈。在由下列拟凝聚层恰当序列的分裂给出的线性栈[1] π： $F \to X$ 上，称之为 ***Ehresmann*** 联络，该序列定义在 F 上:

$$V \longrightarrow \mathbb{T}_F \underset{s}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} \pi^*\mathbb{T}_X$$

其中 V是 $\ker(\pi_*)$ 的纤维，称为垂直空间。注意，由于我们有$V \simeq \mathbb{T}_{F/X}$ ，并利用命题 1.2.28，这样的联络就是以下纤维序列的一个分裂:

$$\pi^*\mathscr{F} \longrightarrow \mathbb{T}_F \underset{s}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} \pi^*\mathbb{T}_X$$

定义 1.2.34。 线性栈 $F \to X$ 的协变导数 是 X上的拟凝聚层映射:

$$\nabla : \mathbb{T}_X \to \mathbf{End}_k(\mathscr{F})$$

[1]回顾记号 1.2.10， F表示线性栈 $\mathbb{A}_X(\mathscr{F})$。

使得对于所有 $X \in \mathbb{T}_X$、∇_X 属于 $\mathrm{End}_k(\mathscr{F})$，并满足莱布尼茨法则，从而成为次数为 $|X|$ 的导子：

$$\nabla_X(fs) = X(f).s + (-1)^{|X||f|} f \nabla_X s$$

记号 1.2.35。设 A 和 B 是微分分次对象（例如微分分次模、交换微分分次代数等）。我们用 $A^\sharp$ 和 $B^\sharp$ 表示它们的底层分次对象，也就是“忘掉”微分后的对象。

我们用 $f_\sharp : A \to B$ 表示一个不一定保持微分的映射。

定义 1.2.36。在 $X = \mathrm{Spec}(B)$ 上的半线性堆栈 Y 上的联络仍由一个分裂给出：

$$V \longrightarrow \mathbb{T}_Y \underset{s_\sharp}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} \pi^*\mathbb{T}_X$$

这一次 $s_\sharp$ 不要求保持微分（记号 1.2.35）。换句话说，联络是底层分次模的一个截面。

构造 1.2.37。我们将简要回顾协变导数如何诱导 Ehresmann 联络。取一个协变导数 ∇。若我们用 π 拉回映射 $\mathbb{T}_X \to \mathrm{End}_k(\mathscr{F})$，则对每个 $\pi^*\mathbb{T}_X$ 中的 X，我们关联一个元素 ∇_X，并可通过莱布尼茨法则将其延拓为 $\mathbb{T}_F$ 中的一个导子，公式如下：

$$\nabla_X(fv_1 \cdots v_n) = X(f)v_1 \cdots v_n + \sum_{i=1}^{n} \pm f v_1 \cdots (\nabla_X v_i) \cdots v_n$$

还需证明这定义了一个截面。由于 π_* 消去 $\mathscr{F}$，且 ∇_X 将 $\mathscr{F}$ 中的元素映到 $\mathscr{F}$ 中的元素，因此对 $\mathscr{F}$ 中所有的 v，都有 $\pi_*\nabla_X v = 0$。此外，$\pi_*\nabla_X f = X(f)$，所以 $\pi_*(\nabla_X)_{|\mathscr{O}_X} = X$ 属于 $\pi^*\mathbb{T}_X$，因此这定义了一个截面。

利用构造 1.2.37 以及由联络诱导的分裂，我们可以 近乎将线性栈与半线性堆的切复形识别为以下各项的直和：$\mathscr{F}$ 和 $\mathbb{T}_X$。

引理 1.2.38。给定一个完美线性栈 F，我们有一个同构：

$$\mathbb{T}_F \cong \pi^*(\mathbb{T}_X \oplus^\nabla \mathscr{F})$$

其中，底层分次对象 $\pi^*(\mathbb{T}_X \oplus^\nabla \mathscr{F})^\sharp$ 由通常的直和 $\pi^*(\mathbb{T}_X \oplus \mathscr{F})^\sharp$ 给出。此同构将以下对象映至：

- $\phi \in \mathbb{T}_F$ 到 $(\phi_{|X}, \phi - \phi_{|X} - \nabla_X)$。
- (X, v) 到导子 $X + \nabla_X + \iota_v$，其中 $\nabla_X \in \pi^*\mathscr{F}$，且 $\nabla_X \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}^\vee$ 被视为一个取值于对称代数 $\mathrm{Sym}^{\geq 1}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee$ 的导子，它由沿 $\mathscr{F}$ 中各项的缩并给出。

此外， $\pi^*(\mathbb{T}_X \oplus^\nabla \mathscr{F})$ 上的微分由 $\mathbb{T}_X$, $\mathscr{F}$ 上的微分加上一个联络项 δ_∇ 给出，该联络将 $\mathbb{T}_X$ 映至 $\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}^\vee \subset \pi^*\mathscr{F}$ （特别地， δ_∇ 取值于 $\mathscr{F} \otimes$ 对称代数$^{\geq 1}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee$）。

引理 1.2.39. 对于 Y 完美半线性堆栈，分裂：

$$V \longrightarrow \mathbb{T}_Y \underset{s_\sharp}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} \pi^*\mathbb{T}_X$$

诱导出一个同构：

$$\mathbb{T}_Y \rightleftarrows \pi^*(\mathscr{F} \oplus^\nabla \mathbb{T}_X)$$

其中底层的分次对象， $\pi^*(\mathbb{T}_X \oplus^\nabla \mathscr{F})^\sharp$，由通常的直和 $\pi^*(\mathbb{T}_X \oplus \mathscr{F})^\sharp$给出（这里忽略了微分）。该同构将以下对象映到：

- $\phi \in \mathbb{T}_Y$映到 $(\phi_{|X}, \phi - \phi_{|X} - \nabla_X)$。- (X, v) 映到导子 $X + \nabla_X + \iota_v$，其中 $\nabla_X \in \pi^*\mathscr{F}$，其中 $\nabla_X \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}^\vee$ 被视为一个 对称代数$^{\geq 1}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee$-值导子，由沿着 $\mathscr{F}$ 中的项进行缩并给出。

右侧的微分由 $\mathbb{T}_Y$ 上的微分沿底层分次复形的同构转移而来。我们在 $(\pi^*(\mathscr{F} \oplus \mathbb{T}_X))^\sharp$ 上得到一个扩展自然微分的非典范微分。特别地，它将恢复 $\mathbb{T}_X$上的微分、 $\mathscr{F}$ 上的微分、联络项 δ_∇，以及来自半自由微分的“非线性”部分的额外项。

命题 1.2.40. 取 $X = \text{谱}(A)$ 为仿射概形，则任意射影的 A-模 M都存在联络。

证明。这是对 [RM17a，命题 2.3 和 2.5] 的微分分次改写。事实上，我们显然可以在自由 A-模上定义联络；在微分分次情形下，射影模也是自由模的直和项（特别是其 自由分解 的直和项）。□

特别地，仿射底空间 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 上的任意半线性栈都可以分解为 A 上带有射影模的半自由代数，因此存在联络。

例1.2.41. 引理 1.2.39 保证了导出临界轨迹的切丛为：

$$\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)} \simeq \pi^*(\mathbb{T}_X \oplus^\nabla \mathbb{L}_X[-1])$$

因此，这由 $\pi^*(\mathbb{T}_X \oplus \mathbb{L}_X[-1])^\sharp$ 共同给出一个依赖于所选联络的微分。我们可以尝试利用这个引理求出微分，但对此问题还有一种更具概念性的方法：使用从线性栈上的联络得到的、更简单的微分描述（引理 线性栈（引理 1.2.38）。

拉回的切复形是切复形的拉回（见命题 A.2.9）。因此，得到如下拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)} & \longrightarrow & i^*\mathbb{T}_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ i^*\mathbb{T}_X & \longrightarrow & i^*s_0^*\mathbb{T}_{T^*X} \simeq i^*df^*\mathbb{T}_{T^*X} \end{array}$$

其中 $i\colon \mathrm{Crit}(f) \to X$和 $s_0, df\colon X \to T^*X$。利用线性栈 T^*X上的一个联络，我们有一个同构

$$\mathbb{T}_{T^*X} \cong \pi^*(\mathbb{T}_X \oplus^{\nabla} \mathbb{L}_X)$$

微分由 $\mathbb{T}_X, \mathbb{L}_X$ 上的微分以及一个来自联络的项给出，我们将其记为 δ_∇，它将 $X \in \mathbb{T}_X$ 映射到 ∇_X 一个 $\mathrm{Sym}^{\geq 1}_{\mathscr{O}_X} \mathbb{T}_X$-值 1-形式，即 $\pi^*\mathbb{L}_X$中的一个元素。

沿以下映射计算这个拉回：

$$i^*\mathbb{T}_X \to i^*(\mathbb{T}_X \oplus \mathbb{L}_X) \simeq i^*s^*\pi^*(\mathbb{T}_X \oplus \mathbb{L}_X)$$

（由包含映射给出，取 $s = s_0$ 或等价地取 $s = df$），以及另一侧的映射 $X \mapsto (X, d_{\mathrm{dR}}(df.X))$。我们得到：

$$\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)} \cong \pi^*(\mathbb{T}_X \oplus^{\nabla} \mathbb{L}_X[-1])$$

微分由 $\mathbb{T}_X$、$\mathbb{L}_X[-1]$、δ_∇ 上的微分以及由 $d_{\mathrm{dR}} \circ \iota_{df}$给出的额外映射 $\mathbb{T}_X \to \mathbb{L}_X[-1]$ 构成。

1.3. 形式导出几何。

我们对形式几何感兴趣，因为在第 3.1 节研究“李代数丛的无穷小商”时，形式栈会自然出现。

我们先在第 1.3.1 节回顾形式栈、形式完备化和形式加厚的重要定义与性质。

在第 1.3.2 节，我们将关注由形式模空间问题产生的形式栈，因为这些正是与李代数丛相关联的“无穷小商”栈。特别地，我们将关注与形式谱相关联的形式栈（定义 D.1.7），因为我们将研究形式谱的情形（见第 3.2.1 节）。

在本节中，所有导出栈和代数都将局部为几乎有限表示。

1.3.1. 形式导出栈与形式完备化。

定义 1.3.1 ([CPT+17，定义 2.1。1])。 一个 形式的导出栈 X 是一个几乎有限表示的导出栈 $X \in \mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}}$，满足以下条件：

– X 是幂零完备的，即对于任意 $B \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$，都有空间的弱等价：
$$F(B) \to \lim_k F(B_{\leq k})$$
其中 $B_{\leq k}$ 是 k阶 Postnikov[1] 截断 B。
– X 是无穷小凝聚的，即对于所有非正次数中的笛卡尔方形（其对象为几乎有限生成的交换微分分次代数），
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_2 & \longrightarrow & B_0 \end{array}$$
若 $H^0(B_i) \to H^0(B_0)$是具有幂零核的满射，则在空间中由此诱导的图表是笛卡尔的：
$$\begin{array}{ccc} X(B) & \longrightarrow & X(B_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(B_2) & \longrightarrow & X(B_0) \end{array}$$

注1.3.2。 这个定义对于导出预栈也同样有意义，此时它们称为形式导出预叠。此外，在[CG18第], 节中，假设导出预栈具有原余切复形。在我们感兴趣的大多数情形下，我们甚至会假设存在余切复形。

注 1.3.3。 如果 B_i 也都是 Artin代数（在交换微分分次代数$^{\leq 0}$中），那么根据[Lur11，命题 1.1.11 和引理 1.1.20], ， $H^0(B_i) \to H^0(B_0)$ 是满射，恰好就是态射满足小 的条件，该条件见定义 D.1.3（对于 Artin代数，幂零核条件自动成立）。

注1.3.4。 根据[CPT+17，注 2.1。2] 以及 [Lur12，命题 2.1，13], 如果假设导出（预）栈 X 具有余切复形，那么 X 是形式的，当且仅当它是幂零完备且满足无穷小黏合性；其中，在 $B_i \to B_0$ 中，只有一个映射是 H^0 具有幂零核的满射。

[1] A Postnikov tower for $B \in \mathrm{cdga}^{\leq 0}$ is a sequence:
$$B \to \cdots \to B_{\leq n} \to B_{\leq n-1} \to \cdots \to B_0 := \pi_0(B)$$
使得对于所有 $i > n$， $H^{-i}(B_{\leq n}) = 0$，且态射 $B \to B_{\leq n}$ 在 $i \leq n$ 上诱导出 H^{-i} 的同构。 $B_{\leq n}$ 称为 B 的第 n 阶波斯特尼科夫截断。

特别地， X 对 Artin代数的限制满足形式模空间问题的拉回条件（定义 D.1.6）。

例 1.3.5.

– 任意 Artin 栈都是形式的（参见 [CPT+17，第 2 节。1]）。– 形式导出栈的所有小极限都是形式的。– 德拉姆栈 F_{DR} （定义 1.3.9）是形式的。– 导出栈映射 $X \to Y$ （定义 1.3.8 ）的形式完备化若 Y 是形式的，则该形式完备化也是形式的（参见命题 1.3.14）。– X 关于李代数丛的商栈按定义是形式的（参见第 3.2.1 节）。

在形式几何中，我们关注无穷小邻域，并将其称为形式加厚。许多形式加厚的例子都可通过映射的形式完备化得到（定义 1.3.8）。

为了处理这些对象，我们需要构造“德拉姆”栈和“约化”栈。本质上， X 的德拉姆栈是映射 $X \to \star$ 的形式完备化（由命题 1.3.11可知），而约化函子是德拉姆函子的左伴随。

我们的想法是赋予“无穷小接近”的点以意义，也就是说，“无穷小接近”的点之间的“差”是幂零的。

定义 1.3.6. 如果代数 $A \in \mathrm{cdga}^{\leq 0}$ 是离散的[1] 且没有非零幂零元，就称其为约化的。换言之，$\mathrm{Nil}(A) = 0$ ，其中 $\mathrm{Nil}(A)$ 表示 A 中幂零元构成的理想。我们用 $(\mathrm{cdga}^{\leq 0})^{\mathrm{red}}$ 表示 $\mathrm{cdga}^{\leq 0}$ 中约化代数构成的满子范畴。

引理 1.3.7. 包含映射 $i : (\mathrm{cdga}^{\leq 0})^{\mathrm{red}} \to \mathrm{cdga}^{\leq 0}$ 有一个左伴随：

$$(-)^{\mathrm{red}} : \mathrm{cdga}^{\leq 0} \to (\mathrm{cdga}^{\leq 0})^{\mathrm{red}}$$

定义如下：

$$A^{\mathrm{red}} := {}^{H^0(A)}\!/_{\mathrm{Nil}(H^0(A))}$$

我们在记号中省略 i ，使得伴随单位诱导出一个映射 ：

$$A \to A^{\mathrm{red}}$$

形式几何中的一个重要概念是映射 $f : X \to Y$ 的形式邻域，它本质上是这样一个栈：其点是 Y 中与 X 中的点无穷小接近的点。

[1]交换微分分次代数称为离散的，如果它集中在次数 0

定义 1.3.8. 映射 $f : X \to Y$ 的形式完备化，记作 $\widehat{Y_X} \in \mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}}$，定义为将几乎有限表示代数 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 映射到 $Y_X(A)$，其中后者定义为所有交换图表构成的空间：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spec}(A^{\mathrm{red}}) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Spec}(A) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

换言之，它定义为以下空间：

$$\widehat{Y_X}(A) := \mathrm{Map}\left(\mathbf{Spec}(A), Y\right) \times_{\mathrm{Map}\left(\mathbf{Spec}(A^{\mathrm{red}}), Y\right)} \mathrm{Map}\left(\mathbf{Spec}(A^{\mathrm{red}}), X\right)$$

这些是 Y 中与 X 中的某个点“无穷小接近”的点，其中两个点 x， $y \in Y(A)$ 无穷小接近[1]，当且仅当它们在$Y(A) \to Y(A^{\mathrm{red}})$下的像相同。

沿用形式完备化定义的思路，我们希望 $Y(A^{\mathrm{red}})$表示关于“无穷小接近”这一等价关系的点的等价类。将约化函子预合成，我们得到一个新的函子（见[CPT+17，第 21]节）：

$$i^* : \mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}} \to (\mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}})^{\mathrm{red}}$$

其中 $(\mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}})^{\mathrm{red}}$ 表示由连通约化几乎有限表示代数范畴上的导出栈构成的 ∞-范畴。

$$((\mathrm{cdga}^{\leq 0,\mathrm{afp}})^{\mathrm{red}})^{\mathrm{op}}$$

我们有， i^* 同时具有右伴随 i_* 和左伴随 $i_!$，并满足：

- $i_* \simeq ((-)^{\mathrm{red}})^*$，因此 $i_*(\mathbf{Spec}(A)) \simeq \mathbf{Spec}(A^{\mathrm{red}})$。
- i_* 和 $i_!$ 是全忠实的。 - $i^* \simeq ((-)^{\mathrm{red}})_!$。

定义 1.3.9 ([CPT+17，定义 2.1。3])。令 $X \in \mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}}$ 为一个导出栈 .

- X 的德拉姆栈记作 X_{DR}，定义如下：

$$(-)_{\mathrm{DR}} := i_* i^* : \mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}} \to \mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}}$$

伴随的单位诱导出自然映射 $X \to X_{\mathrm{DR}}$。此外，我们有 $X_{\mathrm{DR}}(A) = X(A^{\mathrm{red}})$。 - X 的约化栈记作 X_{red}，定义如下：

$$(-)_{\mathrm{red}} := i_! i^* : \mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}} \to \mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}}$$

伴随的余单位诱导出自然映射 $X_{\mathrm{red}} \to X$。此外，我们有 $\mathbf{Spec}(A)_{\mathrm{red}} = \mathbf{Spec}(A^{\mathrm{red}})$。

[1]例如，若 $A := k[\epsilon]$，且 $\epsilon^2 = 0$，则一个 $k[\epsilon]$-点是 Y 的切向量。若两个这样的点在 Y 中有相同的底层 k-点，则它们无穷小接近。

命题 1.3.10。 我们有 i_* 和 $i_!$ 是全忠实的，因此单位$\mathrm{id} \to i^*i_!$ 和余单位 $i^*i_* \to \mathrm{id}$ 逐对象都是等价。这意味着 $i_!i^*$ 是 i_*i^* 的左伴随，特别是，这说明$(-)_{\mathrm{DR}}$ 是$(-)_{\mathrm{red}}$的右伴随。

命题 1.3.11. $f\colon\ X \to Y$ 的形式完备化是以下拉回方块的一部分：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{Y_X} & \longrightarrow & X_{\mathrm{DR}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y_{\mathrm{DR}} \end{array}$$

$\widehat{\ }$证明。 根据定义， Y_X 中的 A-点空间为：

$$\begin{aligned} \widehat{Y_X}(A) &\simeq \mathrm{Map}\left(\mathbf{Spec}(A), Y\right) \times_{\mathrm{Map}\left(\mathbf{Spec}(A^{\mathrm{red}}), Y\right)} \mathrm{Map}\left(\mathbf{Spec}(A^{\mathrm{red}}), X\right) \\ &\simeq \mathrm{Map}\left(\mathbf{Spec}(A), Y\right) \times_{\mathrm{Map}(\mathbf{Spec}(A)_{\mathrm{red}}, Y)} \mathrm{Map}\left(\mathbf{Spec}(A)_{\mathrm{red}}, X\right) \\ &\simeq \mathrm{Map}\left(\mathbf{Spec}(A), Y\right) \times_{\mathrm{Map}(\mathbf{Spec}(A), Y_{\mathrm{DR}})} \mathrm{Map}\left(\mathbf{Spec}(A), X_{\mathrm{DR}}\right) \\ &\simeq \mathrm{Map}\left(\mathbf{Spec}(A), Y \times_{Y_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}}\right) \\ &\simeq \left(Y \times_{Y_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}}\right)(A) \end{aligned}$$

□

推论 1.3.12. X_{DR} 是终端态射 $X \to \star$ 的形式完备化：

$$X_{\mathrm{DR}} \simeq \widehat{\star_X}$$

推论 1.3.13. 考虑由相容映射 $X_1 \to Y_1$、 $X \to Y$ 和 $X_2 \to Y_2$ 诱导的拉回 $Y_1 \times_Y \times Y_2$ 上的锥 $X_1 \times_X X_2$。那么我们有一个等价：

$$\widehat{(Y_1 \times_Y Y_2)}_{X_1 \times_X X_2} \simeq \widehat{(Y_1)_{X_1}} \times_{\widehat{Y_X}} \widehat{(Y_2)_{X_2}}$$

证明。

$$\begin{aligned} \widehat{(Y_1 \times_Y Y_2)}_{X_1 \times_X X_2} &\simeq (Y_1 \times_Y Y_2) \times_{(Y_1 \times_Y Y_2)_{\mathrm{DR}}} (X_1 \times_X X_2)_{\mathrm{DR}} \\ &\simeq (Y_1 \times_Y Y_2) \times_{(Y_1)_{\mathrm{DR}} \times_{Y_{\mathrm{DR}}} (Y_2)_{\mathrm{DR}}} \left((X_1)_{\mathrm{DR}} \times_{X_{\mathrm{DR}}} (X_2)_{\mathrm{DR}}\right) \\ &\simeq \left(Y_1 \times_{(Y_1)_{\mathrm{DR}}} (X_1)_{\mathrm{DR}}\right) \times_{Y \times_{Y_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}}} \left(Y_2 \times_{(Y_2)_{\mathrm{DR}}} (X_2)_{\mathrm{DR}}\right) \\ &\simeq \widehat{(Y_1)_{X_1}} \times_{\widehat{Y_X}} \widehat{(Y_2)_{X_2}} \end{aligned}$$

□

P命题 1.3.14 ([CPT+17，命题 2.1。4])。 我们有如下结论：

(1) X_{DR} 是一个形式导出栈。*(2)* 若 Y是一个形式导出栈，则对于任意映射 $f\colon\ X \to Y$，其形式完备化$\widehat{\ }_{Y_f}$ 是一个形式导出栈。

取德拉姆栈会忽略无穷小接近的点，因此也会忽略栈的“切方向”。

引理 1.3.15 ([CPT+17，引理 2.1。10])。 德拉姆栈的余切复形存在，并且有：

$$p^*\mathbb{L}_{X_{\mathrm{DR}}} \simeq 0$$

其中 p： $X \to X_{\mathrm{DR}}$ 是自然投影。

因此，切复形与德拉姆栈是互补的信息。我们将在本节余下部分看到，在形式栈中， X_{DR} 和$\mathbb{T}_X$ 刻画 X，其含义是：如果 X 和 Y 是形式栈，且 X 和 Y具有“相同”的德拉姆栈和切复形，那么它们作为栈是等价的。在本节余下部分，我们将假设 X 和 Y 具有切复形。

定义 1.3.16。 导出栈之间的映射 $f : X \to Y$ 称为幂零等价，如果它诱导出一个等价 f_{red}： $X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ （或等价地，一个等价f_{DR}： $X_{\mathrm{DR}} \to Y_{\mathrm{DR}}$）。

定义 1.3.17。 态射 f： $X \to Y$ 称为形式 *étale*，如果它诱导出一个等价：

$$\mathbb{T}_X \xrightarrow{\sim} f^*\mathbb{T}_Y$$

Defi义 1.3.18。 我们将形式栈 X 的形式加厚 定义为以下任一形式： :

– 一个形式预堆栈， $Y \in \mathsf{dpSt}^{\mathrm{afp}}$，连同一个幂零等价 f： $X \to Y$。这类加厚的范畴记作 $\mathsf{Thick}^{\mathrm{pre}}(X)$。– 一个形式栈， $Y \in \mathsf{dSt}^{\mathrm{afp}}$，连同一个幂零等价 f： $X \to Y$。这类加厚的范畴记作 $\mathsf{Thick}(X)$。

预叠的栈化 $\mathsf{dpSt}^{\mathrm{afp}} \to \mathsf{dSt}^{\mathrm{afp}}$ 可能不会保持形式的性质。因此，我们经常会考虑由预叠中一个形式加厚的栈化所给出的栈。

Rem命题 1.3.19。如果 $f : X \to Y$ 是一个幂零等价，则存在一个等价 :

$$\widehat{Y_X} \simeq Y$$

这是命题 1.3.11 以及映射 $X_{\mathrm{DR}} \to Y_{\mathrm{DR}}$ 是一个等价这一事实的直接推论。

引理 1.3.20。 给定 f： $X \to Y$，形式完备化诱导出一个分解：

$$X \to \widehat{Y_X} \to Y$$

使得：

– $X \to \widehat{Y_X}$ *is a nil-equivalence.*

– $\widehat{Y_X} \to Y$ *is formally étale.*

证明。由命题 1.3.11 (X 显然是该拉回上的一个锥)，可知这个分解显然成立。于是我们有：

– 由于 X 是定义 Y_X 的拉回上的一个锥，应用 $(-)_{\mathrm{DR}}$，我们得到一个收缩[1]：

$$X_{\mathrm{DR}} \to \left(\widehat{Y_X}\right)_{\mathrm{DR}} \to X_{\mathrm{DR}}$$

使得第二个态射是一个等价（因为它是 Y_{DR} 的恒等态射的拉回）。因此，映射 $X_{\mathrm{DR}} \to \left(\widehat{Y_X}\right)_{\mathrm{DR}}$ 也是一个等价。

– 事实是 $\widehat{Y_X} \to Y$ 是形式 étale 的，这由引理 1.3.15 以及以下事实可知：根据命题 1.3.11的拉回，我们有一个等价：

$$\mathbb{T}_{\widehat{Y_X}/Y} \xrightarrow{\sim} p^*\mathbb{T}_{X_{\mathrm{DR}}/Y_{\mathrm{DR}}} \simeq 0$$

□

引理 1.3.21. 设 $f\colon X \to Y$ 是形式预栈之间的一个映射，满足：

– f 是幂零等价。– f 是形式 *étale* 的。

那么 f 是一个弱等价。

证明。 证明的思路是说明，对于每个 $\mathrm{Spec}(A) \to Y$，都存在唯一的提升：

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}(A) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

首先注意到，由于我们的形式栈具有幂零完备性，这样的提升实际上等价于以下提升的数据：

$$\begin{array}{ccc} & \overset{l_k}{\nearrow} & X \\ & & \downarrow f \\ \mathbf{Spec}(A_{\leq k}) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

使得以下图表可交换：

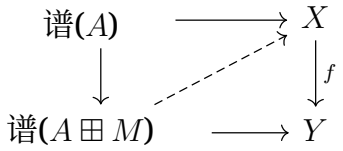
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spec}(A_{\leq k}) & \overset{l_k}{\dashrightarrow} & X \\ \downarrow & \overset{l_{k+1}}{\nearrow} & \downarrow \\ \mathbf{Spec}(A_{\leq k+1}) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

暂且假设 $H^0(A) := A_{\leq 0}$ 具有一个提升。那么我们需要为 $k \geq 1$ 构造与之前的提升相容的提升 l_k。

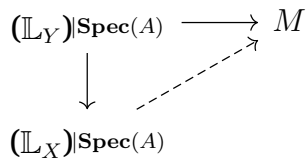
为此，我们注意到 Postnikov 截断彼此构成一系列逐次的平方零扩张（参见 [PV13, 命题 4。1]）。具有

[1]利用了 $(X_{\mathrm{DR}})_{\mathrm{DR}} \simeq X_{\mathrm{DR}}$ 这一事实。

形式 étale 意味着对于任意 A-模M，都存在到下图的提升：

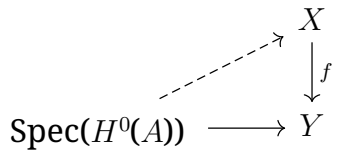


确实，我们可以将此图表视为谱$(A \boxplus M) \to Y$是关于谱(A)的层叠范畴中的一个提升。利用余切复形伴随，这可以改述为要求一个唯一的提升：

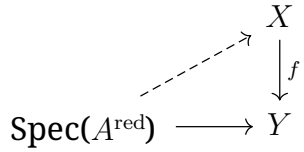


这恰好就是余切复形（限制到 Spec(A) 上）等价的条件。换言之，要求 f 是形式 étale 的。

我们已将问题化简为寻找一个提升：

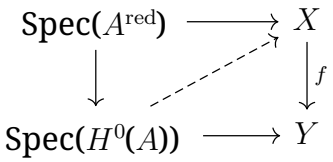


W我们知道，由于 f 是幂零等价，存在一个提升 :



再次利用针对平方零扩张的提升性质，我们只需证明 Spec$(A^{\mathrm{red}}) \to$ Spec(A) 可以表示为平方零扩张的有限复合。

首先回顾 $A^{\mathrm{red}} := H^0(A)/\mathfrak{M}$，其中 $\mathfrak{M} :=$ 幂零根$(H^0(A))$。由于 A 是几乎有限表示的， $H^0(A)$ 是有限表示的，并且存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathfrak{M}^N = 0$。然后我们注意到， A 是 $A/\mathfrak{M}^{N-1}$ 的平方零扩张，其扩张理想为 $\mathfrak{M}^{N-1}$，而 $A/\mathfrak{M}^{N-1}$ 是一个具有幂零理想 $\mathfrak{M}$ 的代数，满足 $\mathfrak{M}^{N-1} = 0$。通过归纳法，我们可以将 $H^0(A)$ 写成 $A^{\mathrm{red}} = A/\mathfrak{M}$ 的有限次连续平方零扩张。*
这证明存在一个提升：



由此得证。 □

1.3.2. 由形式模空间问题得到的形式堆栈。

正如我们在注 1.3.4 中所见，形式导出栈的无穷小凝聚性与形式模空间问题的拉回条件非常相似。本节旨在研究形式模空间问题与形式导出栈之间的关系。尤其是，我们将详细研究由形式谱给出的形式模空间问题及其关联的形式栈。

我们首先说明这一过程：将形式模空间问题 F（定义在）A（一个几乎有限表示的连通交换微分分次代数）上，扩展为X =Spec(A)下的形式加厚 $\underline{F}$。

定理 1.3.22. 对于 A 一个几乎有限呈现的连通交换微分分次代数，存在一个等价（参见 [CG18，命题 41] 或 [GR20，第 5 章命题 1.42]）：

$$\mathbf{FMP}_A \underset{R}{\overset{(-)_{\mathrm{pre}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Thick}^{\mathrm{pre}}(\mathbf{Spec}(A))$$

其中 形式模问题$_A$ 表示关于 A 的形式模空间问题（参见定义*D.1.6*）。此外，与层化函子（它也是一个左伴随）复合后，我们得到一个伴随：

$$\mathbf{FMP}_A \underset{R}{\overset{(-)}{\rightleftarrows}} \mathbf{dSt}_{\mathbf{Spec}(A)/}$$

使得完备化函子$(-)$ 保持余极限和有限极限。

证明概要。 第一个等价归功于 [GR20，第 5 章命题 1.4。2]（另见[CG18，命题 4。1]）基本上，完备化函子是沿包含映射 $\mathbf{Art}_{/A} \to \mathbf{dAff}$ 的左 Kan 延拓，可以证明其值落在 $\mathbf{Thick}$（谱（A））中。

对于第二个陈述，我们将这个伴随与以下伴随复合：

$$\mathrm{Stf} : \mathbf{dpSt}^{\mathrm{afp}} \rightleftarrows \mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}} : j$$

这个伴随是一个拓扑局部化，根据 [Lur09b，引理 6.2.2。7]并且这类局部化是左恰当的，得益于[Lur09b，推论 6.2.1。6] 因此保有限极限。□

注 1.3.23。层化函子 Stf 的表现并不如我们所期望的那样理想。特别是，它不保余切复形。我们将会遇到以下两种情况：

– 我们可以从形式模问题出发。这样一来，我们需要先在底层预栈上完成所有操作，然后再进行栈化。– 我们从栈中的一个形式加厚出发；在这种情况下，在栈或预栈中进行运算是等价的（因为 j 是全忠实的，并且保持切复形不变）。

我们给出一些关于栈化在形式几何中的性质的结果。

命题 1.3.24。 栈化函子具有以下性质：

(1) 函子 j 是全忠实的；对于任意层栈之间的映射 $h:\ X \to Y$，其中$X =$ 谱(A)，我们有一个 A-模的等价：

$$h^*\mathbb{T}_Y \simeq h^*\mathbb{T}_{j(Y)}$$

(2) j 与德拉姆函子可交换[1]：

$$j \circ (-)_{\mathrm{DR}} = (-)_{\mathrm{DR}} \circ j$$

(3) Stf 与约化函子$(-)_{\mathrm{red}}$相交换：

$$\mathrm{Stf} \circ (-)_{\mathrm{red}} = (-)_{\mathrm{red}} \circ \mathrm{Stf}$$

(4) Stf 保持幂零等价。

证明。

(1) 由于 j 是全忠实的，我们有以下等价：

$$\begin{aligned} h^*\mathbb{T}_Y &\simeq \mathrm{Map}_{\mathbf{dSt}}\left(\mathbf{Spec}(A \boxplus A[n]), Y\right) \\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathbf{dpSt}}\left(j\left(\mathbf{Spec}(A \boxplus A[n])\right), j(Y)\right) \\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathbf{dpSt}}\left(\mathbf{Spec}(A \boxplus A[n]), j(Y)\right) \\ &\simeq h^*\mathbb{T}_{j(Y)} \end{aligned}$$

(2) 对于所有 $X \in$ dSt和 $A \in$交换微分分次代数$^{\leq 0}$，我们有：

$$j\left(X_{\mathrm{DR}}\right)(A) = j(X)(A^{\mathrm{red}}) = X(A^{\mathrm{red}}) = j(X_{\mathrm{DR}})(A)$$

(3) 前述结果表明，右伴随函子彼此可交换。这意味着它们的左伴随也彼此可交换。(4) 由于 Stf 与约化函子可交换，且保持弱等价，因此它保持幂零等价。

□

[1]我们在第1.3.1 节中的所有讨论都可以很好地推广到预栈。

现在我们已经有办法将形式模空间问题视为形式导出栈，因此我们将关注由形式谱给出的形式模空间问题这一特例（定义D.1.7）。

回顾一下，相对于 A 的 $B \in$交换微分分次代数$_{/A}$ 形式谱定义为以下形式模空间问题：

$$\begin{aligned}\mathbf{Spf}_A(B) : \mathbf{Art}_{/A} &\longrightarrow \mathbf{Gpd}_\infty \\ C &\longmapsto \underset{\mathrm{cdga}_{/A}}{\mathrm{Map}}(B, C)\end{aligned}$$

注 1.3.25。 事实证明，限制函子 R 不仅将形式加厚映射为形式模空间问题，也将任何具有余切复形的 X 下形式栈映射为形式模空间问题。事实上，根据注 1.3.4，形式模空间问题满足拉回条件；并且由于 形式模问题$_A$ 中的终对象就是 形式谱$_A(A)$ 本身，我们有：

$$\underset{\mathbf{FMP}_A}{\mathrm{Map}}(\mathbf{Spf}_A(A), F) \simeq \star$$

因此， $R(F)$ 是一个形式模空间问题。

注 1.3.26。根据形式谱的定义，对于所有 $B \in$交换微分分次代数$_{/A}$，我们有：

$$R(\mathbf{Spec}(B)) \simeq \mathbf{Spf}_A(B)$$

在第 D.2.1 节中，我们定义了形式模空间问题的切复形。事实证明（见 D.2.1 节），这会将 $B \in$ 交换微分分次代数$_{/A}$的形式谱映射为 B-模 $f^*\mathbb{T}_B$。我们希望将其与相应形式加厚的切复形进行比较。

引理 1.3.27. 取 $f\colon B \to A$，其中 A 是连通且几乎有限表示的。则有：

$$f^*\mathbb{T}_B \simeq f^*\mathbb{T}_{\underline{\mathbf{Spf}_A(B)}_{\mathrm{pre}}}$$

更一般地，如果 $F \in$ 形式模问题$_A$，则有：

$$f^*\mathbb{T}_F \simeq f^*\mathbb{T}_{\underline{F}_{\mathrm{pre}}}$$

其中 f 表示两侧从 谱(A) 出发的映射。

证明。 对于所有 $n \geq 0$，我们有：

$$\begin{aligned}\left|f^*\mathbb{T}_{\underline{F}_{\mathrm{pre}}}[n]\right|_\Delta &\simeq \underset{\mathbf{dSt}_{\mathbf{Spec}(A)/}}{\mathrm{Map}}\left(\mathbf{Spec}(A[\epsilon_n]), \underline{F}_{\mathrm{pre}}\right) \\ &\simeq F(A[\epsilon_n]) \quad (A[\epsilon_n] \in \mathbf{Art}_{/A}) \\ &\simeq |f^*\mathbb{T}_F[n]|_\Delta \quad (\text{Section D.2.1})\end{aligned}$$

其中 ϵ_n 位于次数 n 且平方为零[1]。所有 $n \geq 0$这些等价所构成的族诱导出复形之间的等价，因为它们作为由余切复形的拉回表示的 Ω-谱彼此等价。 □

推论 1.3.28。 对于 $X :=$ 谱(A) 几乎有限表示的仿射概形，我们有如下等价：

$$\mathbb{T}_{X/\underline{\mathbf{Spf}_A(B)}_{\mathrm{pre}}} \simeq \mathbb{T}_{A/B}$$

事实上，我们将在推论 *3.2.11*中看到，这甚至是一个 李代数丛等价，其中所采用的李代数丛结构是命题 *3.2.6*中描述的相对切丛上的结构。

证明。 利用引理1.3.27，我们得到以下两个纤维序列等价：

$$\mathbb{T}_{X/\underline{\mathbf{Spf}_A(B)}_{\mathrm{pre}}} \to \mathbb{T}_A \to f^*\mathbb{T}_{\underline{\mathbf{Spf}_A(B)}_{\mathrm{pre}}}$$
$$\mathbb{T}_{A/B} \to \mathbb{T}_A \to f^*\mathbb{T}_B$$

□

注记 1.3.29。扩张函子 (–) 与形式完备化函子密切相关。事实上，给定 $p : X \to Y$，使得 Y 是形式的，在一些技术性假设[2], 下，我们有如下等价：

$$\widehat{Y_X} \simeq \underline{R(Y)}_{\mathrm{pre}}$$

$\widehat{\ }$且自然态射 $Y_X \to Y$对应于定理 1.3.22中伴随的余单位。

1.4. 德拉姆代数与（闭） p-形式。

本节主要回顾 [CPT+17]。第一部分着重介绍在导出代数几何中，德拉姆代数及其相对版本所能具有的不同结构的记号。第二部分则运用这一形式体系，定义导出栈上的 n-移位（闭） p-形式的概念。

1.4.1. 德拉姆复形。

经典上，我们将德拉姆代数视为微分形式与德拉姆微分$\left(\bigwedge_{\mathscr{O}_X} \Gamma(T^*X)\, d_{\mathrm{dR}}\right)$组成的代数。在导出几何中，我们希望用 $\mathbb{L}_X$替换 T^*X，并希望德拉姆代数类似于 $\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathbb{L}_X[-1]$ 的导出整体截面。不过，这个对象的结构远比其经典对应物丰富。具体来说：

[1]这恰好给出了平方零扩张 $A[\epsilon_n] := A \boxplus A[-n]$。 [2]假设 X 满足假设 3.2.2。这些假设确保 X 的形式模空间问题（因而也包括形式加厚）等价于 X 上的李代数丛（见第 3.2.1节）。

– 对于由 $\mathbb{L}_X[-1]$上的分次诱导的分次，这是一个交换微分分次代数，我们将其称为内部分次；它带有由 $\mathbb{L}_X[-1]$上的微分诱导的垂直微分。– 存在由 $\mathrm{Sym}^p_{\mathscr{O}_X}\mathbb{L}_X[-1]$ 给出的权分次，其中对称幂的元数为 p。– 还有一种 “ 混合微分”，也称为德拉姆微分，它使权重和总次数各增加 1。

所有这些数据给出了分次混合代数的结构。我们在附录中简要回顾与分次混合对象相关的定义和主要性质C。我们首先聚焦于仿射情形， $X :=$谱(B)。

事实证明，存在一个构造“德拉姆对象”的普适构造，它将凭借命题 1.4.4，验证我们刚才讨论的启发式观点。我们将在良好模型范畴$\mathscr{M}$ 的一般框架下定义德拉姆分次混合复形（参见附录 A.1）。特别地，对于 $\mathscr{M}$ =模范畴$_k$，我们重新得到交换微分分次代数的经典德拉姆分次混合复形。此外，在这一背景下，我们甚至可以将函子 **DR** 扩展到所有导出栈。

引理 1.4.1 ([CPT+17，命题 1.3.8 和命题 1.3.16])。存在一个伴随：

$$\mathbf{DR}_{\mathscr{M}} : \mathrm{cdga}_{\mathscr{M}} \rightleftarrows \mathrm{cdga}^{\epsilon-\mathrm{gr}}_{\mathscr{M}} : (-)(0)$$

其中，右伴随是这样一个函子：它将分次混合代数映射为其权重交换微分分次代数$_{\mathscr{M}}$，该代数由分次混合代数的权重0 部分给出。
此外，这个伴随在相对情形下也成立。如果 $A \in$ 交换微分分次代数$_{\mathscr{M}}$，那么存在一个伴随[1]：

$$\mathbf{DR}_{\mathscr{M}}(-/A) : \mathrm{cdga}_{\mathscr{M},\, A/} \rightleftarrows \mathrm{cdga}^{\epsilon-\mathrm{gr}}_{\mathscr{M},\, A/} : (-)(0)$$

定义 1.4.2。 $A \in$ 交换微分分次代数$_M$ 的德拉姆代数定义为以下分次混合代数 $\mathbf{DR}_{\mathscr{M}}(A)$。当 $\mathscr{M}$ 明确时，我们将记为 $\mathbf{DR}(A)$。例如，我们有：

– 如果 $\mathscr{M}$ = 模范畴$_k$，那么 $\mathbf{DR}(B) := \mathbf{DR}^{\mathrm{Mod}_k}(B)$ 是与代数 B相关联的德拉姆分次混合代数。– 如果 $\mathscr{M}$ = 模范畴$_A$，其中 $A \in$ 是交换微分分次代数，且 $A \to B$ 是一个代数映射（因此$B \in$交换微分分次代数$_{\mathrm{Mod}_A}$），我们定义：

$$\mathbf{DR}(B/A) := \mathbf{DR}_{\mathrm{Mod}_A}(B)$$

更一般地，我们有：

$$\mathbf{DR}(-/A) := \mathbf{DR}_{\mathrm{Mod}_A}$$

[1]在等式右侧， A 被视为一个集中于权重0的分次混合代数 .

根据 [CPT+17，引理 1.3。18],我们有

$$\mathbf{DR}(B/A) \simeq \mathbf{DR}(B) \otimes_{\mathbf{DR}(A)} A$$

其中 A 被视为集中在次数 0 的分次混合复形。注意，$\mathbf{DR}(A) \simeq \mathbf{DR}(A/k)$，且此定义与通过引理1.4.1的伴随得到的相对德拉姆构造一致。

记号 1.4.3。 德拉姆代数上存在多种结构，我们采用以下记号：

– $\mathbf{DR}$ 是取值于分次混合代数的德拉姆函子。– $\mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}$ 是 $\mathbf{DR}$ (引理 C.1.6) 的底层分次代数，其中我们忘去混合结构。– 弱分次混合复形（定义 C.2.1）等价于完备滤过对象，因此我们将 $\mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}$ 称为诱导的完备滤过代数。根据命题 C.2.8，它可由以下滤过代数描述：

$$F^p\mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}(A/B) \simeq \prod_{p' \geq p} \mathrm{Sym}_A^{p'} \mathbb{L}_{A/B}[-1]$$

由于 DR(A/B) 的权重非负，每个 F^pDR^{cpl}(A/B) 都是一个微分分次代数，其微分是总微分，由垂直微分和混合微分相加而成。

– $|\mathbf{DR}|$ 是通过应用实现函子得到的 de 总 Rham 代数 $|-|$ 由命题 C.1.9给出：

$$|\mathbf{DR}(A/B)| \simeq \prod_{p \geq 0} \mathbf{DR}(A/B)(p)$$

连同总微分。注意，我们有：

$$|\mathbf{DR}| \simeq F^0\mathbf{DR} \simeq \mathrm{colim}\, F^p\mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}$$

命题 1.4.4. 存在一个分次代数等价：

$$\mathrm{Sym}_B^{\mathrm{gr}} \mathbb{L}_B[-1] \xrightarrow{\sim} \mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(B)$$

类似地，在相对情形下，我们有一个等价：

$$\mathrm{Sym}_B^{\mathrm{gr}} \mathbb{L}_{B/A}[-1] \xrightarrow{\sim} \mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(B/A)$$

推论 1.4.5 ([CPT+17，推论 1.3.14 和注 1.3.15])。 对于任意对象 $A \in$ 交换微分分次代数$\mathscr{M}$，代数 对称代数$\mathrm{Sym}_B^{\mathrm{gr}} \mathbb{L}_{A/B}[-1]$ 具有规范的弱分次混合结构[1]，使其成为 $\mathscr{M}$中的弱分次混合代数。相应的混合微分称为德拉姆微分，记作 d_{dR}。

[1]这个结构是从 $\mathbf{DR}(A/B)$ 弱转移而来的。如果 $B \to A$ 足够良好（即余纤维化），那么它可以视为严格的（非弱）分次混合代数（参见 [CPT+17，第 1.3 节3]）。

命题 1.4.6。 我们有以下等价：

$$|\mathbf{DR}|\,(B/A) \simeq \operatorname{colim} \mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}(B/A)$$
$$\mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(B/A) \simeq \mathbf{Gr}\left(\mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}(B/A)\right)$$

证明。 第一个等价是引理 C.2.10 的直接应用，第二个则是引理C.2.11的应用。 □

到目前为止，我们只为仿射对象构造了德拉姆分次混合代数。事实证明，$\mathbf{DR}$ 满足 étale 下降，因此是一个取值于分次混合复形范畴的导出栈。因此，我们可以将其扩展为一个函子（见[PTVV13，定义 1。13]），使其定义在所有导出栈上，并且它定义了[1]一个分次混合代数 $\mathbf{DR}(X)$，适用于所有导出栈 X。

定义这个全局德拉姆分次混合代数的自然方式，是取由以下极限计算得到的左 Kan 延拓：

$$\mathbf{DR}(X) := \lim_{\mathbf{Spec}(A)\to X} \mathbf{DR}(A)$$

此外，这个极限的底层分次对象按权重计算，因此：

$$\mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(X) \simeq \lim_{\mathbf{Spec}(A)\xrightarrow{f} X} \mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(A)$$

我们得到：

$$\mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(X)(p) \simeq \lim_{\mathbf{Spec}(A)\xrightarrow{f} X} \mathrm{Sym}^p_A \mathbb{L}_A[-1]$$

推论 1.4.7。 如果 X 具有余切复形，则存在一个自然态射[2]：

$$\Gamma\left(\mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{O}_X} \mathbb{L}_X[-1]\right) \simeq \lim_{\mathbf{Spec}(A)\xrightarrow{f} X} |\mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_A f^*\mathbb{L}_X|_\Delta \to |\mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(X)|_\Delta$$

由于德拉姆函子满足光滑下降，对于 X 一个 *Artin* 栈（[PTVV13，命题 1。14]），该自然态射事实上是等价。

备注 1.4.8. 在这个推论中，我们通过取截面的映射空间来考虑截面空间 。如果改为取映射谱，则会得到一个到分次代数 $\mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(X)$ 的映射。换句话说，我们得到一个分次代数的映射：

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{gr}}_{\mathbf{QC}(X)}\left(\mathscr{O}_X, \mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{O}_X} \mathbb{L}_X[-1]\right) \to \mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(X)$$

[1]德拉姆复形可扩展到所有导出栈。然而，如果 X 不具有余切复形，则不存在命题 1.4.4的类似结果。[2]这里 Γ 表示导出整体截面函子，它将 $\mathscr{F} \in$拟凝聚层(X) 映射为：

$$\underset{\mathbf{dSt}_{/X}}{\mathrm{Map}}(X, F) \simeq \underset{\mathbf{QC}(X)}{\mathrm{Map}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) \simeq \lim_{\mathbf{Spec}(A)\xrightarrow{f} X} |f^*\mathscr{F}|_\Delta$$

此外，权重 0 分量总能恢复 X 的函数代数（即使 X 不是 Artin）。

引理 1.4.9. 存在一个自然增广映射，指向全局函数代数（视为集中于权重0的分次混合代数）：

$$\mathbf{DR}(X) \to \mathscr{O}_X(X)$$

证明。 对于任意分次混合代数，都存在一个自然映射指向其权重 0 部分（视为集中于权重 0 的分次混合代数）。特别地，我们得到一个映射：

$$\mathbf{DR}(X) \to \mathbf{DR}(X)(0)$$

感谢命题 1.4.4，我们得到一个等价：

$$\mathbf{DR}(A)(0) \simeq A$$

因此，我们可以使用定义 1.1.20 并证明：

$$\mathbf{DR}(X)(0) \simeq \lim_{\mathbf{Spec}(A)\to X} \mathbf{DR}(A)(0) \simeq \lim_{\mathbf{Spec}(A)\to X} A \simeq \mathscr{O}_X(X)$$

□

定义 1.4.10 ([CPT+17，定义 2.3.1])。 给定一个映射 $f : Y \to X$（导出栈）且 $X = \text{谱}(A)$，我们可以将 $f : Y \to X$ 的相对德拉姆分次混合代数定义为：

$$\mathbf{DR}(Y/X) := \lim_{\mathbf{Spec}(B)\xrightarrow{f} Y} \mathbf{DR}(A/B)$$

引理 1.4.11. 设 $X \to Y \to Z$ 是导出栈之间的态射，使得 $X = \text{谱}(A)$ 和 $Y = \text{谱}(B)$ 都是仿射的。那么存在一个分次混合复形之间的态射：

$$\mathbf{DR}(X/Z) \otimes_{\mathbf{DR}(X)} \mathbf{DR}(Y) \to \mathbf{DR}(X/Y)$$

此外，如果 Z 也是仿射的，那么这就是一个等价。

证明。 这是自然态射：

$$\begin{aligned}
\mathbf{DR}(X/Z) \otimes_{\mathbf{DR}(A)} \mathbf{DR}(B) &\simeq \left(\lim_{\mathbf{Spec}(C)\to Z} \mathbf{DR}(C/A)\right) \otimes_{\mathbf{DR}(A)} \mathbf{DR}(B) \\
&\to \lim_{\mathbf{Spec}(C)\to Z} \left(\mathbf{DR}(C/A) \otimes_{\mathbf{DR}(A)} \mathbf{DR}(B)\right) \\
&\simeq \lim_{\mathbf{Spec}(C)\to Z} (\mathbf{DR}(C/B)) \\
&\simeq \mathbf{DR}(X/Y)
\end{aligned}$$

当极限与张量积可交换时，这就是一个等价。如果 Z 是仿射概形范畴中的对象，情况便是如此。□

1.4.2. 移位的（闭） p-微分形式。

回顾一下， [PTVV13] 中定义了分类栈 $\mathscr{A}^p(\bullet, n)$和 $\mathscr{A}^{p,\,cl}(\bullet, n)$，它们分别对应 n 移位微分 p形式空间和 n移位闭微分 p形式空间。本节将回顾它们的定义和基本性质。

定义 1.4.12。 设 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$。 p次数为 n 的 p-微分形式空间以及在 A 上的闭 p次数为 n -微分形式空间分别定义为：

$$\mathscr{A}^p(A, n) := \underset{\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{gr}}}{\mathrm{Map}} \left(k[-n-p]((-p)), \mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(A)\right) \simeq \left|\left(\mathrm{Sym}^p \mathbb{L}_A[-1]\right)[n+p]\right|_\Delta$$

$$\mathscr{A}^{p,\mathrm{cl}}(A, n) := \underset{\mathrm{Mod}_k^{\epsilon-\mathrm{gr}}}{\mathrm{Map}} \left(k[-n-p]((-p)), \mathbf{DR}(A)\right)$$

其中， $k[-n-p]((-p))$ 是一个集中在权重 p和次数 $n+p$上的分次（混合）复形。下文中，我们将垂直微分，即 $\mathbb{L}_A$ 上的微分，记为 δ；将混合微分，即德拉姆微分，记为 d_{dR}。

由 [PTVV13 命题 1.11], 可知， 函子 $\mathscr{A}^p(-, n)$ 和 $\mathscr{A}^{p,\,cl}(-, n)$ 实际上都是栈，因此我们可以将次数为 n 的（闭） p-微分形式的定义推广到任意导出栈。

定义 1.4.13. 导出栈 X 上次数为 n 的 p-形式的空间是映射空间：

$$\mathscr{A}^p(X, n) := \underset{\mathbf{dSt}}{\mathrm{Map}} \left(X, \mathscr{A}^p(\bullet, n)\right) \simeq \underset{\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{gr}}}{\mathrm{Map}} \left(k[-n-p]((-p)), \mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(X)\right)$$

导出栈 X 上的次数为 n 的闭 p-形式的空间为：

$$\mathscr{A}^{p,\mathrm{cl}}(X, n) := \underset{\mathbf{dSt}}{\mathrm{Map}} \left(X, \mathscr{A}^{p,\mathrm{cl}}(\bullet, n)\right) \simeq \underset{\mathrm{Mod}_k^{\epsilon-\mathrm{gr}}}{\mathrm{Map}} \left(k[-n-p]((-p)), \mathbf{DR}(X)\right)$$

现在，以下命题指出，当 X 是导出 Artin 叠时，移位微分形式的空间是 X上拟凝聚层的截面空间。

命题 1.4.14 （ [PTVV13]中的命题 1.14）。 设 X 是一个导出 *Artin* 叠（见注 *1.1.13*） ，且 $\mathbb{L}_X$ 是其余切复形。那么存在一个等价：

$$\mathscr{A}^p(X, n) \simeq \underset{\mathbf{QC}(X)}{\mathrm{Map}} \left(\mathscr{O}_X, \left(\mathrm{Sym}^p_{\mathscr{O}_X} \mathbb{L}_X[-1]\right)[p+n]\right)$$

注1.4.15。对于一个导出 Artin 叠， n-移位 p-形式因此等价于一个截面的数据：$\left(\text{对称代数}^p_{\mathscr{O}_X} \mathbb{L}_X[-1]\right)[p+n]$。更进一步，得益于推论1.2.16， T^*X 的截面空间等价于以下空间： n-移位1-形式，其定义在 X上：

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{dSt}_{/X}}(X, T^*[n]X) \simeq \mathscr{A}^1(X, n)$$

注 1.4.16。更具体地说，根据 [Cal21] 和 [CPT+17]，我们可以明确描述导出 Artin 叠 p 上次数为 n 的（闭）形式。次数为 X的形式由一个（导出的）整体截面给出 $p\,n$

$$\omega \in \mathbf{DR}(X)(p)[n+p] \simeq \Gamma\left(\left(\mathrm{Sym}^{p}_{\mathscr{O}_X}\mathbb{L}_X[-1]\right)[n+p]\right)$$

使得 $\delta\omega = 0$。
次数为 n 的闭 p-形式是一个半无限序列 $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots$，满足

$$\omega_i \in \mathbf{DR}(p+i)[n+p] = \Gamma\left(\left(\mathrm{Sym}^{p+i}_{\mathscr{O}_X}\mathbb{L}_X[-1]\right)[n+p]\right)$$

使得 $\delta\omega_0 = 0$ 且 $d\omega_i = \delta\omega_{i+1}$。等价地，闭意味着 ω 是以下空间中的一个闭元素

$$F^p\mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}(X) \simeq \Gamma\left(\prod_{i\geq 0}\left(\mathrm{Sym}^{p+i}_{\mathscr{O}_X}\mathbb{L}_X[-1]\right)[n+p]\right)$$

其总次数由 $n+p+i$ 给出，并配备总微分。

事实上，一般而言（不假设 X Artin），我们有如下对（闭）移位 p-形式空间的描述（参见 [PTVV13，定义 1。13]）：

命题1.4.17。 对于 X 导出栈，我们也可以如下描述（闭合）微分形式的空间：
f

$$\mathscr{A}^p(X,n) \simeq \left|\mathbf{DR}(p)(X)[n+p]\right|_\Delta$$

$$\mathscr{A}^{p,\mathrm{cl}}(X,n) \simeq \left|F^p\mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}(X)[n+p]\right|_\Delta \simeq \left|\prod_{i\geq p}\mathbf{DR}(p+i)(X)[n+p]\right|_\Delta$$

以及总微分。

定义 1.4.18。 自然投影：

$$F^p\mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}(X)[n] \to \mathbf{DR}(p)(X)[n+p]$$

诱导出映射 $\mathscr{A}^{p,\mathrm{cl}}(X,n) \to \mathscr{A}^p(X,n)$，该映射会忘却闭合结构。它本质上将

$$\omega := \omega_0 + \omega_1 + \cdots \mapsto \omega_0$$

而 ω 在此映射下的像称为 ω的底层 p-次 n 形式 。我们通常将其记为 ω_0。

p-形式（次数为 n ）的所有闭合构成一个空间：

定义 1.4.19. 设 $\alpha \in \mathscr{A}^p(X,n)$，那么 α 的所有闭包空间称为 α 的键空间 ，记作 $\mathbf{key}(\alpha)$。它由以下同伦拉回给出：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{key}(\alpha) & \longrightarrow & \mathscr{A}^{p,\mathrm{cl}}(X,n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \star & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{A}^p(X,n) \end{array}$$

命题 1.4.20. $\mathbf{DR}(X)$ 的混合微分诱导出一个映射：

$$d_{\mathrm{dR}} : \mathscr{A}^{p}(X,n) \to \mathscr{A}^{p+1,\mathrm{cl}}(X,n)$$

其平方为零。

证明。 混合微分将权重至少增加1，因此诱导出映射 d_{dR}： $F^{p}\mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}(X) \to F^{p+1}\mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}(X)$，其次数为 1。由定义 C.1.12，我们有：

$$F^{p}\mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{cdga}^{\epsilon-\mathrm{gr}}}(k((-p))[-n-p], \mathbf{DR}(X))$$

□

注 1.4.21. 给定导出 Artin 栈的一个映射 $f: Y \to X$，我们定义$\mathscr{A}^{p,\ (\mathrm{cl})}(Y/X,n)$ 为相对于 X 的 n-移位（闭） p-微分形式在 Y 上的空间，即下述自然映射的同伦余纤维：

$$f^{*} : \mathscr{A}^{p,(\mathrm{cl})}(X,n) \to \mathscr{A}^{p,(\mathrm{cl})}(Y,n)$$

利用定义 1.4.10，我们可以证明[1] 相对形式可以直接通过相对 de Rham 复形 $\mathbf{DR}($ $Y/X)$获得。例如， n-移位的相对 p-微分形式等价于 $\left(\mathrm{Sym}^{p}_{\mathscr{O}_Y}\mathbb{L}_{Y/X}[-1]\right)[n+p]$的导出整体截面。

注 1.4.22. 我们称导出 Artin 叠 X 上次数为 n 的 p-形式 ω_0 可以提升为次数为 n 的闭合 p- 形式，若存在一族对于所有 $i>0$ 都有的 $(p+i)$- 形式 ω_i，次数为 $n-i$，使得 $\omega=\omega_0+\omega_1+\cdots$ 在 $F^{p}\mathrm{DR}^{\mathrm{cpl}}(X)[n]$ 中是闭合的。在这种情况下，我们可以看到，通常 $d_{\mathrm{dR}}\omega_0$ 不等于 0，但借助 $d_{\mathrm{dR}}\omega_0 = D\left(-\sum_{i>0}\omega_i\right)$ 与 0 同伦。选择这样的同伦等同于为次数为 n 的 p-形式赋予闭合结构。

因此，闭合不再是底层次数为n 的 p-形式的一种性质，而是由 $d_{\mathrm{dR}}\omega_0$ 与零之间的同伦所给出的结构。

警告1.4.23. 当我们处理形式栈时，它们通常不是 Artin 栈，因此 n-移位 p-微分形式可能并非总是来自 $\left(\text{对称代数}^{p}_{\mathscr{O}_X}\mathbb{L}_X[-1]\right)[p+n]$ 的导出整体截面。这会给在形式栈上定义辛结构，或更一般地定义任何种类的“非退化条件”带来问题。为避免这一问题，回顾推论 1.4.7，我们有一个分次空间之间的映射：

$$\Gamma\left(\mathscr{O}_X, \mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{O}_X}\mathbb{L}_X[-1]\right) \to |\mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(X)|_{\Delta}$$

因此，为了仍然将 p-微分形式视为以下对象的整体截面：p-次对称幂，属于 $\mathbb{L}_X[-1]$ （这是我们在第 2 节讨论非退化条件时所需要的），其中 X 是一个带有余切复形的导出栈

[1]因为定义相对德拉姆分次混合代数的推出在几何实现下保持不变。

，我们将 p良好-微分形式的次数为 n 定义为次数为n 的 p-微分形式，且它们属于映射的像：

$$\Gamma\left(\mathscr{O}_X, \left(\mathrm{Sym}^p_{\mathscr{O}_X} \mathbb{L}_X[-1]\right)[n+p]\right) \to |\mathbf{DR}(p)(X)[n+p]|_\Delta \simeq \mathscr{A}^p(X,n)$$

更一般地，$\mathbf{DR}(p)(X)[n+p]$ 中的一个元素将称为良好的，如果它属于注1.4.8中的映射的像：

$$\underset{\mathbf{QC}(X)}{\underline{\mathrm{Hom}}}^{\mathrm{gr}}\left(\mathscr{O}_X, \left(\mathrm{Sym}^p_{\mathscr{O}_X} \mathbb{L}_X[-1]\right)[n+p]\right) \to \mathbf{DR}(X)(p)[n+p]$$

如果一个闭元素所对应的 p-微分形式是良好的，那么我们就称该闭元素是良好的。换言之，次数为 n 的良好闭 p-微分形式空间是下图的拉回：

$$\begin{array}{ccc} & & \mathscr{A}^{p,\mathrm{cl}}(X,n) \\ & & \downarrow \\ \Gamma\left(\mathscr{O}_X, \left(\mathrm{Sym}^p_{\mathscr{O}_X} \mathbb{L}_X[-1]\right)[n+p]\right) & \longrightarrow & \mathscr{A}^p(X,n) \end{array}$$

类似地，良好的闭DR(X)(p)$[n+p]$ 中的元素是下图拉回中的闭元素：

$$\begin{array}{ccc} & & F^p\mathbf{DR}^{\mathrm{cpl}}(X)[n+p] \\ & & \downarrow \\ \underset{\mathbf{QC}(X)}{\underline{\mathrm{Hom}}}^{\mathrm{gr}}\left(\mathscr{O}_X, \left(\mathrm{Sym}^p_{\mathscr{O}_X} \mathbb{L}_X[-1]\right)[n+p]\right) & \longrightarrow & \mathbf{DR}(X)(p)[n+p] \end{array}$$

注意，如果 X 是 Artin 良好的，那么一般对象与其重合（因为前述拉回图中的水平映射都是等价）。

记号 1.4.24。从现在起，我们将滥用记号，用 $\mathscr{A}^p(X,\ n)$ 和 $\mathscr{A}^{p,\ \mathrm{cl}}(X,\ n)$ 表示 良好（闭） p-形式的空间，其次数为 n。此外，我们将直接称它们为次数为 p 的（闭） n-形式（省略“良好”一词）。特别地，根据定义，我们得到命题 1.4.14 的类似结论：

$$\mathscr{A}^p(X,n) \simeq \underset{\mathbf{QC}(X)}{\mathrm{Map}}\left(\mathscr{O}_X, \left(\mathrm{Sym}^p_{\mathscr{O}_X} \mathbb{L}_X[-1]\right)[p+n]\right)$$

2. 导出辛几何中的新构造

遵循导出几何的理念，导出辛几何是经典辛几何的一种扩展，在其中我们考虑移位辛结构及其之间的同伦。此外，我们同样希望这类对象在导出交和导出商方面表现良好。导出商的导出辛几何研究是第 4 节的主题。本节将回顾并进一步阐述这样一种观点：取导出“拉格朗日交”可以由已有的移位辛结构构造出新的辛结构。

在第 2.1节中，我们回顾辛结构、拉格朗日结构、拉格朗日对应以及拉格朗日纤维化结构的主要定义和示例。

随后，第 2.2 节致力于通过导出拉格朗日交构造新的结构。特别地，我们回顾在拉格朗日态射的导出交上构造移位辛结构的构造（命题 2.2.1），并将这一结果推广到新拉格朗日纤维化的构造（定理 2.2.7）。

随后，第 2.2.3 节描述拉格朗日子空间（以及拉格朗日对应）的（高阶）范畴，以再次给出一个从导出拉格朗日交产生新拉格朗日对应的结果（定理 2.2.23）。这将使我们能够在第 4节中，对动量映射取导出“等变拉格朗日交”。

最后，第 2.3 节 将给出这些新拉格朗日纤维化结构的具体构造示例。

2.1. **导出辛几何**。

本节将回顾辛 **c,**
几何、拉格朗日结构以及导出栈的拉格朗日纤维化结构。我们始终假设我们的导出栈具有余切复形。

回想一下，警告 1.4.23 告诉我们，底层的 p-形式来自余切复形移位对称幂的导出整体截面。这样可以确保我们将要定义的所有非退化条件都有意义。换言之，给定一个导出栈 X，一个2-形式，其次数为n ，由以下映射给出：

$$\omega_0 \in \underset{\mathbf{QC}(X)}{\mathrm{Map}} \left(\mathscr{O}_X, \left(\mathrm{Sym}^2_{\mathscr{O}_X} \mathbb{L}_X[-1]\right)[n+2]\right)$$

2.1.1. 移位辛结构。

定义 2.1.1. 我们称次数为 n 的闭 2-形式是非退化的，如果其底层的2-形式 ω_0 （定义 1.4.18）的次数为 n 并诱导出一个拟同构：

$$\omega_0^\flat : \mathbb{T}_X \to \mathbb{L}_X[n]$$

我们用 $\mathscr{A}^{2,\mathrm{nd}}(X,n)$ 表示由非退化n-移位 2-形式生成的 $\mathscr{A}^2(X,n)$ 子空间。

定义 2.1.2. n-移位辛结构 是 X 上非退化的 n-移位闭 2-形式。我们还可以将 n-移位辛结构的空间定义为以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Symp}(X,n) & \longrightarrow & \mathscr{A}^{2,\mathrm{nd}}(X,n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{A}^{2,\mathrm{cl}}(X,n) & \longrightarrow & \mathscr{A}^{2}(X,n) \end{array}$$

例 2.1.3. 假设 X 属于一个导出栈。与经典情形一样，我们可以构造典范李乌维尔1形式。为此，考虑恒等映射：

$$\mathrm{id} : T^*[n]X \to T^*[n]X$$

根据命题 1.2.15，它由以下数据确定：

- the projection $\pi : T^*[n]X \to X$.
- a section $\lambda_X \in \underset{\mathbf{QC}(T^*[n]X)}{\mathrm{Map}} \left(\mathscr{O}_{T^*[n]X}, \pi^*\mathbb{L}_X[n]\right)$.

由于存在自然映射 $\pi^*\mathbb{L}_X[n] \to \mathbb{L}_{T^*[n]X}[n]$，$\lambda_X$会在 1-形式 $T^*[n]X$上诱导一个称为典范 1-形式的对象。这个1-形式会诱导一个闭 2-形式 $d_{\mathrm{dR}}\lambda_X$；当 X 是局部有限表示的 Artin 栈时，该形式恰好是非退化的（非退化性的证明见 [Cal19，第 2 节。2] ）。

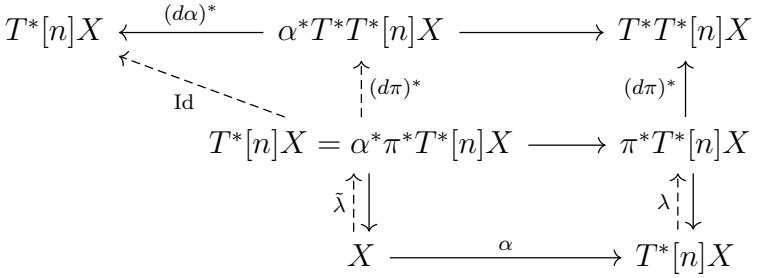
移位余切丛上的典范 1-形式具有泛性，即它满足通常的泛性质：

引理 2.1.4. 若 X 是一个栈，给定一个次数为 n的 1-形式 $\alpha : X \to T^*[n]X$，则有 $\alpha^*\lambda_X = \alpha$。

证明。一般而言，若取 $f : X \to Y$，则一个 n-移位 1-形式 β的拉回由交换图中的映射 $f^*\beta$ 描述：

$$\begin{array}{ccccc} T^*[n]X & \xleftarrow{(df)^*} & f^*T^*[n]Y & \longrightarrow & T^*[n]Y \\ & \nwarrow^{f^*\beta} & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow \beta \\ & & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

考虑到 λ 可通过 $\pi^*T^*[n]X$进行分解，我们考虑以下图表：



这证明，将 λ_X 视为 $T^*[n]X$上的次数为 n 的 1-形式时，沿 α 的拉回与截面 λ_X 沿 α 的拉回相同： $T^*[n]X \to \pi^*T^*[n]X$。

我们将次数为 n 的 $\mathrm{Map}\left(\mathscr{O}_X, \mathbb{L}_X[n]\right)$ 中的相应截面记为 α_1。我们利用拟凝聚层(X)这一事实：$\mathrm{Id} \circ \alpha = \alpha$:

– 一方面， α可由以下内容完全描述： $\alpha_1 \in \mathrm{Map}\left(\mathscr{O}_X, \mathbb{L}_X[n]\right)$。 QC$(X)$

– 另一方面，映射 $\mathrm{Id}: T^*[n]X \to T^*[n]X$ 可描述如下：

$$\pi : T^*[n]X \to X$$

$$\lambda_X \in \underset{\mathbf{QC}(T^*[n]X)}{\mathrm{Map}} \left(\mathscr{O}_{T^*[n]X}, \pi^*\mathbb{L}_X\right)$$

因此，复合[1] $\mathrm{Id} \circ \alpha$ 也是 π 的一个截面，并可由以下内容描述：

$\alpha^*\lambda_X \in \mathrm{Map}\left(\mathscr{O}_X, \mathbb{L}_X[n]\right)$。 QC$(X)$

这证明了 $\alpha^*\lambda_X = \alpha_1$。由于这些映射刻画了它们所表示的 π 的截面，因此我们有 $\alpha^*\lambda_X = \alpha$。 □

例2.1.5。在引理4.1.25中，我们将看到，如果 G 是一个仿射代数群，那么：

$$\left[\mathfrak{g}^*[n]\Big/G\right] \simeq T^*[n+1]\mathbf{B}G$$

结合例2.1.3，这表明 $\left[\mathfrak{g}^*[n]\Big/G\right]$ 具有典范的$(n+1)$-移位辛结构。

2.1.2. 拉格朗日结构。

我们回顾 [PTVV13] 中关于拉格朗日结构和拉格朗日对应的定义及标准性质。这些概念将构成后文讨论的所有“拉格朗日交”定理的基础。

[1]如果我们有一个复合 $Y \to \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to \mathbb{A}_X(\mathscr{G})$，其中 $Y \to \mathbb{A}_X(\mathscr{F})$ 由 $f: Y \to X$and $s_f \in$Map$(\mathscr{O}_Y, f^*\mathscr{F})$ 给出，而 $g: \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to \mathbb{A}_X(\mathscr{G})$ 由 $\pi: \mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to X$and s_g 诱导自一个映射 $g: \mathscr{F} \to \pi^*\mathscr{G}$，那么复合 $g \circ f$ 由 $f: Y \to X$ and$s_{g\circ f} \in$Map$(\mathscr{O}_Y, f^*\pi^*\mathscr{G})$ 给出，其中 $s_{g\circ f} := h \circ \pi^* s_f$。

回顾一下，经典地，拉格朗日子流形是辛流形 M 中的一个子流形 $f : L \hookrightarrow M$，满足：

– 它是各向同性的，即 $f^*\omega = 0$。– ω 诱导出到 f 的余法丛的一个同构：

$$TL \to N^*f$$

T第一个条件我们将其诠释为 f上各向同性结构 的数据 .

定义 2.1.6. 设 $f : L \to X$ 是导出 Artin 叠之间的一个映射。f 上的各向同性结构 是指在 $\mathscr{A}^{2,\mathrm{cl}}(L,n)$ 中的一个同伦，它连接 $f^*\omega$ 与 0，其中 n为移位辛结构 $\omega : \star \to \mathrm{Symp}(X,n)$ 的移位量。f 上的各向同性结构构成一个空间，由以下同伦拉回描述：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Iso}(f,n) & \longrightarrow & \mathbf{Symp}(X,n) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \star & \xrightarrow{0} & \mathscr{A}^{2,\mathrm{cl}}(L,n) \end{array}$$

若固定给定的 n-移位辛结构 $\omega : \star \to \mathrm{Symp}(X,n)$，则可定义 f 在 ω 处的各向同性结构空间，其定义由以下拉回给出：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Iso}(f,\omega) & \longrightarrow & \star \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega} \\ \mathbf{Iso}(f,n) & \longrightarrow & \mathbf{Symp}(X,n) \end{array}$$

注 2.1.7. 取 γ 为 $\mathscr{A}^{p,\mathrm{cl}}(X,n)$ 中连接 α 与 β 的一个同伦。则 γ 由 $\left|F^p\mathrm{DR}^{\mathrm{cpl}}(X)[n+p]\right|_\Delta$ 中 α 与 β 的像之间的一个同伦给出，该同伦满足其底层的权重 2 分量：

$$\gamma_0 : \alpha_0 \rightsquigarrow \beta_0$$

等价于 $\Gamma\left(\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}\mathbb{L}_X[-1]\right)[n+p]\right)$ 中的一个同伦。

注 2.1.8. 更明确地说，若 X 是 Artin，则一个各向同性结构由一族总次数为 $(p+n-1)$、$(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的微分形式给出：

$$\gamma_i \in \mathbf{DR}(L)(p+i)[p+n+i-1]$$

使得 $\delta\gamma_0 = f^*\omega_0$和 $\delta\gamma_i + d\gamma_{i-1} = f^*\omega_i$。这可以改述为 $D\gamma = f^*\omega$，换言之，$f^*\omega$在 $F^p\mathrm{DR}^{\mathrm{cpl}}(X)$ 中是恰当的，并且 γ确实是 $f^*\omega$ 与 0 之间的一个同伦。

成为拉格朗日所需的第二个条件，是各向同性结构 γ 的一个非退化条件。

定义 2.1.9. 各向同性结构 γ 在 $f\colon\ L \to X$ 被称为 f 上的拉格朗日结构 当首项 γ_0，视为态射[1] $\mathbb{T}_L \to f^*\mathbb{T}_X$上的各向同性结构时，是非退化的。若以下零伦序列[2]（通过 γ_0与 0 同伦）是纤维化的，则称 γ_0是 非退化的：

$$\mathbb{T}_L \longrightarrow f^*\mathbb{T}_X \simeq f^*\mathbb{L}_X[n] \longrightarrow \mathbb{L}_L[n] \tag{2}$$

$$(f^*\omega_0)^\flat$$

f 上的 n-移位拉格朗日结构空间记作 $\mathbf{Lag}(f,n)$。存在如下空间之间的自然态射：

$$\mathbf{Lag}(f,n) \to \mathbf{Iso}(f,n) \to \mathbf{Symp}(X,n)$$

注 2.1.10。 将序列 (2) 称为纤维化，可以重新表述为涉及余法丛的一个更经典的条件。由于 拟凝聚层(X) 是一个稳定的 ∞-范畴， $f^*\mathbb{L}_X[n] \to \mathbb{L}_L[n]$的同伦纤维为 $\mathbb{L}_{L/X}[n-1]\colon\ = \mathbb{L}_f[n-1]$非退化条件可以重新表述为：自然映射$\Theta_f$：$\mathbb{T}_L \to \mathbb{L}_f[n-1]$ 是一个拟同构。

注 2.1.11。与经典情形不同，对于态射 f而言，拉格朗日性是一种结构 而非性质。为简化记号，我们将不严格地称态射 $f\colon\ X \to Y$ 是 拉格朗日的，意指我们考虑的是 f，并且在 f 上固定一个拉格朗日结构，同时固定一个辛结构 ω。

示例2.1.12。 一个 1-形式，其次数为 n 在一个 Artin 栈 X 上等价于一个截面 α：$X \to T^*[n]X$。当且仅当 α具有闭合，即 键（α）非空时，该截面是一个拉格朗日态射。这是 [Cal19，定理 215]。

命题 2.1.13。 存在一个典范同伦等价 各向同性结构空间（α） $\to$ 键（α），介于 α 上的 1-形式的各向同性结构空间与 α 的键空间之间。

证明。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{key}(\alpha) & \longrightarrow & \mathscr{A}^{1,\mathrm{cl}}(X,n) & \longrightarrow & \star \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \star & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{A}^{1}(X,n) & \xrightarrow{d_{\mathrm{dR}}} & \mathscr{A}^{2,\mathrm{cl}}(X,n) \end{array} \tag{3}$$

根据键(α) 在定义 1.4.19中的定义，最左边的方形是笛卡尔的。根据定义，外方形的拉回是 各向同性结构空间(α)，因为 $d_{\mathrm{dR}}\alpha = \alpha^*\omega$ （由刘维尔 1-形式的泛性质可知，引理 2.1.4）。结果表明，最右边的方形也是笛卡尔的。这仅仅意味着，次数为某值的闭

[1]由 γ_0 与 $f^*\omega_0$ 之间的同伦 0给出。[2]该序列之所以有意义，是因为辛结构的底层权重 2 分量与该同伦都来自导出整体截面，正如注 2.1.7中所述。

次数为 n 的 1-形式空间，与次数为 n 且其德拉姆微分同伦于 0 的 1-形式空间相同。由此可知，键(α) 和各向同性结构空间(α) 都是外方形的拉回，因此二者典范同伦等价。□

注 2.1.14。 事实证明， [Cal19，定理2。15] 指出， α 上的所有各向同性结构（或等价地， α 到闭形式的提升）实际上都是非退化的，这意味着例 2.1.12 成立，甚至意味着 α 上的拉格朗日结构空间等价于 α的键空间。

例2.1.15。 设 G 是一个仿射代数群。映射 $\mathbf{B}G \to \left[\mathfrak{g}^*[n]/G\right]$由 G-等变包含映射 $0 \to \mathfrak{g}^*[n]$ 诱导，且是拉格朗日的。事实上，在引理 4.1.25 给出的等价下，它等价于零截面：

$$\mathbf{B}G \to T^*[n+1]\mathbf{B}G$$

例2.1.16。 我们将在第 4.1.3 节和 4.3.1 节看到，如果 G 是一个仿射代数群，那么以下映射具有如下拉格朗日结构：

– 自然投影（命题 4.1.27）：

$$\mathfrak{g}^* \to \left[\mathfrak{g}^*/G\right]$$

– 若 $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$ 是动量映射，则它诱导出一个拉格朗日结构（命题4.3.1）：

$$[\mu] : \left[X/G\right] \to \left[\mathfrak{g}^*/G\right]$$

– 映射

$$\mathbf{B}G \to \left[\mathfrak{g}^*/G\right]$$

对应于零截面 $\mathbf{B}G \to T^*[n+1]\mathbf{B}G$，通过引理4.1.25中的等价。

引理 2.1.17 ([Cal21，例 1。26])。 考虑映射 $X \to \star_n$，其中 $\star_n$ 是赋予了规范 n-移位辛结构的点，该结构由 0给出。则此映射上的拉格朗日结构等价于 $(n-1)$-移位辛结构，定义在 X上。

证明。 取一个各向同性结构 γ 于 p。我们知道 γ 是 0 与 0 之间的同伦，这意味着 $D\gamma = 0$。因此 γ是次数为 $n-1$的闭 2-形式。我们要证明， γ 作为各向同性结构是非退化的，当且仅当它作为 X上的闭 2-形式是非退化的。注 2.1.10中对拉格朗日结构非退化性的描述，对应于要求自然映射 $\mathbb{T}_X \to \mathbb{L}_X[n-1]$ 是拟同构。此映射依赖于 γ_0，我们要证明此映射实际上是 $\gamma_0^\flat$。该映射是符合以下同伦交换图的自然映射：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{T}_X & \longrightarrow & \mathbb{L}_X[n-1] & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \xrightarrow{0^\flat} & 0 & \longrightarrow & \mathbb{L}_X[n]
\end{array}$$

我们可以通过将同伦交换图严格化来证明这一点：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{T}_X & \xrightarrow{p^*\omega^\flat=0} & \mathbb{L}_X[n] \\
& \searrow & \nearrow \\
& 0 &
\end{array}$$

注意，该图表本身已经交换，但我们借助同伦 γ_0 将其视为同伦交换。我们利用同伦 γ_0 将前面的图表严格化，从而得到：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{T}_X & & \xrightarrow{p^*\omega^\flat=0} & & \\
& \searrow^{\gamma_0^\flat+0} & & & \\
& & \mathbb{L}_X[n-1]\oplus\mathbb{L}_X[n] & \xrightarrow{\mathrm{pr}} & \mathbb{L}_X[n]
\end{array}$$

投影的同伦纤维以及严格纤维

$$\mathrm{pr}:\mathbb{L}_X[n-1]\oplus\mathbb{L}_X[n]\to\mathbb{L}_X[n]$$

是 $\mathbb{L}_X[n-1]$，因此我们得到的自然映射为 $\gamma_0^\flat$：$\mathbb{T}_X\to\mathbb{L}_X[n-1]$。

由于各向同性结构 γ 的非退化条件等价于映射 $\gamma_0^\flat$ 是拟同构，因此我们已经证明：各向同性结构 γ 是 X 上的（$n-1$）移位辛结构，当且仅当它作为 $X\to\star_n$ 上的各向同性结构是非退化的。□

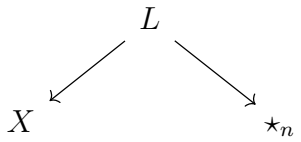
与拉格朗日态射密切相关的一个概念是拉格朗日对应。我们将在第 4 节看到，它们是辛约化的核心；在第 5 节中，我们将拉格朗日对应作为“广义辛约化”概念及 BV 构造的定义性特征。

定义 2.1.18。设 X 和 Y 是带有 n-移位辛结构的导出 Artin 叠。从 X 到 Y 的拉格朗日对应 由一个导出 Artin 叠 L 及其态射给出：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
X & & & & Y
\end{array}$$

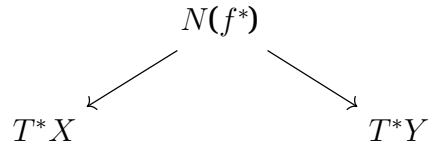
以及映射 $L\to X\times\overline{Y}$ 上的拉格朗日结构，其中 $X\times\overline{Y}$ 赋有 n 移位辛结构 $\pi_X^*\omega_X-\pi_Y^*\omega_Y$。

$L \to X$ 上的拉格朗日结构等价于从 X 到 $\star$的拉格朗日对应。



关于拉格朗日对应及其性质的更深入研究见第 2.2.3 节。

例 2.1.19 ([Cal21，例 2.3])。 给定一个映射 $f\colon X \to Y$，其图 $X \to X \times Y$具有余法丛 $N(f^*) := T^*Y \times_X Y$并带有一个拉格朗日对应：



此外，这在 f 中是自然的。

2.1.3. 拉格朗日纤维化。

本节回顾拉格朗日纤维化的定义及其标准性质（参见 [Cal19]）。

定义 2.1.20. 设 $f\colon Y \to X$ 是一个导出栈之间的映射。 f 上的拉格朗日纤维化 由以下数据给出：

– 一个同伦，记作 γ，连接 $\omega_{/X}$ 与 0，其中 $\omega_{/X}$ 是 ω在自然映射 $\mathscr{A}^2$,cl$(Y, n) \to \mathscr{A}^2$,cl$(Y/X, n)$ 下的像（参见注 1.4.21），其中 n-移位辛结构 $\omega\colon \star \to$ Symp(Y, n)。这构成一个各向同性纤维化空间[1]，由以下拉回给出：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{IsoFib}(f,n) & \longrightarrow & \mathbf{Symp}(Y,n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \star & \xrightarrow{0} & \mathscr{A}^{2,\mathrm{cl}}(Y/X,n) \end{array}$$

– 一个非退化条件，指出以下序列（通过 γ_0 同伦为 0）是纤维化的[2]

$$\mathbb{T}_{Y/X} \to \mathbb{T}_Y \simeq \mathbb{L}_Y[n] \to \mathbb{L}_{Y/X}[n]$$

[1]即使 ω 不是非退化的，通过将$\mathbf{Symp}(Y, n)$ 替换为 $\mathscr{A}^{2,\mathrm{cl}}(Y, n)$，各向同性纤维化的概念仍然有意义。[2]这里再次说明，该序列之所以有意义，仅仅是因为注 2.1.7。

特别是，非退化条件可以改述为：存在一个典范等价 α_f： $\mathbb{T}_{Y/X} \to f^*\mathbb{L}_X[n]$（类似于注 2.1.10 中拉格朗日态射的判据），使得以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{T}_{Y/X} & \xrightarrow{\alpha_f} & f^*\mathbb{L}_X[n] & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_Y & \xrightarrow{\omega^\flat} & \mathbb{L}_Y[n] & \longrightarrow & \mathbb{L}_{Y/X}[n] \end{array} \tag{4}$$

由非退化对象生成的 IsoFib(f,n) 子空间是 f 上拉格朗日纤维化结构的空间，记作 LagFib(f,n)。存在自然映射 LagFib(f,n) $\to$ IsoFib(f,n) $\to$ Symp(Y,n)。

与各向同性态射和拉格朗日态射的情形类似，我们可以在 Y 上固定一个 n-移位辛结构，并将 f 在给定的 ω 处的拉格朗日纤维化和各向同性纤维化定义为以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} \text{IsoFib}(f,\omega) & \longrightarrow & \star \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega} \\ \text{IsoFib}(f,n) & \longrightarrow & \text{Symp}(Y,n) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{LagFib}(f,\omega) & \longrightarrow & \star \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega} \\ \text{LagFib}(f,n) & \longrightarrow & \text{Symp}(Y,n) \end{array}$$

and

注 2.1.21. 为简化记号，我们将不严格地称一个态射f： $X \to Y$ 是拉格朗日纤维化，当我们考虑带有固定移位辛结构 ω 的 f，以及在 ω处 f上的固定拉格朗日纤维化结构时。

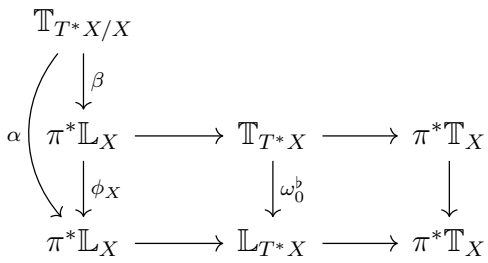
例 2.1.22. 自然投影 π_X： $T^*[n]X \to X$ 是一个拉格朗日纤维化。刘维尔 1-形式是 $\pi_X^*\mathbb{L}_X[n]$的一个截面，它属于以下纤维序列：

$$\pi_X^*\mathbb{L}_X[n] \to \mathbb{L}_{T^*[n]X}[n] \to \mathbb{L}_{T^*[n]X/X}[n]$$

因此，由 λ_X在 $\mathbb{L}_{T^*[n]X/X}[n]$中诱导的 1-形式同伦于 0。非退化条件较为复杂，其证明见 [Cal19]的第 2.2.2 节。事实证明，表示非退化条件的态射 α_{π_X}由命题 1.2.28中描述的典范等价给出。

命题 2.1.23. 若 X 是一个导出 *Artin* 叠，那么例*2.1.22* 中表达移位余切叠上典范拉格朗日纤维化非退化性的等价 α_{π_X}: $\mathbb{T}_{T^*[n]X/X} \to \pi_X^*\mathbb{L}_X[n]$就是命题 *1.2.28*中的典范拟同构。

证明。 考虑以下图表：



根据 [Cal19，引理 2.6], 映射 ϕ_X 关于 X 具有自然性，因此是一个等价（[Cal19，推论 2.7]）。此外，自然性意味着 ϕ_X 是乘以一个标量。通过 $X = \mathbb{A}^1$ 的局部坐标，不难看出这个标量实际上是 1[1]，因此 ϕ_X 是恒等映射。 □

引理 2.1.24. 设 $x : \star_n \to X$ 是 X 中的一个点。那么，给定 x 上的拉格朗日纤维化结构，其非退化条件由一个拟同构给出：

$$x^*\mathbb{T}_X \to x^*\mathbb{L}_X[n+1]$$

证明。 上的拉格朗日纤维化结构 $\star_n \to X$ 是在 $\mathscr{A}^{2,\,\mathrm{cl}}(\star_n/X,\ n)$中从 0 到其自身的一个同伦。如引理 2.1.17的证明所示，这由一个元素 $\gamma \in \mathscr{A}^{2,\,\mathrm{cl}}(\star_n/X,\ n-1)$给出。与引理2.1.17的证明类似，我们可以证明，γ 作为拉格朗日纤维化非退化，当且仅当它作为次数为 n的闭 2-形式非退化。归根结底，这仍然是因为拉格朗日纤维化的非退化判据中的自然态射实际上是 $\gamma_0^\flat : \mathbb{T}_{\star_n/X} \to \mathbb{L}_{\star_n/X}[n-1]$。

此外，我们有自然等价，$\mathbb{T}_{\star_n/X} \simeq x^*\mathbb{T}_X[-1]$和 $\mathbb{L}_{\star_n/X}[n-1] \simeq x^*\mathbb{L}_X[n]$，因为该序列

$$\mathbb{T}_{\star_n/X} \longrightarrow \mathbb{T}_{\star_n} \simeq 0 \longrightarrow x^*\mathbb{T}_X[n]$$

是纤维化的。证明至此完成。 □

例2.1.25。 自然映射 $\left[\mathfrak{g}^*/G\right] \to \mathbf{B}G$ 等价于投影$T^*[n+1]\mathbf{B}G \to \mathbf{B}G$ 通过引理4.1.25中的等价。因此，这是一个拉格朗日纤维化。

2.2. 由旧构造新构造。

本节将回顾如何通过取拉格朗日态射的导出交来构造新的移位辛结构（命题 2.2.1），然后将这一结果推广到构造新的拉格朗日纤维化（定理 2.2.7）。构造新的拉格朗日子空间和拉格朗日对应的操作性质十分良好，在第 2.2.3 节中，我们将利用这一点描述一个范畴以及

[1]这应当与这样一个事实有关：典范辛形式由 id : $T^*X \to T^*X$ 诱导而来，并且沿纤维没有膨胀。

拉格朗日子空间空间上的弱 2-范畴结构。这引出了另一种构造，它通过导出交产生新的拉格朗日对应（定理2.2.23）。

2.2.1. 拉格朗日态射的导出交。

命题 *2.2.1*（[*PTVV13*，第 *2.2*] 节）。设 Z 是一个带有 ω 的 n-移位辛结构的导出 *Artin* 叠。设 $f: X \to Z$ 和 $g: Y \to Z$ 是具有 γ 和 δ 拉格朗日结构的态射，分别定义在 f 和 g 上。那么，同伦拉回 $X \times_Z Y$ 具有一个规范的 $(n-1)$-移位辛结构，称为 ω 的留数，记作 $R(\omega, \gamma, \delta)$。

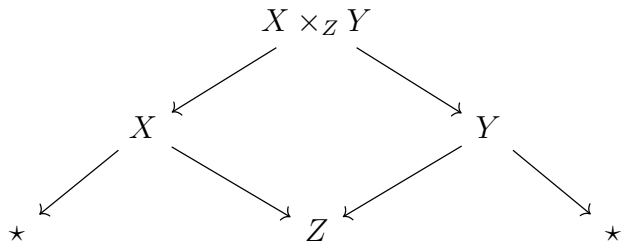
注 2.2.2。 若固定 f 和 g 如上所述，我们可以将前一个定理推广，得到一个空间之间的映射（参见 [Cal15] 中的定理 2.4）：

$$\mathbf{Lag}(f,n) \times_{\mathbf{Symp}(X,n)} \mathbf{Lag}(g,n) \to \mathbf{Symp}(X \times_Z Y, n-1)$$

例2.2.3。 导出临界点集按定义是两个闭 1-形式 s_0，df： $X \to T^*X$ 的导出拉回；根据例 2.1.12，它们因此是拉格朗日的。因此，$\mathbf{Crit}(f)$ 是 (-1)-移位辛的。

注 2.2.4. 当 X 是一个导出栈且 $df = 0$时，我们有 $\mathbf{Crit}(f) \simeq T^*[-1]X$，而 $\omega_{\mathbf{Crit}(f)}$ 是 $T^*[-1]X$上的典范（-1）移位辛结构。

注2.2.5。命题 2.2.1 也可以看作是拉格朗日对应复合步骤的结果（定理 2.2.13）。为此，考虑以下拉格朗日对应的复合：



映射 $X \to Z \times \bar{\star}$ 和 $Y \to Y \times \bar{\star}$ 是拉格朗日对应，因为$X \to Z$和 $Y \to Z$是拉格朗日的。因此，通过复合， $X \times_Z Y \to \star \times \bar{\star}$也是一个拉格朗日对应，从而 $X \times_Z Y \to \star$ 是拉格朗日的。根据引理 2.1.17，由于该点是 n移位辛的，因此 $X \times_Z Y$是 $(n-1)$-移位辛的。

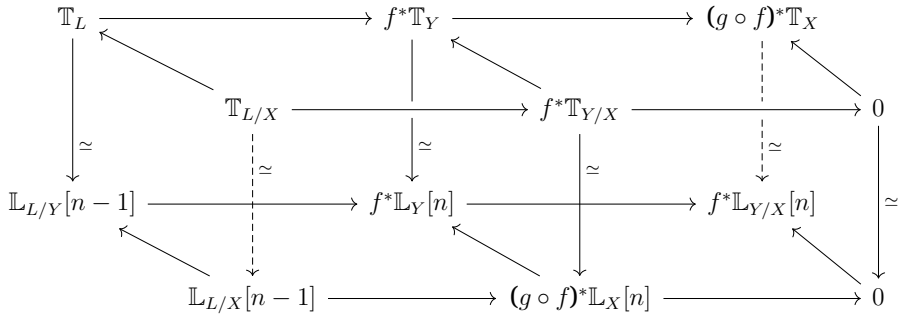
2.2.2. 导出交与拉格朗日纤维化。

本节的目标是证明一个与命题 2.2.1 类似的结论，但附加了拉格朗日纤维化的数据。该结果出自 [Gra22]，并且也已在 [Saf20] 中得到推广。

B在陈述主要结论之前，我们需要以下命题：

命题 2.2.6. 假设我们有一列 $L \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} X$*Artin* 栈，且 ω 存在一个 n-移位辛形式定义在 Y 上。假设 f 是一个拉格朗日态射，且 g是一个拉格朗日纤维化。那么存在一个典范等价 $\mathbb{T}_{L/X} \to \mathbb{L}_{L/X}[n-1]$。

证明。 考虑下面的交换图：

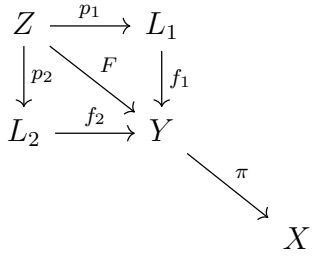


上方面中，每个方形都是双笛卡尔方形，因为外方形和最右侧的方形都是双笛卡尔方形。根据假设（即各种非退化条件），每个非虚线竖直箭头都是等价。聚焦于右侧的立方体，它将上方的同伦双笛卡尔方形映到下方的方形，而下方的方形也是同伦双笛卡尔方形。$(g\circ f)^*\mathbb{L}_X[n] \to f^*\mathbb{L}_Y[n]$的同伦余纤维是 $f^*\mathbb{L}_{Y/X}[n]$，由此得到拟同构$(g\circ f)^*\mathbb{T}_X \to f^*\mathbb{L}_{Y/X}[n]$，如虚线箭头所示。

根据相同的推理，由于上方的外方形是同伦双笛卡尔的，它映射到下方同样是同伦双笛卡尔的外方形。此外，映射 $\mathbb{L}_{L/Y}[n-1] \to f^*\mathbb{L}_{Y/X}[n]$ 的同伦纤维恰好是 $\mathbb{L}_{L/X}[n-1]$。这证明存在典范拟同构 $\mathbb{T}_{L/X} \to \mathbb{L}_{L/X}[n-1]$。□

定理 2.2.7 ([Gra22，定理 3.5])。 设 Y是一个 n-移位辛导出 *Artin* 叠。设 $f_i\colon L_i \to Y$ 是拉格朗日态射（相对于 $i = 1\cdots 2$），且 $\pi\colon Y \to X$ 是一个拉格朗日纤维化。假设映射 $\pi\circ f_i\colon L_i \to X$ 是弱等价。那么 $P\colon Z = L_1 \times_Y L_2 \to X$ 是一个拉格朗日纤维化。

证明。 我们在下图中总结了所用的记号：



我们还记 $P := \pi \circ F \colon Z \to X$。

为证明我们可以得到一个各向同性结构，我们将证明存在一个空间之间的映射（首先略去拉格朗日纤维化的非退化性条件）：

$$\mathbf{Lag}(f_1, n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{Lag}(f_2, n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{IsoFib}(\pi, n) \to \mathbf{IsoFib}(P, n-1)$$

如果我们忘记拉格朗日结构的非退化性，就会在 $\mathbf{Iso}(f_1, n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{Iso}(f_2, n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{IsoFib}(\pi, n)$ 中得到一个元素；通过对定义各向同性结构空间和各向同性纤维化空间的拉回进行形式的操作，我们可以证明：

$$\begin{aligned}&\mathbf{Iso}(f_1, n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{Iso}(f_2, n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{IsoFib}(\pi, n)\\ &= \star \times_{\mathscr{A}^{2,cl}(L_1,n)} \mathbf{Symp}(Y, n) \times_{\mathscr{A}^{2,cl}(L_2,n)} \star \times_{\mathscr{A}^{2,cl}(Y/X,n)} \star\end{aligned}$$

利用到 $\mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2, n)$ 的拉回，我们得到一个态射：

$$\begin{aligned}&\mathbf{Iso}(f_1, n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{Iso}(f_2, n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{IsoFib}(\pi, n) \to\\ &\star \times_{\mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2,n)} \mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2, n) \times_{\mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2,n)} \star \times_{\mathscr{A}^{2,cl}(Y/X,n)} \star\end{aligned}$$

这个最后得到的空间自然映射到：

$$\mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2, n-1) = \star \times_{\mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2,n)} \mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2, n) \times_{\mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2,n)} \star$$

此外，如果我们将此映射限制在非退化各向同性结构上，那么根据命题 $\mathbf{Symp}(L_1 \times_Y L_2, n-1)$（感谢命题 2.2.1）。

我们还有：

$$\mathscr{A}^{2,cl}(Y/X, n-1) = \star \times_{\mathscr{A}^{2,cl}(Y/X,n)} \star$$

我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2, n-1) \times \mathscr{A}^{2,cl}(Y/X, n-1) & \longrightarrow & \mathscr{A}^{2,cl}(Y/X, n-1)\\ \downarrow & & \downarrow P^*\\ \mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2, n-1) & \longrightarrow & \mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2/X, n-1)\end{array}$$

由于映射 $\mathscr{A}^{2,cl}(Y/X, n-1) \to \mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2/X, n-1)$ 分解通过 $\mathscr{A}^{2,cl}(L_i/X, n-1) \simeq \star$，我们得到一个态射：

$$\mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2, n-1) \times \mathscr{A}^{2,cl}(Y/X, n-1) \to \mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2, n-1) \times_{\mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2/X, n-1)} \star$$

现在，如果我们限制到 $\mathbf{Symp}(L_1 \times_Y L_2, n-1) \subset \mathscr{A}^{2,cl}(L_1 \times_Y L_2, n-1)$（这相当于限制到非退化各向同性结构），就得到一个映射：

$$\mathbf{Symp}(L_1 \times_Y L_2, n-1) \times \mathscr{A}^{2,cl}(Y/X, n-1) \to \mathbf{IsoFib}(P, n-1)$$

因此，我们得到了所需的映射，并将考虑 P 上的各向同性纤维化，它由我们刚才描述的态射将分别赋予 f_1、f_2 和 π 的拉格朗日结构与拉格朗日纤维化结构映射所得的像给出。

接下来我们需要证明非退化条件。为此，我们首先考虑如下图表：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{T}_{Z/X} & \longrightarrow & p_1^*\mathbb{T}_{L_1/X} \oplus p_2^*\mathbb{T}_{L_2/X} & \longrightarrow & F^*\mathbb{T}_{Y/X} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{T}_Z & \longrightarrow & p_1^*\mathbb{T}_{L_1} \oplus p_2^*\mathbb{T}_{L_2} & \longrightarrow & F^*\mathbb{T}_Y \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P^*\mathbb{T}_X & \longrightarrow & P^*\mathbb{T}_X \oplus P^*\mathbb{T}_X & \longrightarrow & P^*\mathbb{T}_X
\end{array}$$

垂直序列和最后两个水平序列是纤维化的，因此第一个水平序列也是纤维化的。最后两个水平序列之所以是纤维化的，是因为下列图表是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{T}_Z & \longrightarrow & p_1^*\mathbb{T}_{L_1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
p_2^*\mathbb{T}_{L_2} & \longrightarrow & F^*\mathbb{T}_Y
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{T}_X & \longrightarrow & \mathbb{T}_X \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{T}_X & \longrightarrow & \mathbb{T}_X
\end{array}$$

根据命题 2.2.6 和非退化性，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{T}_{Z/X} & \longrightarrow & p_1^*\mathbb{T}_{L_1/X} \oplus p_2^*\mathbb{T}_{L_2/X} & \longrightarrow & F^*\mathbb{T}_{Y/X} \\
\vdots & & \downarrow & & \downarrow \\
P^*\mathbb{L}_X[n-1] & \longrightarrow & \left(p_1^*\mathbb{T}_{L_1/X} \oplus p_2^*\mathbb{T}_{L_2/X}\right)[n-1] & \longrightarrow & P^*\mathbb{L}_X[n]
\end{array}$$

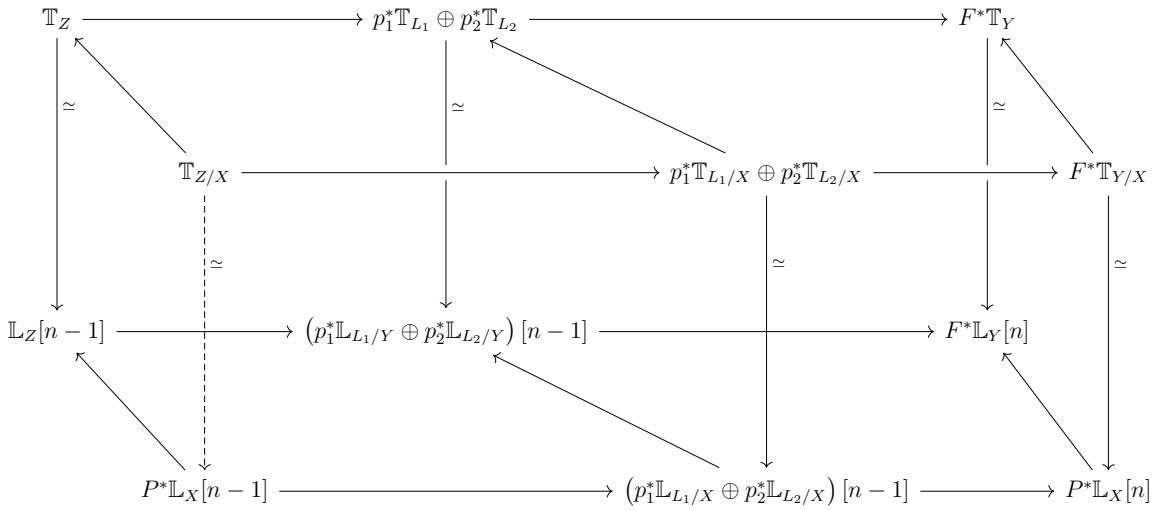
其中所有垂直态射都是拟同构。下方序列中的纤维恰好是 $\mathbb{L}_X[n-1]$，因为 $p_1^*\mathbb{T}_{L_1/X} \oplus p_2^*\mathbb{T}_{L_2/X} \simeq 0$，由于 $L_i \to X$ 是等价。我们将所得的虚线等价称为 $\alpha\colon\ \mathbb{T}_{Z/X} \to P^*\mathbb{L}_X[n-1]$。

我们仍需证明 α 是拉格朗日纤维化非退化性判据中所使用的态射。回顾一下，该态射通过填充图表（4）的泛映射给出：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{T}_{Z/X} & \xrightarrow{\alpha_P} & P^*\mathbb{L}_X[n-1] & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{T}_Z & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{L}_Z[n-1] & \longrightarrow & \mathbb{L}_{Z/X}[n-1]
\end{array}$$

为了比较 α 和 α_P，我们在下图中总结了 α 的构造以及由非退化条件得到的所有等价：

(5)



其中所有竖直映射都是由非退化条件得到的拟同构。我们希望证明 α_P 和 α 是同伦的。从图表（5）中提取的相关数据如下：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{T}_{Z/X} & \xrightarrow{\alpha} & P^*\mathbb{L}_X[n-1] & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_Z & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{L}_Z[n-1] & \longrightarrow & p_1^*\mathbb{L}_{L_1/Y}[n-1] \oplus p_2^*\mathbb{L}_{L_2/Y}[n-1] \end{array}$$

复合：

$$P^*\mathbb{L}_X[n-1] \to \mathbb{L}_Z[n-1] \to p_1^*\mathbb{L}_{L_1/Y}[n-1] \oplus p_2^*\mathbb{L}_{L_2/Y}[n-1]$$

可分解为经过 $0 \simeq p_1^*\mathbb{L}_{L_1/X}[n-1] \oplus p_2^*\mathbb{L}_{L_2/X}[n-1]$。这意味着映射 $\mathbb{L}_Z[n-1] \to p_1^*\mathbb{L}_{L_1/Y}[n-1] \oplus p_2^*\mathbb{L}_{L_2/Y}[n-1]$ 可分解为经过 $\mathbb{L}_{Z/X}[n-1]$，因此 α 满足与 α_P相同的泛性质，由此证明 α 与 α_P 是同伦的。□

注 2.2.8。 这一结果在 [Saf20，定理 1 中得到了推广。14]。

注 2.2.9。 与命题 2.2.1类似，此定理可以推广到空间的映射：

$$\mathbf{Lag}(f_1, n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{Lag}(f_2, n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{LagFib}(\pi, n) \to \mathbf{LagFib}(P, n)$$

这仅仅是定理 2.2.7 证明中所述映射在非退化元素上的限制。忘掉额外的拉格朗日纤维化后，便可恢复注 2.2.2 中的映射，也就是说，下面的图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Lag}(f_1,n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{Lag}(f_2,n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{LagFib}(\pi,n) & \longrightarrow & \mathbf{LagFib}(P,n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Lag}(f_1,n) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{Lag}(f_2,n) & \longrightarrow & \mathbf{Symp}(L_1 \times_Y L_2, n-1) \end{array}$$

例 2.2.10。由于投影 $T^*X \to X$ 是例 2.1.22 中的拉格朗日纤维化，且定义导出临界轨迹的导出交（定义 1.2.20）显然满足定理2.2.7 的条件，因此我们得到 $\mathbf{Crit}(f) \to X$ 是一个拉格朗日纤维化。在良好情形下，第 2.3.2 节将详细研究这一拉格朗日纤维化。

注 2.2.11。当 X 是一个导出栈且 $df = 0$时，我们有 $\mathbf{Crit}(f) \simeq T^*[-1]X$，$\omega_{\mathbf{Crit}(f)}$是 (-1)-移位辛结构，定义在 $T^*[-1]X$上，而所得的拉格朗日纤维化是例 $T^*[-1]X \to X$ 中的典范拉格朗日纤维化2.1.22。

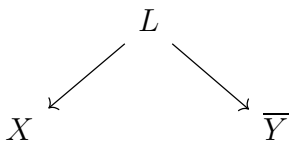
2.2.3. 拉格朗日对象的高阶范畴。

拉格朗日结构上的范畴结构，其背后的想法是：给定X 和 Y， n-移位辛导出栈，从X 到 Y(定义 2.1.18) 的拉格朗日对应可以看作是从 X 到 Y的一种箭头。但事实证明，这一想法是一个具体实例：在固定底空间上的拉格朗日结构集合，由 n-移位辛导出栈 X (见定义 2.2.17) 所给出的范畴结构。

在最一般的情形下，[CHS21] 证明了我们可以构造一个(∞, n)-范畴，其对象为拉格朗日子空间，并且它是一个 n重 Segal 空间。我们将只讨论1-范畴结构和2-范畴结构。

本节的目标是相当明确地介绍2-范畴中的拉格朗日子空间，如[ABB17] 所述，并给出拉格朗日对应的新构造。本节的主要目标是建立证明定理2.2.23 所需的框架。该定理是另一个“导出交定理”，它产生新的拉格朗日对应（见定理2.2.23）。

首先回顾一下定义 2.1.18：从 X 到Y 的拉格朗日对应由一个拉格朗日 $L \to X \times \overline{Y}$ 给出，并由下图表示：

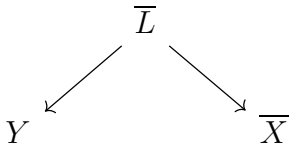


其中， $\overline{Y}$与 Y 是同一个导出栈，但赋予了“相反”的辛结构 $-\omega_Y$。

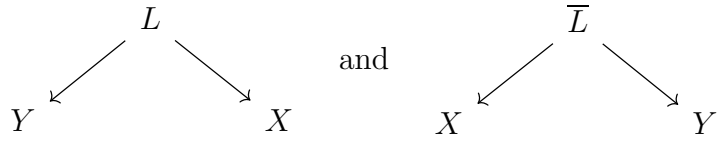
注意到存在一个等价：

$$\mathbf{Lag}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Lag}(\overline{X})$$

特别地，任意拉格朗日对应 L 从 X 到 Y都会诱导出一个相反的[1]拉格朗日对应，$\overline{L}$ 从 Y 到 X 因此我们得到一个拉格朗日对应：



警告 2.2.12. 从现在起，我们将滥用记号，在描述拉格朗日对应的图表中不再写出上划线 $\overline{X}$ ，并约定右侧的栈带有相反的结构。从 X 到 Y 的拉格朗日及其相反者将分别记作



在拉格朗日结构上寻找范畴结构的第一步，是下面的定理；该定理给出了复合拉格朗日对应的一种方法。

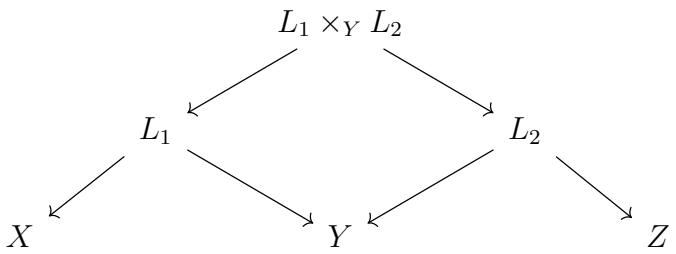
定理 2.2.13 ([Cal15，定理 4.4])。 给定 L_1 和 L_2 从 X 到 Y 以及 Y 从 XZ 到 X 的拉格朗日对应，则存在一个拉格朗日结构，从 Z 到 $L_1 \times_Y L_2$，其由下式给出：

$$\mathbf{Lag}\left(X \times \overline{Y}\right) \times_{\mathbf{Symp}(Y,n)} \mathbf{Lag}\left(Y \times \overline{Z}\right) \to \mathbf{Lag}\left(X \times \overline{Z}\right)$$

这一复合可由下图表示：

[1]“相反”拉格朗日并不意味着它是复合的逆元。不过，我们将在推论 2.2.22 中看到，存在一个自然的 2-态射：

$$1_{X \times \overline{X}} \Rightarrow L \circ \overline{L}$$



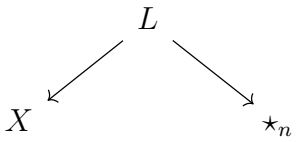
此定理本身是引理 2.2.15 的一个特例，它将使我们能够描述某个范畴中的复合，该范畴的对象是拉格朗日态射。

注2.2.14. 由此我们可以定义一个范畴 $\mathbf{Symp}_n$ ，使得：

– 对象是 n-移位辛导出栈。– $\mathrm{Symp}_n(X, Y)$ 是从 X 到 Y 的拉格朗日对应的等价类，其中等价关系由 拉格朗日同胚 给出（关于拉格朗日几何同构的含义，见警告 2.2.16）。

现在，借助以下观察，我们可以仅用拉格朗日结构来重新表述并推广这个范畴：

– n-移位辛结构定义在 X 上，由一个拉格朗日态射$X \to \star_{n+1}$ 给出，其中 $\star_{n+1}$ 与 $n+1$-移位辛结构 0 一同考察（见引理 2.1.17）。– 定义在 $L \to X$ 上的拉格朗日结构等价于一个拉格朗日对应：



因此，Symp_n 的对象是拉格朗日态射 $X \to \star_{n+1}$，而从 X 到 Y 的态射是导出交[1] $L \to X \times_{\star_{n+1}} Y \simeq X \times \overline{Y}$ 中的一个拉格朗日子流形（模拉格朗日同胚）。

为了推广这一点，取一个由 n-移位辛导出栈X 给出的底空间（这里 X 扮演 $\star_{n+1}$的角色）。给定两个拉格朗日子空间 $L_1 \to X$ 和 $L_2 \to X$，我们可以定义从 L_1 到 L_2 的态射，它是一个拉格朗日态射$N \to L_1 \times_X L_2$的数据，其中 $L_1 \times_X L_2$ 赋有通过取拉格朗日态射的导出交、由命题 2.2.1 得到的 $(n-1)$-移位结构。随后，我们需要一个复合的概念，它由以下引理给出：

[1]导出交上的移位辛结构由命题 2.2.1给出，其中移位辛结构的构造证明了 $X \times_{\star_{n+1}} Y \simeq X \times \overline{Y}$ 是n移位辛导出栈。

引理 2.2.15 ([ABB17，推论 2.15])。 设 L_i、 $i = 1..3$ 是 X 中的拉格朗日态射（在 X上固定一个辛结构）。则存在一个映射：

$$\mathbf{Lag}(L_1 \times_X L_2) \times \mathbf{Lag}(L_2 \times_X L_3) \to \mathbf{Lag}(L_1 \times_X L_3)$$

它将拉格朗日子空间 $N_1 \to L_1 \times_X L_2$ 和 $N_2 \to L_2 \times_X L_3$ 映射为以下对象上的一个拉格朗日结构：

$$N_1 \times_{L_2} N_2 \to L_1 \times_X L_3$$

警告2.2.16。 引理 2.2.15 得到的复合并非严格结合，但在 拉格朗日同胚意义下结合（见 [ABB17，定义 3.2]）。两个拉格朗日子空间 $L_1 \to X$ 和 $L_2 \to X$ 之间的拉格朗日同胚，是导出栈 $L_1 \to L_2$ 之间的一个等价，它与到 X 的态射相交换，并且伴随自然映射上的一个拉格朗日结构：

$$L_1 \to L_1 \times_X L_2$$

于是 [ABB17，命题 3.7] 告诉我们，由引理 2.2.15定义的复合在典范拉格朗日同胚意义下是结合的。
现在，我们可以定义固定的 n-移位辛导出栈上的拉格朗日子流形范畴。

定义 2.2.17。 设 X 是一个 n-移位辛栈。 X 上的拉格朗日范畴记作 $\mathbf{Lag}_1(X)$，其定义如下：

– 对象为拉格朗日态射 $f\colon L \to X$。– 态射 $\mathbf{Lag}_1(f, g)$，其中 $f\colon L_1 \to X$ 且 $g\colon L_2 \to X$，由以下拉格朗日态射给出：

$$h : L \to L_1 \times_X L_2$$

在拉格朗日几何同构意义下（参见警告 2.2.16）。复合由引理2.2.15给出。– 拉格朗日 $L \to X$ 的单位态射定义如下：

$$1_L : L \to L \times_X L$$

配备对角拉格朗日结构（参见命题 2.2.18）。

命题 2.2.18 ([ABB17，推论 2。19])。 考虑一个拉格朗日态射$L \to X$。则对角映射 $1_L : L \to L \times_X L$ 是一个拉格朗日态射，其所配备的自然$(n-1)$-移位辛结构定义在 $L \times_X L$ 上，由导出交构造得到。

例 2.2.19. $\mathbf{Lag}_1(\star_{n+1})$ 恰好是 $\mathbf{Symp}_n$ 范畴。

由于 拉格朗日子空间$_1(X)$ 中的态射由拉格朗日子空间给出，我们可以进一步为态射集赋予范畴结构，从而使拉格朗日子空间$_1(X)$ 成为一个2-范畴[1]，我们将其记为 拉格朗日子空间$_2(X)$。

[1]实际上，1-态射的范畴也将具有由拉格朗日子流形给出的态射空间，因此它也可以在范畴中富化。这就形成了一个 3-范畴的结构

定义 2.2.20。 我们可以将 拉格朗日子空间$_2(X)$ 描述为弱 2-范畴（参见 [ABB17，定义 4。1]），定义如下：

– 对象由拉格朗日结构给出 $L \to X$。– 1-态射从 L_1 到 L_2 由拉格朗日结构给出[1]：

$$L \to L_1 \times_X L_2$$

– 单位1-态射是对角拉格朗日：

$$1_L : L \times L \times_X L$$

– 给定从 L_1 到 L_2的两个态射 N_1 和 N_2，它们由拉格朗日子空间 $N_i \to L_1 \times_X L_2$给出。那么，从 N_1 到 N_2 的2-态射定义为一个拉格朗日：

$$T \to N_1 \times_{L_1 \times_X L_2} N_2$$

在拉格朗日同胚意义下。
– 单位2-态射 1：$N \Rightarrow N$ 由对角拉格朗日给出：

$$N \to N \times_{L_1 \times_X L_2} N$$

2-范畴结构由以下内容给出：

– 1-态射的复合与 1-范畴背景中的相同。换言之，$N_1 : L_1 \to L_2$ 和 $N_2 : L_2 \to L_3$ 的复合由拉格朗日子空间 $N_1 \to L_1 \times_X L_2$ 和 $N_2 \to L_2 \times_X L_3$ 给出，其结果是以下拉格朗日子空间：

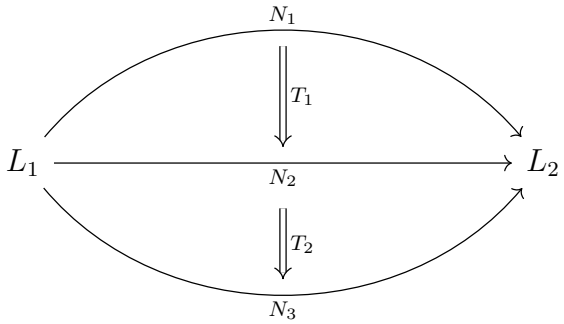
$$N_1 \times_{L_1} N_2 \to L_1 \times_X L_3$$

由引理2.2.15得到。

$$L_1 \xrightarrow{N_1} L_2 \xrightarrow{N_2} L_3 \quad , \quad L_1 \xrightarrow{N_1 \times_{L_2} N_2} L_3$$

拉格朗日子空间。这一思路进一步定义了拉格朗日子空间上的 n-范畴结构，并在 ∞-范畴背景下得到更精确的阐述，见 [CHS21], ，其中他们将拉格朗日子空间的一个 (∞, n)-范畴描述为一个 n重 Segal 范畴。[1]这里我们不将拉格朗日子空间视为模去拉格朗日同胚后的对象，因为我们定义的是一个弱 2-范畴，其中结合律只要求在一个 2-态射意义下成立。

– 2-态射的垂直复合：

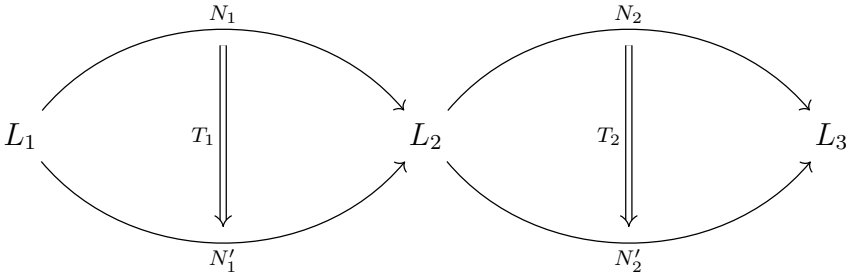


由以下对象上的自然拉格朗日结构给出：

$$T_1 \times_{N_2} T_2 \to N_1 \times_{L_1 \times_X L_2} N_3$$

由引理再次给出2.2.15。

– 水平复合：



水平复合是一个从 $P_1 := N_2 \times_{L_2} N_1$ 到 $P_2 := N_2' \times_{L_2} N_1'$ 的 2-态射，其数据由一个拉格朗日态射给出：

$$T_1 \times_{L_2} T_2 \to P_1 \times_{L_1 \times_X L_3} P_2$$

构造于 [ABB17，命题 2。20]。

例 2.2.21。$\mathrm{Lag}_2(\star_{n+1})$ 是一个 2-范畴，其对象是 n 移位的辛栈，1-态射 $X \to Y$ 是拉格朗日对应 $L \to X \times \overline{Y}$，而 2-态射 $L_1 \to L_2$ 是一个拉格朗日结构 $N \to L_1 \times_{X \times \overline{Y}} L_2$，并且视拉格朗日几何同构为等价。

推论 2.2.22。取 $N \in \mathrm{Lag}_2(L_1, L_2)$。则 $\overline{N} \in \mathrm{Lag}_2(L_2, L_1)$，并且我们可以考虑复合 $N \circ \overline{N} \in \mathrm{Lag}_2(L_1, L_1)$。于是存在一个自然的 2-态射：

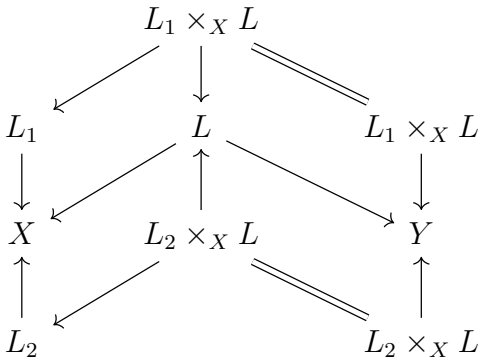
$$1_{L_1} \Rightarrow N \circ \overline{N}$$

由对角拉格朗日态射给出：

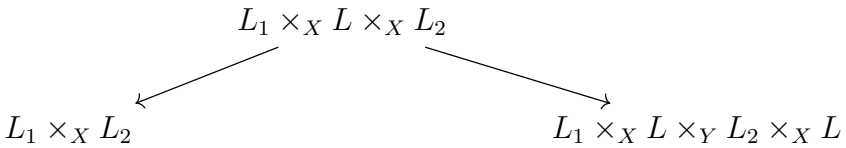
$$N \to N \times_{L_2} N \times_{L_1 \times_X L_1} L_1 \simeq N \times_{L_1 \times_X L_2} N$$

如此详细地介绍这个 2-范畴，旨在给出以下定理的 2-范畴证明；该定理为我们提供了一种通过导出拉格朗日交构造 拉格朗日对应的方法。

定理 2.2.23。 考虑一个从 X 到 Y 的拉格朗日对应 L。设 L_1、L_2 是 X 中的两个拉格朗日态射。考虑图表：



映射 $L_i \times_X L \to Y$ 是拉格朗日的，并沿垂直态射取极限，可得一个拉格朗日对应：



证明。 我们在 2-范畴 $\mathrm{Lag}_2(\star_{n+1})$ 中工作。要证明 $L_i \times_X L \to Y$ 是拉格朗日的，只需将其视为 $\mathrm{Lag}_2(\star_{n+1})$ 中 1-态射的复合：

$$\star \xrightarrow{L_1} X \xrightarrow{L} Y$$

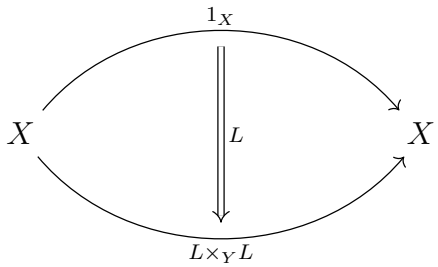
考虑以下 1-态射序列：

$$\star \xrightarrow{L_1} X \xrightarrow{L} Y \xrightarrow{\overline{L}} X \xrightarrow{\overline{L_2}} \star$$

这些态射的直接复合为：

$$L_1 \times_X L \times_Y L \times_X L_2$$

关键在于记住，这里存在一个2-态射（根据推论2.2.22）：



其中， 1_X 与对角拉格朗日对应的单位 $X \to X \times X$ 以及 L被定义为对角拉格朗日态射 $L \to\simeq L \times_{X\times Y} L$。先与 L_1 复合，再与 $\overline{L}_2$ 复合，我们依次得到以下 2-态射：

$$L_1 \times_X L : L_1 \Rightarrow L_1 \times_X L \times_Y L$$
$$L_1 \times_X L \times_X L_2 : L_1 \times_X L_2 \Rightarrow L_1 \times_X L \times_Y L \times_X L_2$$

这个最后的 2-态射正是我们想要的拉格朗日对应，因为 $L_1 \times_X L_2$ 和 $L_1 \times_X L \times_Y L_2 \times_X L$ 实际上都是辛的，因此这个 2-态射实际上是一个拉格朗日：

$$\begin{aligned} L_1 \times_X L \times_X L_2 \to & (L_1 \times_X L_2) \times_{\star_{n+1}} (L_1 \times_X L \times_Y L_2 \times_X L) \\ \simeq & (L_1 \times_X L_2) \times (\overline{L_1 \times_X L \times_Y L_2 \times_X L}) \end{aligned}$$

□

2.3. **拉格朗日纤维化构造示例**。

2.3.1. 导出临界轨迹。

这里我们讨论导出临界点集的移位辛几何的一些一般结果。首先，我们希望一般性地理解 Crit(f) 上的 (-1)-移位辛形式。我们利用典范 1-形式的泛性质（引理 2.1.4）来看到 $(df)^*\omega = 0$ （其中 $\omega = d_{\mathrm{dR}}\lambda_X$ 是 T^*X 上的典范辛结构）。使用适当的替换来计算命题 1.2.21 证明中出现的导出张量积， ω 在 $\mathrm{Spec}_X\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}(\mathbb{T}_X[1] \oplus \mathbb{T}_X)\right)$ 上诱导出一个闭 2-形式。由于分解上的微分 $\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}(\mathbb{T}_X[1] \oplus \mathbb{T}_X)$ 是由 $\mathrm{Id} : \mathbb{T}_X \to \mathbb{T}_X[1]$（以及 $\mathbb{T}_X$ 和 $\mathscr{O}_X$ 上的微分）诱导的，因此 $T^*[-1]X$ 上的典范 1-形式 ω_{-1} 在 $\mathrm{Spec}_X\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}(\mathbb{T}_X[1] \oplus \mathbb{T}_X)\right)$ 上诱导出一个闭 2-形式，它给出了 ω 与 0 之间的同伦 [1]。于是，(-1)-移位辛形式由 0 的自同伦 ω_{-1} 描述：

$$0 \xrightarrow{\omega_{-1}} p^*\omega = 0$$

命题 2.2.1 的证明 ω_{-1} 是(-1)-移位辛形式，在$\mathbf{Crit}(f)$上得到。

我们在注 2.2.10 中已经看到， $\pi : \mathbf{Crit}(f) \to X$ 是一个拉格朗日纤维化。控制该拉格朗日纤维化非退化条件的态射（见图表 α_π ）仍然具有自然性，具体如下述命4题所示。

[1]注意到，由于 ω 和 ω_{-1} 是 1-形式，它们在垂直微分下都是闭的。因此，微分中只有由 $\mathbb{T}_X[1] \to \mathbb{T}_X$ 给出的部分会参与，并将 ω_{-1} 映射到 ω。

命题 2.3.1。 α_π 等价于以下等价的复合:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{Crit}(f)/X} \simeq 0 \times_{\mathbb{L}_{T^*X/X}} 0 \xrightarrow{0\times_\beta 0} 0 \times_{\pi_X^*\mathbb{L}_X} 0 \simeq \pi^*\mathbb{L}_X[-1] \tag{6}$$

其中 β是由拉格朗日纤维化π_X： $T^*X \to X$得到的等价 $\mathbb{L}_{T^*X/X} \simeq \pi_X^*\mathbb{L}_X$。

证明。 这里的策略是将图表（4）表示为同类图表的拉回。

首先，我们将 $\mathbb{L}_{\mathbf{Crit}(f)}[-1]$表示为在 $\mathbb{L}_{T^*X}$上方的拉回。观察到下图中的所有方块都是双笛卡尔的，即可得到这一点:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{L}_{\mathbf{Crit}(f)}[-1] & \longrightarrow & \pi_1^*0^*\mathbb{L}_{T^*X/X} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_2^*df^*\mathbb{L}_{T^*X/X} & \longrightarrow & \pi_1^*0^*\mathbb{L}_{T^*X} \simeq \pi_2^*df^*\mathbb{L}_{T^*X} & \longrightarrow & \pi_2^*\mathbb{L}_X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \pi_1^*\mathbb{L}_X & \longrightarrow & \mathbb{L}_{\mathbf{Crit}(f)}
\end{array}$$

其中 π_1 和 π_2 是由拉回图给出的自然投影 $\mathbf{Crit}(f) \to X$ （以及 $\pi_1 = \pi_2$）。我们将 π： $\mathbf{Crit}(f) \to X$ 记作图表（4）：

$$\begin{array}{ccccc}
0 \times_{\mathbb{L}_{T^*X/X}} 0 & \xrightarrow{\alpha_\pi \simeq 0\times_{\alpha_{\pi_X}} 0} & 0 \times_{\pi_X^*\mathbb{L}_X} 0 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{T}_X \times_{\mathbb{T}_{T^*X}} \mathbb{T}_X & \longrightarrow & \mathbb{L}_{T^*X/X} \times_{\mathbb{L}_{T^*X}} \mathbb{L}_{T^*X/X} & \xrightarrow{\mathrm{Id}\times_{\mathrm{pr}}\mathrm{Id}} & \mathbb{L}_{T^*X/X} \times_{\mathbb{L}_{T^*X/X}} \mathbb{L}_{T^*X/X}
\end{array}$$

在此图表中，为使图表易于阅读，省略了拉回。我们需要描述态射 $\omega_{\mathbf{Crit}(f)}$:
$\mathbb{T}_X \times_{\mathbb{T}_{T^*X}} \mathbb{T}_X \to \mathbb{L}_{T^*X/X} \times_{\mathbb{L}_{T^*X}} \mathbb{L}_{T^*X/X}$。回顾注 2.1.10 以及命题2.2.1中关于非退化性的证明可知，$\omega_{\mathbf{Crit}(f)}$是 $\Theta_{df} \times_\omega \Theta_0$，其中 Θ_h:
$\mathbb{T}_X \to \mathbb{L}_h[-1] \simeq \mathbb{L}_{X/T^*X}[-1] \simeq \mathbb{L}_{T^*X/X}$是表示拉格朗日结构非退化性的自然态射（见定义 2.1.9）。□

2.3.2. 非退化泛函。

我们考虑导出临界轨迹的例子，其中 f 可能有一族临界点，它们在严格临界轨迹的法方向上均为非退化。我们希望理解在这种情况下描述拉格朗日纤维化 $\mathbf{Crit}(f) \to X$ 非退化条件的拟同构。我们用 S 表示严格临界轨迹，它带有一个闭浸入i： $S \to X$，其结构层为 $\mathscr{O}_S = i^{-1}\mathscr{O}_X/_I$，且 $I = \langle df.v,\ v \in \mathbb{T}_X \rangle$。

我们假设 X 和 S 都是光滑代数簇。我们用 Crit(f)表示 f 的导出临界轨迹，并得到一个典范态射：

$$\lambda : S \to \mathbf{Crit}(f)$$

为了定义 Hessian 二次型和非退化性条件，我们需要假设闭浸入 $S \hookrightarrow X$ 具有一阶分裂。具体而言，我们在本节假设以下纤维序列分裂：

$$\mathbb{T}_S \rightleftarrows i^*\mathbb{T}_X \rightleftarrows \mathbb{T}_{S/X}[1] \tag{7}$$

这一假设是能够将 Q 限制到法向部分 $\mathbb{T}_{S/X}[1]$所必需的。

定义 2.3.2. *Hessian* 二次型由以下对称双线性映射定义：

$$\begin{array}{rccc} Q & : & \mathrm{Sym}^2_{\mathscr{O}_S} i^*\mathbb{T}_X & \to & \mathscr{O}_S \\ & & (w, v) & \mapsto & d(df.v).w \end{array}$$

我们通过考察以下图表，将非退化性定义在 S的“法向”方向上：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{T}_S & \rightleftarrows & i^*\mathbb{T}_X & \rightleftarrows & \mathbb{T}_{S/X}[1] \\ \downarrow 0 & & \downarrow Q \quad \widetilde{Q} & & \downarrow 0 \\ \mathbb{L}_{S/X}[-1] & \rightleftarrows & i^*\mathbb{L}_X & \rightleftarrows & \mathbb{L}_S \end{array} \tag{8}$$

两行都是分裂纤维序列（根据图表（7）中的假设）。左侧和右侧的垂直映射都是零映射，因为 Q 限制到 $\mathbb{T}_S$ 上为零，并且由于Q 是对称的， Q 与投影到 $\mathbb{L}_S$ 的复合也为零。我们得到$\widetilde{\ }$一个映射 Q （利用 Q 并沿着纤维序列的截面和收缩），它对应于由 Q 在法丛上诱导的映射。于是，$\widetilde{\ }$非退化条件 要求 Q 是一个拟同构。

由于 $\mathscr{O}_{\mathbf{Crit}(f)}$ 上的微分为 $\delta = \iota_{df}$ （见命题 1.2.21），我们在 $\mathbf{QC}(S)$中有如下交换图表：

$$\begin{array}{ccc} i^*\mathbb{T}_X & \xrightarrow{\iota_{df}} & i^*\mathscr{O}_X \\ & \searrow^{Q} & \downarrow d_{\mathrm{dR}} \\ & & i^*\mathbb{L}_X \end{array} \tag{9}$$

我们将滥用记号 $Q = d_{\mathrm{dR}} \circ \delta$： $i^*\mathbb{T}_X[1] \to i^*\mathbb{L}_X$，表示由次数 0 的复合 $d \circ \iota_{df}$： $i^*\mathbb{T}_X \to i^*\mathbb{L}_X$所对应的次数 1 映射。

一般而言，自然映射 $\lambda : S \to \mathbf{Crit}(f)$ 并非等价。这是因为 f 的偏导数通常不会构成正则序列，因此 $\mathbf{Crit}(f)$ 具有高阶同调。之所以默认其构成正则序列，是因为存在湮灭 df的向量场。当 f 非退化时，这些向量场实际上是 S 上的向量场。有鉴于此，我们证明，当 Q非退化时，$\mathbf{Crit}(f)$ 可等价地描述为 $T^*[-1]S$。

命题 2.3.3。 存在一个自然映射 $\Phi : \ T^*[-1]S \to \mathbf{Crit}(f)$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} T^*[-1]S & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{Crit}(f) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_S} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S & \xrightarrow{\quad i \quad} & X \end{array}$$

证明。 在我们的一阶分裂假设（图表（7））下，自然映射$\mathbb{T}_S \to i^*\mathbb{T}_X$ 具有一个收缩，因此自然映射 $i^*T^*X \to T^*S$ 具有一个截面： $T^*S \dashrightarrow i^*T^*X$。我们考虑下图：

$$\begin{array}{ccccc} T^*X & \longleftarrow & i^*T^*X & \rightleftarrows & T^*S \\ {\scriptstyle 0}\uparrow & & {\scriptstyle 0}\uparrow & & {\scriptstyle 0}\uparrow \\ X & \xleftarrow[i]{} & S & = & S \end{array}$$

我们希望沿着由 df 诱导的映射拉回这些零截面，这些映射由下方交换图中的垂直态射表示：

$$\begin{array}{ccccc} T^*X & \longleftarrow & i^*T^*X & \rightleftarrows & T^*S \\ {\scriptstyle df}\uparrow & & {\scriptstyle i^*df=0}\uparrow & & {\scriptstyle 0}\uparrow \\ X & \xleftarrow[i]{} & S & = & S \end{array}$$

这在拉回之间诱导出以下态射：

$$\mathbf{Crit}(f) \longleftarrow S \times_{i^*T^*X} S \rightleftarrows T^*[-1]S$$

我们得到一个映射 $\Phi : \ T^*[-1]S \to \mathbf{Crit}(f)$。我们得到的映射来自拉回的泛性质，因此若记 $s_0 : \ X \to T^*X$ 为零截面，则有 $s_0 \circ \pi \circ \Phi = s_0 \circ i \circ \pi_S$。如果与投影$\pi_X : \ T^*X \to X$复合，则得到 $\pi \circ \Phi = i \circ \pi_S$。 □

Φ 给出了 $T^*[-1]S \to S$ 上的拉格朗日纤维化结构与 $\mathbf{Crit}(f) \to X$ 之间的关系，下面我们将对此进行分析。我们的想法是证明这两个拉格朗日纤维化之间的差异实际上由 Q 控制（见命题 2.3.7和注 2.3.9）。

引理 2.3.4。 Φ 诱导出一个态射 $\mathbb{T}_{T^*[-1]S/S} \to \Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X}$，它满足交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_{T^*[-1]S/S} & \longrightarrow & \Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\pi_S}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_\pi} \\ \pi_S^*\mathbb{L}_S[-1] & \longrightarrow & \Phi^*\pi^*\mathbb{L}_X[-1] \simeq \pi_S^* i^*\mathbb{L}_X[-1] \end{array} \tag{10}$$

其中，底部的水平箭头是沿着 π_S 对截面的拉回 $\mathbb{L}_S[-1] \to i^*\mathbb{L}_X[-1]$，它位于分裂纤维序列(7)的对偶中。

证明。 同伦拉回 $\mathbf{Crit}(f) = X \times^h_{T^*X} X$位于 X之上。我们得到以下等价:

$$\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{T}_{X/X} \times^h_{\mathbb{T}_{T^*X/X}} \mathbb{T}_{X/X} \xrightarrow{\simeq} \star \times^h_{\mathbb{T}_{T^*X/X}} \star \xrightarrow{\simeq} \pi^*\mathbb{L}_X[-1]$$

命题 2.1.23 表明，余切叠上的典范纤维化是典范的，因此具有函子性（使用命题 1.2.31）。这意味着以下交换方块是交换的:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_{T^*S/S} & \longrightarrow & \mathbb{T}_{T^*X/X} \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_S} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_X} \\ \pi_S^*\mathbb{L}_S & \xrightarrow{\pi_S^* s} & \pi_S^* i^*\mathbb{L}_X \end{array}$$

其中， s 是分裂纤维序列 (7) 的对偶中的截面。根据定义2.1.20，我们知道 α_{π_S} 和 α_π 都是由态射β_S 和 β_X 经由图表 (6) 诱导的态射。于是我们得到交换图:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{T}_{T^*[-1]S/S} & \xrightarrow{\simeq} & 0 \times^h_{\mathbb{T}_{T^*S/S}} 0 & \xrightarrow{0\times^h_{\beta_S}0} & \pi_S^*\mathbb{L}_S[-1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X} & \xrightarrow{\simeq} & \Phi^*\left(0 \times^h_{\mathbb{T}_{T^*X/X}} 0\right) & \xrightarrow{0\times^h_{\beta_X}0} & \Phi^*\pi^*\mathbb{L}_X[-1] \end{array}$$

其中水平映射的复合恰好是 α_{π_S} 和 α_π 这要归功于命题2.1.23。 □

引理 2.3.5。 我们首先注意到， $\Phi^*\mathbb{L}_{\mathbf{Crit}(f)}$ 可以描述为一个分次模层（忘掉微分），如下:

$$\Phi^*\mathbb{L}_{\mathbf{Crit}(f)} \simeq \mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_S}\left(\mathbb{T}_S[1]\right) \otimes_{\mathscr{O}_S} \left(i^*\mathbb{L}_X \oplus i^*\mathbb{T}_X[1]\right)$$

其中， $\mathbb{L}_X$ 由形如 dg 且满足 $g \in \mathscr{O}_X$ 的项生成，而 $\mathbb{T}_X[1]$ 由形如 $d\xi$ 且满足 $\xi \in \mathbb{T}_X[1] \subset \mathscr{O}_{\mathbf{Crit}(f)}$的项生成。于是，$\Phi^*\mathbb{L}_{\mathbf{Crit}(f)}$ 上的内微分由 $Q = d \circ \iota_{df}$ 通过 $\delta(d\xi) = Q(\xi)$ 和 $\delta(dg) = 0$刻画。

证明。$\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_S}(\mathbb{T}_S[1]) \otimes_{\mathscr{O}_S}(i^*\mathbb{L}_X \oplus i^*\mathbb{T}_X[1])$上的微分是 $\mathscr{O}_{T^*[-1]S}$-线性的，因为 ι_{df} 在 $\mathbb{T}_S[1]$ 上为零。此外，对于 $\xi \in \mathbb{T}_X[1] \subset \mathscr{O}_{\mathbf{Crit}(f)} = \mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathbb{T}_X[1]$，我们有 $\delta \circ d(\xi) = d \circ \delta(\xi) = d \circ \iota_{df}(\xi) = Q(\xi)$（见图表（9））；对于 $g \in \mathscr{O}_X$，则有$\delta \circ d(g) = d \circ \delta g = 0$。□

引理 2.3.6。复合为：

$$\pi_S^* i^* \mathbb{T}_X[-1] \longrightarrow \Phi^* \mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X} \xrightarrow{\alpha_\pi} \Phi^* \pi^* \mathbb{L}_X[-1]$$

由 $\pi_S^* Q$ 给出。同样，复合为：

$$\pi_S^* \mathbb{T}_S[-1] \longrightarrow \mathbb{T}_{T^*[-1]S/S} \xrightarrow{\alpha_{\pi_S}} \pi_S^* \mathbb{L}_S[-1]$$

是0 （$\pi_S^* Q$ 到 S 的限制）。

证明。左侧态射是纤维序列中满足下式的态射：

$$\pi_S^* i^* \mathbb{T}_X[-1] \longrightarrow \Phi^* \mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X} \longrightarrow \Phi^* \mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)}$$

由此可得：

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_S^* i^* \mathbb{T}_X[-1] & \longrightarrow & \Phi^* \mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X} & \longrightarrow & \Phi^* \mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)} \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\
\pi_S^* i^* \mathbb{T}_X[-1] & \dashrightarrow & \Phi^* \pi^* \mathbb{L}_X[-1] & \hookrightarrow & \Phi^* \pi^* \mathbb{L}_X[-1] \oplus \Phi^* \pi^* \mathbb{T}_X
\end{array}$$

第二行可以看作由 π_S^* 给出的纤维序列的扩张：

$$i^* \mathbb{T}_X[-1] \dashrightarrow i^* \mathbb{L}_X[-1] \hookrightarrow i^* \mathbb{L}_X[-1] \oplus i^* \mathbb{T}_X$$

由于 X和 S都是光滑的， $i^* \mathbb{T}_X[-1]$和 $i^* \mathbb{L}_X[-1]$都拟同构于集中在单一次数上的复形。这意味着虚线箭头等价于所诱导的上同调长正合列中的连接态射。因此，它等价于将截面 s 在$i^* \mathbb{T}_X[-1]$中的微分映射到 $i^* \mathbb{L}_X[-1] \oplus i^* \mathbb{T}_X$中的映射，而后者又可视为 $i^* \mathbb{L}_X$中的一个元素。更具体地，记 $\tilde{s}$ 为 s 在 $i^* \mathbb{L}_X[-2] \oplus i^* \mathbb{T}_X[-1]$中的任意提升。根据引理 2.3.5，其微分为

$$Q(s) = Q(\tilde{s}) \in i^* \mathbb{L}_X[-1] \subset i^* \mathbb{L}_X[-1] \oplus i^* \mathbb{T}_X.$$

然后我们应用 π_S^*，得到所需的序列。该陈述的第二部分也可用同样的方法证明。□

命题 *2.3.7*。*</style>*由 Φ 诱导的映射 $\mathbb{T}_{T^*[-1]S} \to \Phi^* \mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)}$ 是等价，当且仅当 Q 是非退化的。

证明。首先，利用等价 α_π ： $\Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X} \to \pi_S^* i^*\mathbb{L}_X[-1]$ 和 α_{π_S} ： $\Phi^*\mathbb{T}_{T^*[-1]S/S} \to \pi_S^*\mathbb{L}_S[-1]$，我们可以证明 $\mathbb{T}_{T^*[-1]S/S} \to \Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X}$的余纤维等价于 $\pi_S^*\mathbb{L}_{S/X}[-2]$。接着，引理 2.3.4 和 2.3.6 保证下图的上半部分是交换的：

$$
\begin{array}{ccccc}
\pi_S^*\mathbb{T}_S[-1] & \longrightarrow & \pi_S^* i^*\mathbb{T}_X[-1] & \longrightarrow & \pi_S^*\mathbb{T}_{S/X} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \widetilde{Q} \\
\mathbb{T}_{T^*[-1]S/S} & \longrightarrow & \Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X} & \longrightarrow & \pi_S^*\mathbb{L}_{S/X}[-2] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{T}_{T^*[-1]S} & \longrightarrow & \Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)} & \longrightarrow & \mathscr{F}
\end{array}
\tag{11}
$$

于是，该图表是交换的，且所有行和列都是余纤维序列；特别地， $\mathscr{F}$ 既是 $\mathbb{T}_{T^*[-1]S} \to \Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)}$ 的同伦余纤维，也是$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$的同伦余纤维（对应于 Q）。特别地， Q 的同伦余纤维为零，当且仅当 $\mathbb{T}_{T^*[-1]S} \to \Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)}$ 的同伦余纤维也为零。□

现在我们将 α_π 分解为沿着 S 的部分和垂直于 S的部分。这个分解借助由分裂纤维序列（7）导出的分裂纤维化序列来实现。

命题 2.3.8。当 Q 非退化时，表示拉格朗日纤维化非退化性的映射构成如下交换图表：

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{T}_{T^*[-1]S/S} & \longrightarrow & \mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X} & \longrightarrow & \mathbb{T}_{S/X} \\
\downarrow \alpha_{\pi_S} & & \downarrow \alpha_\pi & & \downarrow \widetilde{Q} \\
\pi_S^*\mathbb{L}_S[-1] & \longrightarrow & \pi_S^* i^*\mathbb{L}_X[-1] & \longrightarrow & \mathbb{L}_{S/X}[-1]
\end{array}
$$

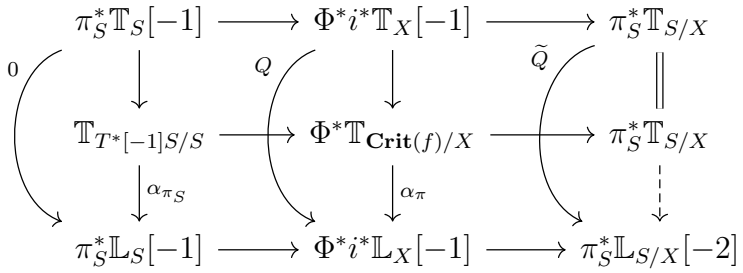
其中各行都是纤维序列。

证明。首先，当 Q 非退化时，顶部的水平序列是纤维化的，并且来自下图：

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{T}_{T^*[-1]S/S} & \longrightarrow & \Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)/X} & \dashrightarrow & \pi_S^*\mathbb{T}_{S/X} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{T}_{T^*[-1]S} & \longrightarrow & \Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_S^*\mathbb{T}_S & \longrightarrow & \Phi^* i^*\mathbb{T}_X & \longrightarrow & \pi_S^*\mathbb{T}_{S/X}[1]
\end{array}
$$

其中所有行和列都是纤维化的，且第二行的余纤维为 0，这归功于命题 2.3.7 ，因为我们假设 Q 是非退化的。利用引理2.3.4 和引理 2.3.6，我们得到下列交换图：

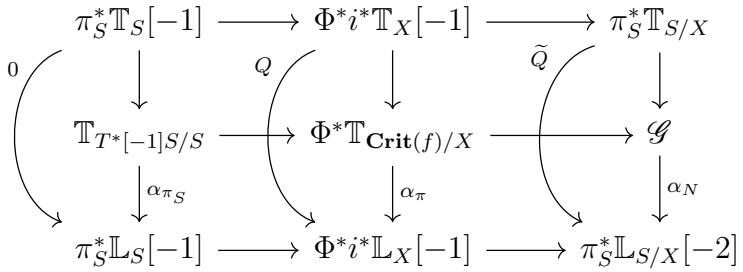
(12)



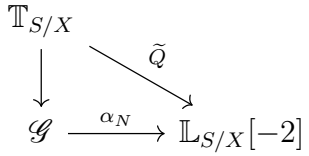
为了使图表交换，虚线箭头唯一可能的映射是 Q。

□

注 2.3.9. 如果我们不假设 Q 非退化，那么余纤维 $\mathscr{F}$ 映射$\mathbb{T}_{T^*[-1]S} \to \Phi^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)}$ 将非零。我们将 $\mathscr{G}$自然映射的纤维 $\mathscr{F} \to \mathbb{T}_{S/X}$记为 。然后我们可以将图表（12）改写为



映射 $\alpha_N : \mathscr{G} \to \pi_S^*\mathbb{L}_{S/X}[-2]$ 表示来自拉格朗日纤维化的映射 α_{π}~与α_{π_S} 之间的“差异”。 α_N 仍与 Q 相关，因为下面的图表是交换的：



~因此， α_N 在 $\mathbb{T}_{S/X}$ 上的限制仍然是 Q。

注 2.3.10。 作为一个反例，若取 $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ 将 X 映射到 $\frac{X^3}{3}$，使本节得以成立的基本假设便不再满足。严格临界轨迹S 并不光滑，因为它是一个胖点，并且序列（7）不分裂。

2.3.3. G-等变扭曲余切丛。

对于 X 光滑概形，扭曲余切栈是由 X、 $\alpha \in H^1(X, \Omega_X^{1,\mathrm{cl}},)$ 上的次数 1 的闭 1-形式对普通余切栈进行扭曲得到的结果。这样的闭形式具有一个底层的次数 1 的 1-形式，它对应于一个态射 $\alpha: X \to T^*[1]X$。与 α 相关的扭曲余切丛 定义为如下拉回:

$$\begin{array}{ccc} T^*_\alpha X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ X & \xrightarrow{0} & T^*[1]X \end{array}$$

关于此定义与扭曲余切丛通常定义之间的关系，更多信息请参阅 [Hab16] 。因此，这是拉格朗日子空间的导出交（参见例 2.1.12），故它是 0-移位辛结构。此外，拉格朗日纤维化 $T^*[1]X \to X$ 符合定理 2.2.7 的假设，因此映射 $T^*_\alpha X \to X$ 具有拉格朗日纤维化结构。

现在设 G 代数群作用于代数簇 X。考虑一个特征 $\chi: G \to \mathbb{G}_m$。在 $\mathbb{G}_m$ 上，我们有一个由映射 $\mathbb{G}_m \to \mathscr{A}^{1,cl}(-,0)$ 给出的对数形式，它将 t 映射到 $t^{-1}dt$。通过以下复合，我们得到 G 上的一个闭 1-形式:

$$G \to \mathbb{G}_m \to \mathscr{A}^{1,cl}(-,0)$$

这也是关于 $\mathscr{A}^{1,cl}(-,0)$ 上加法结构的群态射。因此，我们可以转到分类空间，并在 $\mathbf{B}G$ 上得到一个 1- 移位闭 1- 形式:

$$\alpha_\chi : \mathbf{B}G \to \mathbf{B}\mathscr{A}^{1,cl}(-,0) = \mathscr{A}^{1,cl}(-,1)$$

我们可以沿着 G-等变动量映射拉回 α_χ :

$$\begin{array}{ccc} \left[T^*X/G\right] \times_{[\mathfrak{g}^*/G]} \mathbf{B}G & \longrightarrow & \mathbf{B}G \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_\chi} \\ \left[T^*X/G\right] & \xrightarrow{\mu} & \left[\mathfrak{g}^*/G\right] \simeq T^*[1]\mathbf{B}G \end{array}$$

事实证明，等变动量映射 $[\mu]$ 是拉格朗日的（见命题4.3.1），这意味着（命题 2.2.1）该纤维积是 0-移位辛的。事实证明，我们有如下移位辛导出阿廷栈之间的等价:

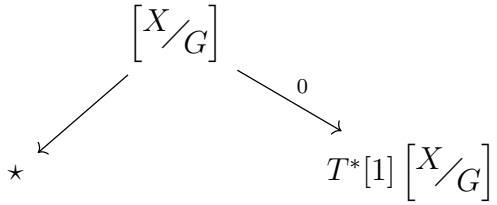
$\left[T^*X/G\right] \times_{[\mathfrak{g}^*/G]} \mathbf{B}G \simeq T^*_{\widehat{\alpha}}\left[X/G\right]$ 其中，$\widehat{\alpha}$ 表示 α_χ 的拉回，它是1-形式，次数为 1，定义在 $\left[X/G\right]$ 上。因此，根据定理 2.2.7，自然投影

$$T^*_{\widehat{\alpha}}\left[X/G\right] \longrightarrow \left[X/G\right]$$

是一个拉格朗日纤维化。

为证明上述等价，我们使用以下拉格朗日对应的复合：

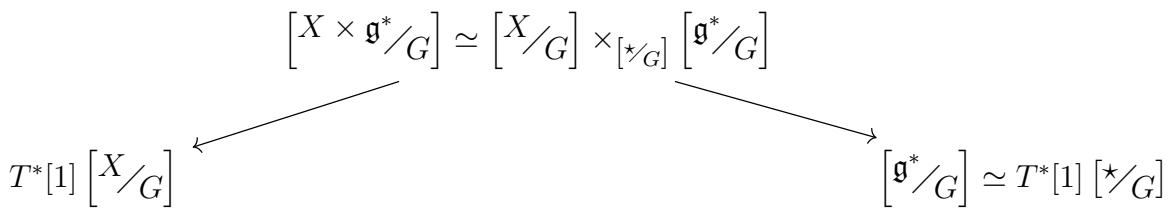
– 截面 $\left[X/G\right] \to T^*[1]\left[X/G\right]$ 上的拉格朗日结构：



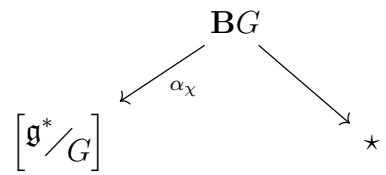
– 使用例2.1.19，命题 4.1.19 和引理 4.1.25，我们得到：

$$\left[X \times \mathfrak{g}^*/G\right] \simeq \left[X/G\right] \times_{[\star/G]} \left[\mathfrak{g}^*/G\right]$$

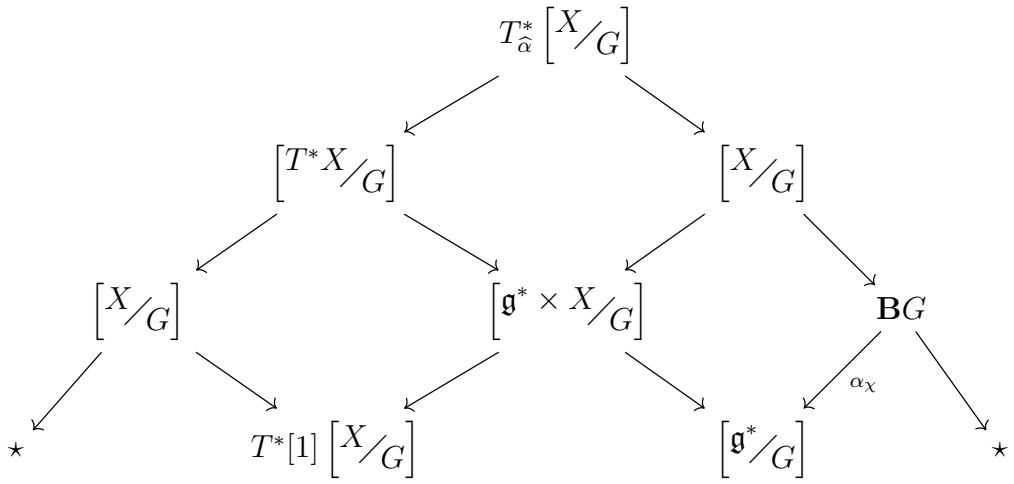
我们得到拉格朗日对应：



– 由次数 1 的闭 1-形式得到的拉格朗日，α_χ：



接下来，我们复合这些拉格朗日对应：



我们唯一需要证明的是，这构成了一个拉格朗日对应图表，因此需要证明该图表中的所有方块都是拉回方块。最右侧的方块是命题 4.1.19 中的一个拉回方块，而我们可以认出定义 $T^*_{\widehat{\alpha}}\left[X/G\right]$ 的拉回方块。

我们只需证明存在一个自然等价：

$$\left[X/G\right]\times_{T^*[1]\left[X/G\right]}\left[\mathfrak{g}^*\times X/G\right]\simeq\left[T^*X/G\right]$$

我们只需证明以下等价：

在那里

$$\left[X/G\right]\times_{T^*[1]\left[X/G\right]}\left[\mathfrak{g}^*\times X/G\right]\simeq\left[X/G\right]\times_{T^*[1]\left[X/G\right]}\left[X/G\right]\times_{\left[\star/G\right]}\left[\mathfrak{g}^*/G\right]$$

现在我们利用这样一个事实： $T^*[1]\left[X/G\right]$中的零截面的自交为 $T^*\left[X/G\right]$。这意味着：

$$\left[X/G\right]\times_{T^*[1]\left[X/G\right]}\left[\mathfrak{g}^*\times X/G\right]\simeq T^*\left[X/G\right]\times_{\left[\star/G\right]}\left[\mathfrak{g}^*/G\right]$$

现在我们可以利用这样一个事实：存在一个拉回（见命题4.1.29 或[Saf16]）：

$$T^*\left[X/G\right]\simeq\left[T^*X/G\right]\times_{\left[\mathfrak{g}^*/G\right]}\mathbf{B}G$$

利用这一点，我们将 $T^*\left[X/G\right]$分解到一个纤维积中，并得到：

$$\left[X/G\right]\times_{T^*[1]\left[X/G\right]}\left[\mathfrak{g}^*\times X/G\right]\simeq\left[T^*X/G\right]\times_{\left[\mathfrak{g}^*/G\right]}\left[\star/G\right]\times_{\left[\star/G\right]}\left[\mathfrak{g}^*/G\right]\simeq\left[T^*X/G\right]$$

3. 关于李代数丛的导出几何

李代数丛是控制无穷小作用的自然对象。从某种意义上说，它们是某种“广义切丛”，并通过锚映射确定一个切向量层；切向量层可被视为李代数丛作用所沿的无穷小方向。李代数丛之所以是编码无穷小作用的恰当对象，可以用以下启发式说法来解释：

> 李代数丛之于李群胚，犹如李代数之于李群

事实上，给定一个光滑群胚（定义在一个“足够良好”的底空间上）：

$$\mathscr{G} \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} X$$

连同 $e: \quad X \to \mathscr{G}$单位，我们可以构造一个李代数丛（参见构造 4.2.1），其锚映射由自然映射给出：

$$\rho : e^* \mathbb{T}^s_{\mathscr{G}/X} \to \mathbb{T}_X$$

这种类比并不完美，因为并非所有李代数丛都能积分为 光滑群胚（定义 4.1.6）。不过，我们将在第 4.2.1 节看到，它们可以积分为一种更一般的对象，称为“形式群胚”（定义 4.1.6）。

我们将在第 4节研究“无穷小”等变几何，因为这类几何自然出现在第 5节 BV复形的构造中。

正如我们将看到的，等变几何就是对“商”栈的几何进行研究。在无穷小情形下，我们需要阐明无穷小商栈这一概念，这正是第 3.2.1节的目的。

我们将在第 3.1节开始回顾李代数丛的定义和同伦论，主要遵循 [Nui19a、Nui19b]。在第 3.2.1节，我们定义李代数丛的无穷小商栈这一概念。在第 4.2.1节，我们将通过证明它们（在良好情形下）是由光滑群胚得到的商栈的投影的形式完备化，说明这些确实是群胚商的无穷小版本。

在第3.3节中，我们讨论李代数丛对映射的无穷小作用（模同伦）的概念，$f: \ Y \to X$，其中 X 是李代数丛的底空间。我们还讨论由同伦表示（第3.3.1节）给出的作用，尤其包括伴随作用和余伴随作用的例子。

由于我们将在形式几何中工作，从现在起，所有栈都将是局部有限表示的。此外，我们假设所有栈都存在余切复形。

3.1. 李代数丛与 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛。

本节回顾李代数丛与 $\mathscr{L}_\infty$代数丛的定义和同伦论。本节主要遵循 [Nui19b、Nui19a]。

3.1.1. 李代数丛的定义与基本性质。

我们希望讨论导出栈 X 上李代数丛的概念。在微分几何中，这应定义为向量丛的整体截面模上的某种结构。

在代数几何中，仅研究整体截面代数是不够的（因为它无法恢复李代数丛在局部的结构），因此我们应将李代数丛定义为一个李代数丛结构的 ∞-层。

我们不会这样做，因为发展此类理论超出了我们的目标。因此，为了探讨李代数丛的同伦论，我们将自己限制在 [Nui19a、Nui19b] 所采用的框架中。实际上，我们将研究范围限制在几乎有限表示的仿射基底 $X := \text{谱}(A)$ 上。换言之，由于底空间是仿射的，我们回到了可以在整体截面模上定义李代数丛结构的情形。

定义 3.1.1 ([Nui19b，定义 2.1])。一个 上的李代数丛 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 是一个 A-模 $\mathscr{L}$，并带有一个 k-线性李代数结构以及一个 锚映射ρ: $\mathscr{L} \to \mathbb{T}_A$ 满足：

– ρ 是一个 A-模映射及李代数映射[1]。– 李括号不满足 A-线性的部分由莱布尼茨公式控制：

$$[w, fv] = (-1)^{|f||w|} f\,[w, v] + \rho(w)(f).v$$

回顾记号 1.2.10，我们用 $\mathscr{L}$ 表示与$\mathscr{L}$ 相关联、锚映射为 $\rho: L \to TX$的线性栈。我们也会交替地将 L 和 $\mathscr{L}$ 称为定义在 X上的李代数丛。

定义 3.1.2。定义在 A 上的李代数丛态射是一个态射 $f: \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$，满足：

– f 与锚映射相容。– f 定义了底层李代数之间的一个态射。

[1]事实上，这是一个李代数同态，这一点是李括号的莱布尼茨法则和雅可比恒等式的推论。

这定义了一个以 A 为底空间的李代数丛范畴，并配有定义3.1.2中的态射概念。此外，我们称 f 是一个弱等价，当且仅当其底层映射 A-模之间是一个拟同构[1]。在这些弱等价处局部化后，便得到李代数丛的 ∞范畴（我们也将其记作李锚丛 $_A$）。我们将在第3.1.2 节看到，这个范畴也可以视为一个半模型范畴。

注 3.1.3。取 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 和 $\mathscr{L} \in$ 模范畴$_A$。在 $\mathscr{L}$ 上定义李代数丛结构，就是给出一个李代数丛 $\mathscr{L}'$，并附带一个底层 A-模之间的弱等价：

$$\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}'$$

事实上，$\mathscr{L}$ 上的李代数丛结构构成一个 ∞-范畴，该范畴由以下 ∞-范畴的拉回给出：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LieAlgd}_A(\mathscr{L}) & \longrightarrow & \mathrm{LieAlgd}_A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \star & \xrightarrow{\mathscr{L}} & \mathrm{Mod}_A \end{array}$$

因此，在一个 A-模 $\mathscr{L}$ 上定义李代数丛结构，就是给出一个李代数丛，其底层 A- 模仅与 $\mathscr{L}$ 弱等价。遗憾的是，无法沿弱等价传递李代数丛结构。不过，可以传递“同伦李阿尔布莱德结构”，并得到∞-拟同构。

事实上，与李代数的情形类似，我们可以考虑同 $\mathscr{L}_\infty$伦李代数丛的概念，我们将其称为 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛。与李代数和 $\mathscr{L}_\infty$-代数的情形一样，它是一个更复杂的对象，但借助推论3.1.14，事实证明，它描述了一个与李代数丛范畴等价的 ∞-范畴。 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛的主要优势在于 ∞-态射的概念（定义3.1.5），针对这种态射，我们有一个同伦传递定理版本（第3.4节）。

定义 3.1.4 ([Nui19a，定义 2.5])。一个 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛，定义在一个代数 $A \in$交换微分分次代数 上，是一个 A-模 $\mathscr{L}$，带有如下结构：一个 k-线性 $\mathscr{L}_\infty$-代数以及一个锚映射 $\rho : \mathscr{L} \to \mathbb{T}_A$ 满足：

– ρ 既是 A-模映射，也是 $\mathscr{L}_\infty$-代数映射。– 二重括号不满足 A-线性的部分由莱布尼茨法则控制：

$$[w, fv] = (-1)^{|f||w|} f\,[w, v] + \rho(w)(f).v$$

– 对于 $n \geq 3$，n元括号是 A线性的：

$$[v_1, \cdots, fv_n]_n = (-1)^{|f|(|v_1|+\cdots+|v_{n-1}|)} f\,[v_1, \cdots, v_n]$$

[1]特别地，这一定义意味着遗忘函子 $\mathrm{LieAlgd}_A \to$ 模范畴$_A$ 是保守的。

A 上的 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛态射是一个态射 $f\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$，满足：

– f 与锚映射相容。 – f 定义了底层 $\mathscr{L}_\infty$-代数的一个态射。

这定义了一个以 A 为底空间的 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛范畴。

此外，我们称 f 为弱等价，如果底层映射 A-模是一个拟同构[1]。对这些弱等价进行局部化后，这便定义了∞-范畴 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛（我们也将其记作 $\mathscr{L}_\infty\mathrm{Algd}_A$）。这个 ∞-范畴等价于一个半模型范畴的局部化，该半模型范畴也记作 $\mathscr{L}_\infty\mathrm{Algd}_A$。

尽管这个态射定义很简单，但它过于严格。相反，我们希望定义一种态射概念，只要求其在同伦意义下保留 $\mathscr{L}_\infty$结构。同样，在同伦意义下，这并不会改变任何东西。不过，这才是正确的“弱”态射概念，并将在同伦传递定理中出现。

定义 3.1.5 ([PS20，定义 2.2]). A $\mathscr{L}_\infty$-态射 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛在A, $f\colon \mathscr{L} \rightsquigarrow \mathscr{L}'$, 由以下数据给出： A-线性斜对称映射，其中 $n \geq 1$:

$$f_n : \mathscr{L}^{\otimes n} \to \mathscr{L}'[1-n]$$

使得：

– f_1 与锚映射相交换。 – f 定义了一个 ∞-态射，作用于底层的 k-线性 $\mathscr{L}_\infty$-代数（参见[LV12，命题 10.2.13]）。

定义 3.1.6. 若李代数丛或 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛 $\mathscr{L}$ 的底层A-模 $\mathscr{L}$ 是完美的，则称其为完美的 。

命题 3.1.7. 设 X 为满足假设[2] *3.2.2*的仿射栈，并设有形式导出栈之间的映射： $f\colon X \to Y$ 且满足 Y 具有切复形。则相对切复形具有李代数丛结构，其锚映射为自然映射:[3] :

$$\mathbb{T}_{X/Y} \to \mathbb{T}_X$$

该构造关于 $Y \in \mathbf{dSt}^{\mathrm{afp}}_{/X}$ 是函子性的。

证明。 由引理 1.3.20可得如下分解:

$$X \to \widehat{Y_X} \to Y$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由于 Y 是形式的， Y_X 也同样是形式的，且映射 $X \to Y_X$ 是一个形式加厚（命题1.3.14）。因此，它可以被视为预栈中的一个形式加厚（见注1.3.23 及命题1.3.24），并对应于一个形式的

[1]特别地，该定义意味着遗忘函子 $\mathscr{L}_\infty\mathrm{Algd}_A \to$ 模范畴$_A$ 是保守的。[2]这些是在 X 之下将形式模空间问题与 X上的李代数丛对应起来所需的假设。我们将在第 3.2.1 节中详细讨论这一点。[3]按照注 3.1.3。

模空间问题 F （得益于定理1.3.22）。于是我们有一个等价$\widehat{\ }$（由引理1.3.27以及映射 $Y_X \to Y$ 是形式 étale 这一事实可得）：

$$\mathbb{T}_{X/F} \simeq \mathbb{T}_{X/\widehat{Y_X}} \simeq \mathbb{T}_{X/Y}$$

$\widehat{\ }$这使用了如下事实：由于 Y 和 Y_X 是栈，它们的相对切丛与将它们视为预叠时的相对切丛一致（见命题 1.3.24）。
根据推论 3.2.9，形式模空间问题 $\mathbb{T}_{X/F}$ 的相对切丛具有李代数丛结构，因此 $\mathbb{T}_{X/Y}$也具有该结构。
取形式完备化后，相关的形式模空间问题及其相关的李代数丛都是函子。□

我们还将在命题 3.2.33 中看到，该构造关于 X 的选择是函子性的（基变换）。

例 3.1.8. 设 G 是作用于 X 仿射栈上的仿射代数群。令 $\mathfrak{g}$ 表示其李代数。则 $X \times \mathfrak{g}$ 在 X上具有李代数丛结构，具体如下：

(1)
$$\rho : X \times \mathfrak{g} \to \mathbb{T}_X$$
由作用 γ 的切映射给出：在 G 的单位处的 $G \times X \to X$，由以下复合给出：
$$X \times \mathfrak{g} \xrightarrow{e} X \times G \times \mathfrak{g} \simeq X \times TG \xrightarrow{s_0} TX \times TG \to TX$$
(2) 李括号由 $\mathfrak{g}$ 上的李括号定义，并利用莱布尼茨性质将其扩展到 $X \times \mathfrak{g}$。

这是与 G 的作用相关联的无穷小作用。
如果 G 光滑地作用于 X 一个 Artin 栈，则该李代数丛等价于由投影 p: $X \to \left[X/G\right]$的相对切丛$\mathbb{T}_{X/\left[X/G\right]}$ 给出的李代数丛，见例 3.1.7。

例 3.1.9。
– 以恒等映射 id: $\mathbb{T}_X \to \mathbb{T}_X$为锚映射的切复形是一个李代数丛。– 例 3.1.8 可推广到 $\mathscr{L}_\infty$-代数 $\mathfrak{g} \to \mathbb{T}_X$的任意映射。根据[Nui19a，例 2。8]，我们可以在作用李代数丛或 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛上构造$A \otimes \mathfrak{g}$，方法是为遗忘函子定义左伴随函子（见[Nui19a，引理 2。10]）：

$$\mathrm{Lie}_{/\mathbb{T}_A} \rightleftarrows \mathrm{LieAlgd}_A \qquad (\mathrm{Lie}_\infty)_{/\mathbb{T}_A} \rightleftarrows \mathscr{L}_\infty\mathrm{Algd}_A$$

– X 上的一个（可能是奇异的）叶状结构等价于 X上的一个锚映射为单射的李代数丛。
– 锚映射为零的李代数丛，等价于要求李括号是 A-线性的。

3.1.2. 李代数丛的同伦论。

我们将从 $\mathscr{L}_\infty$ Nui19a、Nui19b] 中提取李代数及李代数丛同伦论的核心要素。这为必要的同伦论奠定基础。本节最重要的观点是，在同伦意义下，李代数丛和 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛给出等价的 ∞-范畴。这主要基于与李代数范畴和 $\mathscr{L}_\infty$-代数范畴 Quillen 等价相同的理由。

定理 3.1.10 ([Nui19a，定理 3.1])。 范畴李锚丛$_A$ 和 $\mathscr{L}_\infty$代数丛$_A$均具有右适当的可操作半模型结构，满足：

– 一个映射是弱等价，当且仅当它是拟同构[1]。– 一个映射是纤维化，当且仅当它是逐次满射。

注 3.1.11。 定理3.1.10 给出的弱等价类和纤维化类并未定义一个模型结构，因为通常不存在纤维化替换，详见 [Nui19a，例 3.2]。

定理 3.1.12 ([Nui19a，定理 3.3])。 遗忘函子：

$$U : \mathrm{LieAlgd}_A \to \mathrm{Mod}_A^{/\mathbb{T}_A} \qquad \mathscr{L}_\infty\mathrm{Algd}_A \to \mathrm{Mod}_A^{/\mathbb{T}_A}$$

是右 *Quillen* 函子，具有以下性质：

– 它们保余纤维对象。 – 它们保筛过同伦余极限。

得益于以下结果，李代数与李代数丛的同伦论也彼此相关：

Pr命题 3.1.13 ([Nui19a，命题 3.4])。 存在一个 *Quillen* 伴随[2] ：

$$\mathrm{Lie}_A \underset{\ker}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathrm{LieAlgd}_A$$

右伴随 核 将一个李代数丛映射到其锚映射的核。此外，其右导出函子检测等价，并保所有筛过同伦余极限。

推论 3.1.14 ([Nui19a，推论 3.8])。 包含映射 j： 李锚丛$_A \to \mathscr{L}_\infty$代数丛$_A$是一个 *Quillen* 等价的右伴随。特别地，任何 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛都与一个李代数丛弱等价。

[1]这些正是我们在定义 3.1.2 中讨论的弱等价。因此，这使该定义成为 ∞李与 $\mathscr{L}_\infty$ 代数丛在 A上的（半）模型[2]。 Lie_A 上的模型结构是通常的模型结构，由自由-遗忘伴随转移而来Lie_A ⊣ 模范畴$_A$。

注意，我们有一个由右 Quillen 函子构成的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LieAlgd}_A & \longrightarrow & \mathscr{L}_\infty\mathrm{Algd}_A \\ \downarrow{\scriptstyle \ker} & & \downarrow{\scriptstyle \ker} \\ \mathrm{Lie}_A & \xrightarrow{w^*} & L_\infty\mathrm{Alg}_A \end{array}$$

其中 w^* 是由拟运算映射诱导的限制函子：

$$w : \mathbf{Lie}_\infty \to \mathbf{Lie}$$

该映射是拟运算的等价（甚至是余纤维替换），并在李代数范畴与 $\mathscr{L}_\infty$-代数范畴之间诱导出 Quillen 等价（参见[Hin97，定理 4.7。4]）。

3.2. **李代数丛的无穷小商与几何性质。**

无穷小作用的“无穷小商”这一概念并不显而易见。文献中通常将李代数丛（即其底空间上的无穷小作用）的无穷小商仅通过该李代数丛的切瓦利–埃伦伯格代数作代数性定义（例如参见 [PS20]）。然而，这里存在两个问题：将切瓦利–埃伦伯格代数选作导出无穷小不变量的代表，原则上并非规范的；而且它与几何意义上的无穷小商这一概念之间的关系也不清楚[1]。

本节将介绍另一种形式栈的构造，我们称之为无穷小商，并说明它与切瓦利–埃伦伯格代数之间的关系。不过，仅从定义还无法看出这确实对应着一种合理的无穷小商概念。只有在第4.2.1 节，我们才能解释（在良好的情形下），X 被一个李代数丛$\mathscr{L}$取无穷小商，就是投影到由一个群胚所作之商的形式完备化，该群胚 $\mathscr{G}$积分得到 $\mathscr{L}$，从而给出如下分解：

$$X \to \left[X/\mathscr{L}\right] \simeq \widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]}_X \to \left[X/\mathscr{G}\right]$$

我们将首先描述李代数丛与形式模空间问题之间的关系。事实证明，在满足某些技术条件时，这正是由一个*Koszul* 对偶背景（定义D.2.5 和定理D.2.11）所导出的等价的一个实例。

因此，正如我们在第 1.3.2 节所见，从形式模空间问题可以得到底空间的形式加厚。这将定义无穷小商X ，其对应的李代数丛为 $\mathscr{L}$。

[1]正如我们将看到的，无穷小商尤其并非切瓦利–埃伦伯格代数的谱。因此，在关联切瓦利–埃伦伯格代数上的代数运算与无穷小商上的几何运算时，必须谨慎。

3.2.1. 李代数丛的商栈。

一个众所周知的结果（定理 D.1.9）表明，李代数范畴等价于“带基点的形式模问题”范畴[1]。我们将说明，以类似的方式，仿射基底 X 上的李代数丛（在满足关于 X的某些技术假设时）对应于形式模空间问题在 X 之下（见定理3.2.1）。关于形式模空间问题和 Koszul 对偶背景的回顾，请参阅附录 D 。

我们声称，这类形式模空间问题表示X的“无穷小商”。我们将在第 4.2.1 节看到其中的原因。

定理 3.2.1 ([Nui19b，定理 6。1])。 假设 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 是余纤维化的，并回顾 形式模问题$_A$ 表示 ∞下的形式模空间问题 $X :=$谱(A)范畴。于是我们得到一个伴随：

$$\mathrm{MC} : \mathrm{LieAlgd}_A \rightleftarrows \mathbf{FMP}_A : \widetilde{\mathbb{T}}_{X/-}$$

此外，当 A 最终余连通时，这就是一个等价。记号 $\widetilde{\mathbb{T}}_{X/-}$与相对余切复形的记号相似，原因将在引理 *3.2.8*中说明。

为得到本定理中的等价，我们将经常使用以下假设：

假设 3.2.2。 对于导出栈 X ，我们考虑以下假设 ***n:***

- X 是仿射的，并且 $X =$ 谱(A) 是带有 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 的。
- A 是余纤维化的。
- A 是几乎有限呈现的。
- A 是最终余连通的。

定义 3.2.3。 给定一个 $\mathscr{L}$ 上的 X 李代数丛，满足假设 3.2.2。那么无穷小商 X 关于 $\mathscr{L}$ 定义如下：

$$\left[X/\mathscr{L}\right] := \underline{\mathrm{MC}}_{\mathscr{L}}$$

其中 $\underline{(-)}$ 表示定理 1.3.22 中将形式模问题扩展到 X的形式加厚上的函子。这个栈定义为以下预栈的栈化：

$$\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} := \underline{\mathrm{MC}}_{\mathscr{L}_{\mathrm{pre}}}$$

[1]变形背景 cdga/k上的形式模问题，视为带基点的仿射空间。

注 3.2.4。乍看之下，称其为商的原因并不明确。我们将在第 4.2.1 节对此作出解释，并说明在合适的情形下，它可以被识别为商映射的形式完备化：

$$p : X \to \left[X/\mathscr{G}\right]$$

现在我们来说明定理3.2.1。事实证明，这个等价来自一个*Koszul* 对偶背景（定义D.2.5），并使用了定理D.2.11。这个 Koszul 对偶背景由一个涉及切瓦利–埃伦伯格函子的伴随给出：

D定义 3.2.5。未导出的 Chevalley–Eilenberg 函子是函子 ：

$$\begin{aligned} \mathrm{CE} : \mathrm{LieAlgd}_A &\longrightarrow \left(\mathrm{cdga}_{/A}\right)^{\mathrm{op}} \\ \mathscr{L} &\longmapsto (\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Sym}_A \mathscr{L}[1], A), \delta_{\mathrm{CE}}) \end{aligned}$$

微分 δ_{CE} 由以下条件确定：

– 它在 A 上的作用由 $\delta_A + \rho^* \circ d_{\mathrm{dR}}$ 给出，其中 $\rho^* \circ d_{\mathrm{dR}}$ 是复合：

$$A \to \mathbb{L}_A[-1] \to \mathscr{L}^\vee[-1]$$

– 它在 $\mathscr{L}^\vee[-1]$ 上的作用由 $\delta_{\mathscr{L}^\vee} + \Delta$ 给出，其中 $\delta_{\mathscr{L}^\vee}$ 是微分在 $\mathscr{L}$ 上的对偶，而 Δ 满足：对于所有 $\alpha \in \mathscr{L}^\vee[-1]$，以及 v、$w \in \mathscr{L}$：

$$(\Delta\alpha)(v,w) = \alpha([v,w]) - \rho(v)(\alpha(w)) + \rho(w)(\alpha(v))$$

– 一般而言，该公式在忽略符号差异的情况下写作：

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{CE}}\alpha(v_1, \cdots, v_n) =& \delta_A \alpha(v_1, \cdots, v_n) - \sum_i \alpha(v_1, \cdots, \delta_{\mathscr{L}} v_i, \cdots, v_n) \\ &+ \sum_i \rho(v_i)\left(\alpha(v_1, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n)\right) - \sum_{i<j} \alpha\left([v_i, v_j], v_1, \cdots, v_n\right) \end{aligned}$$

如果 $\mathscr{L}$ 是完美的，那么这等价于在[1]上的一个微分：

$$\left(\widehat{\mathrm{Sym}}_A \mathscr{L}^\vee[-1], \delta_{\mathrm{CE}}\right)$$

Mor此外，该函子在相应的 ∞-范畴之间诱导出一个函子：

$$\mathbf{CE} : \mathrm{LieAlgd}_A \to \left(\mathrm{cdga}_{/A}\right)^{\mathrm{op}}$$

未导出的切瓦利–埃伦伯格函子保留A-余纤维化[2] 李代数丛之间的弱等价（参见 [Nui19b，命题 4.1]的证明）。因此，导出切瓦利–埃伦伯格函子可以通过取一个 A-余纤维替换来计算。

[1]在这种情况下，微分完全由其在 A 和 $\mathscr{L}^\vee[-1]$上的作用决定。[2]一个 A-余纤维化李代数丛是指其底层模为余纤维化的李代数丛。

命题 3.2.6。令 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 为余纤维化且几乎有限呈示。则切瓦利–埃伦伯格函子有一个右伴随：

$$\mathbf{CE} : \mathrm{LieAlgd}_A \rightleftarrows \left(\mathrm{cdga}_{/A}\right)^{\mathrm{op}} : \mathfrak{D}$$

~使得 $\mathfrak{D}(B \to A)$：$= \mathbb{T}_{A/B}$ 由 A-模 $\mathbb{T}_{A/B}$ 给出，并带有由李锚子代数（注 [Nui19b，注 4.20]）给出的李代数丛结构：

$$\mathbb{T}_{A/B} \simeq \mathrm{Der}_B(A, A) \to \mathbb{T}_A$$

由例 *D.2.8* 可知，当 A 最终余连通时（换言之，若$X =$ 谱(A) 满足假设 *3.2.2*），该伴随构成了例 *D.1.2*和 *D.2.4*中讨论的（对偶）变形背景的 ***Koszul*** 对偶背景。根据定理 *3.2.1*和定理 *D.2.11*，这便推出了该定理。

注 3.2.7。 现在我们可以在假设MC 的背景下描述函子 3.2.2。根据推论 D.2.10，对于所有 $\mathscr{L} \in$李锚丛$_A$：

$$\mathrm{MC}_{\mathscr{L}} := \underset{\mathrm{LieAlgd}_A}{\mathrm{Map}} \left(\mathfrak{D}(-), \mathscr{L}\right)$$

引理 3.2.8。 若 $X =$ 谱(A) 满足假设*3.2.2*，则有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LieAlgd}_A & \xrightarrow{\mathrm{MC}} & \mathbf{FMP}_A \\ & \searrow^{U} & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{T}_{A/-}} \\ & & \mathrm{Mod}_A \end{array}$$

其中，函子 U 忘却了李代数丛结构。

证明。 由命题 D.2.12，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \text{李锚丛}_A & \xrightarrow{\Psi} & \mathbf{FMP}_A \\ & \searrow^{\Theta} \quad \swarrow_{T} & \\ & \mathbf{Sp} & \end{array}$$

其中，对每个 $n \geq 0$， $\Theta(\mathscr{L})$ 是给定的谱对象，定义如下：

$$\underset{\mathrm{LieAlgd}_A}{\mathrm{Map}} \left(\mathrm{Free}(A[-n-1]), \mathscr{L}\right)$$

这等价于将稳定 Dold–Kan 函子应用于 A-模中的谱对象所得到的谱对象；该对象对每个 $n \geq 0$ 定义为：

$$\underset{\mathrm{LieAlgd}_A}{\underline{\mathrm{Hom}}} \left(\mathrm{Free}(A[-n-1]), \mathscr{L}\right) \simeq \underset{\mathrm{Mod}_A^{/\mathbb{T}_A}}{\underline{\mathrm{Hom}}} \left(A[-n-1], U(\mathscr{L})\right)$$

类似地， T 是切丛函子（见第 D.2.1 节），也可以视为一个 A-模。下面的等价关系表明， $T \circ \mathrm{MC}$ 给出了与A-模相同的 Θ:

$$\begin{aligned}\underline{\underset{\mathbf{FMP}_A}{\mathrm{Hom}}}\left(\mathbf{Spf}_A(A \boxplus A[n]), \mathrm{MC}_{\mathscr{L}}\right) &\simeq \underset{\mathrm{LieAlgd}_A}{\mathrm{Map}}\left(\mathfrak{D}(A \boxplus A[n]), \mathscr{L}\right) \\ &\simeq \underset{\mathrm{LieAlgd}_A}{\mathrm{Map}}\left(\mathrm{Free}(A[-n-1]), \mathscr{L}\right)\end{aligned}$$

其中，第二个等价来自这样一个事实：对于 Koszul 对偶背景，函子 $\mathfrak{D}$ 将变形背景的谱对象（$A \boxplus A[n]$）映射为对偶变形背景的谱对象（$\mathrm{Free}(A[-n-1])$）（更多详情请参见附录D.2.2 ）。

在这两种情况下，Sp 中的元素都来自谱对象的稳定实现，该谱对象对所有 $n \geq 0$ 均由下式给出：

$$\begin{aligned}\underline{\underset{\mathrm{Mod}_A^{/\mathbb{T}_A}}{\mathrm{Hom}}}\left(A[-n-1], U(\mathscr{L})\right) &\simeq \underline{\underset{\mathrm{Mod}_A}{\mathrm{Hom}}}\left(A[-n-1], \mathrm{fiber}(U(\mathscr{L}) \to \mathbb{T}_A)\right) \\ &\simeq \mathrm{fiber}(U(\mathscr{L}) \to \mathbb{T}_A)[n+1]\end{aligned}$$

因此，这个谱对象对应于 A-模范畴[1]:

$$U(\mathscr{L})[1] \oplus^{\rho} \mathbb{T}_A$$

因此，函子 Θ 和 T 都经由 $\mathbf{Mod}_A$ 分解（且这些分解与 MC 交换）。然而，这些新的函子并不完全是我们想要的函子。为了得到我们想要的图表（带有相对切丛），我们需要注意到，我们得到的 A-模是在 A 上对 $\mathbf{MC}_{\mathscr{L}}$ 的切丛作拉回，而我们需要的是相对切丛。

我们有一个自然映射 $\mathbb{T}_A \to U(\mathscr{L})[1] \oplus^{\rho} \mathbb{T}_A$，相对切丛是该映射的纤维，这显然给出 $U(\mathscr{L})$，即 $\mathscr{L}$ 的底层模。□

推论 3.2.9。 设 $X = \text{谱}(A)$ 满足假设*3.2.2*。若 $F \in \text{形式模问题}_A$，那么由定理*3.2.1*，存在一个李代数丛 $\mathscr{L}$ 使得 $F \simeq \mathrm{MC}_{\mathscr{L}}$。此外，相对切丛 $\mathbb{T}_{X/F}$ 具有李代数丛结构，使其与 $\mathscr{L}$ 等价。换言之， $\mathscr{L}$ 的底层模弱等价于 $\mathbb{T}_{X/F}$。

这是一种相当迂回的方式，用来在相对切丛上得到李代数丛结构， $\mathbb{T}_{X/F}$。主要问题在于，通过函子 $\mathbb{T}_{X/-}$ 得到的李代数丛结构~并不显式。然而，在取$F = \mathbf{Spf}_A(B)$作为 $B \in$ 交换微分分次代数$/A$的情形下，我们有如下结果：

[1]回顾一下，若 V和 W 是复形，且 $f\colon V \to W$ 是复形之间的映射，则我们用 $V[1] \oplus^{f} W$ 表示这样一个复形：其底层模为 $V[1] \oplus W$，微分由 V上的微分、 W 上的微分以及将 f 视为次数 1 的映射三者之和给出。

引理 3.2.10. 若 $X = \text{谱}(A)$ 满足假设 *3.2.2*，则形式模问题之间存在等价：

$$\mathrm{MC}_{\mathfrak{D}(B)} \simeq \mathbf{Spf}_A(B)$$

证明。 作为 $\mathbf{Art}_{/A}$ 上的函子，我们有以下等价：

$$\begin{aligned}
\mathrm{MC}_{\mathfrak{D}(B)} &\simeq \underset{\mathrm{LieAlgd}_A}{\mathrm{Map}} \left(\mathfrak{D}(-), \mathfrak{D}(B)\right) \\
&\simeq \underset{\left(\mathrm{cdga}_{/A}\right)^{\mathrm{op}}}{\mathrm{Map}} \left(\mathbf{CE}(\mathfrak{D}(-)), B\right) \\
&\simeq \underset{\mathrm{cdga}_{/A}}{\mathrm{Map}} \left(B, \mathbf{CE}(\mathfrak{D}(-))\right) \\
&\simeq \underset{\mathrm{cdga}_{/A}}{\mathrm{Map}} \left(B, -\right) \\
&\simeq \mathbf{Spf}_A(B)
\end{aligned}$$

其中，第四个等价源于以下事实：Chevalley–Eilenberg 和 $\mathfrak{D}$ 定义了阿廷代数与良代数之间的等价（命题 D.2.9），因此，伴随的单位和余单位限制在这些代数上时都是等价。 □

推论 3.2.11。 设 $X := \text{谱}(A)$ 满足假设 *3.2.2*且 $B \in$ 交换微分分次代数$_{/A}$。我们有如下结论：

(1) 与形式谱$\mathbf{Spf}_A(B)$相关的李代数丛的底层模为 $\mathbb{T}_{A/B} \simeq \mathbb{T}_{X/\mathbf{Spf}_A(B)}$。*(2)* 因此，根据推论 *3.2.9*， $\mathbb{T}_{A/B}$ 具有李代数丛结构，使其$\widetilde{\ }$等价于 $\mathbb{T}_{X/\mathbf{Spf}_A(B)}$。

(3) 利用引理 *3.2.10*，存在如下李代数丛等价：

$$\widetilde{\mathbb{T}}_{X/\mathbf{Spf}_A(B)} \simeq \widetilde{\mathbb{T}}_{X/\,\mathrm{MC}_{\mathfrak{D}(B)}} \simeq \mathfrak{D}(B)$$

$\widetilde{\ }$因此，$\mathbb{T}_{A/\mathbf{Spf}_A(B)}$ 上的李代数丛结构来自 $\mathfrak{D}(B)$，如命题*3.2.6* 中所述，其底层模为 $\mathbb{T}_{A/B}$。

推论 3.2.12。 存在李代数丛的等价：

$$\mathbb{T}_{A/\underline{\mathbf{Spf}_A(B)}_{\mathrm{pre}}} \simeq \mathbb{T}_{A/B}$$

证明。 利用推论 1.3.28，我们得到以下 A-模的等价：

$$\mathbb{T}_{A/\underline{\mathbf{Spf}_A(B)}_{\mathrm{pre}}} \simeq \mathbb{T}_{A/\mathbf{Spf}_A(B)}$$

这赋予了$\mathbb{T}_{A/\underline{\mathbf{Spf}_A(B)^{\mathrm{pre}}}}$ 李代数丛结构，该结构来自推论3.2.11

□

注3.2.13。 在文献中（例如参见 [PS20]）， X 被李代数丛 $\mathscr{L}$ 取无穷小商，通常用 $\mathscr{L}$的切瓦利–埃伦伯格代数来表示。事实上，这些代数描述了某种“导出不变量”。

然而，我们将在第 4.1.2 节看到，$\mathrm{MC}_{\mathscr{L}}$（以及它向形式栈的扩张）更适合作为某种商。我们可以利用伴随的余单位，将 $\mathrm{MC}_{\mathscr{L}}$ 与 $\mathscr{L}$ 的切瓦利–埃伦伯格代数联系起来：

$$\mathscr{L} \to \mathfrak{D}(\mathbf{CE}(\mathscr{L}))$$

它给出了一个态射：

$$\mathrm{MC}_{\mathscr{L}} \to \mathrm{MC}_{\mathfrak{D}(\mathbf{CE}(\mathscr{L}))} \simeq \mathbf{Spf}_A(\mathbf{CE}(\mathscr{L}))$$

然而，一般而言这不会是一个等价，因为这将意味着导出切瓦利–艾伦伯格函子是全忠实的。我们预计需要一种 $\mathbf{Spf}_A(-)$ 的变体，以便保留切瓦利–艾伦伯格代数上的分次混合结构，从而解决完美李代数丛的这一问题。

即使导出切瓦利–艾伦伯格函子的表现相当糟糕，事实证明，未导出 切瓦利–艾伦伯格函子具有良好的性质：

引理 3.2.14。取 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}'$ 为定义在 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 上的两个李代数丛，其中 [1] 是一个有限呈代数。我们考虑一个（在 A上的）分次混合复形之间的映射：

$$\Phi : \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}') \to \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})$$

假设这些分次混合代数的权重1 部分之间的映射由 模范畴$_A^{/\mathbb{T}_A}$ 中图表的对偶给出：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L} & \xrightarrow{f} & \mathscr{L}' \\ & \searrow^{\rho} & \downarrow{\scriptstyle \rho'} \\ & & \mathbb{T}_A \end{array}$$

那么 f 是李代数丛态射。

证明。首先，我们要证明 f 与锚映射相容。但由于限制在 A 上的混合微分是一个导子 $A \to \mathscr{L}^\vee[-1]$，它可经由$\mathbb{L}_A[-1]$ 分解，因此得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}_A & \longrightarrow & (\mathscr{L}')^\vee \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle f^\vee} \\ & & \mathscr{L}^\vee \end{array}$$

根据假设，此图表是以下交换图的对偶：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L} & \xrightarrow{f} & \mathscr{L}' \\ & \searrow^{\rho} & \downarrow{\scriptstyle \rho'} \\ & & \mathbb{T}_A \end{array}$$

[1]特别地，根据 [Lur17，定理 7.4.3。18], 这等价于说 $H^0(A)$ 是有限生成的，且 $\mathbb{T}_A$ 是完美的。

为证明 f 保持李括号，我们取 $\alpha \in (\mathscr{L}')^\vee[-1]$ 并利用以下事实：

$$\Phi(\delta_{\mathbf{CE}}\alpha) = \delta_{\mathbf{CE}}(\Phi(\alpha)) = \delta_{\mathbf{CE}}(\alpha \circ f)$$

对于所有 v、$w \in \mathscr{L}$，此等式意味着：

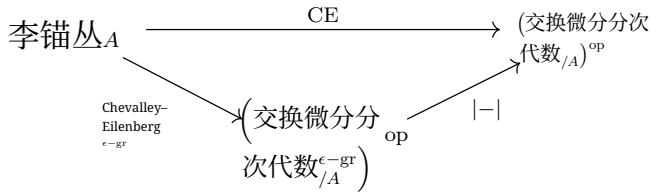
$$\begin{aligned}\alpha\left([f(v), f(w)]'\right) + \rho'(f(v))(\alpha(f(w))) - \rho'(f(w))(\alpha(f(v))) \\ = \alpha(f([v,w])) + \rho(v)(\alpha(f(w))) - \rho(w)(\alpha(f(v)))\end{aligned}$$

利用 $\rho' \circ f = \rho$ 这一事实，可得：

$$\alpha\left([f(v), f(w)]'\right) = \alpha(f([v,w]))$$

an因此 f 保持李括号，且是李代数丛的一个态射 s. □

引理 3.2.15. 设 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$。切瓦利–埃伦伯格函子可经由 A 上的分次混合代数分解（其中 A 被视为集中于权重 0 的分次混合代数）：



假设 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 是有限表示的。那么，Chevalley–Eilenberg$^{\epsilon-\mathrm{gr}}$限制在完美李代数丛上的本质像由满足以下条件的分次混合代数给出：E 存在一个等价[1]：

$$E^{\mathrm{gr}} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_A\left(\mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_A \mathscr{L}[1], A\right)$$

对于某个 $\mathscr{L} \in \mathbf{Perf}(A)$。

此外，限制在严格完美[2] 李代数丛上时，严格函子 严格 函子，Chevalley–Eilenberg$^{\epsilon-\mathrm{gr}}$，是完全忠实的。

证明。 将权重 p 部分定义为：

$$\mathrm{CE}(\mathscr{L})^{\epsilon-\mathrm{gr}}(p) := \underline{\mathrm{Hom}}_A\left(\mathrm{Sym}^{p}_A \mathscr{L}[1], A\right)$$

根据 $\delta_{\mathbf{CE}}$ 的定义，切瓦利–埃伦伯格微分显然分为两部分：一部分保持权重（由 A 和 $\mathscr{L}^\vee[-1]$ 上的内微分给出），另一部分使权重恰好增加 1（由锚映射和李括号的对偶给出）。这定义了一个分次混合复形[3]的结构。根据

[1]换言之，它是由以下元素生成的半自由分次混合代数：A 权重 0 中的 $\mathscr{L}^\vee[-1]$权重1中的元素。[2]严格完美模是有限表示的射影模，而不仅仅是与这类模拟同构的模。[3]另一种理解方式是注意到 $\delta_{\mathbf{CE}}$ 保留完备对称代数上的自然完备滤过。此外，微分可按权重分量分解 $\delta_{\mathbf{CE}} = \delta_0 + \delta_1$ 因此，根据推论 C.2.5中的等价，我们得到一个混合微分为 δ_1的分次混合结构。

实现函子的定义（定义 C.1.8），我们可以看出：

$$\left|\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})\right| \simeq \mathrm{CE}(\mathscr{L})$$

现在转而证明忠实性，并假设 A 有限表示。李代数丛的映射 $f : \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ 完全由它在切瓦利–埃伦伯格分次混合代数上诱导的映射决定：考察该映射在权重 1 上诱导的映射 $(\mathscr{L}')^\vee[-1] \to \mathscr{L}^\vee[-1]$，并利用严格对偶化 $(-)^\vee$ 在严格完美复形上是全忠实的这一事实。

对于本质像，取陈述中所述的、在 A 上的分次混合代数 E，其在权重 1 上具有 $\mathscr{L}^\vee[-1]$。然后我们可以如下在 $\mathscr{L}$ 上构造李代数丛结构：

– 将混合微分限制到 A 上，得到一个映射：

$$A \to \mathscr{L}^\vee[-1]$$

该映射是导子，并且经由 $d_{\mathrm{dR}} : A \to \mathbb{L}_A[-1]$ 分解。我们得到一个映射 $\mathbb{L}_A \to \mathscr{L}^\vee$（次数为 0），其对偶定义了锚映射（因为 $\mathscr{L}$ 和 $\mathbb{L}_A$ 都是完美的）。

– 令 $\alpha \in \mathscr{L}^\vee[-1]$ 和 v、$w \in \mathscr{L}$，然后我们考虑：

$$(\epsilon\alpha)(v,w) + \rho(v)(\alpha(w)) - \rho(w)(\alpha(v))$$

其中 ϵ 是混合微分。注意，根据定义 3.2.5，这正是我们所期望的 $\alpha([v,w])$。我们可以证明，该表达式关于 A-线性于 α。这给出了一个 k-线性映射：

$$\mathscr{L} \otimes \mathscr{L} \to \mathscr{L}$$

将 (v,w) 映射到唯一的元素，记为 $[v,w]$，使得：

$$\alpha([v,w]) = (\epsilon\alpha)(v,w) + \rho(v)(\alpha(w)) - \rho(w)(\alpha(v))$$

利用此公式以及 $\epsilon^2 = 0$ 这一事实，我们可以验证这是一个李括号，并且莱布尼茨法则成立。

为了证明 $\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 是满的（限制在严格完美李代数丛上时），考虑任意一个覆盖 A 的映射：

$$\phi : \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \to \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}')$$

该映射由其在每个权重上的作用决定；由于 Chevalley–Eilenberg 分次混合代数由权重 0 和 1 生成（对于严格完美李代数丛而言），ϕ 完全由以下内容决定：

$$\phi_0 : A \to A := \mathrm{id} \qquad \phi_1 : \mathscr{L}^\vee[-1] \to (\mathscr{L}')^\vee[-1]$$

利用函子 $(-)^\vee$（在完美李代数丛上）的全忠实性，我们得到一个线性栈态射 $\mathscr{L}' \to \mathscr{L}$。由于 ϕ 保持 Chevalley–Eilenberg 微分，这意味着它是一个定义在 A 上的李代数丛态射（因为 A是有限表示的，见引理3.2.14）。□

这个引理还有一个类似版本：将李代数丛替换为 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛，并将分次混合代数替换为弱分次混合代数。

引理 3.2.16. 导出分次混合切瓦利–埃伦伯格函子 $\mathbf{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 限制在完美李代数丛上时是保守的。

证明。 我们考虑以下交换图表：

$$\begin{array}{ccc} \underset{\mathrm{LieAlgd}_A}{\mathrm{Map}}(\mathscr{L},\mathscr{L}') & \longrightarrow & \underset{\mathrm{cdga}^{\epsilon-\mathrm{gr}}_{/A}}{\mathrm{Map}}\left(\mathbf{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}'),\mathbf{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_A(\mathscr{L},\mathscr{L}') & \longrightarrow & \mathrm{Map}_A(\mathscr{L}'^{\vee},\mathscr{L}^{\vee}) \end{array}$$

取一个李代数胚态射 $f\colon \mathscr{L}\to\mathscr{L}'$，使其诱导等价 $\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}')\to\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})$。特别地，它诱导等价 $(\mathscr{L}')^{\vee}\to\mathscr{L}^{\vee}$。对偶化函子 $(-)^{\vee}$ 在完美模上是全忠实的，因此也是保守的。此外，遗忘函子 $\mathrm{LieAlgd}_A\to\mathrm{Mod}_A$ 也是保守的，这意味着李代数胚态射 $\mathscr{L}\to\mathscr{L}'$ 也是一个等价，因此 CE 是一个保守函子。□

我们将使用以下记号：

记号 3.2.17。

– CE 是切瓦利–埃伦伯格函子，给出一个关于 A 的代数。– $\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 是给出分次混合代数的切瓦利–埃伦伯格函子（见命题 3.2.15）。它也可以视为一个弱分次混合代数[1]，记作 $\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$。切瓦利–埃伦伯格微分是该分次混合结构的总微分，因此 $\mathrm{CE}:=\left|\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}\right|$，其中 $|-|$ 是命题 C.1.9 给出的实现函子。– $\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$ 是一个 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛的弱分次混合切瓦利–埃伦伯格代数。– $\mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}$ 是 $\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 的底层分次代数（见引理 C.1.6），其中我们遗忘了混合结构。– 由于弱分次混合复形等价于完备滤过对象（见附录 C.2），我们将 $\mathrm{CE}^{\mathrm{cpl}}$ 对应的完备滤代数记为 $\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$。根据命题 C.2.8，它由以下滤过描述：

$$F^p\mathrm{CE}^{\mathrm{cpl}}(\mathscr{L})\simeq\prod_{p'\geq p}\left(\mathrm{Sym}^{p'}_A\mathscr{L}[1]\right)^{\vee}$$

[1]将 Chevalley–Eilenberg 代数视为弱分次混合代数，在把它视为 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛时很有意义。

由于 CE($\mathscr{L}$) 的权重非负，每个 $F^p\mathrm{CE}^{\mathrm{cpl}}(\mathscr{L})$ 都是微分分次代数，其微分为切瓦利–埃伦伯格微分。对于 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛，情况也相同。

注3.2.18。 由于 ∞-范畴 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛与李代数丛范畴等价（推论 3.1.14），我们可以将一个$\mathscr{L}_\infty$-代数丛的无穷小商定义为与之等价的任意李代数丛的无穷小商。

3.2.2. 李代数丛的拉回与基变换。

本节中我们将使用 $X :=$ 谱(A)、 $Y :=$ 谱(B)以及 $Z :=$ 谱(C)，其中A、B 和 C 均为几乎有限表示的非正分次余纤维化交换微分分次代数。我们将描述李代数丛的基变换与拉回，并在此过程中定义不同底上的李代数丛态射这一概念。我们将说明，这些构造也可以借助其 Chevalley–Eilenberg 代数从代数角度来理解。李代数丛上的许多构造均改编并推广自 [Kla17]。

定义 3.2.19。 设 $\mathscr{L}$ 为 X上的一个李代数丛。我们定义 $f^!\mathscr{L}$ 为 Y 上的李代数丛，由以下纤维积定义：

$$\begin{array}{ccc} f^!\mathscr{L} & \longrightarrow & f^*\mathscr{L} \\ \downarrow{\scriptstyle f^!\rho} & & \downarrow{\scriptstyle f^*\rho} \\ \mathbb{T}_Y & \xrightarrow{f_*} & f^*\mathbb{T}_X \end{array}$$

以及：

– 由投影 $f^!\rho$ 给出的锚映射：

$$f^!\mathscr{L} \to \mathbb{T}_Y$$

– 选取一个使映射 $A \to B$ 成为余纤维化的模型，此拉回便成为严格的，并且李括号在 $\mathbb{T}_Y \times_{f^*\mathbb{T}_X} f^*\mathscr{L}$ 上定义为：

$$[X + gv, Y + hw] = [X, Y] + (gh\,[v, w] + \mathscr{L}_X(h).w - \mathscr{L}_Y(g).v)$$

这在 $f^!\mathscr{L}$ 上定义了一个李代数丛结构，并且给定余纤维替换 $A \to B$的选择，该构造为该李代数丛定义了一个模型。

注 3.2.20。 在 [Kla17], 这个基变换并非总是可能的。他们要求的额外条件确保严格纤维积是一个向量丛。由于我们在更一般的线性栈语境中工作，这样的（导出）纤维积总是存在且是线性的（感谢命题 1.2.17）。定义的其余部分仍然可以定义同伦拉回的严格模型，并给出所需的李代数丛结构。

警告3.2.21。 尽管定义 3.2.19 看起来颇为自然，但我们将在本节后面看到，它或许并非我们真正想要的定义。之后我们会将其改为定义 3.2.30。我们预计这两个定义是一致的，而且本节讨论的所有内容对第二个定义也同样适用。

定义 3.2.22。 设 $\mathscr{L}'$ 和 $\mathscr{L}$ 分别是底空间为 Y 和 X 的李代数丛。那么，李代数丛之间（底空间不同）的态射由以下交换图表定义：

$$\begin{array}{ccc} L' & \xrightarrow{\phi} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

其中 ϕ 由以下复合诱导：一个 $\phi^!: \mathscr{L}' \to f^!\mathscr{L}$ 是同一底空间上的李代数丛态射（定义 3.1.2），与从拉回李代数丛出发的自然态射 $f^!\mathscr{L} \to \mathscr{L}$。

我们将用切瓦利–埃伦伯格分次混合代数的基变换来重新表述这一基变换。为此，我们首先需要明确不同底空间上的切瓦利–埃伦伯格代数之间的态射这一概念。

定义 3.2.23。 给定 $f: A \to B$ 以及分别以 A和B 为底空间的李代数丛 $\mathscr{L}_2$ 和 $\mathscr{L}_1$，若 $\phi : \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}_2) \to \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}_1)$ 是一个关于 的分次混合复形态射，且以下图表交换[1]：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}_2) & \longrightarrow & \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

利用这个定义，切瓦利–埃伦伯格函子可以推广到不同的底空间上：

构造3.2.24。我们可以定义一个严格的（非导出的）函子：

$$\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}} : \mathrm{LieAlgd} \to \left(\mathrm{cdga}^{\epsilon-\mathrm{gr}}\right)^{\mathrm{op}}$$

它将任意李代数胚态射：

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \longrightarrow & L_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

关于 f 上的分次混合代数态射 $\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}_2) \to \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}_1)$。

[1]这是一个分次混合代数图表，其中 A 和 B 集中在权重0上。垂直态射是自然投影。

该函子在对象上的定义由通常的 Chevalley–Eilenberg 代数给出。如上所述，任何李代数胚态射都会诱导出关于态射 $f : B \to A$ 的模之间的映射：

$$\phi : \mathscr{L}_2^\vee[-1] \to \mathscr{L}_1^\vee[-1]$$

我们还得到高权重下的态射：

$$(\mathrm{Sym}_A^p \mathscr{L}_2[1])^\vee \to (\mathrm{Sym}_A^p \mathscr{L}_1[1])^\vee$$

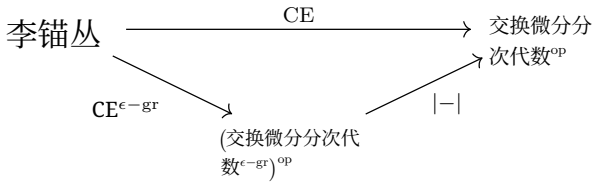
这定义了分次切瓦利–艾伦伯格代数之间的一个态射（因为 f 和 ϕ 保留了内部微分）。我们只需验证这个映射保留混合微分。本质上，这个映射保留了限制在权重0 部分上的混合微分$\epsilon_{|A}$ ： $= \rho^* \circ d_{\mathrm{dR}}$ 因为映射 $\mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$与锚映射相容（因为 $\mathscr{L}_1 \to f^! \mathscr{L}_2$ 必须与定义3.1.2中的锚映射相容）：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_1 & \longrightarrow & f^* \mathscr{L}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_Y & \longrightarrow & f^* \mathbb{T}_X \end{array}$$

其余相容性则源于映射 $\mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$ 是李代数态射这一事实（因为 $\mathscr{L}_1 \to f_! \mathscr{L}_2$和 $f^! \mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_2$都是李代数映射），以及它们保留锚映射这一事实，因为切瓦利–埃伦伯格微分由李括号和锚映射构成（见定义3.2.5）。

事实证明，基于不同底空间的切瓦利–埃伦伯格函子，其行为与基于固定底空间的函子类似：

引理 3.2.25. 严格 *Chevalley–Eilenberg* 函子通过分次混合代数分解：



我们假设底空间是仿射且有限表示的。将$\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$限制在严格完美李代数丛上所得的本质像由满足以下等价关系的分次混合代数 E 给出[1]：

$$E^{\mathrm{gr}} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_A \left(\mathrm{Sym}_A^{\mathrm{gr}} \mathscr{L}[1], A\right)$$

对于 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 有限表示且属于 $\mathscr{L} \in \mathbf{Perf}(A)$。

[1]换言之，它是一个半自由分次混合代数，由 A（一个非正分次且有限表示的代数）在权重 0 下生成，并由 $\mathscr{L}^\vee[-1]$ 在权重 1 下生成。

此外，将其限制在严格完美李代数丛上时，严格 混合分次 *Chevalley– Eilenberg* 函子，Chevalley–Eilenberg$^{\epsilon-\mathrm{gr}}$，是全忠实的。

现在我们可以用代数术语重新表述基变换构造。为此，我们注意到，锚映射 $\mathscr{L} \to \mathbb{T}_A$ 是李代数丛的态射[1] （在同一底空间上），因此诱导出分次混合代数的态射[2]:

$$\mathbf{DR}(A) \simeq \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathbb{T}_A) \to \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})$$

引理 3.2.26。 给定一个李代数丛 $\mathscr{L}$ 在 X 一个有限表示的仿射栈上，且f : $Y \to X$，则在分次混合代数范畴中有一个推出方形:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{DR}(A) & \longrightarrow & \mathbf{DR}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) & \longrightarrow & \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(f^!\mathscr{L}) \end{array}$$

其中 $f^!\mathscr{L}$ 是定义 *3.2.19* 中的拉回李代数丛，且态射:

$$\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \to \mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(f^!\mathscr{L})$$

由李代数丛态射 $f^!\mathscr{L} \to \mathscr{L}$ 诱导。

证明。 对 $f:\ A \to B$取余纤维替换后，我们可以选择 B 使其成为 A上的半自由对象。这意味着 $\mathbf{DR}(B)$ 是$\mathbf{DR}(A)$上的半自由对象。事实上，若 $B = \mathrm{Sym}_A \mathscr{F}^\vee$，其中 $\mathscr{F}$是射影的。于是，在 $\mathscr{F}$上取一个联络，可得一个等价（见第 1.2.5节）：

$$\begin{aligned} \mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(B) &\simeq \mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{Sym}_A \mathscr{F}^\vee}\left(\mathrm{Sym}_A \mathscr{F}^\vee \otimes_A \left(\mathbb{L}_A \oplus^\nabla \mathscr{F}\right)^\vee [-1]\right) \\ &\simeq \mathrm{Sym}_A\left(\mathscr{F}^\vee \oplus \mathbb{L}_A[-1] \oplus \mathscr{F}^\vee[-1]\right) \\ &\simeq \mathrm{Sym}_{\mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(A)}\left(\mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(A) \otimes_A \left(\mathscr{F}^\vee \oplus \mathscr{F}^\vee[-1]\right)\right) \end{aligned}$$

其中 $\mathscr{F}^\vee[-1]$ 的权重为 1。此外，由函子性可得映射 DR(A) →DR(B)，因此这是一个余纤维化，我们可以将同伦推出计算为严格推出。其底层分次代数可以通过底层分次代数的推出计算:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_A \mathbb{L}_A[-1] & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_B \mathbb{L}_B[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_A \mathscr{L}^\vee[-1] & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_B(f^*\mathscr{L}^\vee[-1] \coprod_{f^*\mathbb{L}_A[-1]} \mathbb{L}_B[-1]) \end{array}$$

[1] $\mathbb{T}_A$ 被视为一个定义在 X 上的李代数丛，其锚映射为恒等映射（见例 3.1.9）。[2]第一个等价源于 A 被假设为余纤维化且有限表示。因此，根据推论 1.4.5 我们得到所需的等价

由于 $f^!\mathscr{L}$的严格模型也可以通过对 $A \to B$作余纤维化（或仅作半自由）替换得到，因此对于该模型，我们有：

$$\mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}(f^!\mathscr{L}) \cong \mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_B(\mathscr{L}^\vee[-1] \coprod_{\mathbb{L}_A[-1]} \mathbb{L}_B[-1]) \simeq \mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \otimes_{\mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(A)} \mathbf{DR}^{\mathrm{gr}}(B)$$

我们只需证明分次混合结构相同。

– 切瓦利–埃伦伯格微分的权重 0 部分显然与推出的微分的权重 0 部分相同。– 微分的权重 1 部分限制在 B 上后为 $\rho^* \circ d_{\mathrm{dR}}$，其中锚映射是自然投影：

$$\rho : \mathbb{T}_B \times_{f^*\mathbb{T}_A} f^*\mathscr{L} \to \mathbb{T}_B$$

自然投影。这与推出上的微分相同，该微分由以下复合给出：

$$\begin{aligned} B \simeq B \otimes_A A &\xrightarrow{d_{\mathrm{dR}}} \mathbb{L}_B[-1] \simeq \mathbb{L}_B[-1] \coprod_{f^*\mathbb{L}_A[-1]} f^*\mathbb{L}_A[-1] \\ &\xrightarrow{\rho^*} \mathbb{L}_B[-1] \coprod_{f^*\mathbb{L}_A[-1]} f^*\mathscr{L}^\vee[-1] \end{aligned}$$

其中最后一个映射与自然包含相同：

$$\mathbb{L}_B[-1] \to \mathbb{L}_B[-1] \coprod_{f^*\mathbb{L}_A[-1]} f^*\mathscr{L}^\vee[-1]$$

– 取 $\mu \in \mathbb{L}_B[-1]$ 和 $\alpha \in \mathscr{L}^\vee[-1]$。于是 α 诱导出 $f^*\mathscr{L}^\vee[-1]$ 中的一个元素（我们也称之为 α），可视为映射 $f^*\mathscr{L} \to B$，其中 $\alpha(v) := \alpha(1 \otimes v) = f(\alpha(v))$。

那么，对于满足 $f_*X = g\rho(v)$ 和 $f_*Y = h\rho(w)$ 的所有 X、$Y \in \mathbb{T}_B[1]$、g、$h \in B$、v、$w \in \mathscr{L}[1]$，Chevalley–Eilenberg 微分在 $\mathrm{CE}(f^!\mathscr{L})$ 上权重 1 的部分可描述为：

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{CE}}(\mu+\alpha)(X+gv,Y+hw) &= \mu([X,Y])+gh\alpha[v,w]+X(h)\alpha(w)-Y(g)\alpha(v)\\
&\quad -X(\mu(Y))-X(h\alpha(w))\\
&\quad +Y(\mu(X))+Y(g\alpha(v))\\
&= \mu([X,Y])+gh\alpha[v,w]+X(h)\alpha(w)-Y(g)\alpha(v)\\
&\quad -X(\mu(Y))-X(h)\alpha(w)-hX(\alpha(w))\\
&\quad +Y(\mu(X))+Y(g)\alpha(v)+gY(\alpha(v))\\
&= \mu([X,Y])+gh\alpha[v,w]\\
&\quad -X(\mu(Y))-hX(f(\alpha(w)))\\
&\quad +Y(\mu(X))+gY(f(\alpha(v)))\\
&= \mu([X,Y])-X(\mu(Y))+Y(\mu(X))\\
&\quad +gh\alpha[v,w]-hg\rho(v)(\alpha(w))+gh\rho(w)(\alpha(v))\\
&= \mu([X,Y])-X(\mu(Y))+Y(\mu(X))\\
&\quad gh\left(\alpha[v,w]-\rho(v)(\alpha(w))+\rho(w)(\alpha(v))\right)
\end{aligned}$$

我们可以清楚地识别出 DR(B) 上的混合结构和 CE($\mathscr{L}$) 上定义张量积上微分的混合结构。

□

推论 3.2.27。 若 $\mathscr{L}=0$ 是平凡李代数丛，则 Chevalley–Eilenberg$^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \simeq A$，从而得到一个等价：

$$\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(f^!\mathscr{L}) \simeq \mathbf{DR}(B)\otimes_{\mathbf{DR}(A)} A \simeq \mathbf{DR}(B/A)$$

其中第二个等价来自定义 *1.4.2*。
此外，$f^!0$ 与 $\mathbb{T}_{B/A}$ 作为李代数丛等价，并且有：

$$\mathrm{CE}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathbb{T}_{B/A}) \simeq \mathbf{DR}(B/A)$$

此外，若 $Y=$ 谱(B) 满足假设 *3.2.2*，则它与命题 $\mathfrak{D}(A)$ 中描述的李代数丛一致 *3.2.6*(其中 B 和 A 互换)。

证明。 引理 3.2.26 中的推出恰好就是定义 1.4.2中描述相对德拉姆代数的推出。命题 $\mathbb{T}_{B/A}$ 3.2.6 中的李代数丛结构显然是其切瓦利–埃伦伯格代数等价于$\mathbf{DR}($ B/A)的结构。 □

我们想证明，相对切李代数丛构造（命题3.1.7）关于底空间的选择是函子性的。然而，要做到这一点，我们需要理解关于 $f^!\mathscr{L}$ 的无穷小商。

根据“自然性”，我们预期会有一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[Y/f^!\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \end{array} \tag{13}$$

问题在于，ψ 的存在性先验上并不明确。不过，若它存在，则有以下结论：

引理 3.2.28. 取 $f\colon Y \to X$ 一个满足假设 *3.2.2* 的有限表示栈之间的映射。取 $\mathscr{L}$ 一个位于 X 上的李代数丛，并假设图表 ψ 中的态射(13) 存在，则有李代数丛的等价：

$$f^!\mathscr{L} \simeq \widetilde{\mathbb{T}}_{Y/\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}}$$

特别地，这意味着我们有 Y 的形式加厚之间的等价：

$$\left[Y/f^!\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \simeq \left(\widehat{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}}\right)_Y$$

证明。 我们有一个自然态射：

$$\begin{aligned} \phi : \left[Y/f^!\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} &\to \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \times_{\left(\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_{\mathrm{DR}}} \left(\left[Y/f^!\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_{\mathrm{DR}} \\ &\simeq \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \times_{\left(\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_{\mathrm{DR}}} Y_{\mathrm{DR}} \\ &\simeq \left(\widehat{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}}\right)_Y \end{aligned}$$

ϕ 显然是预栈中 Y 的形式加厚之间的幂零等价。它诱导出一个李代数丛态射：

$$\widetilde{\mathbb{T}}_{Y/\left[Y/f^!\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} \simeq f^!\mathscr{L} \to \widetilde{\mathbb{T}}_{Y/\left(\widehat{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}}\right)_Y}$$

我们将证明，这个等价中的态射的底层模。考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} f^!\mathscr{L} & \longrightarrow & \mathbb{T}_Y & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ f^*\mathscr{L} & \longrightarrow & f^*\mathbb{T}_X & \longrightarrow & f^*h^*\mathbb{T}_{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} \end{array}$$

下面的序列是纤维化的，这要归功于引理 3.2.8、引理 1.3.27 和定义 3.2.3。此外，该方形是一个拉回。因此我们得到一个等价

Y（在 $\mathbb{T}_Y$ 上）的拟凝聚层之间的

$$f^!\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} \operatorname{fiber}\left(\mathbb{T}_Y \to f^*h^*\mathbb{T}_{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}}\right) \simeq \mathbb{T}_{Y/\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}}$$

□

~注 3.2.29。李代数丛 $\mathbb{T}_{Y/\widehat{\left(\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_Y}}$ 具备我们所需的所有性质：

(1) 对于不同底空间上的任意李代数丛态射，其底层 A-模态射分解如下：

$$\mathscr{L}' \to \widetilde{\mathbb{T}}_{Y/\widehat{\left(\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_Y}} \to \mathscr{L}$$

(2) 我们有一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right) & & \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \\ & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & \\ & Y & \end{array}$$

唯一的缺点是，据称，无法确定 (1) 中这些映射是否是按照前面的定义所说的李代数丛态射。

然而，关于不同底空间上的李代数丛态射的定义，基于这样一个事实：

$f^!\mathscr{L} \to \mathscr{L}$ 根据定义是一个李代数丛态射。我们也可以说，自然态射：

$$\widetilde{\mathbb{T}}_{Y/\widehat{\left(\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_Y}} \to \widetilde{\mathbb{T}}_{X/\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}}$$

是李代数丛态射，并将不同底空间上的李代数丛态射定义为底空间为 Y 的李代数丛态射：

$$\mathscr{L}' \to \widetilde{\mathbb{T}}_{Y/\widehat{\left(\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_Y}}$$

实质上，我们主张应将 $f^!\mathscr{L}$ 定义为 $\widetilde{\mathbb{T}}_{Y/\widehat{\left(\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_Y}}$.

定义 3.2.30。 从现在起， $f^!\mathscr{L}$ 将定义为李代数丛：

$$\widetilde{\mathbb{T}}_{Y/\widehat{\left(\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_Y}}$$

到目前为止我们讨论过的结果和定义，在采用新定义后仍然成立。此外，只要图表（13）中的态射存在，根据引理3.2.28，两种定义便等价。

注 3.2.31。 $f^!\mathscr{L}$的旧定义和新定义实际上具有等价的底层 A-模（尽管我们不知道它们的李代数丛结构是否一致）。

注 3.2.32。 事实上，我们预期引理3.2.28 无需假设图表 (13) 中的映射存在也成立（事实上，证明该映射存在与此等价）。然而，我们尚无此证明。

命题 3.2.33。 考虑 X， X' 满足假设 *3.2.2*，以及 Y， Y' 两个形式的栈。假设 X 和 X' 均有限表示。我们考虑如下交换图表：

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{h} & Y' \end{array}$$

于是，存在一个覆盖 f 的李代数胚态射（这里采用命题 *3.1.7*中得到的李代数丛结构）：

$$\mathbb{T}_{X/Y} \to \mathbb{T}_{X'/Y'}$$

若 Y和 Y' 改为形式的预栈，则该结论仍成立。

证明。 我们只需找到一个覆盖 X的李代数胚态射：

$$\mathbb{T}_{X/Y} \to f^!\mathbb{T}_{X'/Y'}$$

根据定义 3.2.30，这等价于存在一个定义在同一底空间上的李代数胚态射：

$$\mathbb{T}_{X/Y} \to \mathbb{T}_{X/Y'} \simeq \mathbb{T}_{X/\widehat{Y'}_X}$$

注意，我们有一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \widehat{Y_X} & \longrightarrow & \widehat{Y'_X} \end{array}$$

根据命题 3.1.7 中关于相对切丛上的李代数丛结构构造的自然性（底空间相同），我们得到一个李代数胚态射：

$$\mathbb{T}_{X/Y} \to \mathbb{T}_{X/Y'}$$

□

W我们还有一些关于基变换构造的自然性性质。

引理 3.2.34. 考虑 $f\colon Y \to X$ 和 $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ 这两个位于 X 上的李代数丛，它们之间有一个李代数胚态射 $\psi\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$，且 $f\colon Y \to X$。那么存在一个李代数胚态射：

$$f^!\psi : f^!\mathscr{L} \to f^!\mathscr{L}'$$

使得下列（定义在不同底空间上的）李代数丛交换图成立：

$$\begin{array}{ccc} f^!\mathscr{L} & \longrightarrow & \mathscr{L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^!\mathscr{L}' & \longrightarrow & \mathscr{L}' \end{array}$$

证明。 由于 $f^!$ 相当于进行一次实际的拉回（沿 TX），我们得到一个自然的模线性态射 $f_!\psi\colon f^!\mathscr{L} \to f_!\mathscr{L}'$，它们构成如下图表。我们只需证明该态射保持李括号且与锚映射相容。与锚映射的相容性源于 $f^!$ 的定义，该定义通过沿映射 $\mathbb{T}_Y \to f^*\mathbb{T}_X$进行拉回得到。保持李括号则源于锚映射的相容性，以及 ψ 保持李括号这一事实（参见定义 3.2.19中的公式）。 □

引理 3.2.35。 与通常的基变换类似，若有 $g\colon Z \to Y$ 和 $f\colon Y \to X$，其中 X、Y 和 Z 均为有限表示的，则存在一个位于 Z之上的李代数丛等价：

$$g^!f^!\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} (f\circ g)^!\mathscr{L}$$

证明。 由于 $f^!$ 和 $g^!$ 相当于取一个拉回，我们得到线性栈的一个等价：

$$g^!f^!\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} (f\circ g)^!\mathscr{L}$$

接着利用引理 3.2.26，切瓦利–埃伦伯格代数由推出给出，因此我们得到相关切瓦利–埃伦伯格代数之间的一个自然态射。然后可以利用引理 3.2.14 证明这是一个李代数丛态射。由于底层模映射是一个等价，它定义了李代数丛的一个等价 □

我们感兴趣的第二种运算是李代数丛的纤维积。我们先考虑在相同底空间上的纤维积。

引理 3.2.36。 李代数丛的拉回存在[1]。取底层模是一个右伴随，因此拉回的底层模是底层模的拉回。

结合李代数丛的拉回与李代数丛的基变换，我们可以定义不同底空间上的李代数丛的拉回。

命题 3.2.37. 我们可以对不同底空间上的李代数丛取拉回。也就是说，若 $\mathscr{L}_X$、$\mathscr{L}_Y$ 和 $\mathscr{L}_Z$ 分别是定义在有限表示底空间 X、Y 和 Y 上的李代数丛，且 ϕ_f：$\mathscr{L}_X \to \mathscr{L}_Z$、$\phi_g$：$\mathscr{L}_Y \to \mathscr{L}_Z$ 分别是覆盖 f：$X \to Z$ 和 g：$Y \to Z$ 的李代数丛态射，则其上存在一个李代数丛结构

[1]因为正如[Nui19a中注 2 所解释的，在半模型范畴中同伦极限存在13]

$\mathscr{L}_X \times_{\mathscr{L}_Z} \mathscr{L}_Y$ 覆盖 $X \times_Z Y$，并且存在李代数丛态射，使得下方方块成为不同底空间上的李代数丛范畴中的拉回方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_X \times_{\mathscr{L}_Z} \mathscr{L}_Y & \longrightarrow & \mathscr{L}_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{L}_X & \longrightarrow & \mathscr{L}_Z \end{array}$$

证明。这个拉回定义为底空间上李代数丛的拉回$X \times_Z Y$（使用引理 3.2.36），它由 $\mathscr{L}_X$, $\mathscr{L}_Y$ 和 $\mathscr{L}_Z$ 到$X \times_Z Y$的基变换给出（使用定义 3.2.19 和引理 3.2.34）。更确切地说，考虑以下拉回图：

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{v} & X \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

根据定义，态射 $\mathscr{L}_X \to \mathscr{L}_Z$ 是一个李代数丛态射 $\mathscr{L}_X \to f^!\mathscr{L}_Z$（$\mathscr{L}_Y \to \mathscr{L}_Z$ 同理）。利用引理 3.2.34 我们得到两个李代数丛态射：

$$v^!\mathscr{L}_X \to v^!f^!\mathscr{L}_Z \qquad u^!\mathscr{L}_Y \to u^!g^!\mathscr{L}_Z$$

由于 $u^!g^! = (g \circ u)^! = (f \circ v)^! = v^!f^!$，我们得到一个定义李代数丛拉回的拉回图（为简洁起见，我们的记号省略了纤维积中的基变换）。

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_X \times_{\mathscr{L}_Z} \mathscr{L}_Y & \longrightarrow & v^!\mathscr{L}_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ u^!\mathscr{L}_Y & \longrightarrow & v^!f^!\mathscr{L}_Z \simeq u^!g^!\mathscr{L}_Z \end{array}$$

这个拉回确实是 $X \times_Z Y$上的一个李代数丛，并且任何以它为顶点的李代数丛锥都会给出一个位于底空间上前述李代数丛图表之上的锥$X \times_Z Y$。因此，根据引理 3.2.36，它是一个纤维积。□

注 3.2.38. 沿态射对 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛进行基变换和拉回的概念（但不适用于 ∞-态射）同样有意义。本质上，在构造中加入高阶括号（$n \geq 3$）并不会带来困难，因为它们都是 A-线性的。特别地，存在一个切瓦利–埃伦伯格弱 分次混合代数函子，$\mathbf{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$，用于刻画 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛结构（其意义是对引理3.2.25的一种推广）。

理解这一情形中的拉回和基变换，最简单的方法是使用弱分次混合代数范畴中的张量积。与李代数丛部分相比，其底层分次空间保持不变，而弱分次混合代数中的张量积会自动定义高阶括号。

3.3. **李代数丛的无穷小作用。**

本节旨在阐明李代数丛的无穷小作用（至同伦）的概念。

我们在第 3.3.1 节从讨论“线性作用”这一特殊的同伦情形开始，这类作用由李代数丛的 同伦表示 给出。接着我们说明，这些同伦表示等价于 $\mathscr{L}$-联络，且这些联络在同伦意义下 平坦。我们还描述了相关示例（例如伴随表示和余伴随表示）以及这类表示的性质。然后，我们在第 3.3.2 节定义李代数丛无穷小作用的一般概念，并证明在某些技术性假设下，同伦表示是同伦作用。

3.3.1. 同伦表示。

我们关注李代数丛的同伦表示，是因为它们是李代数丛在同伦意义下的“线性”无穷小作用（定理3.3.14），并且提供了有用的同伦作用示例，例如伴随和余伴随无穷小作用（例 3.3.10）。

给定向量空间 V，群 G 在 V 上的线性作用，就是 $k[G]$ 在 V 上的一个表示；换言之，就是在 V 上赋予 $k[G]$-模结构。类似地，同伦表示将定义为 $\mathrm{CE}(\mathscr{L})^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$ 上的一个模。

本节主要是对 [AC12], 的改述和推广，以适应导出代数几何的语境。在该节中，我们只考虑几乎有限表示的仿射基底上的李代数丛。

定义 3.3.1. 完备李代数丛的同伦表示 $\mathscr{L}$ 在 X 上是一个弱分次混合模[1]:

$$M \in \mathrm{Mod}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}_{\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})}$$

使得其底层分次模 $M^{\mathrm{gr}} \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}{}_{\mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{L})}$ 与同构[2]于 :

$$M^{\mathrm{gr}} \cong \mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \otimes_A \mathscr{E}$$

其中 $\mathscr{E} \in \mathrm{QC}^{\mathrm{gr}}(X)$ 是 X 上的分次拟凝聚层。我们称之为在上的同伦表示。我们用 $\mathrm{Rep}_{\mathscr{L}}$ 表示 $\mathscr{L}$ 的同伦表示范畴，用 $\mathrm{Rep}_{\mathscr{L}}(\mathscr{E})$表示$\mathscr{L}$在 $\mathscr{E} \in$ 上的$^{\mathrm{gr}}\mathrm{QC}X(\mathscr{E})$中的同伦表示范畴。

[1]弱分次混合$\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})$-模的范畴，是定义 A.1.3 中所述的、$\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \in$ 交换微分分次代数$^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$ 在良好模型范畴 $\mathscr{M} =$ 模范畴$_k^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$ 中的模范畴。[2]更同伦化的版本只要求弱等价。就我们的用途而言，这个更严格的概念已经足够。

注 3.3.2。换句话说，同伦表示就是 $\mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \otimes_A \mathscr{E}$ 上的弱分次混合结构的数据。取实现之后（注 C.2.9），这可以视为 $\mathrm{CE}(\mathscr{L})$-模在 $\mathrm{CE}^\sharp(\mathscr{L}) \otimes_A \mathscr{E}$ 上的结构。换句话说，它是 $\mathrm{CE}^\sharp(\mathscr{L}) \otimes_A \mathscr{E}$ 上的一个微分 D，使得对所有 $v \in \mathrm{CE}(\mathscr{L})$ 和 $e \in \mathscr{E}$：

$$D(v \otimes e) = \delta_{\mathrm{CE}}(v) \otimes e + v \otimes De$$

注 3.3.3. 从 Chevalley–Eilenberg 弱分次混合复形到 A（其中 $X = \mathrm{Spec}(A)$）的自然增广诱导出一个函子：

$$\mathrm{Mod}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}_{\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})} \to \mathrm{Mod}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}_A \xrightarrow{|-|} \mathrm{Mod}_A$$

这本质上是沿 $\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \to A$ 的拉回函子。该函子将一个同伦表示 M 映射为其作用于其上的底层 A-模 $\mathscr{E}$。

事实证明，李代数丛 $\mathscr{L}$ 的表示（同伦意义下）这一概念，与在同伦意义下平坦的 $\mathscr{L}$-联络这一概念相一致。

定义 3.3.4. 给定一个底空间为 X 的李代数丛 $\mathscr{L}$，线性栈 E 上的一个 $\mathscr{L}$-联络是一个 $\mathscr{L}$-协变导数的数据，即一个 k-线性映射：

$$\nabla : \mathscr{L} \otimes \mathscr{E} \to \mathscr{E}$$

使得对所有 $f \in A$、$v \in \mathscr{L}$ 和 $s \in \mathscr{E}$：

$$\nabla_{fv} = f\nabla_v$$
$$\nabla_v(fs) = \rho(v)(f).s + f\nabla_v s$$

构造3.3.5（[AC12，定义 2。9]）。考虑 $\mathscr{L}$ 一个余纤维化李 algebroid 和 ∇ 一个联络[1] 在 $\mathscr{L}$ 上。我们可以定义以下 $\mathscr{L}$-联络：

- $\mathscr{L}$ 在 $\mathscr{L}$ 上的基本联络定义如下：

$$\nabla^{\mathrm{bas}}_v w := \nabla_{\rho(w)} v + [v, w]$$

- $\mathscr{L}$ 在 TX 上的基本联络定义如下：

$$\nabla^{\mathrm{bas}}_v X := \rho(\nabla_X v) + [\rho(v), X]$$

注意，$\rho \circ \nabla^{\mathrm{bas}} = \nabla^{\mathrm{bas}} \circ \rho$，因此这定义了与复形[2] $\mathbb{T}_X \oplus^\rho \mathscr{L}[1]$相关联的线性栈上的一个 $\mathscr{L}$-联络。

基本曲率，[AC12，定义 2。10], 是该 $\mathscr{L}$-联络的曲率，定义如下：

$$R^{\mathrm{bas}}_\nabla(v, w)(X) := \nabla_X([v, w]) - [\nabla_X v, w] - [v, \nabla_X w] - \nabla_{\nabla^{\mathrm{bas}}_w X} v - \nabla_{\nabla^{\mathrm{bas}}_v X} w$$

[1]回顾一下，当 X 是仿射的，且 $\mathscr{L}$ 是余纤维化李 algebroid（因此也是一个余纤维化A-模，这得益于定理 3.1.12）时，命题 1.2.40 表明存在这样的联络。[2]回顾一下，如果 V和 W 是复形，且 f： $V \to W$ 是复形之间的映射，那么我们用 $V[1] \oplus^f W$ 表示底层模为 $V[1] \oplus W$、微分由以下各项之和给出的复形： V上的微分、 W 上的微分，以及 f 视为次数为 1的映射。

下面的命题给出了何为同伦表示的更具体描述。

命题 3.3.6. 完备李代数丛 $\mathscr{L}$ 在 $\mathscr{E}$ 上的同伦表示，可以等价地描述为以下数据：

– *A $\mathscr{L}$-connection ∇ on $\mathscr{E}$.*
– *An element:*
$$\omega_2 \in \mathrm{Sym}^2_A \mathscr{L}^\vee[-1] \otimes_A \mathbf{End}(\mathscr{E})[1]$$
such that $d_E(\omega_2) + R_\nabla = 0$ where R_∇ is the curvature of ∇.
– *For each $i > 2$, we have:*
$$\omega_i \in \mathrm{Sym}^i_A \mathscr{L}^\vee[-1] \otimes_A \mathbf{End}(\mathscr{E})[i-1]$$
满足：
$$d_E(\omega_i) + d_\nabla \omega_{i-1} + \omega_2 \circ \omega_{i-1} + \cdots = 0$$

记作 $D = d_E + d_\nabla + \omega_2 + \omega_3 + \cdots$。

证明。 考虑定义该同伦表示的 $\mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{L})$ $\otimes_A \mathscr{E}$ 上的弱分次混合结构。于是， d_E 与混合微分 ϵ_p （对于 $p \geq 1$ ）构成的集合是映射：

$$\mathscr{E} \to \mathrm{Sym}^p_A \mathscr{L}^\vee[-1] \otimes_A \mathscr{E}[p-1]$$

对于 $p = 1$，我们有定义 $\mathscr{L}$ 在 E 上的一个联络的 $\mathscr{E} \to \mathscr{L}^\vee \otimes_A \mathscr{E}[-1]$（这要归功于 ϵ_1 满足的莱布尼茨法则）。接着，对于 $p \geq 2$，我们将得到的元素重命名为 ω_i。

若将定义弱分次混合结构的方程（定义C.2.1）分解，我们得到：

– 对于 $p = 0$，我们得到 $d_E^2 = 0$。– 对于 $p = 1$，我们有 $d_E \circ d_\nabla + d_\nabla \circ d_E = 0$。– 对于 $p = 2$，我们有 $[d_E, \omega_2] + d_\nabla^2 = 0$，而 d_∇^2 是 ∇ 的曲率。– 其余方程都很直接。事实上，所有方程都可以写成以下紧凑形式：

$$\sum_{p+q=i} \omega_p \circ \omega_q = 0$$

约定 $\omega_0 = d_E$ 和 $\omega_1 = d_\nabla$。

反过来，给定陈述中所述的联络和 ω_i 数据，我们希望在 $\mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \otimes \mathscr{E}$ 上重构一个弱混合结构。同样，每个 ω_p 都给出一个映射：

$$\mathscr{E} \to \mathrm{Sym}^p_A \mathscr{L}^\vee[-1] \otimes_A \mathscr{E}[p-1]$$

以及方程：

$$\sum_{p+q=i} \omega_p \circ \omega_q = 0$$

恰好是定义 C.2.1 所描述的弱分次混合结构的方程。□

注 3.3.7. 严格表示是指弱分次混合结构实际上严格地构成分次混合结构的同伦表示，换言之，$\epsilon_{\geq 2} := \omega_{\geq 2} = 0$。因此，它恰好由一个 A-模$\mathscr{E}$以及其上的 平坦 $\mathscr{L}$-联络 $\mathscr{E}$给出。

一般来说，项 $\omega_{\geq 2}$ 是使联络在“同伦意义下”平坦的闭性项（参见 [Cra04，第3节。1]）。

例 3.3.8（[AC12，例 3 的变体。8]）。 考虑 $\mathscr{E} = \mathscr{F} \oplus \mathscr{F}[-1] \in$拟凝聚层$(X)$ 配备 $X :=$ 谱(A)，其中 $\mathscr{E}$ 配备由恒等映射诱导的微分 $\partial :\ \mathscr{F} \to \mathscr{F}[-1]$。那么，给定 $\mathscr{L}$在 $\mathscr{F}$上的一个 -联络，我们可以在 $\mathscr{E}$ 上定义一个同伦表示，其微分如下 $\mathrm{CE}(\mathscr{L}) \otimes_A \mathscr{E}$：

$$D := d_F + \partial + R^\nabla$$

事实上， $D^2 = 0$ 归结为以下方程：

– 由于 ∂ 是恒等映射，且联络与 d_F相容，因此 $d_F^2 = 0$ 和 d_F 与一切对象都可交换。– $\partial^2 = 0$，并且我们有：

$$\partial \circ R^\nabla = R^\nabla \circ \partial$$

– 由于联络保持 $\mathscr{F}$上的微分，我们还有：

$$d_F \circ R^\nabla = R^\nabla \circ d_F$$

– $(R^\nabla)^2 = 0$。

~ ~ ~例 3.3.9。取 $E \in \mathrm{Rep}_L(\mathscr{E})$ 和 $F \in \mathrm{Rep}_L(\mathscr{F})$，以及一个弱分次混合模的态射 $f\colon E \to F$，它诱导出一个态射 $f : E \to F$。那么纤维：

$$\tilde{G} := \mathrm{fiber}(f : \tilde{E} \to \tilde{F})$$

是纤维上的一个同伦表示：

$$\mathscr{G} := \mathrm{fiber}(f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}) \simeq \mathscr{E} \oplus^f \mathscr{F}[-1]$$

例3.3.10. 回顾第 A.2 节，我们可以在任意良好模型范畴中构造余切复形，特别是在弱分次混合复形范畴中（见第 A节）。由此得到以下结论：

$$\mathbb{T}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}_{\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})} \in \mathrm{Mod}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}_{\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})} \qquad \mathbb{L}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}_{\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})} \in \mathrm{Mod}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}_{\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})}$$

伴随表示和余伴随表示的概念见 [AC12，第3节。2]我们预期，分次混合切复形和余切复形应能恢复这些同伦表示。

事实上，这与我们利用联络计算导出栈的线性栈和半线性表示的切复形时有些相似，

我们认为，分次混合联络版本也能帮助我们计算分次混合复形，并使其成为以下对象上的同伦表示：

$$p^*\mathbb{T}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})^{\mathrm{gr}}} \qquad p^*\mathbb{L}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})^{\mathrm{gr}}}$$

构造 3.3.11（ [AC12，例4。1]）。 给定一个同伦表示 $\mathscr{R} \in$ 模范畴$^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$ Chevalley–Eilenberg$^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})$ 在一个 A-模 $\mathscr{E}$上的表示，我们可以通过考虑其严格对偶 $\mathscr{E}^\vee$，得到它的一个同伦表示[1]，该对偶取自 $\mathscr{R}$ 弱分次混合模：

$$\mathscr{R}^\vee := \mathrm{Hom}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}_{\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})}(\mathscr{R}, \mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})) \in \mathrm{Mod}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}_{\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})}$$

我们可以验证 $(\mathscr{R}^\vee)^{\mathrm{gr}} \simeq (\mathscr{R}^{\mathrm{gr}})^\vee \simeq$ Chevalley–Eilenberg$^{\mathrm{gr}}(\mathscr{L})\ \otimes_A \mathscr{E}^\vee$。

3.3.2. 李代数丛的作用。

本节中，我们只考虑几乎有限表示的仿射基底上的<স্টyle id='1'>余纤维化 李代数丛。

作用的典型例子是 $\mathscr{L}$ 在其底空间 X上的作用；这里要记住，与 $\mathscr{L}$ 相关联的无穷小商栈是 $\mathscr{L}$作用下 X 的无穷小商。

以一个李代数为动机例子 $\mathfrak{g}$，将其视为点上的李代数丛 $\star$，我们看到 $\mathfrak{g}$ 在点上的作用是平凡的。然而，我们希望让 $\mathfrak{g}$作用于比点更一般的几何空间。经典地，$\mathfrak{g}$ 在 Y 上的作用是一个无穷小作用[2] $\mathfrak{g} \to \mathbb{T}_Y$，它总是给出（得益于例3.1.9的第二点）在 $\mathscr{O}_Y \otimes \mathfrak{g}$ 上的李代数丛 Y，称为作用李代数丛。我们从这个例子中得到的是， $\mathfrak{g}$ 在 Y 上的这种作用，恰好就是 $f^*\mathfrak{g}$ 在 Y 上的李代数丛结构，其中 f 是典范映射 $Y \to \star$。保留这一思想，并将其推广到 X 上的李代数丛，而不是 $\star$，我们得到如下定义：

定义 3.3.12。 李代数丛 $\mathscr{L}$ 在 X 上的一个无穷小作用 $f : Y \to X$，是指在 $f^*\mathscr{L}$ 上、在 Y 之上的李代数丛结构，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} f^*L & \longrightarrow & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

定义了底空间不同的李代数丛之间的一个态射（定义 3.2.22）。这个无穷小作用是同伦意义下的，若 $f^*\mathscr{L}$ 具有 $\mathscr{L}_\infty$-结构，且该态射是一个 ∞-态射。

[1]换句话说，定义对偶的富化 Hom 函子不是导出的。[2]在此语境下，它只是李代数之间的一个映射。

我们将 $\mathscr{L}$ 的同伦无穷小作用范畴记作 $\mathbf{Act}_{\mathscr{L}}$。

注3.3.13。若要讨论这种作用所对应的无穷小商，我们需要 Y 满足假设 3.2.2 ，以便纳入第3.2.1节的框架。在具体例子中，情况并非总是如此。不过，我们将在4.2.1 节介绍无穷小商的广义概念。

定理 3.3.14。 设 X 是几乎有限表示的仿射概形， $\mathscr{L}$ 是其上的完备李代数丛。我们有一个严格函子：

$$\psi \ : \ \mathbf{Rep}_{\mathscr{L}}^{\mathrm{afp},\geq 0} \to \mathbf{Act}_{\mathscr{L}}$$

该函子将 $\mathscr{E} \in$ 拟凝聚层$^{\mathrm{afp},\ \geq 0}(X)$ 上的同伦表示（即定义在几乎有限表示的 X 上的非负分次拟凝聚层）映到沿投影 $\pi_E : E \to X$ 的线性栈 E 上的无穷小作用。

证明。 给定一个如下的同伦表示：

$$M \in \mathrm{Mod}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}_{\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})}$$

使得 $M^{\mathrm{gr}} \cong \mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \otimes_A \mathscr{E}$满足 $\mathscr{E}$几乎有限表示的非负分次条件。我们考虑相应的自由弱分次混合 $\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})$-代数，$\mathrm{Sym}_{\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})} M^\vee$，其底层分次代数同构于：

$$\mathrm{Sym}_{\mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{L})} \mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \otimes_A \mathscr{E}^\vee \cong \mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{Sym}_A \mathscr{E}^\vee} \pi_E^* \mathscr{L}^\vee[-1]$$

其中 $\pi_E : E \to X$。
这在 $\pi_E^* \mathscr{L}$ 上定义了一个 $\mathscr{L}_\infty$-结构，因为 E 上的同伦表示只能增加 $\mathscr{L}^\vee[-1]$ 中的元数，因此右侧属于切瓦利–埃伦伯格函子的本质像。这赋予 $\pi_E^* \mathscr{L}$ 一个在 E 上的李代数丛结构。注意，由于 $\mathscr{E}$ 几乎有限表示且非负分次， E 是有限表示的仿射概形。

此外，存在一个映射（来自自由-遗忘伴随的单位）$\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L}) \to \mathrm{Sym}_{\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})} M^\vee$，它与自然包含映射 $A \to \mathrm{Sym}_A \mathscr{E}^\vee$相交换。因此，利用引理 3.2.25，我们得到一个李代数丛态射 $f^* \mathscr{L} \to \mathscr{L}$，它定义了所需的作用。

该构造关于 Chevalley–Eilenberg 代数是自然的；又由于严格的 Chevalley–Eilenberg 函子在完美李代数丛上是全忠实的（这得益于引理 3.2.25），因此该作用的构造是函子性的。□

注 3.3.15。我们之所以需要将同伦表示限制在余连通的几乎有限呈现模上，是因为这是确保 E 为几乎有限表示的仿射概形范畴所必需的条件，而这正是讨论李代数丛所需的背景。

3.4. **同伦传递定理**。

本节旨在证明一个适用于 $\mathscr{L}_\infty$代群胚的同伦传递定理版本。在微分几何的背景下，李代数丛的传递定理已在 [PS20第 2 节中得到证明。3]我们在导出代数几何的背景下回顾这一结果的证明。本节中的所有李代数丛都是严格完美的。

定理 3.4.1. 设 $f:\ \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ 是严格完美A-模之间的线性拟同构。那么对于任意一个 $\mathscr{L}_\infty$ 在 $\mathscr{L}'$ 上的代数丛结构，该结构定义在 $X = \text{谱}(A)$上，都存在一个$\mathscr{L}_\infty$在 $\mathscr{L}$ 上的代数丛结构，该结构定义在 X 上，并且可以将 f 扩张为一个 ∞-拟同构[1]:

$$f_\infty : \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$$

本节其余部分将用于证明此定理。首先，我们需要定义变形收缩的概念。

定义 3.4.2. 变形收缩 是 Mod_A中的一对映射:

$$h \circlearrowright \mathscr{L} \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathscr{M}$$

使得 $pi = \mathrm{id}$, p 是拟同构且 $[d,h] = \mathrm{id} - ip$。若还满足 $ph = hi = h^2 = 0$, 则称其为特殊变形收缩 。

引理 3.4.3。 对于任意线性拟同构 $f:\ \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$，存在如下由特殊变形收缩组成的之字形链:

$$\mathscr{L} \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathscr{M} \underset{p'}{\overset{i'}{\leftrightarrows}} \mathscr{L}'$$

其中 h, $h':\ \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 是变形收缩的次数为 -1 的同伦，并且满足 $p' \circ i = f$。

证明。 f 来自一个 A-模之间的拟同构 $\mathscr{L} \to \mathscr{L}'$，因此可分解为:

$$\mathscr{L} \xrightarrow{\text{triv.cof.}} \mathscr{M} \xrightarrow{\text{triv.fib.}} \mathscr{L}'$$

此外，我们可以选取 $\mathscr{M}$ 为由 f 给出的映射圆柱:

$$\mathscr{L} \oplus \mathscr{L}[1] \oplus \mathscr{L}'$$

其微分由 $\delta(a_1, a_2, a') = (da_1 + a_2, -da_2, da' - f(a_2))$ 给出。我们得到一个特殊变形收缩:

[1]一个 ∞-拟同构是一个 ∞-态射，其线性分量 $f_1:\ \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ 是一个拟同构。

$$h' \circlearrowright \mathscr{L} \oplus \mathscr{L}[1] \oplus \mathscr{L}' \underset{i'}{\overset{p'}{\rightleftarrows}} \mathscr{L}'$$

其中， i' 是包含映射， $p'(a_1, a_2, a') = f(a_1) + a'$ ，而 $h'(a_1, a_2, a') = (0, a_1, 0)$。

我们还有另一个特殊变形收缩：

$$h \circlearrowright \mathscr{L} \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathscr{L} \oplus \mathscr{L}[1] \oplus \mathscr{L}'$$

事实上，通过一个提升，我们找到了 $\mathscr{L} \to \mathscr{L} \oplus \mathscr{L}[1] \oplus \mathscr{L}'$ 的一个收缩：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathscr{L} \\ {\scriptstyle \mathrm{triv.cof.}}\downarrow & \overset{p}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{fib.}} \\ \mathscr{L} \oplus \mathscr{L}[1] \oplus \mathscr{L}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

这意味着 p 是 i 的同伦逆，因为 i 是拟同构且 $p \circ i =$ 恒等映射。因此， $i \circ p$ 与恒等映射同伦，同伦为 h。

事实上，这些只是变形收缩，但这是一个经典结果（参见 [Cra04，注 2。3]），即任何变形收缩都可以修改为特殊变形收缩。□

现在我们将讨论沿特殊变形收缩分别在左侧和右侧进行传递：

$$\mathscr{L} \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathscr{M} \circlearrowleft h$$

引理 3.4.4。 若 $\mathscr{L}$ 是一个 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛，则在 $\mathscr{M}$ 上存在一个 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛结构，使得 p 和 i 都是 $\mathscr{L}_\infty$-态射。

***P*证明。** 利用变形收缩，我们得到一个分裂（即一个同构）：

$$\mathscr{M} \cong \mathscr{L} \oplus \mathscr{N}$$

其中 $\mathscr{N} = \ker(p)$ 是一个可缩复形，因此存在一个同构：

$$\mathscr{N} \cong \mathrm{cone}(\mathrm{id} : \mathscr{K} \to \mathscr{K})$$

事实上，首先注意到，将 h 限制到 $\mathscr{N}$ 上，其值落在 $\mathscr{N}$ 中；限制到 $\mathscr{N}$ 上则有 $[d, h] = \mathrm{id}$（因为 $i \circ p = 0$ 在 $\mathscr{N}$ 上）。接着，若取 $\mathscr{K} = \ker(d)$，便可证明 $\mathscr{N} = \mathscr{K} \oplus \mathscr{K}'$ ，其中 $\mathscr{K}'$ 是 d 的余核。结果表明，$h : \mathscr{K}' \to \mathscr{K}[1]$ 是一个同构。在条件 $[d, h] = \mathrm{id}$ 下，我们得到一个同构 $\mathscr{N} \cong \mathscr{K} \oplus \mathscr{K}[1]$ ，并配有微分 $\mathscr{K}[1] \to \mathscr{K}$，它

恰好是 $\mathrm{id} : \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ 的锥。

于是，在 $\mathscr{K}$ 上选取一个联络（这存在，因为 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{M}$ 的直和项，而后者是射影的），我们便可在 $\mathscr{N}$ 上定义一个同伦意义下的表示，依据例 3.3.8。这会在 $\mathscr{L}$ 上诱导一个对 $\mathscr{N}$ 的作用（使用定理 3.3.14），记作 $\tilde{\mathscr{N}} \in \mathrm{Mod}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$ 切瓦利–埃伦伯格$^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{L})$。由此，我们可以在 $\mathscr{M}$ 上定义李代数丛结构：将其切瓦利–埃伦伯格弱分次混合代数定义为自由弱分次混合复形：

$$\mathrm{CE}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathscr{M}) := \mathrm{Free}\left(\tilde{\mathscr{N}}^{\vee}[-1]\right)$$

这是一个 $\mathscr{M}$ 的切瓦利–埃伦伯格代数，因为这个自由弱分次混合代数的底层分次对象为：

$$\mathrm{Sym}_A^{\mathrm{gr}}\left(\mathscr{L}^{\vee}[-1] \oplus \mathscr{N}^{\vee}[-1]\right) \cong \mathrm{Sym}_A^{\mathrm{gr}}\left(\mathscr{M}^{\vee}[-1]\right)$$

因此，我们在 $\mathscr{M}$ 上得到一个 $\mathscr{L}_\infty$-结构。
由 p 和 i 诱导的自然投影和包含映射与微分相容，因此诱导出 $\mathscr{L}_\infty$-李代数丛的严格态射，因为严格切瓦利–埃伦伯格函子在完美的 $\mathscr{L}_\infty$-李代数丛上是全忠实的（这得益于引理 3.2.25的一个变体）。□

引理 3.4.5。如果 $\mathscr{M}$ 是一个 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛，那么在 $\mathscr{L}$ 上存在一个 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛结构，并且可以将 i 扩张为一个 ∞-拟同构 i_∞。

证明。我们通过复合映射在 $\mathscr{L}$ 上定义锚映射 $\rho \circ i$。为定义括号，我们对 Lie_∞-代数使用同伦传递定理（参见 [LV12，定理 10.3。2]）。这给出了以下一列 k-线性映射：

$$i_n : \mathscr{L}^{\times n} \to \mathscr{M}$$

这些映射实际上是 A-线性的，这是由于侧条件 $h^2 = 0$ 和 $h \circ i = 0$。二元括号定义为：

$$[x, y]_{\mathscr{L}} := p([i(x), i(y)]_{\mathscr{M}})$$

利用方程 $pi = \mathrm{id}$，我们可以证明它满足莱布尼茨法则。□

注 3.4.6。到目前为止，我们讨论了李代数丛，即定义 3.1.1 给出的对象，以及模上的李代数丛结构，该结构由注 3.1.3定义。第一类对象是李代数丛的模型，但这一概念不像第二种概念那样在弱等价下保持不变。同伦传递定理保证：如果一个模 $\mathscr{L}$ 具有李代数丛结构，那么 $\mathscr{L}$ 是一个 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛，并且这些代数丛结构可通过沿着不同模型的底层模之间的 ∞-等价进行传递而得到等价。

4. 等变辛几何

在本节中，我们将发展等变几何和“无穷小等变”几何，以及这一背景下的导出辛几何。对（无穷小）等变几何的研究归结为对（无穷小）商栈几何的研究。最终目标是为 Segal 群胚作用及其无穷小版本——李代数丛作用——建立辛约化这一广义概念的意义。

我们首先建立第 4.1 节中 Segal 群胚作用以及第4.2节中李代数丛作用所需的导出等变几何基础。

在这两种情形下，我们研究（无穷小）商的几何性质。尤其是，我们关注此类商的拉回以及其切复形的计算。

此外，我们将讨论这样一种启发式观点：无穷小商应被视为 Segal 群胚商的“无穷小版本”。这需要准确理解 Segal 群胚与李代数丛之间的关系。我们将在第 4.2.1 节讨论 Segal 群胚与李代数丛的“求导”和“积分”。

此外，我们还将说明，李代数丛的大部分构造不过是 Segal 群胚相应构造的“无穷小版本”。

接下来，在第 4.3 节中，我们将依照 [AC21]回顾群作用的动量映射和辛约化的概念。随后，我们将这些结果推广到 Segal 群胚和李代数丛作用，并证明在每种情况下，都可以通过“拉格朗日子空间的导出交”这一过程构造新的动量映射和辛约化。这将产生一些有趣的 (-1)移位动量映射实例，它们定义在导出临界轨迹上，并将在第 5 节的 BV 构造中发挥核心作用。

4.1. $\mathscr{G}$-等变辛几何。

我们关注相对于 Segal 群胚作用的等变几何。正如我们将要看到的，这相当于研究相应的商。
我们将特别关注这些商栈的切复形和余切复形，以及它们的导出辛几何。

4.1.1. $\mathscr{G}$-等变映射与商。

我们首先更精确地定义将要使用的不同 Segal 群胚概念，并阐明 Segal 群胚的作用这一概念。

定义 4.1.1 ([TV08，定义 1.3.1。6])。若一个单纯形[1] 导出栈 $\mathscr{G}^\bullet$ 满足以下条件：则称其为底域为 X 的 Segal 群胚。

(1) $\mathscr{G}^0 \simeq X$(2) 对于所有 $n > 0$，均存在弱等价：

$$\coprod_{0\leq i<n} \sigma_i : \mathscr{G}^n \xrightarrow{\sim} \underbrace{\mathscr{G}^1 \times_X \cdots \times_X \mathscr{G}^1}_{\text{n-times}}$$

(3) 存在弱等价：

$$d_1 \times d_2 : \mathscr{G}^2 \to \mathscr{G}^1 \times_X^{d_0,d_0} \mathscr{G}^1$$

给定一个作用在 X 上的 Segal 群胚 $\mathscr{G}^\bullet$，我们将由以下单纯形图表的余极限定义为商栈：

$$\left[X/\mathscr{G}\right]$$

它带有一个自然投影，我们通常记作：

$$p : X \to \left[X/\mathscr{G}\right]$$

我们用 s_n：$\mathscr{G}^n \to X$ 表示所有“源映射” d_0：$\mathscr{G}^n \to \mathscr{G}^{n-1}$ 的复合，并用 t_n：$\mathscr{G}^n \to X$ 表示所有“目标映射” d_{n-1}：$\mathscr{G}^n \to \mathscr{G}^{n-1}$ 的复合。

注 4.1.2。Segal 群胚的第一个条件 $\mathscr{G}^\bullet$ 本质上是在说，它是一类具有对象 X 和态射 $\mathscr{G}^1$ 的 1-范畴对象。特别地，复合从道德上讲可以通过“反演”下式中的等价来获得：

$$\mathscr{G}^1 \times_X \mathscr{G}^1 \xleftarrow{\sim} \mathscr{G}^2 \xrightarrow{d_1} \mathscr{G}^1$$

第二个条件表示，任意角图（$\mathscr{G}^1 \times_{d_0,\ X,\ d_0} \mathscr{G}^1$中的元素）都可以唯一地（在同伦意义下）填充：

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & y \\ & \searrow & \\ & & z \end{array}$$

这意味着 $\mathscr{G}^1$中的所有“态射”都是可逆的。

定义 4.1.3. 设 $\mathscr{G}_X^\bullet$ 是 X 上的一个 Segal 群胚，$\mathscr{G}_Y^\bullet$ 是 Y 上的一个 Segal 群胚。那么，若有映射 f：$X \to Y$，Segal 群胚之间的态射（记作 ϕ：$\mathscr{G}_X^\bullet \to \mathscr{G}_Y^\bullet$）是单纯形导出栈 $\mathscr{G}_X^\bullet \to \mathscr{G}_Y^\bullet$ 之间的态射，且其在 0-单纯形上由 f 给出。

[1]不同于通常的约定，我们用带有 下方 圆点的单纯栈来表示，以便后文使用更方便的记号。

例 4.1.4. 群胚的神经：

$$\mathscr{G} \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} X$$

是一个 Segal 群胚，而群胚的商栈按定义（参见1.1.14）是其神经的商。

例 4.1.5. 给定映射 $f\colon X \to Z$，我们可以定义一个在 X,$C(f)$ 上的 Segal 群胚，由 Čech 神经给出：

$$C(f)^n := \underbrace{X \times_Z \cdots \times_Z X}_{\text{n−times}}$$

其单纯结构由自然投影和对角映射得到。条件 (1) 是拉回的结合律，第二个条件也显然成立。

定义 4.1.6. 设 $\mathscr{G}^\bullet$ 是一个在 X 上的 Segal 群胚。

– 该 Segal 群胚称为 光滑 ([TV08，定义 1.3.4。1])，若每个 $\mathscr{G}^n$都是 Artin 栈，且所有结构映射 $\mathscr{G}^n \to \mathscr{G}^{n-1}$ 都是光滑的（参见 [TV08，定义 1.3.3。1]）。特别地，根据 [TV08，命题 1.3.4。2],相应的商栈也是 Artin 栈[1]。– 若每个 $\mathscr{G}^n$ 都是形式栈，且所有结构态射都是幂零等价，则该群胚称为形式的。

注 4.1.7. 我们也可以考虑预栈中的 *Segal* 群胚。除了 $\mathscr{G}^\bullet$ 改为一个单纯形预栈这一点外，定义完全相同。层化-包含伴随在预栈中的 Segal 群胚与栈中的 Segal 群胚这两个范畴之间诱导出一个伴随[2]。

这类群胚的一类例子来自群的作用。这里的群是指导出栈中的一个群对象 。群可以通过一个满足作用通常条件的态射 $\rho\colon G \times X \to X$ 作用于栈 X 。

例 4.1.8. 取一个群 G ，它通过作用 ρ :$G \times X \to X$作用于导出栈 X 。那么 $G \times X$ 具有如下群胚结构：

$$G \times X \underset{\mathrm{pr}_X}{\overset{\rho}{\rightrightarrows}} X$$

其商为 $\left[X/G\right]$ （参见例1.1.14）。事实上，这样的群胚结构等价于 G 在 X上的作用数据。我们称 G 在 X 上光滑作用，如果相应的群胚按照定义 4.1.6 的意义是光滑的（尤其是， G 和 X 都是 Artin）。

[1]Artin 栈甚至可以定义为这类群胚的连续商。[2]预栈中 Segal 群胚的栈化是一个栈中的群胚，因为栈化函子保小极限。

注 4.1.9. 设 $\mathscr{G}^\bullet$ 是 X上的形式 Segal 群胚。那么我们可以证明，投影：

$$p : X \to \left[X/\mathscr{G}\right]$$

是一个幂零等价。然而，没有任何条件能确保这个商是形式的。因此，该投影可能不是根据定义1.3.18的形式加厚。

我们可以从相当大一类群胚中得到形式 Segal 群胚。

构造 4.1.10. 取一个满足以下条件的 Segal 群胚 $\mathscr{G}^\bullet$ over X：每个 $\mathscr{G}^n$ 都是形式的（特别地，光滑群胚和形式群胚都满足这一条件）。那么我们可以将该群胚在单位处的形式完备化 $\mathscr{G}^\bullet$ 定义为如下 Segal 群胚：

$$\widehat{\mathscr{G}^n} := \widehat{\mathscr{G}^n_X}$$

由于形式完备化与拉回运算可交换（推论1.3.13），因此这仍是一个 Segal 群胚。

利用导出栈构成模型拓扑斯这一事实，它们满足一种版本的 Giraud 定理（命题1.1.15）。特别地，商是“有效的”：

引理 4.1.11. 给定一个 X 上的 *Segal* 群胚 $\mathscr{G}^n$，自然投影：

$$p : X \to \left[X/\mathscr{G}\right]$$

是一个有效满态射，并且对于所有 $n \geq 1$，我们都有等价：

$$\mathscr{G}^n \simeq \underbrace{X \times_{[X/\mathscr{G}]} \cdots \times_{[X/\mathscr{G}]} X}_{n\text{-times}} \simeq C(p)^n$$

这定义了一个关于 X 的群胚等价：

$$\mathscr{G}^\bullet \simeq C(p)^\bullet$$

等变几何研究商栈的几何，以及导出栈之间的等变映射 。

定义 4.1.12. 设 $f : X \to Y$ 是导出栈之间的态射。考虑$\mathscr{G}^\bullet$ 一个位于 X上的 Segal 群胚。那么，关于 $\mathscr{G}^\bullet$ 的 f 上的不变映射结构，是指经由投影 p进行分解的数据：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle p} & \nearrow_{[f]} & \\ \left[X/\mathscr{G}\right] & & \end{array}$$

[1]等变性是 f 上的一种结构，而非性质。在严格的情形下（例如概形的严格商），映射 $[f]$ 必然唯一，因此等变性便成为一种性质。

若此时 $\mathscr{H}^\bullet$ 是一个位于 Y上的 Segal 群胚，则关于 $\mathscr{G}^\bullet$ 和 $\mathscr{H}^\bullet$ 的 f 上的等变映射结构，就是其上的不变映射结构：

$$p \circ f : X \to \left[Y \big/ \mathscr{H}\right]$$

换言之，这就是一个态射 $[f]$ ，它适合于下列交换图：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[X \big/ \mathscr{G}\right] & \xrightarrow[[f]]{} & \left[Y \big/ \mathscr{H}\right] \end{array}$$

在下文中，当提及 $[f]$ 赋予 f 等变映射上的结构这一数据时，我们将称 f 是 等变的。

We 我们在群胚上也有类似于第 3.2 节中的构造。 2:

构造 4.1.13。

– 设 $f\colon Y \to X$ 是导出栈的一个映射，且 $\mathscr{G}^\bullet$ 是 X上的 Segal 群胚。那么存在一个 $f^!\mathscr{G}^\bullet$ 上的 Segal 群胚 Y，称为基变换群胚，其定义类比于定义 3.2.30，如下：

$$f^!\mathscr{G}^\bullet := C(p \circ f)^\bullet \simeq \underbrace{Y \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} \cdots \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} Y}_{\bullet\text{-times}}$$

– 给定 $\mathscr{G}^\bullet$、$\mathscr{G}_1^\bullet$和 $\mathscr{G}_2^\bullet$底空间 X 上的 Segal 群胚态射$\mathscr{G}_1^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$和 $\mathscr{G}_2^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$，那么拉回 $\mathscr{G}_1^\bullet \times_{\mathscr{G}^\bullet} \mathscr{G}_2^\bullet$是一个底空间为$X$的群胚。结合这两个构造，我们可以定义不同底空间上的群胚的拉回。根据引理 4.1.14，这是一个拉回。

引理 4.1.14。 设 $\mathscr{H}^\bullet$、$\mathscr{G}^\bullet$ 分别是底空间为 Y和 X 的群胚，且 $\phi\colon \mathscr{H}^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$是底空间为 $f\colon Y \to X$的群胚态射。那么 ϕ 可唯一地分解为如下态射：

$$\mathscr{H}^\bullet \to f^!\mathscr{G}^\bullet$$

证明。 首先注意到存在一个等价：

$$C(p\circ f)^n := \underbrace{Y \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} \cdots \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} Y}_{\text{n-times}} \simeq \underbrace{\left(Y \times_X \mathscr{G}^1 \times_X Y\right) \times_Y \cdots \times_Y \left(Y \times_X \mathscr{G}^1 \times_X Y\right)}_{\text{n}-\text{times}}$$

我们有一个唯一的自然（即与源映射与靶映射相容的）态射：

$$\mathscr{H}^1 \xrightarrow{s\times\phi^1\times t} Y \times_X \mathscr{G}^1 \times_X Y$$

它诱导出唯一的自然态射：

$$\mathscr{H}^n \xrightarrow{\sim} \underbrace{\mathscr{H}_1 \times_Y \cdots \times_Y \mathscr{H}^1}_{\mathrm{n-times}} \to C(p \circ f)^n$$

从而定义一个唯一的群胚态射：

$$\mathscr{H}^\bullet \to f^! \mathscr{G}^\bullet$$

□

现在我们可以转向作用 这一概念，即 Segal 群胚的作用。与第 3.3.2 节引言中的启发性例子类似，我们可以考察群 G 的作用这一情形。 G 可自然地视为点上的群胚。 G 在 Y 上的作用等价于由 $Y \times G$ 在 Y 上给出的群胚结构（例 4.1.8），其源映射为自然投影（而目标映射定义了该作用）。这里，投影 $Y \times G$ 可以看作沿着自然增广 $G \to \star$ 对“源映射” $X \to \star$ 作出的拉回。这启发了以下定义：

定义 4.1.15. Segal 群胚 $\mathscr{G}^\bullet$ 在 X 上的作用于 $f\colon Y \to X$ 的数据是一个群胚：

$$f^* \mathscr{G}^\bullet := \mathscr{G}^\bullet \times^{s_\bullet}_X Y$$

其中 $s_n\colon \mathscr{G}^n \to X$ 是源映射[1]。
给定 $\mathscr{G}^\bullet$ 在 f 上的作用，我们将商记为 $\left[Y/\mathscr{G}\right]$。我们将通过命题 4.2.17 看到，Segal 群胚作用自然诱导出相关李代数丛的作用（构造 4.2.1）。

引理 4.1.16。 考虑导出栈的一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z & \xrightarrow{g} & \left[X/\mathscr{G}\right] \end{array}$$

那么我们有：

（1）映射 $Y \to Z$ 是一个有效满态射。（2）我们有 $\mathscr{G}^\bullet$ 在 f 上的作用：$Y \to X$。（3）我们有一个等价：

$$Z \simeq \left[Y/\mathscr{G}\right]$$

并且 $g\colon = [f]$ 赋予 f 关于该作用的等变映射结构。

证明。

[1]选择源映射而非目标映射纯属约定，因为源映射与靶映射的作用可以互换。

（1）有效满态射的拉回：

$$p : X \to \left[X/\mathscr{G}\right]$$

是 $Y \to Z$，并且由于 [Lur09b，命题 6.2.3.15]。

(2) 我们有以下等价：

$$\begin{aligned} Y \times_Z Y \simeq & X \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} Z \times_Z Z \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} X \\ \simeq & X \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} Z \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} X \\ \simeq & X \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} X \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} Z \\ \simeq & \mathscr{G} \times^{p\circ s}_{\left[X/\mathscr{G}\right]} Z \\ \simeq & \mathscr{G} \times^{s}_{X} Y \end{aligned}$$

其中第四个等价使用了引理 4.1.11。这赋予 $\mathscr{G} \times^s_X Y$一个定义在 Y 上的群胚结构，而源映射显然是从 Y出发的投影。更一般地，我们得到：

$$C(q)^n := \underbrace{Y \times_Z \cdots \times_Z Y}_{\mathrm{n-times}} \simeq \mathscr{G}^n \times^{s_n}_X Y$$

事实上，我们可以归纳地进行推导并得到：

$$\begin{aligned} C(q)^n \simeq & C(q)^{n-1} \times_Z Y \\ \simeq & \mathscr{G}^{n-1} \times^{s_{n-1}}_X Y \\ \simeq & \underbrace{\mathscr{G}^1 \times_X \cdots \times_X \mathscr{G}^1}_{(\mathrm{n}-1)-\mathrm{times}} \times^s_X Y \\ \simeq & \underbrace{\mathscr{G}^1 \times_X \cdots \times_X \mathscr{G}^1}_{(\mathrm{n}-1)-\mathrm{times}} \times^s_X \left(X \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} X\right) \times_X Y \\ \simeq & \underbrace{\mathscr{G}^1 \times_X \cdots \times_X \mathscr{G}^1}_{(\mathrm{n}-1)-\mathrm{times}} \times^{s,s}_X \mathscr{G}^1 \times^t_X Y \\ \simeq & \underbrace{\mathscr{G}^1 \times_X \cdots \times_X \mathscr{G}^1}_{(\mathrm{n}-1)-\mathrm{times}} \times^{s,t}_X \mathscr{G}^1 \times^s_X Y \\ \simeq & \underbrace{\mathscr{G}^1 \times_X \cdots \times_X \mathscr{G}^1}_{(\mathrm{n})-\mathrm{times}} \times^s_X Y \\ \simeq & \mathscr{G}^n \times^{s_n}_X Y \end{aligned}$$

此外，满足陈述中的交换方块条件可确保存在一个群胚映射：

$$C(q)^\bullet \to C(p)^\bullet$$

它诱导出一个群胚映射：

$$\mathscr{G}^\bullet \times^{s_\bullet}_X Y \to \mathscr{G}^\bullet$$

因此定义了 $\mathscr{G}$ 在 f 上的作用。

(3) 该等价由命题 1.1.15 以及前述在 Y 上的群胚等价可得：

$$C(q)^n \simeq \mathscr{G}^n \times^{s_n}_X Y$$

这表明 $\mathscr{G}^\bullet \times^{s_\bullet}_X Y$ 是一个群胚，其商等价于 Z。

□

注 4.1.17。 前一个引理实质上是对 [TV08，命题 1.3.5 的内容的展开。1]。

引理 4.1.18。 设 $f:\ Y \to X$ 是一个导出栈之间的映射，$\mathscr{G}^\bullet$ 是一个作用于 $Y \to X$ 的、位于 X 上的 ***Segal*** 群胚。那么我们有如下拉回图：

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[Y/\mathscr{G}\right] & \xrightarrow[[f]]{} & \left[X/\mathscr{G}\right] \end{array}$$

证明。 给定一个 $\mathscr{G}^\bullet$的作用，我们考虑 Segal 群胚之间的态射 $f^*\mathscr{G}^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$。此态射按照 [TV08，命题 1.3.5 中给出的意义，是笛卡尔的。1][1]。记 Y_0 为该图表的拉回。于是由命题 4.1.19，存在一个 $\mathscr{G}^\bullet$在 f_0上的作用：$Y_0 \to X$并且态射 $f_0^*\mathscr{G}^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$也是笛卡尔的。这意味着自然态射 $f^*\mathscr{G}^\bullet \to f_0^*\mathscr{G}^\bullet$也是笛卡尔的。将其经余极限函子映射后得到以下等价：

$$\left[Y/\mathscr{G}\right] \xrightarrow{\sim} \left[Y_0/\mathscr{G}\right]$$

由命题 4.1.19，根据 Y_0的定义，这是一种等价。限制在 $f_0^*\mathscr{G}^\bullet$上的笛卡尔态射的余极限函子是全忠实的，这要归功于 [TV08，命题 1.3.5。1]因此它反映等价。特别地，我们得到一个自然等价[2]：

$$Y \xrightarrow{\sim} Y_0$$

□

[1]这里的意思是，它属于该命题中所描述的函子的本质像。[2]这是因为，在 [TV08，1.3.5] 中，Segal 群胚的范畴采用逐层的投射模型结构，其中纤维化和等价是逐层定义的。

命题 4.1.19。 我们考虑态射 $f:\ X \to Z$ 和 $g:\ Y \to Z$。令$\mathscr{G}^\bullet$ 为 Z上的一个 *Segal* 群胚，并取 $\mathscr{G}^\bullet$ 在 f和 g上的作用。我们得到商之间的态射：

$$\left[X/\mathscr{G}\right] \to \left[Z/\mathscr{G}\right] \qquad \left[Y/\mathscr{G}\right] \to \left[Z/\mathscr{G}\right]$$

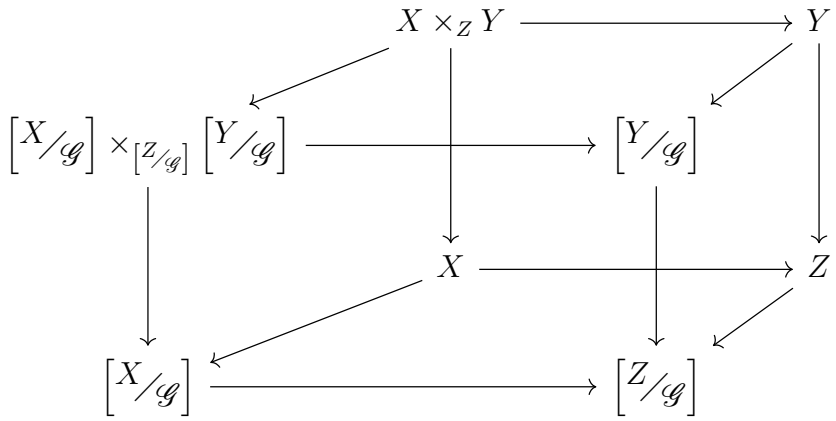
于是存在一个典范的拉回作用[1]，它属于 $\mathscr{G}^\bullet$ 并作用于 $X \times_Z Y$，使我们得到一个拉回方块[2]：

$$\begin{array}{ccc} \left[X \times_Z Y/\mathscr{G}\right] & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{G}\right] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[Y/\mathscr{G}\right] & \longrightarrow & \left[Z/\mathscr{G}\right] \end{array}$$

证明。首先，由引理4.1.11 可知 $\mathscr{G}^\bullet \simeq C(p_X)^\bullet$，其中 p_X 是投影：

$$p_X : X \to \left[X/\mathscr{G}\right]$$

现在考虑以下图表：



所有方块都是拉回方块。事实上，前方和后方的方块根据定义是拉回。除左侧方块外，其余方块也由引理4.1.18保证是拉回。由于这个交换立方体中除左侧面以外的所有方块都是拉回，因此根据交换立方体中拉回的形式性质，左侧面也必定是一个拉回方块。

现在利用引理4.1.16，可知映射

$$X \times_Z Y \to \left[X/\mathscr{G}\right] \times_{[Z/\mathscr{G}]} \left[Y/\mathscr{G}\right]$$

[1]所谓拉回作用，是指对 f 和 g的拉回图中的任意一个映射，这都是一个作用。[2]回想一下，在该方块中，拉回的 Segal 群胚是$\mathscr{G}^\bullet \times_Z^{s\bullet}(-)$。

是一个有效满态射，并且根据引理 4.1.16的证明，我们得到这些等价：

$$\begin{aligned} C(p_X \times_{p_Z} p_Y)^n \simeq & C(p_Y)^n \times_Y^{s_n} (X \times_Z Y) \\ \simeq & C(p_Z)^n \times_Z^{s_n} Z \times_Z (X \times_Z Y) \\ \simeq & C(p_Z)^n \times_Z^{s_n} (X \times_Z Y) \\ \simeq & \mathscr{G}^n \times_Z^{s_n} (X \times_Z Y) \end{aligned}$$

此外，我们有一个由 Segal 群胚构成的交换图表：

$$\begin{array}{ccc} C(p_X \times_{p_Z} p_Y)^\bullet & \longrightarrow & C(p_Y)^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(p_X)^\bullet & \longrightarrow & C(p_Z)^\bullet \end{array}$$

这使得 $C(p_X \times_{p_Z} p_Y)^\bullet$ 成为由“拉回作用”给出的群胚。又因为$p_X \times_{p_Z} p_Y$是一个有效满态射，我们得到一个等价：

$$\left[X/\mathscr{G}\right] \times_{[Z/\mathscr{G}]} \left[Y/\mathscr{G}\right] \simeq \left[X \times_Z Y/\mathscr{G}\right]$$

□

4.1.2. 商栈的切复形与余切复形。

研究 $\mathscr{G}$-等变几何，就是研究商栈。特别是，我们希望更深入地理解这类商上的拟凝聚层，以及它们的切复形与余切复形。

我们可以首先指出，由于 p 是一个有效满态射，利用[Lur09b，引理 6.2.3.16。], 沿着 p 的拉回是切片范畴之间的一个保守函子。特别地，这意味着函子：

$$p^* : \mathbf{QC}\left(\left[X/\mathscr{G}\right]\right) \to \mathbf{QC}(X)$$

是保守的。
此外，事实证明，$p^*\mathbb{T}\left[X/\mathscr{G}\right]$ 很容易计算。不过，为了描述它，我们需要理解“群胚的切丛” $\mathscr{G}$这一概念。

对于群的情形，切丛就是 $G \times \mathfrak{g}$，其中 $\mathfrak{g}$ 是与 G相关联的李代数。对于群胚，情况则更为复杂，但我们可以构造一个与 李代数丛 相关联的 $\mathscr{G}$，其作用与 $\mathfrak{g}$ 相同。我们将在构造 4.2.1 中详细说明这一点。目前只需指出，当 X满足假设 X 3.2.2时，我们可以在 $\mathscr{G}$ 上构造一个李代数丛，以编码 X对其的无穷小作用。

事实上，本节并不需要完整的李代数丛，只需要其底层的锚定线性栈。给定一个 Segal 群胚 $\mathscr{G}^\bullet$，我们因此考虑与 $\mathscr{G}^\bullet$ 相关联的以下锚定模：

$$\mathscr{L} := \mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{G}\right]} \xrightarrow{\rho} \mathbb{T}_X$$

因此，我们可以在一个更一般的背景下进行讨论，其中 X 是一个具有余切复形的栈。

命题 4.1.20。 设 $\mathscr{G}^\bullet$ 是 X 上的一个 *Segal* 群胚。那么我们有：

$$p^*\mathbb{T}_{\left[X/\mathscr{G}\right]} = \mathscr{L}[1] \oplus^\rho \mathbb{T}_X$$

其中 ρ： $\mathscr{L} \to \mathbb{T}_X$ 是锚映射。

证明。 根据 $\mathscr{L}$ 的定义，并利用定义相对切复形的纤维序列，我们得到：

$$p^*\mathbb{T}_{\left[X/\mathscr{G}\right]} \simeq \mathrm{cofib}(\rho : \mathscr{L} \to \mathbb{T}_X) \simeq \mathbb{T}_X \oplus^\rho \mathscr{L}[1]$$

□

注 4.1.21。不幸的是，计算切复形 $\mathbb{T}_{\left[X/\mathscr{G}\right]}$ 更为困难，因为 $\left[X/\mathscr{G}\right]$ 上的拟凝聚层并不总是容易描述。不过，如果 $\mathscr{G} = X \times G$ 来自一个仿射群作用于导出 Artin 叠 X 上的光滑作用，那么我们有一个等价：

$$G - \mathbf{QC}(X) \simeq \mathbf{QC}\left(\left[X/G\right]\right)$$

它将一个 G-等变层 $\mathscr{F} \in$ 拟凝聚层(X) 映射到余单纯图表$\mathscr{O}_{G^\bullet} \otimes \mathscr{F}$的极限。沿投影的拉回函子 p^* 相当于忘掉G-作用。更多细节见命题4.1.22的证明

命题 4.1.22。 在注*4.1.21*的识别与假设下，我们有如下 G-等变模的等价：

$$\mathbb{L}_{\left[X/G\right]} \simeq \mathbb{L}_X \oplus^\rho \mathscr{O}_X \otimes \mathfrak{g}^*[-1]$$

其中 ρ 是 G-等变的，G 通过余切作用作用于 $\mathbb{L}_X$，并通过余伴随作用作用于 $\mathfrak{g}^*[-1] \otimes \mathscr{O}_X$。

证明略。 当 G 是仿射时，我们有如下等价：

$$G - \mathbf{QC}(X) \to \mathbf{QC}(X \times G^\bullet)^{\mathrm{Cart}}$$

其中右侧是笛卡尔余单纯预层的范畴（参见[TV08，定义 1.2.12.1。]）。该等价将 $V \in$ 拟凝聚层(X) 映射到余单纯集合 $\mathscr{O}_{G^\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_X} V$。

此外，存在一个等价：

$$\lim : \mathbf{QC}(X \times G^\bullet)^{\mathrm{Cart}} \to \mathbf{QC}\left(\left[X/G\right]\right)$$

这在以下假设下成立：余单纯图满足 [TV08，定义 1.2.12 中的下降条件。1]当 G 在X 一个导出 Artin 叠上光滑作用时，情况便是如此；也就是说， $X \times G$ 是一个光滑群胚（定义4.1.6）。这是因为函子 拟凝聚层 满足光滑下降（因为它满足 fpqc 下降）。
此外， G-模 $\mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{O}_X \otimes \mathfrak{g}^*[1]$ 等价于 G-等变模余单纯图的极限：

$$\lim(\mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{O}_X \otimes (\mathfrak{g}^*)^{\oplus \bullet})$$

这被映射为笛卡尔余单纯图：

$$\lim(\mathscr{O}_{G^\star} \otimes (\mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{O}_X \otimes (\mathfrak{g}^*)^{\oplus \bullet}))$$

由于这是一个双余单纯图的极限，因此可通过取对角线来计算，我们得到：

$$\mathscr{O}_{G^\bullet} \otimes (\mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{O}_X \otimes (\mathfrak{g}^*)^{\oplus \bullet})) \simeq \mathbb{L}_{X \otimes G^\bullet}$$

因此，取该图表的极限即可恢复 $\mathbb{L}_{[X/G]}$。 □

推论 4.1.23. 如果 G 是仿射的，并且在 X 这一 *Artin* 栈上光滑地作用，那么 G 在 $\mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{O}_X \otimes \mathfrak{g}^*[-1]$ 上的作用会在其关联线性栈上诱导出一个作用，使得：

$$\left[\mathbb{A}_X(\mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{O}_X \otimes \mathfrak{g}^*[-1])/G\right] \simeq T^*\left[X/G\right]$$

证明。 我们有一个拉回图：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_X\left(p^*\mathbb{L}_{[X/G]}\right) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ T^*\left[X/G\right] & \longrightarrow & \left[X/G\right] \end{array}$$

这是一个拉回，因为它是线性栈 $T^*\left[X/G\right]$ 沿着 p 的拉回。因此，根据命题 1.2.17，这个拉回是与以下对象相关联的线性栈：$p^*\mathbb{L}_{[X/G]}$。

随后，我们可以使用命题 4.1.20 和引理 4.1.16 来证明 $T^*\left[X/G\right]$ 是 $\mathbb{A}_X($ $\mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{O}_X \otimes \mathfrak{g}^*[-1])$ 在 G 作用下的一个商。

我们需要证明，这正是命题 4.1.22 中所描述的作用。注意，如果我们取在命题 4.1.22 的证明中所使用的笛卡尔拟凝聚层所对应的线性栈，就得到一个 笛卡尔单纯形堆，其上的 $X \times G^\bullet$，并且有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{QC}\left(\left[X/G\right]\right) & \longrightarrow & \mathbf{QC}(X \times G^\bullet)^{\mathrm{Cart}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{dSt}_{/[X/G]} & \longrightarrow & \left(\mathbf{sdSt}_{/X\times G^\bullet}\right)^{\mathrm{Cart}} \end{array}$$

水平箭头是等价，其左伴随由余极限函子给出。因此， $T^*\left[X/G\right]$ 既是与 $\mathbb{L}_{[X/G]}$ 对应的线性栈，也是如下单纯形图表的余极限：

$$T^*(X \times G^\bullet) \simeq T^*X \times (\mathfrak{g}^*)^{\times \bullet} \times G^\bullet \simeq \mathbb{A}_X\left(\mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{O}_X \otimes \mathfrak{g}^*[-1]\right) \times G^\bullet$$

其中这些等价是命题 4.1.22 的证明中所解释的等价的线性版本。

因此， $T^*\left[X/G\right]$ 是以下对象的商：

$$\mathbb{A}_X\left(\mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{O}_X \otimes \mathfrak{g}^*[-1]\right)$$

通过命题 4.1.22 中所述的自然作用。
根据商的有效性，这是 G 在 $\mathbb{A}_X\left(p^*\mathbb{L}_{[X/G]}\right)$ 上的唯一作用（在等价意义下），其商为 $T^*\left[X/G\right]$。□

4.1.3. 群作用下商空间上的一些辛结构。

本节讨论群 G 在导出 Artin 叠上光滑作用时，辛 G-等变几何的一些要素。

例 4.1.24. 仿射群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 带有伴随作用和余伴随作用：

$$G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \qquad G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$$

我们可以将这些作用视为 G 在 $\mathbf{B}G$ 的切复形和余切复形上的自然作用（参见命题 4.1.22）。

引理 4.1.25 ([AC21，例 1.6])。 如果 G 是一个仿射群，则存在一个等价：

$$T^*[n+1]\mathbf{B}G \simeq \left[\mathfrak{g}^*[n]/G\right]$$

证明。 考虑以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^*[n] & \longrightarrow & \star \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^*[n+1]\mathbf{B}G & \longrightarrow & \mathbf{B}G \end{array}$$

这是一个拉回，因为这是线性栈的拉回（引理 1.2.18），因此是与 $p^*\mathbb{L}_{\mathbf{B}G}[n+1]$ 相关的线性栈，这一点由命题 4.1.20结合 $\mathfrak{g}^*[n]$给出。我们在引理 4.1.16 中已经看到，这意味着 $T^*[n+1]\mathbf{B}G$等价于该拉回的一个商， $\mathfrak{g}^*[n]$ 其商映射为 G。根据推论 4.1.23，这个商是关于余伴随作用的商。□

注 4.1.26。 $T^*[n+1]\mathrm{B}G$，因而 $\left[\mathfrak{g}^*[n]/G\right]$，典范地是 $(n+1)$-移位辛的。

命题 4.1.27。 自然投影 $\mathfrak{g}^* \to \left[\mathfrak{g}^*/G\right]$ 是拉格朗日的。

此外， $\mathfrak{g}^*$ 上的辛形式的拉回严格地为零，且拉格朗日结构可取为零。

证明。 由于注 4.1.26中所述的辛结构是移位余切丛上的典范辛结构，因此存在一个模型，其中它在如下意义下是严格的： ω 等于其底层的 2-形式。该 2-形式的拉回由以下复合给出：

$$\mathbb{T}_{\mathfrak{g}^*} \to p^*\mathbb{T}_{\left[\mathfrak{g}^*/G\right]} \xrightarrow{\omega^\flat} p^*\mathbb{L}_{\left[\mathfrak{g}^*/G\right]} \to \mathbb{L}_{\mathfrak{g}^*}$$

利用命题 4.1.20，我们有：

$$p^*\mathbb{T}_{\left[\mathfrak{g}^*/G\right]} \simeq \mathbb{T}_{\mathfrak{g}^*} \oplus^{\rho} \mathscr{O}_{\mathfrak{g}^*} \otimes \mathfrak{g}[1] \simeq \mathscr{O}_{\mathfrak{g}^*} \otimes (\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}[1])$$

那么，我们的复合为：

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{g}^*} \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathscr{O}_{\mathfrak{g}^*} \otimes (\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}[1]) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathscr{O}_{\mathfrak{g}^*} \otimes (\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}[1]) \to \mathscr{O}_{\mathfrak{g}^*} \otimes \mathfrak{g}[1]$$

这个复合严格为零，同时是一个同伦纤维序列和严格纤维序列，这证明了“零同伦”是一种拉格朗日结构。□

命题 4.1.28. 零映射 $\star \to \mathfrak{g}^*[n]$ 诱导出一个拉格朗日态射：

$$\mathbf{B}G \to \left[\mathfrak{g}^*[n]/G\right]$$

此外，$\mathbf{B}G$ 上的辛形式的拉回严格为零，并且拉格朗日结构可以选为零各向同性结构。

证明。 这是由零截面 $\mathbf{B}G \to T^*[n+1]\mathbf{B}G$ 利用引理 4.1.25中的等价所诱导的映射。根据注 2.1.14，由于$T^*[n+1]\mathbf{B}G$ 上的零截面是严格闭合的，我们可以令闭性项为零，这对应于在零截面上取由 0 各向同性结构给出的拉格朗日结构。□

命题 4.1.29。 若 X 是 *Artin* 且 G 是仿射概形范畴，并在 X 上光滑作用，则有一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} T^*\left[X/G\right] & \longrightarrow & \mathbf{B}G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[T^*X/G\right] & \longrightarrow & \left[\mathfrak{g}^*/G\right] \end{array}$$

其中 G 通过 T^*X 的余切作用[1]，并且 $T^*X \to \mathfrak{g}^*$ 是无穷小作用的对偶。

证明。 第一步是注意到存在一个等价：

$$T^*X \times_{\mathfrak{g}^*} \star \simeq \mathbb{A}_X\left(p^*\mathbb{L}_{[X/G]}\right)$$

为了解这一点，请注意我们有一个交换图：

$$\begin{array}{ccccc} T^*X \times_{\mathfrak{g}^*} \star & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \star \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T^*X & \longrightarrow & X \times \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

其中所有方块都是笛卡尔的。最左侧的方块是线性栈之间线性映射的拉回。因此，根据引理1.2.18，该拉回是与以下纤维对应的线性栈：

$$\operatorname{fiber}\left(T^*X \to X \times \mathfrak{g}^*\right)$$

这恰好是 $\mathbb{A}_X\left(p^*\mathbb{L}_{[X/G]}\right)$。

接下来对这一等价取 G在其自然作用下的商，结果便可由命题 4.1.19 推出，因为我们有 G的商关于作用的拉回。然后我们使用推论 4.1.23 来识别□的商

$$\mathbb{A}_X\left(p^*\mathbb{L}_{[X/G]}\right) \text{ by } G \text{ with } T^*\left[X/G\right].$$

我们将在第 4.3.1 节看到，映射 $T^*X \to \mathfrak{g}^*$ 是一个动量映射，因此 $T^*\left[X/G\right]$ 上的典范辛结构与将拉回视为拉格朗日态射的导出交时得到的结构相一致。

[1]对于任意 $g \in G$，该作用诱导一个态射 $\phi_g\colon X \to X$，并通过沿 ϕ_g 拉回诱导一个映射 $T^*X \to T^*X$。这又诱导出一个作用 $G \times T^*X \to T^*X$。这是由作用李代数丛 $\mathbb{L}_X \to \mathscr{O}_X \otimes \mathfrak{g}^*[-1]$ 的锚映射的对偶所诱导的作用。

4.2. $\mathscr{L}$-等变辛几何。

本节将第 4.1 节的结果推广到李代数丛的“无穷小作用”，并讨论 $\mathscr{G}$-等变几何与 $\mathscr{L}$- 等变几何之间的关系。

我们从第 4.2.1 节开始，探讨李代数丛与群胚之间的关系，并介绍群胚的“导子”以及李代数丛的“积分”。

此外，我们将说明，在良好的情形下，李代数丛的无穷小商是将李代数丛积分为群胚后，按这些群胚取商所得投影的形式完备化。这尤其解释了我们使用“无穷小商”这一术语的原因。

接着，我们将在第 4.2.2 节介绍 $\mathscr{L}$-等变几何的定义及基本性质。这与第 4.1.1 节非常相似；特别是，$\mathscr{L}$-等变几何是李代数丛及其无穷小作用所对应的无穷小商的几何。

接下来，第 4.2.3 节将描述无穷小商的切丛与余切复形。

4.2.1. 李代数丛的导子与积分。

本节讨论从 Segal 群胚构造李代数丛的“导子”过程。随后我们将说明，李代数丛总能“积分”为一个形式的 Segal 群胚。这与李群和李代数之间的李微分与积分相类似。

接着我们将说明，在良好的情形下，李代数丛的无穷小商可以识别为如下形式加厚：它由投影到与积分该李代数丛的 Segal 群胚相关联的商栈的形式完备化给出：

$$\left[X/\mathscr{L}\right] \simeq \widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]}_X$$

我们先描述导子过程。取 $\mathscr{G}^\bullet$ 一个定义在 $X = \text{谱}(A)$ 上且满足假设 3.2.2 的 Segal 群胚。我们希望将与 $\mathscr{G}^\bullet$ 相关联的李代数丛定义为相对切丛：

$$\mathscr{L} := \mathbb{T}_{X/[X/\mathscr{G}]}$$

以及由命题 3.1.7 所得到的李代数丛结构。然而，要使用该命题，我们需要商栈是形式的，而这对于积分过程而言并不够一般。

事实上，商栈为形式的群胚的典型例子是光滑群胚[1]（定义 4.1.6），众所周知，李代数丛并不总能积分为光滑 Segal 群胚（参见 [CF03]）。一般而言，李代数丛甚至似乎无法积分为其商是形式的 Segal 群胚，但我们将看到，它们可以积分为形式 *Segal* 群胚（定义 4.1.6）。
因此，我们关注那些允许形式完备化（构造 4.1.10）的 Segal 群胚，尤其是满足以下条件的 Segal 群胚：$\mathscr{G}^n$ 对所有$n \geq 0$而言都是形式的。

此外，李代数丛、形式模问题与群胚之间的对应关系，在预叠中表现得要好得多。由于我们仍希望得到栈以及栈中的 Segal 群胚，因此需要考虑这样的栈中的 Segal 群胚：它们是由预叠中的 Segal 群胚经栈化得到的（预叠中的 Segal 群胚包含一些额外数据）。

下文中，底空间 X 和 Y始终是仿射的。我们会交替地将它们视为栈或预叠，并且在它们被视为栈还是预叠时，记号上不作区分。

构造 4.2.1. 取 $\mathscr{G}^\bullet$ 一个定义在 $X = \text{谱}(A)$ 上的 Segal 群胚，并满足假设 3.2.2。我们假设 $\mathscr{G}^\bullet$ 由以下群胚经栈化得到$\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}$，该群胚位于形式预叠[2]中。然后我们可以如下构造一个李代数丛：

(1) 对群胚取形式完备化 $\widehat{\mathscr{G}^{\bullet}_{\text{预}}}$，记为 $\widehat{\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}}$ (构造 4.1.10)。(2) 使用 [GR20，定理 2.3。2]以及以下等价：

$$\mathscr{B}_X : \mathbf{fpGpd} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Thick}^{\mathrm{pre}}(X)$$

其中 **fpGpd** 表示 X 上形式 Segal 群胚$\widehat{\ }$在预栈范畴中的范畴。我们得到 $\mathscr{B}_X(\mathscr{G}^{\bullet}_{\text{预}}) \in \mathbf{Thick}^{\mathrm{pre}}(X)$，根据定理 X 1.3.22，它等价于 之下的形式模空间问题的数据。

(3) 根据定理3.2.1中的等价，我们取相应的李代数丛：

$$\mathscr{L}_{\mathscr{G}} := \widetilde{\mathbb{T}}_{X/\mathscr{B}_X(\widehat{\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}})}$$

该构造显然具有关于群胚态射 $\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}} \to (\mathscr{G}')^\bullet_{\mathrm{pre}}$ 在固定底空间上的自然性。此外，我们有：

$$\mathscr{B}_X(\widehat{\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}}) \simeq \left[X \middle/ \mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}}$$

[1]光滑 Segal 群胚的商栈是 *Artin*，因此根据例子1.3.5，它是形式的。[2]特别地，若 $\mathscr{G}^\bullet$ 已经是形式的，那么假设对于 $\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}} = j(\mathscr{G}^\bullet)$ (视为预栈) 成立。

注 4.2.2。 该构造取决于 $\mathscr{G}^{\bullet}$预的选择。当 $\mathscr{G}^{\bullet}$是形式的时，我们默认认为 $\mathscr{G}^{\bullet}$预 $= j\left(\mathscr{G}^{\bullet}\right)$，其中 $j\colon\ \mathbf{dSt} \to \mathbf{dpSt}$ 是将栈包含到预栈中的包含映射。此外，由于 j 保持形式完备化（命题 1.3.24），我们有：

$$\widehat{\mathscr{G}^{\bullet}_{\mathrm{pre}}} \simeq j(\widehat{\mathscr{G}^{\bullet}})$$

注 4.2.3。 这与群胚的经典微分化先验上有所不同（例如，参见 [Cal21，第 1.2 节。3]）。在经典情形下，李代数丛是赋予以下对象上的李代数丛结构而得到的：

$$\mathscr{L}_{\mathscr{G}} := e^{*}\mathbb{T}^{s}_{\mathscr{G}/X}$$

其中 $\mathbb{T}^{s}_{\mathscr{G}/X}$ 表示沿源映射 s 的相对切丛，其锚映射由 t_{*}给出。我们将在引理 4.2.4 中看到，存在带锚线性栈之间的等价：

$$e^{*}\mathbb{T}^{s}_{\mathscr{G}^{1}/X} \simeq \mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{G}\right]}$$

我们不知道每当经典构造有意义时，这是否也是李代数丛的等价（也就是说，李括号是否一致）。

引理 4.2.4。 设 $\mathscr{G}^{\bullet}$ 是 X 上任意一个 *Segal* 群胚，X 是任意导出栈，并且 $\mathscr{G}^{1}$ 与 X 都存在余切复形。那么我们有锚定 A-模之间的等价：

$$\begin{array}{ccc} e^{*}\mathbb{T}^{s}_{\mathscr{G}^{1}/X} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{G}\right]} \\ & \searrow^{\rho} & \downarrow \\ & & \mathbb{T}_{X} \end{array}$$

其中，ρ表示以下复合：

$$e^{*}\mathbb{T}^{s}_{\mathscr{G}^{1}/X} \to e^{*}\mathbb{T}_{\mathscr{G}^{1}} \xrightarrow{t_{*}} \mathbb{T}_{X}$$

证明。考虑以下拉回方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}^{1} & \xrightarrow{t} & X \\ \downarrow{\scriptstyle s} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{p} & \left[X/\mathscr{G}\right] \end{array}$$

由于这是一个拉回，我们在 $\mathrm{QC}(\mathscr{G})$ 中得到一个等价：

$$\mathbb{T}^{s}_{\mathscr{G}/X} \simeq t^{*}\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{G}\right]}$$

这个等价是以下交换图的一部分：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^s_{\mathscr{G}^1/X} & \xrightarrow{\sim} & t^*\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{G}\right]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_{\mathscr{G}^1} & \xrightarrow{t_*} & t^*\mathbb{T}_X \end{array}$$

然后，我们只需沿着单位 e 对这个最后的图表作拉回，即可证明该结果。□

命题 4.2.5. 设 $\mathscr{G}^\bullet$ 是 X上的一个 *Segal* 群胚，且 X 是满足假设 *3.2.2*的栈。假设每个 $\mathscr{G}^n$ 都是形式的。那么存在一个等价： A-模：

$$\mathscr{L}_{\mathscr{G}} := \mathbb{T}_{X/\mathscr{B}_X\left(j(\widehat{\mathscr{G}^\bullet})\right)} \simeq \mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{G}\right]}$$

证明。在 [GR20第 2 节中，4], 证明了在$\mathbf{dpSt}^{\mathrm{afp}}$中存在一个拉回图：

$$\begin{array}{ccc} j(\widehat{\mathscr{G}^1}) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathscr{B}_X\left(j(\widehat{\mathscr{G}^\bullet})\right) \end{array}$$

这意味着：

$$\mathbb{T}_{X/\mathscr{B}_X\left(j(\widehat{\mathscr{G}^\bullet})\right)} \simeq e^*\mathbb{T}^s_{j(\widehat{\mathscr{G}^1})/X} \simeq e^*\mathbb{T}^s_{\widehat{\mathscr{G}^1}/X}$$

$\widehat{\ }$注意，由于 $\mathscr{G}^\bullet$ 和 X 都是栈，因此在栈或预叠中取它们的切丛是$\widehat{\ }$相同的。此外，根据引理 1.3.20，映射 $\mathscr{G}^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$ 是形式 étale 的，因此我们有：

$$e^*\mathbb{T}^s_{\widehat{\mathscr{G}^1}/X} \simeq e^*\mathbb{T}^s_{\mathscr{G}^1/X}$$

最后，我们可以利用引理4.2.4得出结论。 □

事实上，假设对每个 $n \geq 0, \mathscr{G}^n$ 而言均为形式的，这对相关李代数丛及其商的性质有非常好的影响。

命题 4.2.6。 取 $\mathscr{G}^\bullet$ 一个在 X 上的 *Segal* 群胚，且 X 满足假设*3.2.2*，并且对于每个 $n \geq 0$， $\mathscr{G}^n$ 都是形式栈。则有一个等价：

$$\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}} := \mathscr{B}_X\left(j(\widehat{\mathscr{G}})\right) \simeq j\left(\widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]}_X\right)$$

证明。 我们有预栈中形式群胚的一个等价：

$$\begin{aligned} X \times_{j\left(\left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X\right)} X \simeq & j\left(X \times_{\left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X} X\right) \\ \simeq & j\left(X \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]\times\left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}} X\right) \\ \simeq & j\left(\left(X \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} X\right) \times_{X_{\mathrm{DR}}\times\left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}} X_{\mathrm{DR}}\right) \\ \simeq & j\left(\mathscr{G}^1 \times_{\mathscr{G}^1_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}}\right) \\ \simeq & j(\widehat{\mathscr{G}^1}) \end{aligned}$$

这一等价可扩展到 n-单纯形：

$$\underbrace{X \times_{j\left(\left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X\right)} \cdots \times_{j\left(\left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X\right)} X}_{\mathrm{n-times}} \simeq j(\widehat{\mathscr{G}^n})$$

因此，由于 $\mathscr{B}_X$ 是将 $f\colon X \to Y$ 映射到 $C(f)^\bullet$ 的函子的逆，我们得到一个等价：

$$j\left(\left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X\right) \simeq \mathscr{B}_X(j(\widehat{\mathscr{G}^\bullet}))$$

□

推论 4.2.7. 取 $\mathscr{G}^\bullet$ 一个在 X 上的 *Segal* 群胚 X 满足假设 *3.2.2*，并且对每个 $n \geq 0$，$\mathscr{G}^n$ 都是一个形式栈。于是我们有如下结论：

(1) 我们有一个等价：

$$\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right] \simeq \left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X$$

(2) 我们有 A-模的等价：

$$\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{G}\right]} \simeq \mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]} \simeq \mathscr{L}_{\mathscr{G}}$$

此外，这些等价使这些模获得了源自 $\mathscr{L}_{\mathscr{G}}$ 上李代数丛结构的李代数丛结构。

证明。

（1）根据定义，我们有：

$$\mathscr{B}_X\left(j(\widehat{\mathscr{G}^\bullet})\right) \simeq \left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}}$$

利用命题4.2.6 和层化函子，我们得到：

$$\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right] := \mathrm{Stf}\left(\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}}\right) \simeq \mathrm{Stf}\left(j\left(\left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X\right)\right) \simeq \left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X$$

(2) 我们有以下等价：

$$\mathscr{L}_{\mathscr{G}} \simeq \mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}}} \simeq \mathbb{T}_{X/\mathscr{B}_X\left(j(\widehat{\mathscr{G}})\right)} \simeq \mathbb{T}_{X/j\left(\widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]_X}\right)} \simeq \mathbb{T}_{X/\widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]_X}} \simeq \mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]}$$

此外，由于映射 $\left[X/\mathscr{G}\right]_X \to \left[X/\mathscr{G}\right]$ 是形式 étale 的，我们得到：

$$\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{G}\right]} \simeq \mathbb{T}_{X/\widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]_X}} \simeq \mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]}$$

□

注 4.2.8. 这表明，若 $\mathscr{G}^\bullet$ 是定义在 X 上的 Segal 群胚，且 X 满足假设 3.2.2 并且 $\mathscr{G}^\bullet$ 是形式栈，那么商栈的形式完备化等价于 X 关于相应李代数丛的无穷小商。这解释了我们为何称它们为“无穷小商”。

到目前为止，若我们将范围限制在满足 $\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}$ 的构造 4.2.1 中选取 $\mathscr{G}^\bullet$ 为形式的 Segal 群胚时，这样做并无用处，而这类对象涵盖了相当广泛的例子。然而，当我们希望对李代数丛进行积分时，尚不清楚能否得到这类 Segal 群胚。我们将看到，积分过程实际上会在预栈 $\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}$.

现在我们转而讨论积分过程。

定义 4.2.9. 给定一个李代数丛 $\mathscr{L}$ 在 X 上，且 X 满足假设3.2.2。我们称一个 Segal 群胚 $\mathscr{G}^\bullet$ 在 X 上积分 $\mathscr{L}$，如果 $\mathscr{L}$ 作为李代数丛与 $\mathscr{L}_{\mathscr{G}}$ 等价，而后者是与 $\mathscr{G}^\bullet$ 相关联的李代数丛。

注 4.2.10. 请注意，想要找到一种积分过程，使得对于所有 Segal 群胚 $\mathscr{G}^\bullet$ 在 X 上，$\mathscr{G}^\bullet$ 都是其相关联的代数丛 $\mathscr{L}$ 的积分，这是不可能的，因为即使对于群和李代数，这一性质也不成立。然而，在条件良好的情况下，我们$\widehat{\ }$可以期望恢复我们起初所考虑的群胚的形式完备化 $\mathscr{G}^\bullet$。

现在我们将证明李第三定理的一个版本，该定理指出，每个李代数丛（底空间满足某些假设）都存在形式积分。

命题 4.2.11. 取 $\mathscr{L}$ 一个定义在 X 上的李代数丛，且 X 满足假设*3.2.2*。考虑无穷小投影：

$$h : X \to \left[X/\mathscr{L}\right]$$

我们定义 *Segal* 群胚：

$$\mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{L}} := C(h)^\bullet \simeq \underbrace{X \times_{\left[X/\mathscr{L}\right]} \cdots \times_{\left[X/\mathscr{L}\right]} X}_{\bullet-\text{times}}$$

那么 $\mathscr{L}$ 是与 $\mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{L}}$ 相关联的李代数丛，它由构造 *4.2.1* 利用预栈中的 *Segal* 群胚得到，该群胚定义如下：

$$(\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^\bullet_{\mathrm{pre}} := C(h_{\mathrm{pre}})^\bullet \simeq \underbrace{X \times_{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} \cdots \times_{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} X}_{\bullet-\mathrm{times}}$$

with

$$h_{\mathrm{pre}} : X \to \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}$$

证明。 首先，我们想要说明 $(\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^\bullet_{\mathrm{pre}}$ 是一个形式 Segal 群胚，其栈化位于 $\mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{L}}$ 中。显然， X 和 $(\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^\bullet_{\mathrm{pre}}$ 是形式栈。此外，投影：

$$p : X \to \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}$$

是一个幂零等价，这意味着该 Segal 群胚的所有结构态射都是幂零等价，从而使 $\mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{L}}$ 成为一个形式 Segal 群胚。此外，由于层化函子保持拉回，我们有：

$$\mathrm{Stf}((\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^\bullet_{\mathrm{pre}}) \simeq \mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{L}}$$

显然，我们有一个等价：

$$\mathscr{B}_X((\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^\bullet_{\mathrm{pre}}) \simeq \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}$$

因为 $\mathscr{B}_X$ 是将形式加厚 $f:\ X \to Y$ 发送到由 $C(f)$给出的形式 Segal 群胚的函子之逆 3.2.2。然后在假设 $\left[X/\mathscr{L}\right]$ 下，与 $\mathscr{L}$ 相关联的李代数丛就是其本身（使用预叠中的 Segal 群胚$(\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^\bullet_{\mathrm{pre}}$）。 □

这证明，任何满足假设 X 3.2.2 的李代数丛都可以积分为一个形式的Segal 群胚（在我们的情形下$\mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{L}}$）。此外，这定义了一个函子（在固定底空间上），它将 $\mathscr{L}$映射到$\mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{L}}$。

注4.2.12。我们构造的 Segal 群胚$\mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{L}}$，并非光滑的。众所周知，李代数丛并不总能积分为光滑群胚（参见[CF03]）。一般而言， $\mathscr{G}_{\mathscr{L}}$实际上是形式预栈中一个形式群胚的栈化。值得注意的是，自然投影：

$$X \to \left[X/\mathscr{G}_{\mathscr{L}}\right] \qquad X \to \left[X/(\mathscr{G}_{\mathscr{L}})_{\mathrm{pre}}\right]$$

是幂零等价。然而，它们并非形式加厚，因为这些商未必是形式（预）栈。

使用这些预栈的主要缺点之一是，无穷小商栈的相对切丛无法恢复李代数丛[1]。

[1]这 本质上是因为层化函子不保切复形

然而，我们此前已经看到，如果 $\mathscr{L}$ 是与一类良好的 Segal 群胚相关联的李代数丛，那么无穷小商栈的相对切丛等价于 $\mathscr{L}$。这促使我们作出如下定义：

定义 4.2.13. 李代数丛 $\mathscr{L}$ 在 X 满足假设 3.2.2 的仿射栈上。若 $\mathscr{L}$ 满足以下条件，则称其 可良好积分： 存在一个 Segal 群胚 $\mathscr{G}^\bullet$，使得对每个 $n \geq 0$， $\mathscr{G}^n$ 都是形式栈，并且 $\mathscr{G}^\bullet$ 积分 $\mathscr{L}$，换言之，存在李代数丛的等价：

$$\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}_{\mathscr{G}}$$

这样的 $\mathscr{G}^\bullet$ 称为 $\mathscr{L}$的良好积分。若 $\mathscr{G}^\bullet$ 是光滑的，则称其为 $\mathscr{L}$的光滑积分。

引理 4.2.14. 设 $\mathscr{L}$ 是定义在 X 这个满足假设*3.2.2*的仿射栈上的李代数丛，并且可良好积分。那么存在一个等价：

$$\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}\right]} \simeq \mathscr{L}$$

证明。 取 $\mathscr{G}^\bullet$ 作为 $\mathscr{L}$的良好积分。由推论 4.2.7 以及 $\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}_{\mathscr{G}}$这一事实，我们得到以下等价：

$$\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}\right]} \simeq \mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]} \simeq \mathscr{L}_{\mathscr{G}} \simeq \mathscr{L}$$

□

命题 4.2.15. 设 $\mathscr{G}^\bullet$ 是定义在 X 这个满足假设 *3.2.2* 的仿射栈上的 *Segal* 群胚。假设 $\mathscr{G}^\bullet = \mathrm{Stf}\left(\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}\right)$，并考虑 $\mathscr{L}_{\mathscr{G}}$利用*4.2.1*号构造 构造 $\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}$得到的李代数丛。那么存在 *Segal* 群胚的等价：

$$\mathrm{Stf}\left(\widehat{\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}}\right) \simeq \mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{L}_{\mathscr{G}}}$$

证明。 根据定义，我们有：

$$\mathscr{B}_X(\widehat{\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}}) \simeq \left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}}$$

因此我们得到：

$$\widehat{\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}} \simeq C\left(X \to \left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}}\right) := (\mathscr{G}_{\mathscr{L}_{\mathscr{G}}})^\bullet_{\mathrm{pre}}$$

使用层化函子，我们得到：

$$\mathrm{Stf}\left(\widehat{\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}}}\right) \simeq \mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{L}_{\mathscr{G}}}$$

□

注 4.2.16. 特别地，如果对于每个 $n \geq 0$, $\mathscr{G}^n$ 都是一个形式栈，那么 $\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{pre}} = j(\mathscr{G}^\bullet)$，并且由于 j 与形式完备化可交换，我们得到：

$$\widehat{\mathscr{G}^\bullet} \simeq \mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{L}_{\mathscr{G}}}$$

因此，与 $\mathscr{G}^\bullet$ 相关联的群胚的积分并非不 $\mathscr{G}^\bullet$ 本身，而是其形式完备化。

现在我们转而讨论微分化与积分构造在李代数丛和 Segal 群胚的作用下的表现。首先，我们将考察对 f 的作用： $Y \to X$，这是一个满足假设 3.2.2 的栈之间的映射。

这一微分化过程与作用相容，其含义是：Segal 群胚 $\mathscr{G}^\bullet$ 对 $f\colon Y \to X$ 的任意作用，只要对每个 $n \geq 0$， $\mathscr{G}^n$ 都是形式栈，就会在其关联的李代数丛 $\mathscr{L}_{\mathscr{G}}$ 对 f 上诱导出一个无穷小作用。

命题 4.2.17。 设 $\mathscr{G}^\bullet$ 是 X 上的 *Segal* 群胚，且 $\mathscr{G}^\bullet$ 是形式栈，并且对每个 $n \geq 0$， $\mathscr{G}^n$ 都是形式栈。现考虑 $\mathscr{G}^\bullet$ 对 f 的作用： $Y \to X$，并假设 X 和 Y 均满足假设 *3.2.2*。则这会诱导出 $\mathscr{L}_{\mathscr{G}}$ 对 f 的作用，并定义一个函子：

$$\mathbf{Act}_{\mathscr{G}} \to \mathbf{Act}_{\mathscr{L}_{\mathscr{G}}}$$

证明。 考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\left[Y/\mathscr{G}\right]}_Y & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[Y/\mathscr{G}\right] & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{G}\right] \end{array}$$

其中 $\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right] \simeq \left[X/\mathscr{G}\right]_X$ 根据推论 4.2.7。外方形是一个拉回，这是引理4.1.16的推论。

由于这些等价，下方形是一个拉回：

$$\begin{aligned} \widehat{\left[Y/\mathscr{G}\right]}_Y &\simeq \left[Y/\mathscr{G}\right] \times_{\left[Y/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} Y_{\mathrm{DR}} \\ &\simeq \left[Y/\mathscr{G}\right] \times_{\left[Y/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} \left[Y/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}} \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}} \\ &\simeq \left[Y/\mathscr{G}\right] \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}} \\ &\simeq \left[Y/\mathscr{G}\right] \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} \left[X/\mathscr{G}\right] \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}} \\ &\simeq \left[Y/\mathscr{G}\right] \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} \left[X/\mathscr{L}\right] \end{aligned}$$

因此，上方方块也是一个拉回，并且映射：

$$Y \to \widehat{\left[Y/\mathscr{G}\right]}_Y$$

是一个形式加厚。
由于 $f^*\mathscr{G}^\bullet = \mathscr{G}^\bullet \times^{\mathrm{s}_\bullet}_X Y$也满足每个 $f^*\mathscr{G}^n$都是形式的，且其商——栈是 $\left[Y/\mathscr{G}\right]$，因此 $\left[Y/\mathscr{G}\right]_Y$等价于 Y按与 $f^*\mathscr{G}^\bullet$相关的李代数丛取商（再次感谢推论 4.2.7）。

考察这些拉回的相对切丛，并利用推论 4.2.7，我们得到以下等价：

$$\mathbb{T}_{Y/[Y/\mathscr{G}]} \simeq \mathbb{T}_{Y/\widehat{[Y/\mathscr{G}]}_Y} \xrightarrow{\sim} f^*\mathbb{T}_{Y/[X/\mathscr{G}]} \simeq f^*\mathscr{L}$$

这赋予 $f^*\mathscr{L}$李代数丛结构。

我们要寻找一个李代数胚态射 $f^*\mathscr{L} \to \mathscr{L}$。为此，注意到我们有一个拉回图（因为 j 保拉回）：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ j\left(\widehat{\left[Y/\mathscr{G}\right]}_Y\right) & \longrightarrow & j\left(\left[X/\mathscr{L}_\mathscr{G}\right]\right) \end{array}$$

由命题 4.2.6 可得以下等价关系：

$$\mathscr{B}_X\left(j(\widehat{f^*\mathscr{G}^\bullet})\right) \simeq j\left(\widehat{\left[Y/\mathscr{G}\right]}_Y\right) \qquad \mathscr{B}_X\left(j(\widehat{\mathscr{G}^\bullet})\right) \simeq j\left(\widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]}_X\right)$$

因此，这些都是形式预堆栈，我们可以使用命题 3.2.33，该命题表明：

$$\mathbb{T}_{Y/j\left(\widehat{[Y/\mathscr{G}]}_Y\right)} \to \mathbb{T}_{X/j\left(\widehat{[X/\mathscr{G}]}_X\right)}$$

是李代数胚态射。
于是我们得到一个李代数丛态射：

$$f^*\mathscr{L} \simeq \mathbb{T}_{Y/\widehat{[Y/\mathscr{G}]}_Y} \simeq \mathbb{T}_{Y/j\left(\widehat{[Y/\mathscr{G}]}_Y\right)} \to \mathbb{T}_{X/j\left(\widehat{[X/\mathscr{G}]}_X\right)} \simeq \mathbb{T}_{X/\widehat{[X/\mathscr{G}]}_X} \simeq \mathscr{L}$$

□

命题 4.2.18. 设 $f:\ Y \to X$ 是一个满足假设 *3.2.2* 的仿射栈态射。设 $\mathscr{L}$ 是 X 上的李代数丛，且其在 f上有作用。由此可在积分 $\mathscr{L}$ 的形式群胚在 f 上诱导一个作用，从而定义一个函子：

$$\mathbf{Act}_\mathscr{L} \to \mathbf{Act}_{\mathscr{G}_\mathscr{L}}$$

证明. 给定 $\mathscr{L}$在 f 上的作用： $Y \to X$，我们首先需要对预栈证明这一陈述。首先，我们证明以下预栈中的交换图是一个拉回[1]:

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[Y/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \end{array}$$

记 P 为拉回， $\phi: Y \to P$ 为自然态射。 P 和 Y 是形式的，且 ϕ 是幂零等价，因为:

$$P_{\mathrm{DR}} \simeq \left(\left[Y/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_{\mathrm{DR}} \xleftarrow{\sim} Y_{\mathrm{DR}}$$

此外，我们有一个纤维序列:

$$\mathbb{T}_{Y/P} \to \mathbb{T}_{Y/\left[Y/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} \to \phi^*\mathbb{T}_{P/\left[Y/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} \simeq f^*\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}}$$

第二个态射显然是等价，因为这两个复形都等价于 $\phi^*\mathscr{L}$，因此 ϕ 是形式 étale。这证明 ϕ 是等价，这归功于引理1.3.21。

现在我们有如下等价:

$$\begin{aligned} (\mathscr{G}_{f^*\mathscr{L}})^1_{\mathrm{pre}} \simeq & Y \times_{\left[Y/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} Y \\ \simeq & X \times_{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} \left[Y/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \times_{\left[Y/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} Y \\ \simeq & X \times_{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} Y \\ \simeq & \left(X \times_{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} X\right) \times_X Y \\ \simeq & (\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^1_{\mathrm{pre}} \times^s_X Y \\ \simeq & f^*(\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^1_{\mathrm{pre}} \end{aligned}$$

此外，通过归纳法可得:

$$\begin{aligned} (\mathscr{G}_{f^*\mathscr{L}})^n_{\mathrm{pre}} \simeq & (\mathscr{G}_{f^*\mathscr{L}})^{n-1}_{\mathrm{pre}} \times_Y (\mathscr{G}_{f^*\mathscr{L}})^1_{\mathrm{pre}} \\ \simeq & f^*\left(\mathscr{G}_{\mathscr{L}}\right)^{n-1}_{\mathrm{pre}} \times_Y (\mathscr{G}_{f^*\mathscr{L}})^1_{\mathrm{pre}} \\ \simeq & f^*\left(\mathscr{G}_{\mathscr{L}}\right)^{n-1}_{\mathrm{pre}} \times_Y Y \times_{\left[Y/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}} Y \\ \simeq & f^*\left(\mathscr{G}_{\mathscr{L}}\right)^{n-1}_{\mathrm{pre}} \times_Y f^*(\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^1_{\mathrm{pre}} \\ \simeq & f^*\left(\mathscr{G}_{\mathscr{L}}\right)^n_{\mathrm{pre}} \end{aligned}$$

[1]我们将在命题 4.2.25 中证明，李代数丛的一个映射会诱导出这样的交换图。

因此，积分 $f^*\mathscr{L}$ 的 Segal 群胚等价于 $(\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^\bullet_{\mathrm{pre}} \times^{s\bullet}_X Y$ 上的 Segal 群胚结构。此外，由于存在一个覆盖 f的群胚 $(\mathscr{G}_{f^*\mathscr{L}})^\bullet_{\mathrm{pre}} \to (\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^\bullet_{\mathrm{pre}}$的自然态射，这定义了 $(\mathscr{G}_{\mathscr{L}})^\bullet_{\mathrm{pre}}$ 在 f上的作用。于是，该陈述就是这一构造的栈化。 □

我们面临的主要问题是，只有当 X 和 Y 满足假设3.2.2 时，这一切才能成立；但对于我们感兴趣的大多数例子（例如导出临界轨迹、动量映射的零点轨迹等）而言，这个条件过于严格。

我们需要提出一种弱化的无穷小商概念。实际上，我们只需要将其用于 f 上作用的无穷小商： $Y \to X$ 其中 X 满足假设3.2.2 ，且 Y 是几乎有限表示的仿射概形。

定义 4.2.19。设 f： $Y \to X$ 是一个栈态射，其中 X 满足假设3.2.2，且 Y 是几乎有限表示的仿射概形。取 $\mathscr{L}$ 上的一个李代数丛 X。那么，由 Y 经 $\mathscr{L}$ 得到的弱无穷小商是一个导出栈，记作$\widetilde{\quad}$ $\left[Y/\mathscr{L}\right]$，它适合以下拉回图：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\left[Y/\mathscr{L}\right]} & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{L}\right] \end{array}$$

$\widetilde{\quad}$请注意，这种 $\left[Y/\mathscr{L}\right]$ 的存在性并无保证，其唯一性也同样如此。

注 4.2.20。 请注意，这一概念实际上并不使用 $\mathscr{L}$的作用。因此，即使 $\mathscr{L}$ 不作用于 f （见定义 3.3.12），这仍定义了弱无穷小商的概念。

请注意，这甚至不依赖于 X 上的李代数丛结构，而只依赖于其无穷小投影：

$$h : X \to \left[X/\mathscr{L}\right]$$

注 4.2.21。由于这一构造仅取决于无穷小商投影，我们也可以定义一个与沿态射 $Y' \to Y$ 的弱无穷小商 $\left[Y/\mathscr{L}\right]$ 相兼容的弱无穷小商，并将其视为一个导出栈$\widetilde{\quad}$

$\widetilde{\left[Y'/\mathscr{L}\right]}$ 使其适配于一个拉回图：

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\left[Y'/\mathscr{L}\right]} & \longrightarrow & \widetilde{\left[Y/\mathscr{L}\right]} \end{array}$$

特别地，它也自动是沿复合的 $\mathscr{L}$ 的弱无穷小商：

$$Y' \to Y \to X$$

处理李代数丛的（弱）无穷小商时，主要困难之一在于我们不知道是否存在如下等价：

$$\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}\right]} \simeq \mathscr{L}$$

然而，我们已在引理 4.2.14 中看到，若 $\mathscr{L}$ 良好可积（按照定义 4.2.13的含义），则相对切丛可恢复 $\mathscr{L}$。

推论 4.2.22。设 $\left[Y/\mathscr{L}\right]$ 是 f 的弱无穷小商：$Y \to X$ 同前。假设 $\mathscr{L}$ 良好可积。利用定义 $\left[Y/\mathscr{L}\right]$ 的拉回以及引理 *4.2.14*，我们得到 拟凝聚层(Y)中的一个等价：

$$\mathbb{T}_{Y/\widetilde{\left[Y/\mathscr{L}\right]}} \simeq f^*\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}\right]} \simeq f^*\mathscr{L}$$

此推论并未在 $f^*\mathscr{L}$ 上给出李代数丛结构，Y因为它不必满足假设 3.2.2。因此，我们无法像命题 $\mathscr{L}$4.2.17中那样恢复 $\mathscr{L}$的作用。

显然，若 Y 满足假设3.2.2 且 $\mathscr{L}$ 在 $Y \to X$上有一个作用，则$\left[Y/\mathscr{L}\right]$ 是弱无穷小商的一个有效选择（但即使在等价意义下，也未必是唯一的选择）。

例4.2.23。仿射群 G 在 X 上的光滑作用所关联的李代数丛（其中 X 满足假设 3.2.2）恰好是例*3.1.8*中的作用李代数丛。

要证明这一点，请注意 G 自然地构成一个以点 $\star$ 为底、李代数为 $\mathfrak{g}$ 的群胚，其中该李代数与 G相关联。于是，G在 X 上的光滑作用，恰好是命题 4.2.17 中的光滑作用。因此，与作用群胚 $G \times X$ 相关联的李代数丛为 $f^*\mathfrak{g} = X \times \mathfrak{g}$。由于态射 $X \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 必须是李代数丛态射，这意味着 $X \times \mathfrak{g}$ 上的李括号正是例 3.1.8中所描述的李括号。

4.2.2. $\mathscr{L}$-等变映射与（弱）无穷小商。

本节旨在为无穷小作用建立一个类似于第 4.1.1 节的对应概念。我们首先仿照定义 $\mathscr{L}$，给出 4.1.12 中 $\mathscr{L}$-等变映射的定义。

定义 4.2.24. 设 $f : X \to Y$ 是导出栈之间的一个态射。假设 $\mathscr{L}$ 是 X上的李代数丛，而 X是一个满足假设 3.2.2的栈。那么，关于 $\mathscr{L}$ 的 f 上的不变映射结构，是经由“投影”[1]:的一个分解

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \nearrow_{[f]} & \\ \left[X/\mathscr{L}\right] & & \end{array}$$

若 $\mathscr{L}'$ 是 Y 上的李代数丛（且 Y 也满足假设 3.2.2），则称 $[f]$ 是关于 $\mathscr{L}$和 $\mathscr{L}'$ 在 f上的等变映射结构，当且仅当映射:

$$h \circ f : X \to \left[Y/\mathscr{L}'\right]$$

按照前文给出的意义是 $\mathscr{L}$-等变的。换言之，这就是一个态射 $[f]$，使其适合于交换图:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[X/\mathscr{L}\right] & \xrightarrow[[f]]{} & \left[Y/\mathscr{L}'\right] \end{array}$$

从现在起，提到映射 $[f]$的数据时，我们将称 f 是 等变的。

这些不变性和等变性的概念在预栈中同样有意义，只需将所有无穷小商替换为它们所源自的预栈。

在 4.1.1 节中，根据引理 4.1.11，商栈之间的任意态射都来自 Segal 群胚之间的态射。一般而言，无穷小投影不再是有效满态射，但我们仍有如下结果:

[1]我们仍将自然的形式加厚称为:

$$h : X \to \left[X/\mathscr{L}\right]$$

一个“ 类比群胚情形称为“投射”。但它不必是有效满态射
pr .

命题 4.2.25. 取映射 $f\colon Y \to X$，它是满足假设 *3.2.2* 的有限表示仿射栈之间的态射，且 $\mathscr{L}'$ 和 $\mathscr{L}$ 分别是 Y 和 X 上的李代数丛。则有：

– 李代数丛态射 $\mathscr{L}' \to \mathscr{L}$ *over* $f\colon Y \to X$ 诱导出一个等变映射 $[f]$。此外，它是通过对预栈中的一个等变映射进行栈化而得到的：

$$[f]_{\mathrm{pre}} : \left[Y/\mathscr{L}'\right]_{\mathrm{pre}} \to \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}$$

– 给定一个等变映射 $[f]$，如果它来自对预栈中的一个等变映射进行栈化 $[f]_{\mathrm{pre}}$，那么存在一个李代数丛上的映射，$\mathscr{L}' \to \mathscr{L}$，它定义在 f 上。– 给定一个等变映射 $[f]$，如果 $\mathscr{L}'$ 和 $\mathscr{L}$ 按照定义 *4.2.13* 的意义良好地积分，那么存在一个李代数丛态射 $\mathscr{L}' \to \mathscr{L}$，它定义在 f 上。

证明。若有一个李代数丛态射 $\mathscr{L}' \to \mathscr{L}$over f，则根据定义，它可分解为：

$$\mathscr{L}' \to f^!\mathscr{L} \to \mathscr{L}$$

由定义 3.2.30可得一个交换图表：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[Y/f^!\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \simeq \left(\widehat{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}}\right)_Y & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \end{array}$$

此外，无穷小商构造在同一底空间上的自然性给出了如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \swarrow & & \searrow \\ \left[Y/\mathscr{L}'\right]_{\mathrm{pre}} & \longrightarrow & \left[Y/f^!\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \end{array}$$

因此，我们得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[Y/\mathscr{L}'\right]_{\mathrm{pre}} & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \end{array}$$

它在栈化后诱导出等变映射结构。

反过来，给定预叠中的一个等变映射：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[Y/\mathscr{L}'\right]_{\mathrm{pre}} & \xrightarrow{[f]} & \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \end{array}$$

我们有一个 $[f]$ 的分解，使其符合以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} & & Y & & \longrightarrow & & X \\ & \swarrow & \downarrow & & & & \downarrow \\ \left[Y/\mathscr{L}'\right]_{\mathrm{pre}} & \longrightarrow & \left[Y/f^!\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} & \simeq & \left(\widehat{\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}}\right)_Y & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \end{array}$$

我们有这个分解，是因为形式完备化等价于以下纤维积：

$$\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \times_{\left(\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_{\mathrm{DR}}} Y_{\mathrm{DR}} \simeq \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \times_{\left(\left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}}\right)_{\mathrm{DR}}} \left(\left[Y/\mathscr{L}'\right]_{\mathrm{pre}}\right)_{\mathrm{DR}}$$

因此它接收一个来自 $\left[Y/\mathscr{L}'\right]_{\mathrm{pre}}$ 的自然态射。

这个方块由李代数丛 $f^!\mathscr{L} \to \mathscr{L}$ over f 的自然态射诱导，而左侧的交换三角形则诱导出一个李代数丛态射 $\mathscr{L}' \to f^!\mathscr{L}$（在固定底空间上的自然性），这恰好就是李代数丛态射 $\mathscr{L}' \to \mathscr{L}$ over f 的数据。

对于最后一条陈述，请注意，在关于 $\mathscr{L}'$ 和 $\mathscr{L}$ 的假设下，我们可以取：

$$[f]_{\mathrm{pre}} := j([f]) : \left[Y/\mathscr{L}'\right]_{\mathrm{pre}} \simeq j\left(\left[Y/\mathscr{L}'\right]\right) \to \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \simeq j\left(\left[X/\mathscr{L}\right]\right)$$

并使用前面的结果。 □

命题 4.2.26。 设 X 和 Y 是满足假设 *3.2.2* 的栈，且 $\mathscr{G}^\bullet$ 是一个以 X 为底的 *Segal* 群胚，它是李代数丛 $\mathscr{L}$ 的良好积分。那么我们有如下李代数丛的等价：

$$f^!\mathscr{L}_{\mathscr{G}} \simeq \mathscr{L}_{f^!\mathscr{G}}$$

证明。 只需证明预栈中相应的形式群胚等价。与 $f^!\mathscr{L}_{\mathscr{G}}$ 相关联的预栈中的形式群胚是如下形式完备化：

$$Y \times_{\left[Y/f^!\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}}} Y \simeq Y \times_{\left(\widehat{\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}}}\right)_Y} Y$$

另一方面，与 $\mathscr{L}_{f^!\mathscr{G}}$ 相关联的形式群胚是由下式给出的群胚：

$$\left(Y \times_{\widehat{[X/\mathscr{G}]}} Y\right) \simeq Y \times_{\widehat{[X/\mathscr{G}]}_Y} Y$$

随后，我们可以利用以下等价得出结论：

$$\begin{aligned}\left(Y \times_{\widehat{[X/\mathscr{G}]}_{\mathrm{pre}}} Y\right) &\simeq \left[X/\mathscr{G}\right] \times_{[X/\mathscr{G}]_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}} \times_{X_{\mathrm{DR}}} Y_{\mathrm{DR}} \\ &\simeq \left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}} \times_{X_{\mathrm{DR}}} Y_{\mathrm{DR}} \\ &\simeq \left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}} \times_{\left([X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}]_{\mathrm{pre}}\right)_{\mathrm{DR}}} Y_{\mathrm{DR}} \\ &\simeq \widehat{\left(\left[X/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]_{\mathrm{pre}}\right)}_Y\end{aligned}$$

□

事实证明，无穷小商投影的拉回本身就是由无穷小作用给出的无穷小商（类比于引理 4.1.16）。

引理 4.2.27。设 X 是一个满足假设 *3.2.2*的栈，Z 是一个形式栈，且$\mathscr{L}$是 X 上的一个能够良好积分的李代数丛。考虑以下拉回图表：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{L}\right] \end{array}$$

假设 Y也满足假设 *3.2.2*。则有以下结论：

(1) $Y \to Z$ 是一个形式加厚，因此等价于一个形式模空间问题 F的数据。

(2) 在拟凝聚层(Y)中存在一个等价：

$$\mathbb{T}_{Y/Z} \xrightarrow{\sim} f^*\mathscr{L}$$

赋予 $f^*\mathscr{L}$李代数丛的结构。

（*3*）存在从 $\mathscr{L}$ 到 $Y \to X$ 的无穷小作用，使得：

$$Z \simeq \left[Y/\mathscr{L}\right]$$

证明。

(1) 应用 $(-)_{\mathrm{DR}}$ （它是右伴随），我们得到该态射 :

$$Y_{\mathrm{DR}} \to Z_{\mathrm{DR}}$$

是以下等价的拉回态射：

$$X_{\mathrm{DR}} \to \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{DR}}$$

因此， $Y \to Z$ 是一个形式加厚（因为 Y 和 Z 都是形式的）。由于 Y 满足假设 3.2.2，定理1.3.22 表明 Z等价于在 Y之下的一个形式模空间问题的扩张， F。

（2）这些形式加厚的相对余切等价（这是拉回所致）。根据引理 4.2.14（假设 $\mathscr{L}$可良好积分），我们有：

$$\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}\right]} \simeq \mathscr{L}$$

因此， $f^*\mathscr{L}$ 具有由相对余切 $\mathbb{T}_{Y/F}$上的李代数丛结构所赋予的李代数丛结构。这里我们使用以下等价：

$$\mathbb{T}_{Y/F} \simeq \mathbb{T}_{Y/\underline{F}_{\mathrm{pre}}} \simeq \mathbb{T}_{Y/j(Z)} \simeq \mathbb{T}_{Y/Z} \simeq f^*\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}\right]} \simeq f^*\mathscr{L}$$

利用引理 1.3.27、命题 1.3.14 和引理4.2.14。

（3）命题 3.2.33给出了一个李代数胚态射：

$$f^*\mathscr{L} \simeq \mathbb{T}_{Y/Z} \simeq \mathbb{T}_{Y/j(Z)} \to \mathbb{T}_{X/j\left(\left[X/\mathscr{L}\right]\right)} \simeq \mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{L}\right]} \simeq \mathscr{L}$$

这正是 $\mathscr{L}$ 在 $Y \to X$ 上的一个作用的数据，且存在李代数丛的等价：

$$f^*\mathscr{L} \simeq \widetilde{\mathbb{T}}_{Y/F}$$

因此存在一个等价：

$$\mathrm{MC}_{f^*\mathscr{L}} \simeq F$$

这意味着 $f^*\mathscr{L}$ 是 Y 上的李代数丛，其无穷小商为：

$$Z \simeq \underline{F} \simeq \left[Y/\mathscr{L}\right]$$

□

注 4.2.28。 如果我们只假设 Y 是仿射且几乎有限呈现，并且 Z 可以是任意导出栈，那么根据定义， Z 就是弱 无穷小商 Y 在 $\mathscr{L}$下的。这使得引理4.2.27 的“弱类比”成为同义反复。更确切地说，我们得到：

– 态射 $Y \to Z$ 是幂零等价。– 如果 $\mathscr{L}$ 可良好积分，那么根据引理 4.2.14，存在一个等价：

$$\mathbb{T}_{Y/Z} \xrightarrow{\sim} f^*\mathscr{L}$$

– 对任意 $\mathscr{L}$ （即使它不能很好地积分）， Z 都是沿以下方向的弱无穷小商：

$$Z := \widetilde{\left[Y/\mathscr{L}\right]}$$

引理 4.2.29. 取一个态射 $f\colon Y \to X$，其中仿射栈满足假设*3.2.2*，并设李代数丛 $\mathscr{L}$ 作用于 f。那么我们有如下拉回图：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[Y/\mathscr{L}\right] & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{L}\right] \end{array}$$

证明。只需证明我们有如下拉回图：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[Y/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{L}\right]_{\mathrm{pre}} \end{array}$$

这一点已在命题 4.2.18 的证明中说明。 □

现在我们将讨论李代数丛无穷小商栈的拉回。首先回顾，李代数丛 $\mathscr{L}$ 在 f 上的任意作用 $X \to Y$，都根据命题 4.2.25诱导出它们的无穷小商栈之间的映射：

$$\left[X/\mathscr{L}\right] \to \left[Y/\mathscr{L}\right]$$

我们希望类比命题 4.1.19 证明，无穷小商栈的纤维积就是与李代数丛的纤维积相对应的无穷小商栈。

实际上，这就要求我们假设 X、Y、Z 和 $X \times_Z Y$ 都满足假设 3.2.2，而这限制很大[1]。因此，我们只会对弱无穷小商作出类似论述。

命题 4.2.30. 设 $\mathscr{L}$ 是 Z 上的李代数丛，满足假设 *3.2.2*。考虑 Y 和 X 这两个几乎有限表示的仿射栈，以及以下映射：

$$\widetilde{} \qquad \widetilde{} \text{沿这些态射取} \left[X/\mathscr{L}\right] \overset{X\to Z}{\text{和}} \left[Y/\mathscr{L}\right] \overset{Y\to Z}{\text{的弱无穷小商。于是}}$$

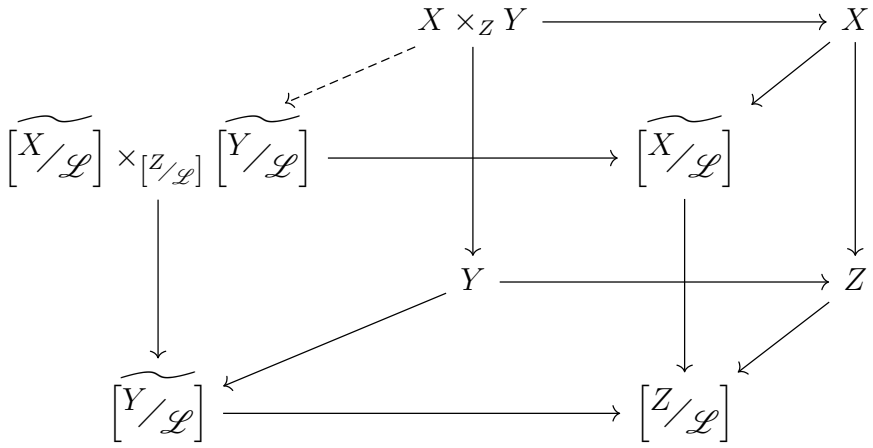
有：

$$\widetilde{\left[X \times_Z Y/\mathscr{L}\right]} := \widetilde{\left[X/\mathscr{L}\right]} \times_{\left[Z/\mathscr{L}\right]} \widetilde{\left[Y/\mathscr{L}\right]}$$

是沿着 $X \times_Z Y \to X$ 和 $X \times_Z Y \to Y$（按注 *4.2.21* 的含义）对两者而言的弱无穷小商，并沿映射 $X \times_Z Y \to Z$ 诱导出相同的弱无穷小商结构。

[1]特别是，满足假设 3.2.2 的栈的纤维积未必满足假设 3.2.2。

证明。 考虑以下交换立方体：



我们只需证明所有涉及虚线箭头的方块都是拉回方块。但这是自动成立的，因为根据弱无穷小商的定义，其他所有方块都是拉回方块。□

注 4.2.31. 在前一个命题中，我们可以将 Z 及其李代数丛替换为 Z' 几乎有限表示的仿射概形范畴对象，并配以一个弱无穷小商：

$$Z' \to \widetilde{[Z'/\mathscr{L}]}$$

注 4.2.32. 如果我们假设 X， Y， Z 和 $X \times_Z Y$ 都满足假设3.2.2，那么我们可以用实际无穷小商和实际作用替换弱无穷小商。特别地，我们可以证明拉回上存在一个诱导作用，使得：

$$[X \times_Z Y/\mathscr{L}] \simeq [X/\mathscr{L}] \times_{[Z/\mathscr{L}]} [Y/\mathscr{L}]$$

4.2.3. 无穷小商栈的切丛与余切丛。

根据引理 3.2.8 和推论 1.3.28 我们已经知道，对于 $\mathscr{L}$ 上满足假设 X 3.2.2的李代数丛，我们有如下李代数丛等价：

$$\mathbb{T}_{X/[X/\mathscr{L}]_{\mathrm{pre}}} \simeq \mathscr{L}$$

由此，类似于命题 4.1.20，我们得到一个等价：

$$p^*\mathbb{T}_{[X/\mathscr{L}]_{\mathrm{pre}}} \simeq \mathbb{T}_X \oplus^\rho \mathscr{L}[1]$$

此外 可见，如果 $\mathscr{L}$（按照定义4.2.13的意义）良好积分，那么我们还有 ：

$$p^*\mathbb{T}_{[X/\mathscr{L}]} \simeq \mathbb{T}_X \oplus^\rho \mathscr{L}[1]$$

类比推论4.1.23，我们可以得出，在某些良好条件下，$T^*\left[X/\mathscr{L}\right]$ 是一个无穷小商 $\mathbb{A}_X\left(p^*\mathbb{L}_{[X/\mathscr{L}]}\right)$的弱。

引理 4.2.33。 设 $\mathscr{L}$ 是定义在 X 上的李代数丛，满足假设*3.2.2*，且 $\mathscr{L}$ 可良好积分。则存在一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_X(\mathbb{L}_A \oplus^\rho \mathscr{L}^\vee[-1]) & \longrightarrow & T^*\left[X/\mathscr{L}\right] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad h \quad} & \left[X/\mathscr{L}\right] \end{array}$$

证明。 首先，这是一个线性栈的拉回，因此该拉回是线性栈 $\mathbb{A}_X\left(p^*\mathbb{L}_{[X/\mathscr{L}]}\right)$。根据假设 3.2.2，我们已经看到：

$$p^*\mathbb{L}_{\left[X/\mathscr{L}\right]} \simeq \mathbb{L}_X \oplus^\rho \mathscr{L}^\vee[-1]$$

□

命题 4.2.34。 假设 $\mathbb{L}_A$ 是非负分次且几乎有限呈现的，并且 $\mathscr{L}$ 几乎有限呈现、集中于非正次数且可良好积分。则 $T^*\left[X/\mathscr{L}\right]$ 是 $\mathbb{A}_X(\mathbb{L}_A\oplus^\rho\mathscr{L}^\vee[-1])$的弱无穷小商。

证明。 这些假设保证 $\mathbb{A}_X(\mathbb{L}_A \oplus^\rho \mathscr{L}^\vee[-1])$ 是几乎有限表示的仿射概形。然后命题 4.2.33 表明 $T^*\left[X/\mathscr{L}\right]$ 是 $\mathbb{A}_X(\mathbb{L}_A \oplus^\rho \mathscr{L}^\vee[-1])$ 的弱无穷小商，符合定义 4.2.19。 □

4.3. **移位动量映射与导出辛约化**。

本节将阐述李代数丛和 Segal 群胚的动量映射概念。主要动机是在这些背景下定义辛约化。

我们先在第 4.3.1 节回顾派生代数几何背景下群作用的经典动量映射和辛约化概念，这些内容的发展见 [AC21]。我们还将回顾这些对象的主要重要性质，尤其是它们在“良好拉格朗日交”下表现良好的事实（定理4.3.10）。

接下来在第4.3.2 节中，我们将这些概念推广，并定义李代数丛无穷小作用的无穷小动量映射的概念。我们证明，这一定义自然包含无穷小辛约化的概念，而且对于“良好的拉格朗日交”也具有良好的性质。

最后，我们将在第4.3.3 节中说明，只需仿照第4.3.2节中的定义，无穷小动量映射和无穷小辛约化的概念便可直接推广为 Segal 群胚的动量映射和辛约化。因此，动量映射和辛约化也具有相同的性质。

Segal 群胚的情形最为一般，特别是，它涵盖了群作用的动量映射这一情形（见例 4.3.24），以及相关李代数丛的锚映射的对偶这一例子（命题 4.3.25）。

此外，我们将通过定理4.3.30 看到，事实上，无穷小动量映射和无穷小辛约化可由动量映射和 Segal 群胚的辛约化，通过构造 4.2.1、命题 4.2.17 以及形式完备化得到。这遵循第 4.2.1 节的思路，即将李代数丛的所有构造视为相应 Segal 群胚构造的“无穷小版本”。

4.3.1. 对于群。

设 X 是一个光滑辛流形，G 是李群在 X 上的光滑作用，且该作用由辛同胚给出。进一步假设该作用是哈密顿的 [1]，因此存在一个动量映射：

$$\mu : X \to \mathfrak{g}^*$$

可以证明，此映射满足以下性质：

(1) μ 是 G-等变的。(2) μ 是哈密顿的，即对所有 $v \in \mathfrak{g}$，我们都有一个向量场 $\overrightarrow{v} \in \mathbb{T}_X$，它是 v 在“无穷小作用” $\mathfrak{g} \to \mathbb{T}_X$下的像。因此，矩条件要求 $\overrightarrow{v}$ 是哈密顿的[2]：

$$d_{\mathrm{dR}}(\langle \mu, v \rangle) = \iota_{\overrightarrow{v}} \omega_X$$

我们将重新表述这些条件。第一个条件保持不变，因为等变映射在导出几何中仍有意义。对于第二个条件，以下命题说明，该条件意味着 X 上的辛结构可以视为一种拉格朗日结构。

命题 4.3.1。若 $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$ 是一个动量映射，则它是 G等变的，并且存在一个映射：

$$[\mu] : \left[X/G\right] \to \left[\mathfrak{g}^*/G\right]$$

[1]这意味着无穷小作用 $\mathfrak{g} \to \mathbb{T}_X$ 由哈密顿向量场给出，$v \mapsto \overrightarrow{v} = \{H_v, -\}$ 从而诱导出一个李代数同态 $\mu^* : \mathfrak{g} \to \mathscr{O}_X$，将 v 映到哈密顿函数H_v。[2]此条件表明，$\mu^*(v)$是控制 v作用的哈密顿向量场，其中 $\mu^* : \mathfrak{g} \to \mathscr{O}_X$ 是余动量映射。

此映射是拉格朗日的，并且存在一个导出辛[1] 栈的等价：

$$X \simeq \left[X/G\right] \times_{\left[\mathfrak{g}^*/G\right]} \mathfrak{g}^*$$

证明。根据引理4.1.18 ，我们已经知道该拉回 X 作为导出栈成立。我们只需检验拉格朗日交上的辛结构与 X上的辛结构一致。

首先，回顾引理4.1.27 可知， $\mathfrak{g}^* \to \left[\mathfrak{g}^*/G\right]$ 上的拉格朗日结构由0 拉格朗日结构给出。此外，由[Cal21，例 1.32], 可知，矩条件蕴含 ω_X，而 X上的辛结构在 $\left[X/G\right] \to \left[\mathfrak{g}^*/G\right]$上定义了一个拉格朗日结构。这是由于动量映射的第二个条件。接着，根据命题2.2.1 的证明，从X 构造辛结构可知，该辛结构由闭2-形式的次数1空间中零点处的如下回路给出：

$$0 \overset{\omega_X}{\rightsquigarrow} 0$$

□

因此，我们将第二个条件重新表述为：要求 $[\mu]$ 成为一个拉格朗日结构，使得导出交：

$$\left[X/G\right] \times_{\left[\mathfrak{g}^*/G\right]} \mathfrak{g}^*$$

等价于 X 作为一个 辛 栈。根据引理 4.1.18 ，我们知道它们作为导出栈已经等价，而辛部分则是动量映射所要求的额外结构。

定义 4.3.2 ([AC21，定义 2.3])。 设 X 是一个 n-移位辛 Artin 栈，并带有 G 的光滑作用。给定一个 G-等变映射 $\mu: X \to \mathfrak{g}^*[n]$，则 μ 上的 n-移位动量映射结构是下列对象上的一个拉格朗日结构：

$$[\mu] : \left[X/G\right] \to \left[\mathfrak{g}^*[n]/G\right]$$

使得存在 n-移位辛栈之间的等价：

$$X \simeq \left[X/G\right] \times_{\left[\mathfrak{g}^*[n]/G\right]} \mathfrak{g}^*[n]$$

[1]回顾命题 4.1.27 ，映射：

$$\mathfrak{g}^* \to \left[\mathfrak{g}^*/G\right]$$

也是拉格朗日的。因此， $\left[X/G\right] \times_{\left[\mathfrak{g}^*/G\right]} \mathfrak{g}^*$ 是拉格朗日态射的导出交，因此是0-移位辛的（命题2.2.1）。

注4.3.3。在微分几何中，成为动量映射的条件是映射的性质。与导出几何中的常见情形一样，这些性质会成为额外的结构。事实上，等变性就是等变映射的结构，正如我们在定义4.1.1 中所见；第二个条件则成为拉格朗日结构。因此，成为动量映射将是映射上的一种结构，而对于映射 μ，我们通常仍会说 μ 是一个动量映射，以指代 μ连同其动量映射结构。

我们关注辛约化的过程。经典地，在这些构造存在的条件下，该过程包括以下步骤：

– 取动量映射的零点轨迹[1]：

$$\begin{array}{ccc} Z(\mu) & \longrightarrow & \star \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\mu]{} & \mathfrak{g}^*[n] \end{array}$$

– 对其取关于 G 的诱导作用的商：

$$X_{\mathrm{red}} := \left[Z(\mu) \middle/ G \right]$$

– 在 X_{red} 上构造辛结构 ω，使得 $p^*\omega = i^*\omega_X$ 满足：

$$p : Z(\mu) \to \left[Z(\mu) \middle/ G \right] \qquad i : Z(\mu) \to X$$

在经典几何中，这一过程只有在满足某些假设（确保零点轨迹和商存在）的情况下才存在。然而，在导出几何中，这些构造总是可行的，并且推广了经典构造。

定义 4.3.4 ([AC21，定义 2。3])。 我们将沿着 X的 n-移位动量映射 μ: $X \to \mathfrak{g}^*[n]$ 的辛约化定义为以下纤维积：

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathrm{red}} & \longrightarrow & \mathbf{B}G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[X \middle/ G \right] & \xrightarrow[[\mu]]{} & \left[\mathfrak{g}^*[n] \middle/ G \right] \end{array}$$

由于它是一个 $(n+1)$-移位辛导出栈中拉格朗日子空间的导出交，因此它自然具有 n-移位辛结构。

[1]这可以推广为取 $\mathfrak{g}^*[n]$ 的任意余伴随轨道的原像（参见[Cal21，第 2.1 节。2]）。我们不考虑这种一般程度的推广。

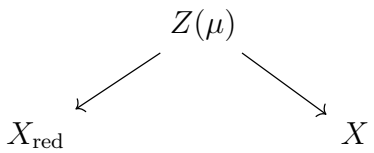
注 4.3.5. 进行这次拉回，一次性完成了经典构造的全部三个步骤。事实上，根据命题 4.1.19，这次拉回等价于：

$$\left[X \times_{\mathfrak{g}^*[n]} \star /G\right]$$

因此 X_{red} 恰好是 μ 的纤维的商。并且，辛结构是自然而然得到的，因为它是拉格朗日态射的导出交（命题 4.3.1和4.1.28）。
此外，由于 $\mathrm{B}G \to \left[\mathfrak{g}^*[n]/G\right]$ 上的拉格朗日结构是零结构，而动量映射上的拉格朗日结构由 X 上的辛结构给出，因此，从某种意义上说，X_{red} 上的辛结构是由 X 上的辛结构“诱导”而来的。

以下命题是一个重要观察，它将促使我们在第4.3.2节定义李代数丛动量映射概念的推广。此外，第 4.3.2 节和5 节将说明，这些拉格朗日对应将成为辛约化广义概念的定义性特征（定义 5.1.3和5.1.4），该概念可视为一种通过对“几乎导出临界轨迹”取商来获得辛栈的过程。

命题 4.3.6([AC21，注 2。4])。
If μ: $X \to \mathfrak{g}^*[n]$ 是一个 n-移位动量映射，存在一个拉格朗日对应 :



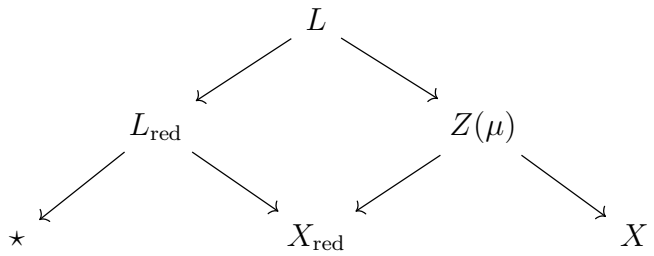
例 4.3.7。如果我们考虑由 G 在 T^*X上的余切作用所给出的动量映射 μ: $T^*X \to \mathfrak{g}^*$，那么根据命题，其辛约化由.....给出
4.1.29 by $T^*\left[X/G\right]$.

沿着第 2.2 节的思路，可以通过“拉格朗日交”过程构造动量映射，并且辛约化与这些拉格朗日交相交换。为了概述主要思路，[AC21，定义 2。8] 为 导出辛约化的拉格朗日结构在 $L \to X$ 上给出了一个概念。

为了表达这个定义，我们将使用 1-范畴，它由 $(n+1)$-移位点[1], $\mathrm{Lag}_1(\star_{n+1})$ （参见第 2.2.3节）。我们可以将他们的定义改述如下：

[1]我们考虑点上的拉格朗日对象的 1-范畴。其对象是 n-移位辛栈，态射是（等价类的）拉格朗日对应。

定义 *4.3.8*。 $L \to X$ 上拉格朗日结构的拉格朗日约化由 $L \in Lag_1(\star_{n+1})(\star_n, X)$ 经由 $Z(\mu) \in Lag_1(\star_n)(X_{\mathrm{red}}, X)$ 的分解 $L_{\mathrm{red}} \in Lag_1(\star_{n+1})(\star_{n+1}, X_{\mathrm{red}})$ 给出：



注 4.3.9。 [AC21，定义 2。8] 表述方式有所不同，但实际上等价于要求存在这种分解。此外，得益于命题 4.2.27，拉格朗日约化 可视为由 G 在 L上的作用所得到的商：

$$L_{\mathrm{red}} \simeq \left[L/G\right]$$

定理 4.3.10 ([AC21，定理 C])。
设 $\mu :\ X \to \mathfrak{g}^*[n]$ 是一个 n-移位动量映射。设 L，L' 是 X 中的拉格朗日子空间，且 L_{red}，L'_{red} 分别是 L 和 L'的导出辛约化。那么，X 上的动量映射诱导出以下空间上的动量映射结构：

$$\mu_{-1} : L \times_X L' \to \star \times_{\mathfrak{g}^*[n]} \star \simeq \mathfrak{g}^*[n-1]$$

此外，存在一个自然等价，将$(n-1)$-移位辛栈映至：

$$(L \times_X L')_{\mathrm{red}} \simeq L_{\mathrm{red}} \times_{X_{\mathrm{red}}} L'_{\mathrm{red}}$$

例 4.3.11。一个 G-等变函数的导出临界轨迹带有一个 (-1)-移位动量映射：

$$\mathbf{Crit}(f) \to \mathfrak{g}^*[-1]$$

事实上，T^*X上的诱导作用 μ：存在动量映射 $T^*X \to \mathfrak{g}^*$，其辛约化为 $T^*\left[X/G\right]$（参见例4.3.7），而拉格朗日子空间0，df：$X \to T^*X$ 的辛约化由 $[0]$ 和 $d[f]$上的自然拉格朗日结构给出：

$$X_{\mathrm{red}} := \left[X/G\right] \to (T^*X)_{\mathrm{red}} \simeq T^*\left[X/G\right]$$

其中，最后一个等价关系是命题 4.1.29 的推论。接着，定理 4.3.10 表明 $\mathbf{Crit}(f) \to \mathfrak{g}^*[-1]$ 是一个 (-1)- 移位动量映射，其辛约化为：

$$\mathbf{Crit}(f)_{\mathrm{red}} \simeq \mathbf{Crit}([f])$$

4.3.2. 关于李代数丛。

我们希望推广李代数丛无穷小作用的动量映射定义。由于我们再次研究李代数丛，因此假设 $X = \text{谱}(A)$ 满足假设 3.2.2。

我们的目标有两个：一是恢复第4.3.1 节（群作用的动量映射）的无穷小对应物，二是将其推广到李代数丛的无穷小作用。关键例子由锚映射的对偶ρ^*：$T^*X \to L^*$（命题 4.3.17）给出，我们将其视为余切动量映射的类似物 μ：$T^*X \to \mathfrak{g}^*$。

给定一个映射 μ： $Y \to L^*[n]$ 导出栈[1] 之上 X的映射，其中 $Y \to X$ 满足 Y 是几乎有限表示仿射的，且 X 满足假设 3.2.2，我们要探讨如何在 n-移位动量映射的结构，其中 μ 满足 $\mathscr{L}$是一个定义在 X上的李代数丛。

一种直接照搬群作用定义的朴素做法，是要求无穷小商上存在拉格朗日结构。但这种做法立即行不通，因为我们没有 $\mathscr{L}$ 在 $L^*[n]$上的自然无穷小作用，无法得到引理4.1.25的类似结果；此外，也没有明显的方式可以选择 $\mathscr{L}$ 在 Y上的无穷小作用。

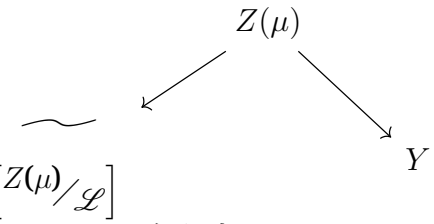
然而，事实证明，对于 μ： $T^*X \to L^*$ 这一锚映射的对偶，动量映射的纤维 $Z(\mu)$具有 $\mathscr{L}$ 的自然无穷小作用（在同伦意义下），如命题 4.2.34所述。结合这一事实与命题 4.3.6，即可得到以下定义：

定义 4.3.12。取 $\mathscr{L}$ 上的一个李代数丛 X，以及一个映射 μ： $Y \to L^*[n]$，它是 X 上的栈之间的映射，其中 Y是几乎有限表示仿射的，且 X 满足假设 3.2.2。我们假设动量映射的纤维（记为 $Z(\mu)$）也是几乎有限表示仿射的[2]。那么，在 无穷小 n-移位动量映射的结构 Y，其中 Y是 n-移位辛的，定义为以下数据：

– 弱无穷小商 $\widetilde{\left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]}$

[1]回顾一下，按照约定，$L = \mathbb{A}_X(\mathscr{L})$ 和 $L^* := \mathbb{A}_X(\mathscr{L}^\vee)$。[2]例如，若 $Y = \mathbb{A}_X(\mathscr{E})$，其中 $\mathscr{E}$ 是非负分次且有限表示的，μ 是线性栈之间的线性映射，而 $\mathscr{L}$ 是非正分次的，那么 $Z(\mu)$ 是几乎有限表示的仿射概形。

– 拉格朗日对应：



在这种情况下， μ 的无穷小辛约化定义为：

$$Y_{\mathrm{red}} := \widetilde{\left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]}$$

注 4.3.13。 如果 $Z(\mu)$ 满足假设 3.2.2，那么我们也可以要求 $\mathscr{L}$ 在 $Z(\mu) \to X$ 上具有一个作用，并取：

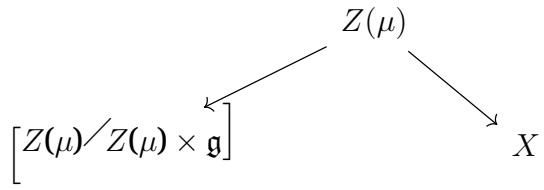
$$\widetilde{\left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]} := \left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]$$

注 4.3.14。在此定义中，李代数丛的结构在 $L^*[n]$上不起任何作用。事实上，我们可以将此定义推广到任意映射 $\mu : Y \to Z$，其中 Z 是一个线性栈（或者更一般地，推广到任意在 X 上的导出栈，并连同一个“零截面”的选择）[1]。

注 4.3.15。一般而言，辛约化是动量映射 μ 的数据 的一部分，这是由于弱无穷小商并不唯一。

例 4.3.16. 若 $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$ 是一个动量映射，则它是一个无穷小动量映射。我们将 $\mathfrak{g}$ 视为点 $\star$上的李代数丛，则 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}^*$ 和 X 上有无穷小作用（由 G的作用诱导），因此纤维 $Z(\mu)$也在 $Z(\mu)$上有一个典范的无穷小作用。

这正是第 4.3.1 节的无穷小版本，我们将通过引理 4.3.31 看到，命题 4.3.6中的拉格朗日对应的无穷小版本是一个拉格朗日对应：



这给出了 $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$ 无穷小动量映射的结构。这恰好是将定理4.3.30 应用于群作用的动量映射后得到的无穷小作用。

[1]这里要求这个“零截面”，是为了使纤维 $Z(\mu)$有意义。

直观地说，锚映射 $\mathscr{L} \to \mathbb{T}_X$ 应当表示 $\mathscr{L}$ 在 X 上的无穷小作用。类似于群作用中映射 $T^*X \to \mathfrak{g}^*$ 是一个动量映射这一事实，我们希望证明映射 $T^*X \to L^*$ 是一个无穷小动量映射。

命题 4.3.17。 假设 X 满足假设 *3.2.2*，且 $\mathbb{L}_X$ 是非正分次且有限表示的。设 $\mathscr{L}$ 是一个非正分次、几乎有限呈现且可良好积分的李代数丛。若2-形式在 $T^*\left[X/\mathscr{L}\right]$ 上是辛的[1],，则锚映射的对偶 $\rho^*\colon T^*X \to L^*$ 可赋予无穷小动量映射的结构，其弱无穷小商如下：

$$(T^*X)_{\mathrm{red}} \simeq T^*\left[X/\mathscr{L}\right]$$

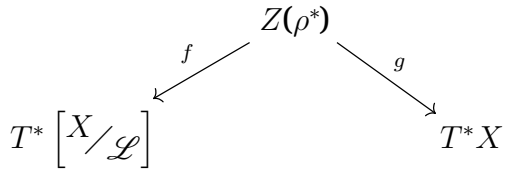
证明。 我们可以证明 $Z(\rho^*) \simeq \mathbb{A}_X(\mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{L}^\vee[-1])$。关于 $\mathbb{L}_X$ 和 $\mathscr{L}$ 的假设确保 $Z(\rho^*)$ 是几乎有限表示的仿射概形，因此谈论动量映射结构是有意义的。

此外，命题 4.2.34 表明 $Z(\rho^*)$ 存在一个弱无穷小商，其定义如下：

$$\left[\widetilde{Z(\rho^*)/\mathscr{L}}\right] \simeq T^*\left[X/\mathscr{L}\right]$$

它具有典范辛结构。

现在我们只需确定拉格朗日对应的结构：



[1]特别地，如果 $\mathscr{L}$ 可积为一个光滑塞加尔群胚（根据命题4.3.32）。

由于两个辛结构都是典范的，它们的拉回实际上相等[1]，，因此我们可以选择0各向同性对应。为了证明非退化性，我们需要证明下面的方块是一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_{Z(\rho^*)} & \longrightarrow & g^*\mathbb{T}_{T^*X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*\mathbb{T}_{T^*\left[X/\mathscr{L}\right]} & \longrightarrow & \mathbb{L}_{Z(\rho^*)} \end{array}$$

取这个交换图的纤维，我们可以证明：

$$\begin{array}{ccc} \pi^*\mathscr{L} & \xrightarrow{\sim} & \pi^*\mathscr{L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_{Z(\rho^*)} & \longrightarrow & g^*\mathbb{T}_{T^*X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*\mathbb{T}_{T^*\left[X/\mathscr{L}\right]} & \longrightarrow & \mathbb{L}_{Z(\rho^*)} \end{array}$$

其中左侧的纤维根据推论计算，感谢感谢 4.2.22 (因为$\mathscr{L}$ 积分良好），右侧的纤维则利用T^*X 上的联络以及 $Z(\rho^*)$。

一般而言，稳定范畴中拉回的纤维等价，当且仅当右侧的方块是一个拉回：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{fib}(A \to B) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B \\ \downarrow\sim & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{fib}(C \to D) & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D \end{array}$$

我们可以通过考察以下图表看出：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{fib}(A \to B) \simeq \mathrm{fib}(C \to D) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & C \\ \downarrow\sim & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & D \end{array}$$

那么，左侧方形是拉回，且外方形是拉回，当且仅当这些纤维等价。接下来，这是稳定

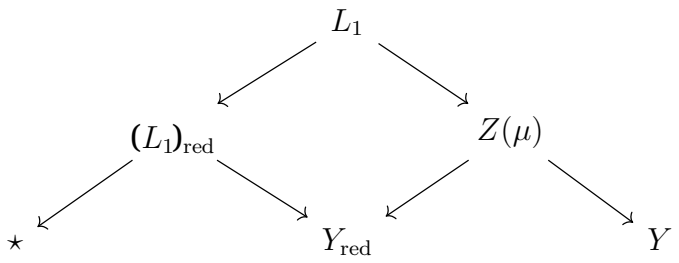
[1]在以下模型中：

$$Z(\mu) = \mathbb{A}_X\left(p^*\mathbb{L}_{\left[X/\mathscr{L}\right]}\right) \simeq \mathbb{A}_X(\pi^*(\mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{L}^\vee[-1]))$$

范畴的一般性质：如果外方形和左侧方形都是笛卡尔方形，那么右侧方形也必定是笛卡尔方形。□

现在我们将看到，与群作用的情形类似，这种动量映射的概念在拉格朗日交方面表现良好。为此，我们需要拉格朗日态射的辛约化这一概念的一个类似物（定义 4.3.8）。

定义 4.3.18. 设 $L_1 \to Y$ 是带有拉格朗日结构的拉格朗日，且 L_1 是几乎有限表示的仿射概形。带有无穷小 n-移位动量映射 $\mu : Y \to L^*[n]$ 的拉格朗日 $L_1 \to Y$（配备 Y）的无穷小辛约化，是指将拉格朗日态射$L_1 \in \mathrm{Lag}_{\mathrm{I}}(\star_{(n+1)})(\star_n, Y)$ 分解为 $Z(\mu) \in \mathrm{Lag}_{\mathrm{I}}(\star_{(n+1)})(Y_{\mathrm{red}}, Y)$ 的数据（见定义 2.2.17）。



注 4.3.19。 定义 4.3.18 与定义 4.3.8完全相同。不过，我们可以更明确地描述这个定义的重要特征。根据定义，拉格朗日 $L_1 \to Y$的无穷小 n-移位动量映射 μ: $Y \to L^*[n]$ 的无穷小辛约化由以下数据构成：

– $L_1 \to Y$的一个分解：

$$L_1 \longrightarrow Z(\mu) \longrightarrow Y$$

– 映射 $(L_1)_{\mathrm{red}}$ 的一个弱无穷小商 $L_1 \to Z(\mu)$，它与 $Z(\mu) \to X_{\mathrm{red}}$ 相容，符合注 4.2.21。– 关于以下对象的一个拉格朗日结构：

$$(L_1)_{\mathrm{red}} \simeq \left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right] \to X_{\mathrm{red}}$$

现在我们可以证明，动量映射的“拉格朗日交”是一个移位动量映射：

定理 4.3.20。 令 $\mu : Y \to L^*[n]$ 为一个无穷小 n-移位动量映射，且$L_1 \to Y$和 $L_2 \to Y$ 为带有无穷小辛约化的拉格朗日态射。那么，无穷小动量映射 μ 诱导出一个无穷小动量映射：

$$\mu_{-1} : L_1 \times_Y L_2 \to L^*[n-1]$$

使得约化由下式给出：

$$(L_1 \times_Y L_2)_{\mathrm{red}} \simeq (L_1)_{\mathrm{red}} \times_{Y_{\mathrm{red}}} (L_2)_{\mathrm{red}}$$

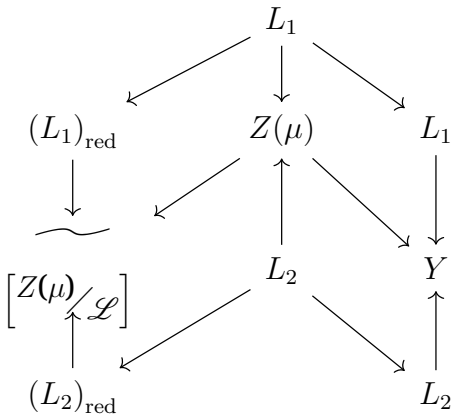
证明。

– 我们需要一个 $Z(\mu_{-1})$的弱无穷小商。由于 L_1， L_2 和 $Z(\mu)$都存在弱无穷小商，因此根据命题4.2.30和注4.2.31，它们的拉回定义了一个弱无穷小商[1]，满足：

$$(L_1 \times_Y L_2)_{\mathrm{red}} := \widetilde{\left[Z(\mu_{-1})/\mathscr{L}\right]} \simeq (L_1)_{\mathrm{red}} \times_{Y_{\mathrm{red}}} (L_2)_{\mathrm{red}}$$

此外，这是拉格朗日子流形的导出交，因此它是$(n-1)$-移位辛的。

– 我们处于定理2.2.23的情形：



~映射$(L_i)_{\mathrm{red}} \to \left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]$ 是拉格朗日的，根据定义4.3.18，我们有以下等价：

$$L_i \simeq (L_i)_{\mathrm{red}} \times_{\widetilde{\left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]}} Z(\mu) \tag{14}$$

此外，左右两侧的垂直态射显然都是拉格朗日子空间。因此，我们得到一个拉格朗日对应：

$$\begin{array}{ccc} & (L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]} Z(\mu) \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]} (L_2)_{\mathrm{red}} & \\ \swarrow & & \searrow \\ (L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\widetilde{\left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]}} (L_2)_{\mathrm{red}} & & \left((L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\widetilde{\left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]}} Z(\mu)\right) \times_E \left((L_2)_{\mathrm{red}} \times_{\widetilde{\left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]}} Z(\mu)\right) \end{array}$$

[1]这是 L_1、 L_2 和 Z（μ）的弱无穷小商，并通过扩张也成为 X 的弱无穷小商。

– 利用方程（14），我们得到以下等价：

$$\begin{aligned}
&(L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\widetilde{[Z(\mu)/\mathscr{L}]}} Z(\mu) \times_{\widetilde{[Z(\mu)/\mathscr{L}]}} (L_2)_{\mathrm{red}} \\
\simeq &(L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\widetilde{[Z(\mu)/\mathscr{L}]}} Z(\mu) \times_{Z(\mu)} Z(\mu) \times_{\widetilde{[Z(\mu)/\mathscr{L}]}} (L_2)_{\mathrm{red}} \\
\simeq &L_1 \times_{Z(\mu)} L_2 \\
\simeq &Z(\mu_{-1})
\end{aligned}$$

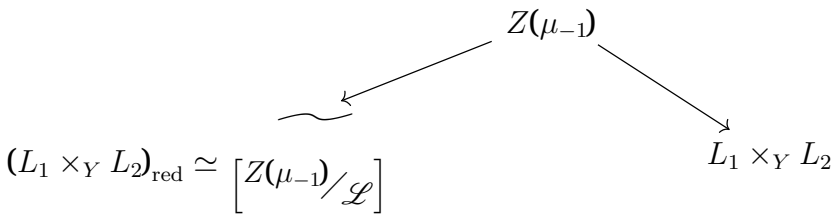
– 再次利用方程 (14)，得到如下等价：

$$\left((L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\widetilde{[Z(\mu)/\mathscr{L}]}} Z(\mu)\right) \times_Y \left((L_2)_{\mathrm{red}} \times_{\widetilde{[Z(\mu)/\mathscr{L}]}} Z(\mu)\right) \simeq L_1 \times_Y L_2$$

– 利用注 4.3.19和命题 4.2.30，得到：

$$\begin{aligned}
(L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\widetilde{[Z(\mu)/\mathscr{L}]}} (L_2)_{\mathrm{red}} &\simeq \widetilde{\left[L_1/\mathscr{L}\right]} \times_{\widetilde{[Z(\mu)/\mathscr{L}]}} \widetilde{\left[L_2/\mathscr{L}\right]} \\
&\simeq \widetilde{\left[L_1 \times_{Z(\mu)} L_2/\mathscr{L}\right]} \\
&\simeq \widetilde{\left[Z(\mu_{-1})/\mathscr{L}\right]}
\end{aligned}$$

简而言之，我们得到如下拉格朗日对应：

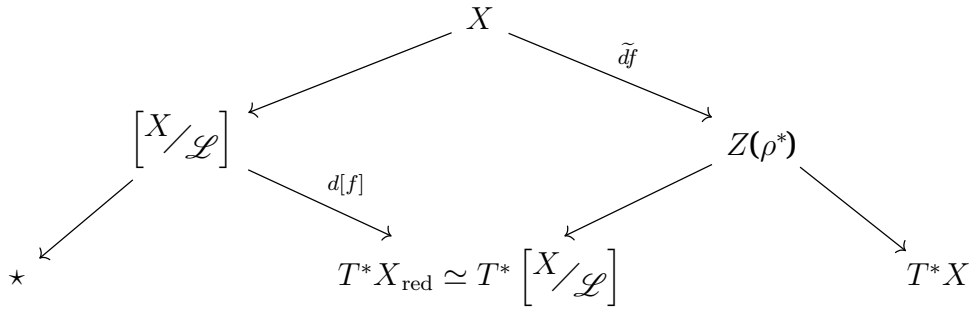


□

例4.3.21. 取 $\mathscr{L}$ 上的李代数丛 X，它是满足假设 3.2.2的仿射栈，使得 $\mathscr{L}$ 可良好积分，并考虑 $L_1 = L_2 = X$ 及其拉格朗日态射 $s_0,\ df\colon X \to T^*X$ 其中 s_0 是零截面。我们有，X 具有相对于 ρ^* 上的无穷小动量映射结构的无穷小辛约化（对于两个拉格朗日态射），该结构由命题 $T^*X \to L^*$ 给出，当且仅当映射：4.3.17,

$$X \xrightarrow{df} T^*X \xrightarrow{\rho^*} L^*$$

同伦于零[1]。在此条件下，我们有拉格朗日子空间的分解：



~其中 df 是 df 在条件 $\rho^* \circ df \simeq 0$ 下得到的自然分解。这是一个拉回，因为下方交换图中的外层方块和右侧方块（见引理4.2.33）都是拉回：

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Z(\rho^*) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \left[X/\mathscr{L}\right] & \longrightarrow & T^*\left[X/\mathscr{L}\right] & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{L}\right] \end{array}$$

根据定义 4.3.18 ， $X \to T^*X$ 是一个拉格朗日态射，其无穷小辛约化为：

$$d\left[f\right] : \left[X/\mathscr{L}\right] \to T^*\left[X/\mathscr{L}\right]$$

对于 s_0 同样成立，并且我们可以利用定理 4.3.20 证明：

– 映射 $\mathbf{Crit}(f) \to L^*[-1]$ 是一个无穷小（-1）移位动量映射。– 其无穷小辛约化为：

$$\mathbf{Crit}(f)_{\mathrm{red}} \simeq \left[X/\mathscr{L}\right] \times_{T^*\left[X/\mathscr{L}\right]} \left[X/\mathscr{L}\right] := \mathbf{Crit}([f])$$

4.3.3. 关于群胚。

现在，我们将给出 *Segal* 群胚 作用的动量映射定义，然后说明第 4.3.2 节中的“无穷小”动量映射是 Segal 群胚动量映射的“无穷小版本”（见定理 4.3.30）。

我们要重新得到的关键例子是群作用的动量映射（例4.3.24）以及李代数丛锚映射的对偶 $T^*X \to L^*[n]$ （命题4.3.25）。

[1]The 同样的条件对于 s_0 存在拉格朗日约化是必要的，但这是自动满足的 .

注 4.3.22. 回忆一下，对于任意一个定义在 X 上的 Segal 群胚 $\mathscr{G}^\bullet$，若每个 $\mathscr{G}^n$ 的余切复形都存在，则可以定义锚定线性栈：

$$L := \mathbb{A}_X\left(\mathbb{T}_{X/[X/\mathscr{G}]}\right) \to TX$$

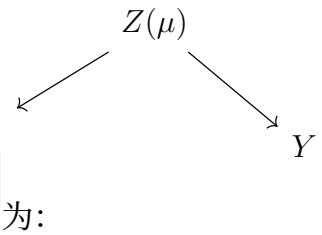
在如此一般的次数下，我们不知道这是否是一个李代数丛，但为了仿照上一节中 $L^*[n]$ 所扮演的角色，仅有一个锚定线性栈就足够了。

在这种情况下，动量映射的概念可以直接从无穷小情形推广而来。

定义 4.3.23。取 $\mathscr{G}^\bullet$ 一个位于 X 之上的 Segal 群胚，使得每个 $\mathscr{G}^n$ 的余切复形都存在，并且 $\mu: Y \to L^*[n]$ 一个位于 X之上的导出栈映射，其中 L 是注 4.3.22中的线性栈。假设 Y是 n-移位辛的。那么，在 n上具有 μ-移位动量映射的结构由以下数据构成：

– $\mathscr{G}^\bullet$ 在 $Z(\mu)$ 上的作用（定义 4.1.15）。– n 上的 $\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]$.

– 一个拉格朗日对应：



在这种情况下，μ 的辛约化定义为：

$$Y_{\mathrm{red}} := \left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]$$

例 4.3.24. 在 $\mathscr{G}^\bullet := G^{\times\bullet}$ 被视为以 $\star$为底的群胚的情形下，我们考虑 G 在 X 上的光滑作用，其中 X 是一个导出 Artin 叠，并配有动量映射$\mu: X \to \mathfrak{g}^*$（其定义见定义 4.3.2）。显然，$\mathfrak{g}$ 是与 $G^{\times\bullet}$相关联的李代数丛。由于 G 同时作用于 X 和 $\mathfrak{g}^*$，它也作用于 $Z(\mu)$，而命题 4.3.6赋予 μ 定义 4.3.23 所述的动量映射结构。

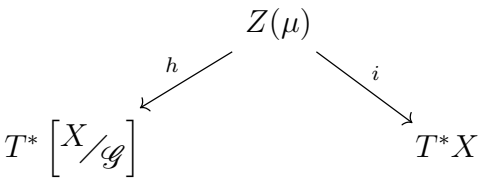
命题 4.3.25. 如果我们有一个 *Segal* 群胚 $\mathscr{G}^\bullet$，其底为 X，如定义 *4.3.23*中所述，且 L 如注 *4.3.22*所述。那么锚映射的对偶 $\mu: T^*X \to L^*$ 具有动量映射结构，其辛约化为 $T^*\left[X/\mathscr{G}\right]$，只要2形式在 $T^*\left[X/\mathscr{G}\right]$ 上是辛的[1]。

证明。注意，存在一个等价 $Z(\mu) \simeq \mathbb{A}_X\left(p^*\mathbb{L}_{[X/\mathscr{G}]}\right)$ (根据命题 4.1.20)，因此 $Z(\mu)$是拉回图的一部分：

[1]当 $\mathscr{G}^\bullet$ 为光滑塞加尔群胚时，情况就是如此，因为其商是 Artin。

$$\begin{array}{ccc} Z(\mu) & \xrightarrow{\pi} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^*\left[X/\mathscr{G}\right] & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{G}\right] \end{array}$$

因此根据引理 4.1.16，存在一个 $\mathscr{G}$ 在 $Z(\mu)$ 上的作用，其商为$T^*\left[X/\mathscr{G}\right]$。接下来只需证明存在一个拉格朗日对应：



不难看出，（典范）辛结构的拉回在$Z(\mu)$上完全一致，因此我们可以考虑 0 各向同性对应。我们要证明它是非退化的。这等价于证明下面的方块是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_{Z(\mu)} & \longrightarrow & h^*\mathbb{T}_{T^*\left[X/\mathscr{G}\right]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ i^*\mathbb{T}_{T^*X} & \longrightarrow & \mathbb{L}_{Z(\mu)} \end{array}$$

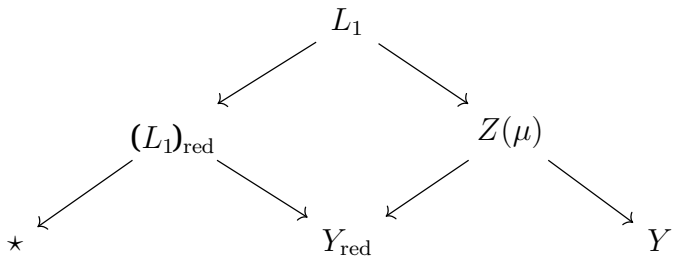
与命题 4.3.25 的证明类似，取水平态射的纤维，在两种情况下我们都得到 $\pi^*\mathscr{L}$。事实上，根据描述 $Z(\mu)$ 的拉回，我们得到：

$$\mathbb{T}_{Z(\mu)/T^*\left[X/\mathscr{G}\right]} \simeq \pi^*\mathbb{T}_{X/\left[X/\mathscr{G}\right]} := \pi^*\mathscr{L}$$

□

现在我们再次通过拉格朗日态射的无穷小辛约化这一概念的直接类比，来考察动量映射相对于拉格朗日交的良好性质：

定义 4.3.26。 具有 n-移位动量映射 $\mu : Y \to L^*[n]$ 的拉格朗日 $L_1 \to Y$（配备了 Y）（对于 $\mathscr{G}$•的作用）的辛约化，是拉格朗日态射$L_1 \in \mathbf{Lag}_1(\star_n, X)$通过 $Z(\mu) \in \mathbf{Lag}_1(Y_{\mathrm{red}}, Y)$ 的分解 $(L_1)_{\mathrm{red}} \in \mathbf{Lag}_1(\star_n, Y_{\mathrm{red}})$ 数据：



注 4.3.27。 定义 4.3.26 与定义 4.3.8完全相同。我们可以更明确地描述这一论述的重要特征。

由引理 4.1.16可知，带有一个拉格朗日 $L_1 \to Y$及一个n-移位动量映射 $\mu\colon\quad Y \to L^*[n]$ 的辛约化数据包括：

– $L_1 \to Y$ 的一个分解：

$$L_1 \longrightarrow Z(\mu) \longrightarrow Y$$

– $\mathscr{G}^\bullet$ 在 L_1 上的一个作用，使得映射 $L_1 \to Z(\mu)$ 是等变的。特别地，L_1 上的群胚来源于该群胚在$Z(\mu)$ 上的作用（其自身又来源于在 Y上的作用）。因此存在一个等价（引理 4.1.16）：

$$L_1 \simeq Z(\mu) \times_{Y_{\mathrm{red}}} \left[L_1 \middle/ \mathscr{G}\right]$$

– 一个拉格朗日结构：

$$(L_1)_{\mathrm{red}} \simeq \left[L_1 \middle/ \mathscr{G}\right] \to Y_{\mathrm{red}} \simeq \left[Z(\mu) \middle/ \mathscr{G}\right]$$

定理 4.3.28。 设 $\mu\colon\quad Y \to L^*[n]$ 是一个 n-移位动量映射，且 $L_1 \to Y$和 $L_2 \to Y$ 是具有辛约化的拉格朗日态射。那么，动量映射 μ诱导出一个动量映射：

$$\mu_{-1} : L_1 \times_Y L_2 \to L^*[n-1]$$

此外，还存在一个自然等价：

$$(L_1 \times_Y L_2)_{\mathrm{red}} \simeq (L_1)_{\mathrm{red}} \times_{L_{\mathrm{red}}} (L_2)_{\mathrm{red}}$$

证明。

– 我们需要 $\mathscr{L}$ 在 $Z(\mu_{-1})$上的一个作用。我们有：

$$\begin{aligned} Z(\mu_{-1}) \simeq & (L_1 \times_Y L_2) \times_{(X \times_{L^*[n]} X)} (X \times_X X) \\ \simeq & L_1 \times_{Z(\mu)} L_2 \end{aligned}$$

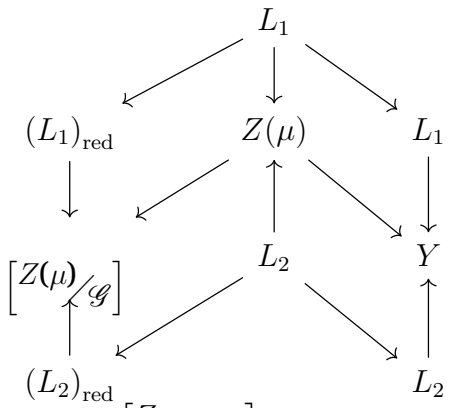
由于 L_1、 L_2 和 Y 都具有 $\mathscr{G}^\bullet$的作用，这是通过群胚作用的拉回得到的（命题4.1.19）。我们由此得到 $\mathscr{G}^\bullet$ 在 $Z(\mu_{-1})$上的拉回作用。

– 根据命题4.1.19，我们有：

$$\begin{aligned}\left[Z(\mu_{-1})/\mathscr{G}\right] &\simeq \left[L_1 \times_{Z(\mu)} L_2/\mathscr{G}\right]\\ &\simeq \left[L_1/\mathscr{G}\right] \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} \left[L_2/\mathscr{G}\right]\\ &\simeq (L_1)_{\mathrm{red}} \times_{Y_{\mathrm{red}}} (L_2)_{\mathrm{red}}\end{aligned}$$

根据假设，这是拉格朗日子流形的导出交，因此它是 $(n-1)$-移位辛的。

– 我们处于定理2.2.23的情形：



我们有，映射 $(L_i)_{\mathrm{red}} \to \left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]$ 是拉格朗日态射，并根据注 4.3.19 和引理4.1.18 可得：

$$L_i \simeq (L_i)_{\mathrm{red}} \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} Z(\mu) \tag{15}$$

此外，左侧和右侧的垂直态射根据假设以及定义 4.3.18 都是拉格朗日子空间

因此，我们得到一个拉格朗日对应：

$$\begin{array}{ccc} & (L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} Z(\mu) \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} (L_2)_{\mathrm{red}} & \\ \swarrow & & \searrow \\ (L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} (L_2)_{\mathrm{red}} & & \left((L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} Z(\mu)\right) \times_Y \left((L_2)_{\mathrm{red}} \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} Z(\mu)\right) \end{array}$$

– 利用方程（15），我们得到：

$$\begin{aligned}&(L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} Z(\mu) \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} (L_2)_{\mathrm{red}}\\ \simeq &(L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} Z(\mu) \times_{Z(\mu)} Z(\mu) \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} (L_2)_{\mathrm{red}}\\ \simeq &L_1 \times_{Z(\mu)} L_2\\ \simeq &Z(\mu_{-1})\end{aligned}$$

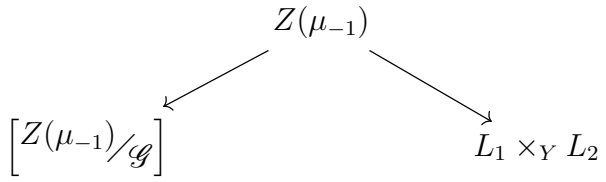
– 再次利用方程（15），我们得到：

$$\left((L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} Z(\mu)\right) \times_Y \left((L_2)_{\mathrm{red}} \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} Z(\mu)\right) \simeq L_1 \times_Y L_2$$

– 利用注 4.3.27和命题 4.1.19可得：

$$\begin{aligned}(L_1)_{\mathrm{red}} \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} (L_2)_{\mathrm{red}} &\simeq \left[L_1/\mathscr{G}\right] \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} \left[L_2/\mathscr{G}\right] \\ &\simeq \left[L_1 \times_{Z(\mu)} L_2/\mathscr{G}\right] \\ &\simeq \left[Z(\mu_{-1})/\mathscr{G}\right]\end{aligned}$$

简而言之，我们有一个拉格朗日对应：



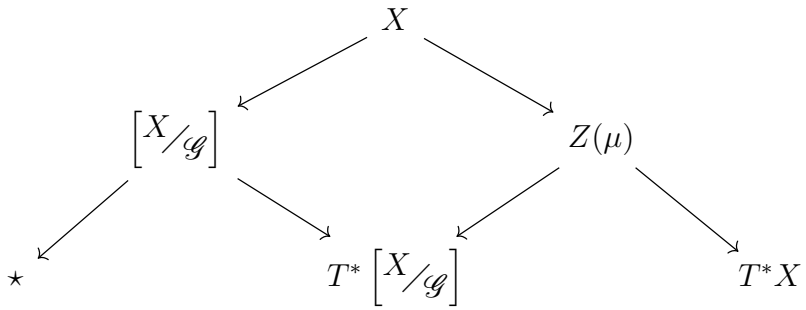
□

推论 4.3.29。设 $\mathscr{G}^\bullet$ 是 X 上的光滑 *Segal* 群胚。拉格朗日映射 s_0、df：$X \to T^*X$ 的辛约化为：

$$s_0, d[f] : \left[X/\mathscr{G}\right] \to T^* \left[X/\mathscr{G}\right]$$

只要 f 是 $\mathscr{G}$-不变的。利用命题 *4.3.25* 和定理 *4.3.28*，我们得到一个(-1)-移位动量映射 $\mathbf{Crit}(f) \to L^*[-1]$，其辛约化恰好是$\mathscr{G}$-等变导出临界轨迹，$\mathbf{Crit}([f])$。

证明。由于 f 是等变的，df 经过分解可通过 $Z(\mu)$（s_0 同理），于是我们有如下图表：



该方形显然是引理的一个拉回4.1.18 以及映射：

$$\left[X/\mathscr{G}\right] \to T^* \left[X/\mathscr{G}\right]$$

要么是 $d[f]$，要么是零截面（因此它们都是拉格朗日的）。

因此， df 和 s_0 都有一个辛约化。
我们在命题 4.3.25 中看到， $T^*X \to L^*$ 是一个带有辛约化的动量映射 $T^*\left[X/\mathscr{G}\right]$，并利用定理 4.3.28，我们得到一个 (-1)-移位动量映射：

$$\mu_{-1} : \mathbf{Crit}(f) \to L^*[-1]$$

其辛约化为：

$$\mathbf{Crit}(f)_{\mathrm{red}} \simeq \left[X/\mathscr{G}\right] \times_{T^*\left[X/\mathscr{G}\right]} \left[X/\mathscr{G}\right] =: \mathbf{Crit}([f])$$

□

遵循第 4.2.1 节的思路，我们希望说明，李代数丛的无穷小商是沿着投影到群胚商的投影的形式完备化。类似地，无穷小辛约化是辛约化的形式完备化；更一般地，第 4.2.2 节的所有构造都是本节构造的“无穷小版本”。

定理 4.3.30. 设 $\mathscr{L}$ 是 X 上的一个李代数丛，其中 X 是满足假设 *3.2.2* 的仿射栈。假设 $\mathscr{L}$ 可良好积分，并选取 $\mathscr{G}^\bullet$ 一个 $\mathscr{L}$ 的良好积分（见定义 *4.2.13*）。取 $\mu : Y \to L^*[n]$ 一个 n-移位动量映射，它对应于 $\mathscr{G}^\bullet$，以及 $L_i \to X (i = 1..2)$ 拉格朗日态射，且其辛约化对应于 $\mathscr{G}$，满足 Y， L_i 并且 $Z(\mu)$ 均为几乎有限表示的仿射对象。那么有如下结论：

(1) μ 具有典范的无穷小动量映射结构，其辛约化由弱无穷小商给出，该商是如下形式完备化：

$$\widehat{\left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]} := \widehat{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]}_X$$

(2) L_i （对于 $i = 1..2$）的无穷小辛约化由弱无穷小商给出，这些商是 L_i 的辛约化的形式完备化：

$$\widehat{\left[L_i/\mathscr{L}\right]} := \widehat{\left[L_i/\mathscr{G}\right]}_X$$

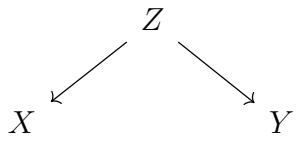
(3) 通过拉格朗日交得到的无穷小移位动量映射（定理 *4.3.20*）：

$$\mu_{-1} : L_1 \times_Y L_2 \to L^*[n-1]$$

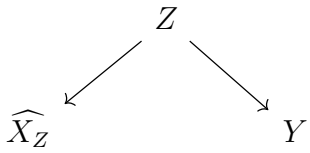
是将第一种构造应用于通过拉格朗日交为群胚得到的移位动量映射而获得的动量映射（定理 *4.3.28*）。

因此，导出交的无穷小辛约化是到导出交的辛约化的投影的形式完备化。

引理 4.3.31。 取 Z 和 Y 为两个几乎有限表示的仿射栈。设 $\mathscr{G}$ 是 Z 上的群胚，并取一个拉格朗日对应：



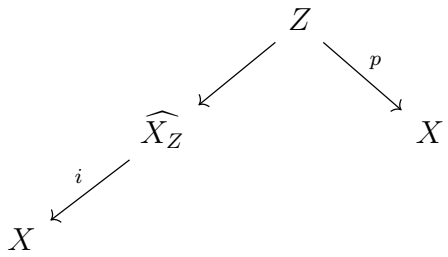
于是存在一个典范的拉格朗日对应：



证明。 回顾引理1.3.20 其中指出存在一个分解：

$$Z \to \widehat{X_Z} \to X$$

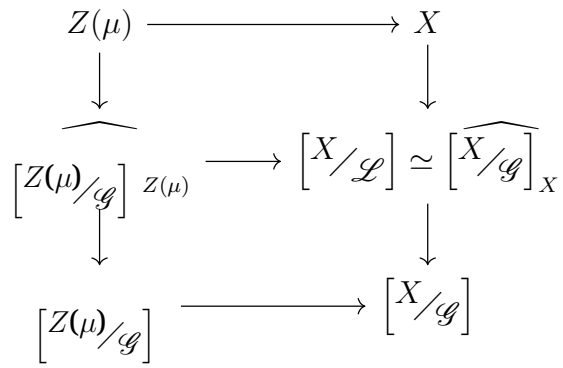
其中第一个映射是形式加厚，最后一个映射是形式 étale。我们得到如下图表：



沿 i 拉回辛结构后，得到的仍是辛结构，因为 i 是形式 étale。因此，各向同性对应可以选为相同的对应。又由于非退化条件仅取决于切复形和余切复形，i 是形式 étale 意味着我们得到的各向同性对应也是非退化的。□

定理 *4.3.30* 的证明。 证明基于取形式完备化来定义弱无穷小商：

(1) 根据引理4.3.31，我们需要证明该形式完备化是一个弱无穷小商。考虑以下交换图表：



首先，由推论 4.2.7 (因为 $\mathscr{G}^\bullet$ 是 $\mathscr{L}$的良好积分)，我们有以下等价：

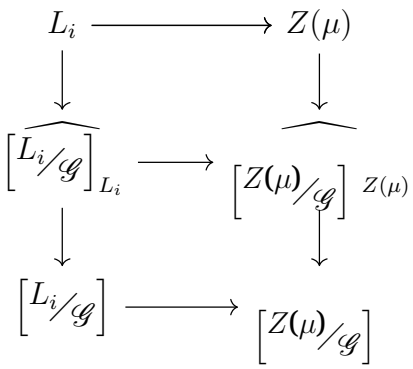
$$\left[X/\mathscr{L}\right] \simeq \widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]}_X$$

外方形是一个拉回，这是由引理 4.1.18 得出的。下方形是一个拉回，这是由以下等价得出的：

$$\begin{aligned}
\widehat{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]}_{Z(\mu)} &\simeq \left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right] \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} Z(\mu)_{\mathrm{DR}} \\
&\simeq \left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right] \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} \left(\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right] \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} X\right)_{\mathrm{DR}} \\
&\simeq \left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right] \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} \left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}} \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}} \\
&\simeq \left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right] \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}} \\
&\simeq \left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right] \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} \left[X/\mathscr{G}\right] \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}} \\
&\simeq \left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right] \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]} \widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]}_X
\end{aligned}$$

因此，上方方块也是一个拉回，并且 $\left[Z_{(\mu)}/\mathscr{G}\right]_{Z(\mu)}$ 根据引理 4.3.31，它既是无穷小动量映射的弱无穷小商，也是辛约化。

(2) 我们有如下交换图：



其中所有方块都是拉回方块（理由与 (1) 的证明相同）。此外，不难看出（再次利用下方的垂直映射是形式 étale 的，这与引理 4.3.31 的证明相同），这些映射：

$$\widetilde{\left[L_i/\mathscr{L}\right]} := \widehat{\left[L_i/\mathscr{G}\right]}_{L_i} \to \left[Z(\mu)/\mathscr{L}\right]$$

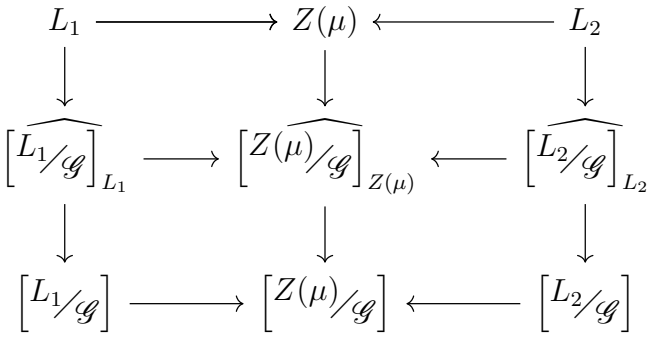
具有由以下对象上的拉格朗日结构典范确定的拉格朗日结构

$$\left[L_i/\mathscr{G}\right] \to \left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]$$

此外，$\widehat{\left[L_i/\mathscr{G}\right]}_{L_i}$ 恰好出于与证明 (1) 中 $\widehat{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]}_{Z(\mu)}$ 相同的理由，是一个弱无穷小商。这赋予 L_i 无穷小拉格朗日辛约化结构，其约化由 $\left[L_i/\mathscr{G}\right]_L$ 给出

.

（3）考虑如下图表，其中所有方块均为拉回：



其思想是，沿水平态射取纤维会产生我们所要寻找的拉格朗日交，而拉回态射的形式完备化就是形式完备化的拉回（推论 1.3.13）。

更准确地说，以下对象上的动量映射结构：

$$\mu_{-1} : Z(\mu_{-1}) \simeq L_1 \times_{Z(\mu)} L_2 \to L^*[-1] \simeq X \times_{L^*} X$$

由拉回作用给出（命题 4.1.19），并给出一个拉格朗日对应：

$$\begin{array}{ccc} & Z(\mu_{-1}) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \left[Z(\mu_{-1})/\mathscr{G}\right] & & L_1 \times_Y L_2 \end{array}$$

其中：

$$\left[Z(\mu_{-1})/\mathscr{G}\right] \simeq \left[L_1/\mathscr{G}\right] \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} \left[L_2/\mathscr{G}\right]$$

那么，由第一个构造诱导的无穷小动量映射由同一个底层映射 μ_{-1}、同一个动量映射纤维 $Z(\mu_{-1})$给出，因此我们只需找到弱无穷小商。它由形式完备化给出，可计算为（同样得益于推论 1.3.13）：

$$\begin{aligned} \left(\left[L_1/\mathscr{G}\right] \times_{\widehat{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]}} \left[L_2/\mathscr{G}\right]\right)_{Z(\mu_{-1})} &\simeq \left(\left[L_1/\mathscr{G}\right] \times_{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]} \widehat{\left[L_2/\mathscr{G}\right]}\right)_{L_1 \times_{Z(\mu)} L_2} \\ &\simeq \widehat{\left[L_1/\mathscr{G}\right]}_{L_1} \times_{\widehat{\left[Z(\mu)/\mathscr{G}\right]}_{Z(\mu)}} \widehat{\left[L_2/\mathscr{G}\right]}_{L_2} \end{aligned}$$

但最后一项恰好是通过对前文所述的无穷小拉格朗日约化所得的无穷小动量映射进行拉格朗日交而得到的弱无穷小商。

□

为了计算这一构造应用于锚映射的对偶 $T^*X \to L^*$（相对于群胚作用）的具体示例，我们使用以下命题：

命题 4.3.32。 设 X 是满足假设*3.2.2*的仿射栈。取 $\mathscr{L}$一个定义在 X 上的李代数丛，它良好地积分为一个良好群胚 $\mathscr{G}$。那么存在一个等价：

$$T^*\left[X/\mathscr{L}\right] \simeq \left(T^*\widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]}\right)_{Z(\mu)}$$

证明。 我们考虑以下态射：

$$\left[X/\mathscr{L}\right] \simeq \left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X \xrightarrow{\alpha} \left[X/\mathscr{G}\right]$$

于是我们得到一个交换图，其中所有方块都是拉回：

$$\begin{array}{ccc} Z(\mu) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha^* T^* \left[X/\mathscr{G}\right] \simeq \left(T^* \left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]\right)_{Z(\mu)} & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{L}\right] \simeq \left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^* \left[X/\mathscr{G}\right] & \longrightarrow & \left[X/\mathscr{G}\right] \end{array}$$

外方形显然是一个拉回方块，因为存在一个等价：

$$p^* \mathbb{L}_{[X/\mathscr{G}]} \simeq \mathbb{L}_X \oplus^{\rho^*} \mathscr{L}^\vee[-1]$$

对于下方形， $\alpha^* T^* \left[X/\mathscr{G}\right]$ 根据定义是拉回。由推论 4.2.7，由于 $\mathscr{L}$ 良好地积分，我们得到等价：

$$\left[X/\mathscr{L}\right] \simeq \left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X$$

最后，利用推论 1.3.13 可知， $\left(T^* \left[X/\mathscr{G}\right]\right)_{Z^{(\mu)}}$ 也是下方形的拉回。

利用引理1.3.20，映射：

$$\left[\widehat{X/\mathscr{G}}\right]_X \xrightarrow{\alpha} \left[X/\mathscr{G}\right]$$

是形式 étale 的。因此存在一个等价：

$$\alpha^* T^* \left[X/\mathscr{G}\right] \xrightarrow{\sim} T^* \left[X/\mathscr{L}\right]$$

□

特别是，如果 $\mathscr{L}$ 良好地积分到 $\mathscr{G}^\bullet$，那么该命题表明， $T^* \left[X/\mathscr{L}\right]$ 是典范辛的，当且仅当 $T^* \left[X/\mathscr{G}\right]$ 也是典范辛的。

5. BV复形的导出视角

经典 BV 构造是一种构造经典可观测量代数的方法，该代数与场空间 X 及作用泛函 f 相关，并将系统的某些对称性纳入考量。构造这些代数有两种不同的方法：

构造 5.0.1。第一种构造的思路由以下两个步骤给出：

(1) 首先，取 S 一个欧拉–拉格朗日方程的“解空间”。在我们的设定中，这相当于求解 $df = 0$。(2) 然后，对 S 取一个由“最大对称性”的李代数丛作用所得到的“无穷小商”，使这个无穷小商成为(-1)-移位辛的。

这是与以下构造相对应的方法：[FK14] 我们将在构造 5.1.1中更详细地讨论这一点。

Con造 5.0.2。第二种方法以相反的顺序执行这些操作：

（1）首先，在 X 上取一个“对称性”的李代数丛。特别地，f 必须相对于该代数丛的无穷小作用是等变的，从而得到一个映射[1]：

$$[f] : \left[X \middle/ \mathscr{L}\right] \to \mathbb{A}^1_k$$

（2）我们取该等变映射的导出临界轨迹，将其视为欧拉–拉格朗日方程的（导出）解空间。

这类似于 [CG21] 所采用的方法，相关内容将在第 5.3.3节（在受限情形下）作更详细的研究。

本节的目标是提供一个同时适用于并推广这两种构造的框架。我们将论证，这两种构造都是这样一种概念的实例：通过选定的无穷小对称性，对导出临界轨迹进行“广义导出辛约化”。

此外，我们还将讨论这一构造对于非无穷小对称性的变体，此时对称性由*Segal*群胚 给出。

最后，我们将在第 5.3 节证明，任何“壳外对称性”的群胚或李代数丛，都会通过对临界点集上的典范 (-1)-移位动量映射进行辛约化，诱导出一个典范的 BV 构造。

[1]或者更确切地说，“等变”是指这样一个映射的数据（参见定义 4.2.24）。

5.1. BV代数作为广义导出辛约化。

本节中，我们首先在第 5.1.1 节更详细地说明构造5.0.1 和 5.0.2 ，并说明它们都是一种对导出临界轨迹进行“广义辛约化”的实例（见第 5.1.2 节）。

在第 5.2.1 节中，我们将尝试说明这一一般构造在何种程度上仍类似于通常的 BV 构造。特别是，我们将看到所得到的是同一类代数（命题 5.2.3）。不过，一般而言，我们无法将 (-1)-移位辛结构严格化，因为它可能包含“更高阶”项（定理 5.2.8）。

5.1.1. 无穷小作用的背景与构造。

在整个第 5 节中，我们将取 $X = \text{谱}(A)$ 为一个光滑仿射代数簇[1] ，并取一个映射 $f: X \to \mathbb{A}^1_k$。我们先描述 [FK14] 中构造的 BV 代数：

构造 5.1.1。

(1) 第一步是选取严格临界点集的一个分解。我们取一个半自由分解，称为 ***Koszul–Tate*** 分解（构造 1.2.22），它是函数 f 的严格临界点集的分解（记为 $\mathrm{KT}(f)$）。我们有：

$$\mathrm{KT}(f) := \left(\mathrm{Sym}_A\left(\mathbb{T}_A[1] \oplus \mathscr{L}_{\mathrm{KT}}[2]\right), \delta_{\mathrm{KT}}\right)$$

其中 $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}$ 是射影的，且集中在非正次数。 $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}$ 和δ_{KT} 的选取使得该复形的上同调集中在次数 0，并且次数 0 的上同调由下式给出：

$$A \big/ \langle df.X, X \in \mathbb{T}_A \rangle$$

(2) 接下来我们考虑以下分次代数（不带微分）：

$$\mathrm{BV}^\sharp_{\mathrm{FK}} = \mathrm{Sym}_A\left(\mathbb{T}_A[1] \oplus \mathscr{L}_{\mathrm{KT}}[2] \oplus \widehat{\mathscr{L}^\vee_{\mathrm{KT}}[-1]}\right)$$

其中，符号 $\widehat{\ }$ 表示沿 Chevalley–Eilenberg 项取完备化， $\mathscr{L}^\vee_{\mathrm{KT}}[-1]$ （见记号 B.2.5）。

(3) 这个分次代数是(-1)-移位辛的，并带有规范的[2]辛结构。(4) 通过归纳过程，我们可以构造一个 BV 荷 ([FK14，定理 4.5])， $Q \in (\mathrm{BV}^\sharp{}_{\mathrm{FK}})_0$ 满足经典主方程：

$$\{Q, Q\} = 0$$

[1]特别地， X 满足假设 3.2.2[2]典范的含义是，它由 $\mathbf{Crit}(f)$上的典范辛结构（由 B 与 $\mathbb{T}_B[1]$ 之间的泊松配对）以及 $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}[2]$与 $\mathscr{L}^\vee_{\mathrm{KT}}[-1]$之间的典范配对诱导而来。这是定义 5.2.6中的严格结构

这等价于寻找一个作用在 $\mathrm{BV}^\sharp_{\mathrm{FK}}$上的微分 δ_{FK}，该微分是哈密顿的，$\delta_{\mathrm{FK}} = \{Q, -\}$。这个微分还保持由 $\mathscr{L}^\vee[-1]$ 中的对称幂给出的滤过。此外，这个微分限制为 Koszul–Tate 微分，从而定义了一个代数映射 $\mathrm{BV}_{\mathrm{FK}} \to \mathbf{KT}(f)$。我们得到完整的 BV代数：

$$\mathrm{BV}_{\mathrm{FK}} := \left(\mathrm{BV}^\sharp_{\mathrm{FK}}, \{-,-\}, Q\right)$$

我们将尝试如下重述这一构造：

– 首先取导出临界轨迹，其函数代数[1] 为$\mathrm{Sym}_A \mathbb{T}_A[1]$，微分为 ι_{df}(感谢 1.2.21）。随后，取 Koszul– Tate 分解相当于添加生成 $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}[2]$ 的“反鬼场”（见注 1.2.23），它们将消去导出临界轨迹的高阶上同调，换言之，消去 f的对称性。注意，存在一个自然映射：

$$\mathbf{KT}(f) \to \mathbf{Crit}(f)$$

– 我们可以将导出临界轨迹的辛形式拉回到 $\mathbf{KT}(f)$ 上的预辛形式，而该预辛形式的“核”本质上由 $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}$ 给出；换言之，就是“生成对称性的反鬼场”。

– 我们添加与反鬼场对偶的“鬼场”以消去这个核，从而得到辛结构。添加这些鬼场相当于取 Koszul–Tate 分解之上一个 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛的最大对称性的*Chevalley–Eilenberg* 代数。

事实证明，如果我们希望恢复构造 $\mathbf{KT}(f)$，那么使用 就过于限制性了。事实上，在大多数情况下，这第二种构造无法恢复严格临界轨迹的一个完整分解。该构造如下：

5.0.2

构造 5.1.2。

（1）从一个李代数丛（或 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛） $\mathscr{L}$ over X 开始，它具有“无穷小对称性”，即 f 是 $\mathscr{L}$-等变的，并且我们有一个映射：

$$[f] : \left[X \big/ \mathscr{L}\right] \to \mathbb{A}^1$$

（2）取导出临界轨迹 $\mathbf{Crit}([f])$，它自然是 (-1)-移位辛的。

启发式地[2]，，第一步相当于考虑我们所从出的对称李代数丛的切瓦利–埃伦伯格代数（也就是先加入鬼场）。

[1]这也称为 Koszul复形，随后我们加入 Tate项，$\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}$ 以产生 Koszul–Tate 分解。[2]正如我们在第 3 节和第 4 节中所见，这一启发式说法并不十分清楚。在实践中，Chevalley–Eilenberg 代数被用作导出不变量的模型，尽管它与无穷小商的关系尚不清楚。

接着，取导出临界轨迹相当于加入反场和反鬼场。下面先进行一段不正确的启发性讨论。我们可以设想，考察 Chevalley–Eilenberg 代数上某个泛函的导出临界轨迹。我们会认为它的函数代数大致如下：

$$\mathrm{Sym}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}\,\mathbb{T}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}[1] \simeq \mathrm{Sym}_{A}\left(\mathbb{T}_{A}[1] \oplus \mathscr{L}[2] \oplus \mathscr{L}^{\vee}[-1]\right)$$

这样，我们便能从 [FK14]中恢复出 BV 代数的一般形式。然而，这个代数上的微分将是缩并 $\iota_{d[f]}$ 与切瓦利–埃伦伯格微分的线性化；它 无法 涵盖 $\mathscr{L}[2]$ 上 Koszul–Tate 微分的所有修正项（特别是，增加对称幂的项不会出现）。

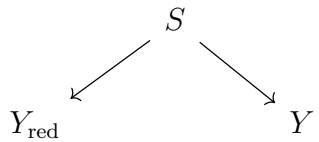
第二种构造与第一种构造之间关系的正确理解方式将在第 5.3.2、5.3.3和5.3.4 节讨论。不过，这番讨论促使我们对构造 5.1.1 作出推广：我们加入反鬼场，但不一定要使其成为一个分解。加入反鬼场这一过程对应于选择一个几乎导出的临界点集（定义 1.2.24）。

5.1.2. 广义 *BV* 构造。

我们目前的思路归结为取一个几乎导出临界轨迹$S \hookrightarrow \mathbf{Crit}(f)$，然后对其取商，使其成为 (-1)-移位辛对象。这就是 辛约化背后的一般思想，我们将用这一术语描述 BV 构造。这启发我们类比定义 4.3.12，给出广义辛约化和广义无穷小辛约化的以下定义。

定义 5.1.3。设 Y 是一个 n-移位辛导出栈，且 $g\colon\ S \to Y$ 是一个映射。那么，Y沿 g 的广义辛约化是以下数据：

– 一个在 S 上的李群胚 $\mathscr{G}$，使得 $Y_{\mathrm{red}} :\simeq \left[S/\mathscr{G}\right]$ 是 n-移位辛的。– 一个拉格朗日对应：

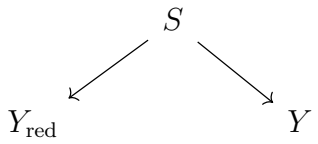


定义 5.1.4。设 S 是几乎有限表示的仿射概形，Y 是一个 n-移位辛导出栈。取 $g\colon\ S \to Y$ 为一个映射。那么，Y沿 g 的广义无穷小辛约化是以下数据：

– n 移位辛“无穷小商” S 记作：

$$Y_{\mathrm{red}} := \left[S/\mathscr{L}\right]$$

– 一个拉格朗日对应：



约定 5.1.5. 请注意，前一个定义中的“无穷小商”概念并不明确。我们有以下几种可能的无穷小商概念：

(1) 模仿构造 *5.1.1* 的第一个朴素想法是考虑一个完美的 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛 $\mathscr{L}$ 在 S 上，并定义：

$$Y_{\mathrm{red}} := \mathbf{Spec}(\mathrm{CE}(\mathscr{L}))$$

然而，自然投影 $S \to Y_{\mathrm{red}}$ 不一定是形式加厚，因此“无穷小”这一修饰语并不十分恰当。

(2) 我们也可以考虑前一个例子的形式完备化：

$$Y_{\mathrm{red}} := \mathbf{Spec}\widehat{(\mathrm{CE}(\mathscr{L}))}_S$$

由引理 *4.3.31*可知，若 谱$(\mathrm{CE}(\mathscr{L}))$ 属于一个拉格朗日对应，则其形式完备化也属于该拉格朗日对应。此外，这个形式完备化是 S 的形式加厚。

(3) 按照类似的思路，我们也可以考虑如下形式的无穷小商：

$$Y_{\mathrm{red}} := \underline{\mathbf{Spf}_A(\mathrm{CE}(\mathscr{L}))}$$

(4) 在第*3.2.1*节中，我们定义了李代数丛的无穷小商的概念。若 S 满足假设 *3.2.2*，我们便可定义：

$$Y_{\mathrm{red}} := \underline{\mathrm{MC}_{\mathscr{L}}} \simeq \left[S/\mathscr{L}\right]$$

例如， S 满足假设*3.2.2* ，如果 $S = \mathbf{KT}(f)$成立；但在构造*5.1.2*的语境下，将不满足这些假设*5.1.2*。

(5) S 存在映射 $S \to X$ ，其中 X 满足假设*3.2.2* ，且 $\mathscr{L}$ 是 X上的李代数丛。我们可以考虑与 $\mathscr{L}$相关的弱无穷小商（定义*4.2.19*）。通常，在存在“壳外对称性”（定义*5.1.14*）的情形下，我们会使用弱无穷小商这一概念。

断言 5.1.6。定义*5.1.5*中给出的不同无穷小商概念之间的关系如下：

– 按照（*1*）的意义定义的任何无穷小商，都通过形式完备化诱导出按照（*2*）的意义定义的无穷小商。对于（*1*）的广义辛约化会诱导出（*2*）的广义辛约化。因此，第二个定义更好，因为它是一个形式加厚。

– 我们有一个自然态射：

$$\underline{\mathbf{Spf}_A(\mathrm{CE}(\mathscr{L}))}_{\mathrm{pre}} \to \mathbf{Spec}\widehat{(\mathrm{CE}(\mathscr{L}))}_S$$

– 如果 S 满足假设*3.2.2*，那么任意在 S 上的李代数丛沿着 S 恒等映射 $S \to S$作用。于是 S 的无穷小商是一个弱无穷小商。因此，意义（*4*）下的无穷小商是意义（*5*）下的弱无穷小商。

我们可以观察到，基本上存在两类无穷小商。一类基于切瓦利–埃伦伯格代数，可用于将这些商与我们之前所描述的 BV 型代数联系起来。

另一类是第 3 节和第 4 节中讨论的无穷小商，我们认为这是一种更具几何性的无穷小商处理方式。
我们认为，为了调和这两种观点，需要记住切瓦利–埃伦伯格代数上的分次混合结构（至少当李代数丛是完美的时）。无穷小商的正确概念以及处理它们的工具仍有待改进。

我们在第 4.3 节中多次提到，等变导出临界轨迹 $\mathbf{Crit}([f])$ 是导出临界轨迹的辛约化。由于 $\mathbf{Crit}([f])$应当表示 BV 构造（参照构造 5.0.2）。特别地，$\mathrm{Crit}(f)$ 本身应被视为最简单的导出临界轨迹。接下来我们论证，在几何上，添加鬼场和反鬼场对应于进行广义辛约化，这引出了以下定义：

定义 5.1.7。 f 的 *BV* 构造是指在 S 上沿以下映射给出的广义导出辛约化结构，其中 S 是一个几乎导出临界轨迹：

$$S \to \mathbf{Crit}(f)$$

定义 5.1.8。 f 的无穷小 *BV* 构造是指在 S 上沿以下映射给出的广义无穷小导出辛约化结构，其中 S 是一个几乎有限表示的几乎导出临界轨迹：

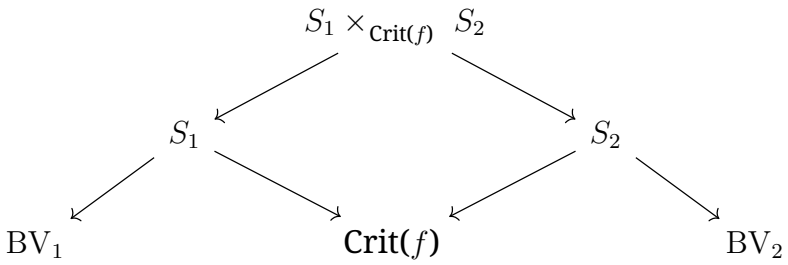
$$S \to \mathbf{Crit}(f)$$

同样，这一定义取决于无穷小商概念的选择，如定义 5.1.5 中所述。

注 5.1.9。 给定一个几乎导出临界轨迹 S 在 f上，是否存在一个 BV 构造（无穷小的或非无穷小的） S 并不明显。第 5.3 节将给出一大类 BV 构造的示例。

给定 f 上的几乎导出临界轨迹 S，并假设它允许一种广义辛约化（无论是否为无穷小），那么原则上没有理由认为与 S 和 f 相关的这种约化是唯一的。事实上，这类结构构成一个完整的拓扑空间，它不一定是可缩的，甚至不一定是连通的。

注记 5.1.10. 值得注意的是，任意两个 BV 构造都由一个拉格朗日对应联系起来：



将这些拉格朗日子空间视为可容许态射后，这定义了 $\mathrm{Lag}_{\mathrm{I}}(\star)_{/\mathrm{Crit}(f)}$ 的一个既非满又非忠实的子范畴。

注5.1.11。 我们的 BV 构造抽象定义（无论是否无穷小）乍看之下可能“过于一般”，与 BV 代数通常的“样貌”毫无关系。尽管由于加入了同伦结构的灵活性，我们的对象实际上比经典构造一般得多，我们将在第 5.2.1 节论证，我们的构造仍然“看起来像”经典 BV 构造。

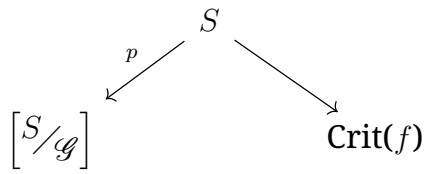
注 5.1.12。 来自 [FK14] 和 [CG21] 的构造都是无穷小 BV 构造。关于群作用的全局（非无穷小）BV 构造的一些想法见 [BSS21]。不过，我们的定义适用于更一般的情境，包括 Segal 群胚作用。

我们将以证明无穷小 BV 构造是“良好[1]”BV 构造的形式完备化来结束本节，所用思路与第 4.2.1 节及定理 4.3.30中所述相同。

定理 5.1.13. 设 S 是满足假设 *3.2.2*的几乎导出临界轨迹。在 S上取一个良好 *BV* 构造，即：

– 一个“良好”的 *Segal* 群胚 $\mathscr{G}^\bullet$ 在 S上的作用。

– 一个拉格朗日对应：

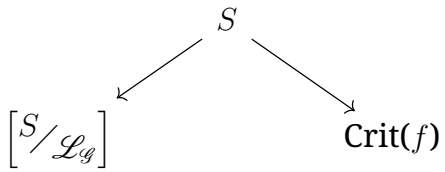


由推论 *4.2.7*可知， S 关于与 $\mathscr{G}$相关联的李代数丛的无穷小商，是投影 p的形式完备化。

那么， $\left[S/\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\right]$ 是一个无穷小 *BV* 构造。

[1]所谓良好，是指作用的 Segal 群胚满足每个 $\mathscr{G}^n$ 都是形式栈。这些就是定义 4.2.13中的良好 Segal 群胚。

证明。 我们利用推论 4.2.7 和引理 4.3.31 得到一个拉格朗日对应：



这定义了无穷小 BV 构造的结构。 □

在下一节讨论“壳外对称性”时，我们将看到这一概念的一个更一般版本。

5.1.3. 壳外对称性。

本节将讨论由 X 上的一个作用（无穷小的或非无穷小的）所产生的 BV 构造，其中 f 关于该作用是等变的。

定义 5.1.14。 如果一个作用于几乎导出临界轨迹 S 上的作用来自离壳 对称性，我们称其为由离壳 对称性给出的作用，当且仅当：

– 它是离壳的，即它来自群胚 $\mathscr{G}$ 在 X 上的 π_S 作用（见 4.1.15 的含义）：$S \to X$。– f 是 $\mathscr{G}$-等变的（见定义 4.1.12）。

定义5.1.15。 设 S 是一个几乎有限表示的几乎导出临界轨迹。那么，无穷小商 Y_{red} 是由离壳 对称性给出的弱无穷小商，当且仅当：

– 存在一个代数丛 $\mathscr{L}$ 在 X 上，使得 f 是 $\mathscr{L}$-等变的（定义4.2.24）。– Y_{red} 是沿 $S \to X$给出的 S 的弱无穷小商。

如果 S 满足假设 3.2.2，则我们改为要求该商来自 $\mathscr{L}$ 在 $S \to X$上的无穷小作用。

定义 5.1.16. 壳外（无穷小）*BV* 构造是指一种（无穷小）BV 构造，其辛约化通过以下任一方式得到：

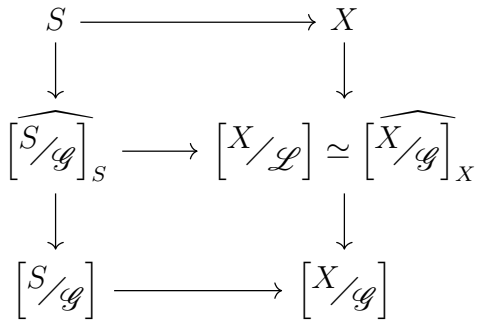
– S 对壳外对称性的群胚取商。– 或者取由无穷小壳外对称性的代数丛导出的弱无穷小商。

注 5.1.17. 这类壳外对称性的例子不仅很多，我们还将在第 5.3.3 节和第 5.3.4 节看到，对于任意壳外对称性的李代数丛（无论是否无穷小），我们都可以构造一种（无论是否无穷小）BV 构造，其本质上由等变导出临界轨迹给出。

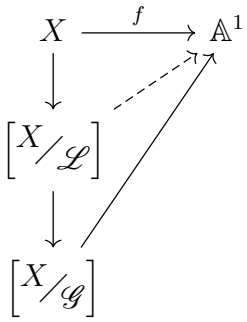
命题 5.1.18。 设 $\mathscr{G}$ 是定义在 X 上满足假设*3.2.2*的壳外对称性的光滑群胚。那么，其关联的李代数丛 $\mathscr{L}$ 是无穷小壳外对称性的李代数丛。

此外， S 上的任意光滑壳外 BV 构造都会诱导出一个无穷小壳外 BV 构造。

证明。 与定理4.3.30的证明类似，我们考虑以下交换图表：



正如定理4.3.30的证明中一样，图表中的所有方块都是拉回方块，且 $\left[S/\mathscr{G}\right]_S$ 定义了一个弱无穷小商。此外， f 是 $\mathscr{L}$等变的，因为以下图表交换：



因此， $\mathscr{L}$和 $\left[S/\mathscr{G}\right]_S$ 定义了一个离壳无穷小对称。此外，若 $\left[S/\mathscr{G}\right]$ 是拉格朗日对应的一部分，使其成为离壳 BV 构造，那么根据引理4.3.31， $\left[S/\mathscr{G}\right]_S$ 也属于某个拉格朗日对应的一部分，使其成为离壳无穷小 BV 构造。 □

5.2. 严格化与 BV 荷。

本节的目标是将无穷小 BV 构造与 [FK14]的构造进行比较。将我们的构造与经典构造进行比较的主要困难之一在于，我们定义的是无穷小商栈，而他们只构造了相应的切瓦利–埃伦伯格代数。

遗憾的是，切瓦利–埃伦伯格代数的切复形和余切复形难以计算，主要是因为目前尚不清楚如何对这类代数作

余纤维分解，即使对于完备李代数丛也是如此。我们认为，改用分次混合切瓦莱–埃伦伯格代数或许能简化这一问题。

为了继续讨论我们对 BV 构造的几何描述与代数构造之间的比较，我们需要将讨论限制在非导出框架中。本节仅考虑非导出构造。特别是，本节中的张量积、直和和 Hom 函子均不取导出形式。

我们将采用与以下文献中所述类似的框架：[PS20，第3节。2]我们将考虑定义在几乎导出临界轨迹 $S = \text{谱}(R)$ 上的非正次数完美李代数丛，其中：

$$R := \left(\left(\mathrm{Sym}_A \mathbb{T}_A[1] \oplus \mathscr{L}_S[2]\right), \delta_S\right)$$

我们将范围限制为非正分次的完美李代数丛，并考虑非导出切复形，$\mathscr{T}_B$ 其定义为 B 的非导出导子模。由于 A 是余纤维化的，因此有 $\mathscr{T}_A \simeq \mathbb{T}_A$。我们仍记作 $\mathbb{T}_A$，同时谨记我们使用的是 $\mathscr{T}_A$ 给出的模型。

由于我们取的是完美的 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛 $\mathscr{L}$，其 Chevalley–Eilenberg 代数是一个半自由代数的完备化。在选定一个联络后，我们有：

$$\mathscr{T}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})} \simeq \mathrm{CE}(\mathscr{L}) \otimes_A \left(\mathbb{T}_A \oplus \mathscr{L}[1]\right)$$

并配备一个微分，使其成为 CE($\mathscr{L}$) 上的模。我们还有 e:

$$h^* \mathscr{T}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})} \simeq \mathbb{T}_A \oplus^{\rho} \mathscr{L}[1]$$

关于 h： CE($\mathscr{L}$) $\to A$。注意，这与 $h^* \mathbb{T}_{\left[X/\mathscr{L}\right]}$ 完全相同。

W我们将考虑如下定义的德拉姆代数的未导出类比：

$$\mathrm{DR}(B) := \left(\widehat{\mathrm{Sym}}_B \, \Omega^1_B[-1], D = d_{\mathrm{dR}} + \delta_B\right)$$

其中 Ω^1_B 是 Kähler 微分的模，其对偶为 $\mathscr{T}_B$。
与导出版本一样，这个代数是滤完备的，并且 d_{dR} 将权重增加 1，而 δ_B 保持权重不变。于是，CE p上次数为 n 的CE($\mathscr{L}$) （闭）微分形式按照命题 1.4.17 类似地定义为：

$$\mathscr{A}^p(B, n) \simeq \left|\mathrm{DR}(p)(B)[n+p]\right|_\Delta$$

$$\mathscr{A}^{p,\mathrm{cl}}(B, n) \simeq \left|F^p \mathrm{DR}^{\mathrm{cpl}}(B)[n+p]\right|_\Delta \simeq \left|\prod_{i \geq p} \mathrm{DR}(p+i)(B)[n+p]\right|_\Delta$$

We r参见 [PS20，第3节。4] 了解这些微分形式更明确的描述 .

5.2.1. 严格化。

本节将把无穷小 BV 构造视为如下数据：固定一个几乎有限表示的几乎导出临界轨迹 S，并假设它具有无穷小 BV 构造：

– $Y :=$ 谱(Chevalley–Eilenberg($\mathscr{L}$))，其中 $\mathscr{L}$ 是定义在 S 上、集中于非正次数的完备李代数丛。– ω_Y Y 上的一个（-1）移位辛结构。– γ 定义广义辛约化的拉格朗日对应的数据。

这样的元组记作（L， S， ω_Y， γ）。此外，我们将考虑形如 $S =$谱(R) 的 S，其中：

$$R := \left(\mathrm{Sym}_A\left(\mathbb{T}_A[1] \oplus \mathscr{L}_S[2]\right), \delta_S\right)$$

我们只关注这些无穷小 BV 构造在以下等价概念下的情形：

定义 5.2.1. 等价（$\mathscr{L}$， S， ω_Y， γ）$\to$（$\mathscr{L}'$， S， ω'_Y， γ'）由以下数据构成：

– 切瓦利–埃伦伯格代数之间的等价：

$$f : \mathrm{CE}(\mathscr{L}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{CE}(\mathscr{L})$$

请注意，这会在“无穷小商栈”之间诱导出等价， $Y \xrightarrow{\sim} Y'$。– 闭 2-形式之间的同伦：

$$\omega_Y \sim f^* \omega_{Y'}$$

– 拉格朗日对应之间的同伦：

$$\gamma \sim f^* \gamma'$$

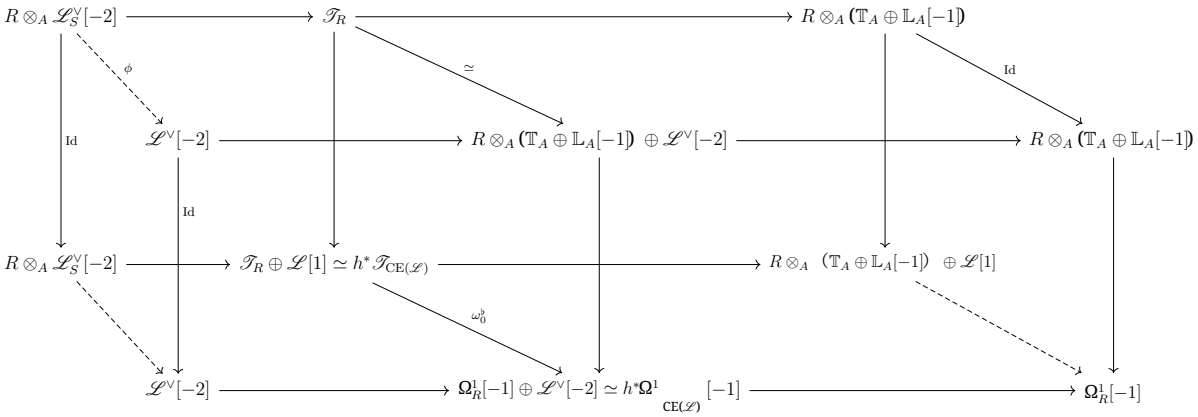
目前，令我们选择一个能够进行广义辛约化的 S，并令（$\mathscr{L}$， S， ω_Y， γ）为一个无穷小 BV 构造。

引理 5.2.2. 拉格朗日对应的非退化条件意味着存在一个拟同构：

$$\phi : R \otimes_A \mathscr{L}_S^\vee[-2] \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}^\vee[-2]$$

证明。 考虑以下交换图：该图通过在 Crit(f) 上以及将 R 视为 $X =$ Spec(A) 上的半线性栈时所采用的连接得到（为简便起见，我们将省略记号 ∇，并注意到以下图表中的微分并非平凡）：

(16)



我们有：

– 从左到右的所有序列都是纤维化的。– 前表面和后表面的最右方方块是同伦笛卡尔的。– 从前表面到后表面的实线映射通过辛结构以及由拉格朗日对应得到的自然拟同构彼此关联。– 因此，由泛性质得到的虚线映射都是弱等价。

□

利用第 3.4 节的结果，我们可以将 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛结构从$\mathscr{L}$转移到 $R\otimes\mathscr{L}_S$，使得它们的切瓦利–埃伦伯格代数等价（通过一个∞-拟同构）。沿着这一等价拉回辛结构和拉格朗日对应，我们得到：

命题 5.2.3. $(\mathscr{L},\ S,\ \omega_Y,\ \gamma)$ 按照定义 *5.2.1* 与以下对象等价：

$$(\pi_S^*\mathscr{L}_S, \phi^*\omega_Y, \phi^*\gamma)$$

其中 $\pi_S:\ S\to X$。特别地，这个等价的$\mathscr{L}_\infty$-代数丛的切瓦利–埃伦伯格代数为：

$$\mathrm{Sym}_A\left(\mathbb{T}_A[1]\oplus\mathscr{L}_S[2]\oplus\widehat{\mathscr{L}_S^\vee[-1]}\right)$$

其中我们使用记号 *B.2.5* 表示关于由下式给出的 *Chevalley–Eilenberg* 项的完备化 $\mathscr{L}_S^\vee[-1]$。

证明。 利用完美 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛之间的等价 ϕ，可知相应的切瓦利–埃伦伯格代数是等价的，因为切瓦利–埃伦伯格函子保持底层模为余纤维化的 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛之间的弱等价（A-余纤维化 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛）。□

注5.2.4。有一个有趣的观察： $\pi_S^*\mathscr{L}_S$ 是 $\mathscr{L}_\infty$上的S-代数丛，尽管 $\mathscr{L}_S$ 先验上并非 X 上的代数丛。如果 $\mathscr{L}_S$ 本身是 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛，我们就朝着壳外对称性的思路迈进了。

从现在起，我们将使用 $(\pi_S^*\mathscr{L}_S, \phi^*\omega_Y, \phi^*\gamma)$，并省略 ϕ^* 记号。接下来，我们将尝试描述所得到的辛结构。

引理 5.2.5。 $h^*\omega_0$ 是[1] 以下交换图的一部分，其中各行均为分裂正合序列：

$$\begin{array}{ccccc}
R\otimes_A(\mathscr{L}_S^\vee[-2]\oplus\mathscr{L}_S[1]) & \xrightarrow{h^*\mathscr{T}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}\simeq} & R\otimes_A(\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1]\oplus\mathscr{L}_S^\vee[-2]\oplus\mathscr{L}_S[1]) & \xrightarrow{i^*\mathscr{T}_{\mathbf{Crit}(f)}\simeq} & R\otimes_A(\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1]) \\
{\scriptstyle h^*\omega_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i^*\omega_{\mathbf{Crit}(f)}} & & \downarrow \\
\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1]\oplus\mathscr{L}_S^\vee[-2]\oplus\mathscr{L}_S[1] & \xrightarrow{i^*\Omega^1_{\mathbf{Crit}(f)}[-1]\simeq} & R\otimes_A(\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1]) & \xrightarrow{h^*\Omega^1_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}[-1]\simeq} & R\otimes_A(\quad)
\end{array}$$

特别地， $h^*\omega_0 \sim i^*\omega_{\mathbf{Crit}(f)} + \omega_\phi$ 其中 ω_ϕ $h^*\omega_0$ 对应于 $R\otimes_A(\mathscr{L}_S^\vee[-2]\oplus\mathscr{L}_S[1])$恒等映射的部分。

证明。 利用联络和图表（1），底面给出图表：

$$\begin{array}{ccccc}
R\otimes_A\mathscr{L}_S^\vee[-2] & \longrightarrow & h^*\mathscr{T}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}\simeq R\otimes_A(\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1]\oplus\mathscr{L}_S^\vee[-2])\oplus\mathscr{L}[1] & \longrightarrow & i^*\mathscr{T}_{\mathbf{Crit}(f)}\oplus\mathscr{L}[1]\simeq R\otimes_A(\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1])\oplus\mathscr{L}[1] \\
\downarrow{\scriptstyle\phi} & & \downarrow{\scriptstyle h^*\omega_0} & & \downarrow \\
\mathscr{L}^\vee[-2] & \longrightarrow & h^*\Omega^1_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}[-1]\simeq R\otimes_A(\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1]\oplus\mathscr{L}_S[1])\oplus\mathscr{L}^\vee[-2] & \longrightarrow & \Omega^1_R[-1]\simeq R\otimes_A(\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1]\oplus\mathscr{L}_S[1])
\end{array}$$

利用 ϕ 将 $\mathscr{L}$ 替换为 $R\otimes_A\mathscr{L}_S$，根据引理 5.2.2，得到：

$$\begin{array}{ccccc}
R\otimes_A\mathscr{L}_S^\vee[-2] & \longrightarrow & h^*\mathscr{T}_{\mathrm{CE}}(\mathscr{L})\simeq R\otimes_A(\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1]\oplus\mathscr{L}_S^\vee[-2]\oplus\mathscr{L}_S[1]) & \xrightarrow{i^*\mathscr{T}_{\mathbf{Crit}(f)}\oplus R\otimes_A\mathscr{L}_S[1]\simeq} & R\otimes_A(\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1]\oplus\mathscr{L}_S[1]) \\
\| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h^*\omega_0} \\
R\otimes_A\mathscr{L}_S^\vee[-2] & \xrightarrow{h^*\Omega^1_{\mathrm{CE}}(\mathscr{L})[-1]\simeq} & R\otimes_A(\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1]\oplus\mathscr{L}_S[1]\oplus\mathscr{L}_S^\vee[-2]) & \xrightarrow{\Omega^1_R[-1]\simeq} & R\otimes_A(\mathbb{T}_A\oplus\mathbb{L}_A[-1]\oplus\mathscr{L}_S[1])
\end{array}$$

沿着指向该图表的自然投影，逐对象取整个图表的纤维：

$$\begin{array}{ccccc}
R\otimes_A\mathscr{L}_S & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R\otimes_A\mathscr{L}_S[1] \\
\| & & \| & & \downarrow \\
R\otimes_A\mathscr{L}_S & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R\otimes_A\mathscr{L}_S[1]
\end{array}$$

我们恰好得到引理中的图表，并且由图表（1）可知，垂直态射都是恒等态射。□

[1]这里， $h^\star\omega_0$ 是由拉回 $h^\star\omega_0$ 诱导的映射： $h^*\mathbb{T}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}\to h^*\mathbb{L}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}[-1]$。不要将它与 2-形式的拉回混淆；后者记作 $h^*\omega_0$，由以下复合给出：

$$\mathbb{T}_R\to h^\star\mathbb{T}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}\to h^*\mathbb{L}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}[-1]\to\mathbb{L}_R[-1]$$

定义 5.2.6. 我们通过以下分次空间之间的映射，定义 $\mathrm{CE}(\mathscr{L})^\sharp$ 上的一个次数为-1的（必然是严格的）辛 2-形式 ω^{st}：

$$\begin{aligned}\mathscr{T}^\sharp_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})} &= \left(\mathrm{CE}(\mathscr{L}) \otimes_R i^*\mathbb{T}_{\mathbf{Crit}(f)} \oplus \mathrm{CE}(\mathscr{L}) \otimes_A (\mathscr{L}_S^\vee[-2] \oplus \mathscr{L}_S[1])\right)^\sharp \\ &\to \left(\mathrm{CE}(\mathscr{L}) \otimes_R i^*\mathbb{L}_{\mathbf{Crit}(f)}[-1] \oplus \mathrm{CE}(\mathscr{L}) \otimes_A (\mathscr{L}_S^\vee[-2] \oplus \mathscr{L}_S[1])\right)^\sharp = \left(\Omega^1_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}\right)^\sharp[-1]\end{aligned}$$

由恒等映射加上 $i^\star\omega^\flat_{\mathbf{Crit}(f)}$ 给出。当我们忘掉 A 上的微分（记作 $\sharp$ 符号）时，这是一个 (-1)-移位辛形式。

注5.2.7。 我们定义 ω^{st} 为恒等映射加上来自 $\mathbf{Crit}(f)$ 的典范辛结构，因此其拉回 $h^\star\omega^{\mathrm{st}}$ 恰好由 $i^*\omega_{\mathbf{Crit}(f)} + \omega_\phi$ 给出。这与引理 5.2.5 的结果相容。然而，没有任何条件能保证 ω^{st} 与微分相容，因此它甚至可能不是 2-形式$\mathrm{CE}(\mathscr{L})$ 上的形式。

定理 5.2.8。 定义在 Y 上的(-1)-移位辛形式 ω 可描述为[1]：

$$\omega = \omega^{\mathrm{st}} + \tilde{\omega}$$

其中 $h^\star\omega^{\mathrm{st}} = i^*\omega_{\mathbf{Crit}(f)} + \omega_\phi$ 和 $h^\star\tilde{\omega} = 0$。

证明。 由以下引理 5.2.5，我们知道 $h^\star\omega_0 = h^\star\omega^{\mathrm{st}}$。现在可得 $\omega - \omega^{\mathrm{st}} = \tilde{\omega}$ 满足 $h^\star\tilde{\omega} = 0$。 □

最后，我们发现，尽管我们的构造与经典的 BV 构造有相似之处，但在同伦意义下进行工作，并使用几乎导出临界轨迹，带来了极大的灵活性，以至于我们无法完全恢复 BV 构造的“等价意义下的唯一性”这一概念，例如 [FK14]中所述。

此外，我们的构造并未提供 *BV*荷 ，而且我们没有合适的方法以有意义且同伦不变的方式表述这一条件。然而，即使我们没有 BV 荷，所得到的无穷小商也是 (-1)-移位辛的，其辛结构与函数代数上的微分相容。我们认为，在如此一般的情况下不应存在 BV 荷。

然而，事实证明，相当大一类 BV 构造都具有 BV荷。正如我们将看到的，只要辛结构由 ω^{st} （不含额外项）给出，BV 构造就是哈密顿的。

[1]注意，这两个加项实际上都不是 2-形式，因为它们可能与微分不相容。

5.2.2. 哈密顿向量场与 *BV* 荷。

本节的目标是证明：如果我们有一个 BV 构造（$\pi_S^*\mathscr{L}_S$、ω_Y、γ），满足 $\omega_Y = \omega^{\mathrm{st}}$，那么就存在一个 BV荷，并且我们可以给出由同调扰动引理提供的 BV荷公式。

BV 荷不过是切瓦利–埃伦伯格代数 CE($\pi_S^*\mathscr{L}_S$) 上自然微分对应的哈密顿向量场；该代数与 S 上的对称性李代数丛相关。为简化记号，本节中我们将 $\mathscr{L}$:
$= \pi_S^*\mathscr{L}_S$ 记作 R 上的 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛。本节的关键洞见如下命题:

命题 5.2.9。 存在一个同构 （这里考虑这些分次混合代数的严格 构造）:

$$\mathrm{Pol}(\mathrm{CE}(\mathscr{L}), -1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{DR}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(\mathrm{CE}(\mathscr{L}))$$

使得:

– $\mathrm{Pol}(\mathrm{CE}(\mathscr{L})\ -1)$ 表示以下分次混合复形：(-1)-移位的多向量场，定义在 $\mathrm{CE}(\mathscr{L})$ 上，其混合微分为 $[\Pi^{\mathrm{st}},]_{\mathrm{SN}}$，其中括号是 施滕 – 尼延豪斯 括号，而 Π^{st} 是定义对偶于 ω^{st}的（严格）泊松结构的双向量场。– $\mathrm{DR}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 是 DR 的分次混合版本，见第*5.2*节开头的描述。– 该映射在权重0 上诱导出 $\mathrm{CE}(\mathscr{L})$ 的恒等映射，并将导子 $X \in \mathscr{T}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}$ 映为 $\iota_X\omega^{\mathrm{st}} \in \Omega^1_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}[-1]$。

定义 5.2.10 定义。 次数为 1 的向量场 $X \in \mathscr{T}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}$ 称为哈密顿的，如果 :

$$X = \left[\Pi^{\mathrm{st}}, Q\right]$$

存在某个 $Q \in \mathrm{CE}(\mathscr{L})$ （权重0部分）。特别地，根据命题 5.2.9，这等价于说 $\iota_X\omega^{\mathrm{st}} = d_{\mathrm{dR}}Q$。

考虑 $\delta_{\mathrm{CE}} \in \mathscr{T}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}$ 次数为 1 的情形。此时，寻找 BV 荷就是要证明 $\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}}$ 是 d_{dR}-恰当的。首先，根据定理 5.2.25 ，我们将看到存在一个强形变收缩:

$$\mathrm{DR}(R) \underset{p}{\overset{i_\infty}{\rightleftarrows}} \mathrm{DR}(\mathrm{CE}(\mathscr{L})) \circlearrowright h_\infty$$

那么 $\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}}$对于总微分是恰当的，当且仅当 p（$\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}}$）对于总微分是恰当的。我们将在推论5.2.14 中看到， p（$\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}}$） $= d_{\mathrm{dR}}f$ 并限制在权重0 部分，给定为 A，其总微分为 $D = \delta_A + d_{\mathrm{dR}} = d_{\mathrm{dR}}$。因此，我们有:

$$\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}} = D(i_\infty(f) + h_\infty(\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}}))$$

此外，在引理5.2.29 中我们证明了 i_∞ 保持德拉姆权重不变，而h_∞ 使其降低1。由于 $\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}}$ 的德拉姆权重至多为1 （因为它取值于$\Omega^1_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}$），我们有：

$$Q := i_\infty(f) + h_\infty(\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}}) \in \mathrm{CE}(\mathscr{L})$$

M此外， Q 的次数为 0，因此 $Q \in \mathrm{CE}(\mathscr{L})$。这意味着：

$$DQ = d_{\mathrm{dR}}Q + \delta_{\mathbf{CE}}Q$$

由于 $\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}}$ 的德拉姆权重恰好为 1，而 $\delta_{\mathbf{CE}}Q$ 的德拉姆权重为 0，这意味着 $\delta_{\mathbf{CE}}Q = 0$，从而得到：

$$\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}} = d_{\mathrm{dR}}Q$$

我们已经证明了以下结论：

定理 5.2.11。 如上所述，具有严格辛结构的 *BV* 构造，其 *BV*荷由以下公式给出：

$$Q := i_\infty(f) + h_\infty(\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}}) \in \mathrm{CE}(\mathscr{L})$$

现在我们需要陈述并证明用于证明该定理的论断。首先回顾，切瓦利–埃伦伯格微分保持切瓦利–埃伦伯格滤过，因此可以按权重分量分解：

$$\delta_{\mathrm{CE}} := \delta_0 + \delta_1 + \cdots$$

下文中我们将考虑两种不同的滤过：

– 来自德拉姆代数的滤过称为德拉姆权重。它仍记作 $F^p\mathrm{DR}(\mathrm{CE}(\mathscr{L}))$ – 由切瓦利–埃伦伯格滤过诱导的滤过称为切瓦利–埃伦伯格权重。它记作 $F^p_{\mathscr{L}}\mathrm{DR}(\mathrm{CE}(\mathscr{L}))$。

关于这些滤过的更多细节，请参见定义 5.2.21 。

引理 5.2.12。 我们有如下结论：

(1) δ_0 限制在 R 上恰好是 R, δ_R上的微分。*(2)* δ_0 限制到 $\mathscr{L}_S[2]$ 上满足$(\iota_{\delta_0})_{|\mathscr{L}_S[2]}\omega \in F^1_{\mathscr{L}}\mathrm{DR}(A)$*(3)* 对于 $g \in A$, ι_{dg}，它是对称代数$_A\,\mathbb{T}_A[1]$ 和 $\iota_{\iota_{dg}}\omega = d_{\mathrm{dR}}g$上的导子。

证明。 根据切瓦利–埃伦伯格微分的定义，第一个结论显然成立。

对于第二个断言，$(\delta_0)_{|\mathscr{L}_S[2]}$ 在由 A 和 $\mathbb{T}_A[1]$ 生成的元素上为零，而在 $\mathscr{L}_S[2]$ 上非零。这样的导子是形如 $a\frac{\partial}{\partial\pi}$ 的元素（其中 $\pi \in \mathscr{L}$ 和 $a \in R$）的线性组合。然而，$\iota_{a\frac{\partial}{\partial\pi}}\omega^{\mathrm{st}} = a\omega^{\mathrm{st}}(\frac{\partial}{\partial\pi}, –)$。由于 ω^{st} 将 $\mathscr{L}[2]$ 与 $\mathscr{L}^\vee[-1] \in F^1\mathrm{DR}(A)$ 配对，这表明 $a\omega(\frac{\partial}{\partial\pi}, –) \in F^1\mathrm{DR}(A) \cap F^1_{\mathscr{L}}\mathrm{DR}(A)$。

对于最后一个断言，一切都仿佛是在带有典范辛结构的 Crit(f) 上进行的。根据定义，我们有：

$$\iota_{\iota_{dg}}\omega_0 = \omega_0^\flat(\iota_{dg})$$

我们希望在泊松设定中转换这个问题。为此，我们回顾一下，$\omega_0^\flat$ 和 $\Pi^\flat$ 互为逆元。将 $\Pi^\flat$ 应用于等式 $\iota_{\iota_{dg}}\omega_0 = dg$，得到：

$$\Pi^\flat\iota_{\iota_{dg}}\omega_0 = \Pi^\flat(dg)$$

但是 $\Pi^\flat\iota_{\iota_{dg}}\omega_0 = \Pi^\flat\omega_0^\flat(\iota_{dg}) = \iota_{dg}$。因此我们只需证明：

$$\iota_{dg} = \Pi^\flat(dg) = \{g, -\}$$

但是在 Crit(f) 上，泊松结构定义在对称代数 $\mathscr{O}_X$ $\mathbb{T}_X[1]$ 上，并由配对 $\langle f, X\rangle = X(f)$ 诱导，因为它是与典范辛结构相关联的泊松结构。因此，$\{g, -\}$ 将 $\mathscr{O}_X$ 中的元素映为 0，并将$X \in \mathbb{T}_X[1]$ 映为 $X(g) = dg.X = \iota_{dg}X$，这说明 $\iota_{dg}X = \{g, X\}$。□

上面的引理描述了 $\iota_{\delta_0}\omega^{\mathrm{st}}$。现在我们来描述滤过次数更高的项 $\delta_{\geq 1}$。

引理 5.2.13。

$$\iota_{\delta_{\geq 1}}\omega^{\mathrm{st}} \in F^1_{\mathscr{L}}\mathrm{DR}(\mathrm{CE}(\mathscr{L}))$$

证明。 由于 $\delta_{\geq 1}$取值于 $F^1_{\mathscr{L}}$DR(CE($\mathscr{L}$))，因此 $\iota_{\delta_{\geq 1}}\omega^{\mathrm{st}}$也如此。 □

推论 5.2.14。

$$p(\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}}) = d_{\mathrm{dR}}f$$

证明。 结合引理 5.2.12和引理 5.2.13 以及引理 5.2.18所述内容：

$$F^1_{\mathscr{L}}\mathrm{DR}(\mathrm{CE}(\mathscr{L})) \subset \ker(p)$$

这表明：

$$p(\iota_{\delta_{\mathrm{CE}}}\omega^{\mathrm{st}}) = p(d_{\mathrm{dR}}f) = d_{\mathrm{dR}}f$$

□

5.2.3. 德拉姆代数的变形收缩。

本节旨在计算线性栈和切瓦利–埃伦伯格栈的德拉姆复形。本节纯属技术性内容，是证明定理 5.2.11 所必需的。

对于线性导出栈

设 $X = \mathrm{Spec}(A)$，其中 A 是几乎有限表示的余纤维化，且 $\mathscr{F} \in \mathrm{Perf}\,(X)$ 集中于非负次数。与 $\mathscr{F}$ 相关联的线性栈可由 $B = \mathrm{Sym}_A \mathscr{F}^\vee \in$ 交换微分分次代数 $^{\leq 0}$ 表示，并赋予微分 $\delta_B = \delta_A + \delta_{\mathscr{F}^\vee}$。

记号 5.2.15。 本节将使用以下记号：

$$\beta_{1\cdots k} := \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k$$
$$\beta^i_{1\cdots k} = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_{i-1} \wedge \beta_{i+1} \wedge \cdots \wedge \beta_k$$

我们记作：

$$\mathrm{DR}^{\mathrm{gr}}(B) \simeq \mathrm{Sym}^{\mathrm{gr}}_A \mathbb{L}_A[-1]$$

并且，$\mathbf{DR}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 的混合结构是德拉姆微分。此外，利用 $\mathscr{F}$ 上的一个联络，我们有：

$$\Omega^1_B \simeq \pi^*(\mathscr{F} \oplus^{\nabla} \mathbb{L}_A)$$

于是我们得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{DR}(B) &\simeq \widehat{\mathrm{Sym}}_A \mathbb{L}_A[-1] \otimes_A \widehat{\mathrm{Sym}}_A \mathscr{F}^\vee[-1] \otimes_A \mathrm{Sym}_A \mathscr{F}^\vee \\ &\simeq \mathrm{Sym}_A \left(\widehat{\mathbb{L}_A[-1]} \oplus \widehat{\mathscr{F}^\vee[-1]} \oplus \mathscr{F}^\vee\right)\end{aligned}$$

其中，右侧的微分由以下内容描述：

引理 5.2.16. 总微分由下式给出：

$$D_B = d_{\mathrm{dR}} + \delta_{\mathscr{F}^\vee} + \delta^v_A + \delta^v_{\mathscr{F}^\vee} + \delta_\nabla$$

其中：

- d_{dR} 德拉姆微分。- δ^v_A 在 $\mathrm{DR}(A)$ 上的垂直微分，并在 $\mathscr{F}^\vee[-1]$ 和 $\mathscr{F}^\vee$ 上延拓为零。

$$\delta^v_A = \delta_A + \delta_{\mathbb{L}_A}$$

- $\delta^v_{\mathscr{F}^\vee}$ 来自 $\mathscr{F}^\vee[-1]$ 上的微分 $\delta_{\mathscr{F}^\vee}$（在 $\mathscr{F}^\vee$ 上）的微分，延拓 B-线性地，并在 $\mathbb{L}_A[-1]$ 和 $\mathscr{F}^\vee$ 上取 0 。
- $\delta_{\mathscr{F}^\vee} = \delta_B - \delta_A$ 是 $\mathscr{F}^\vee$ 上的微分。
- δ_∇ 由联络诱导的微分部分，其取值于：

$$\widehat{\mathrm{Sym}}_A \mathbb{L}_A[-1] \otimes_A \mathrm{Sym}^{\geq 1}_A \mathscr{F}^\vee$$

证明。 根据定义，我们有 $D_B = d_{\mathrm{dR}} + \delta^v_B$ 德拉姆分解和垂直微分。此外， δ^v_B 限制到 B 是 δ_B 本身，而 δ^v_B 在 $\mathbb{L}_B[-1]$ 上是 $\mathbb{L}_B[-1]$的自然微分。利用命题 1.2.39，我们得到：

$$\mathbb{L}_B[-1] \simeq B \otimes_A \left(\mathbb{L}_A[-1] \oplus^{\nabla} \mathscr{F}^\vee[-1]\right)$$

其中右侧是带有如下微分的 A-模：

$$\delta_B + \delta^v_{\mathscr{F}^\vee} + \delta_{\mathbb{L}_A} + \delta_\nabla$$

此外， $\delta_B + \delta_{\mathbb{L}_A} = \delta_{\mathscr{F}^\vee} + \delta^v_A$和 δ_∇是微分中将 $\mathscr{F}^\vee[-1]$映到$(\mathbb{L}_A[-1] \otimes_A \mathscr{F}^\vee)$中某个元素的部分，该映射通过协变导数实现。□

现在我们可以定义变形收缩所需的映射了。在此之前，我们先定义两种滤过：

– 德拉姆滤过，记作 $F^p\mathrm{DR}(B)$，由 $\mathrm{DR}(B)$ 上分次混合结构所关联的完备滤过给出。此滤过与由 $\mathbb{L}_A[1]$ 和 $\mathscr{F}^\vee[-1]$ 生成的理想所关联（参见例 B.2.4）。– $\mathscr{F}$-滤过，记作 $F^p_{\mathscr{F}}\mathrm{DR}(B)$，由对称代数$\mathrm{Sym}_B \mathscr{F}^\vee$上的自然滤过诱导生成项 $\mathscr{F}^\vee$ 和 $\mathscr{F}^\vee[-1]$在 $\mathrm{DR}(B)$ 中。

定义 5.2.17。存在如下映射：

$$\mathbf{DR}(A) \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathbf{DR}(B) \circlearrowleft h$$

其中：

– i是由投影 $\mathbb{A}_X(\mathscr{F}) \to X$诱导的映射，因此与总微分相容。此映射同时保持德拉姆滤过和 $\mathscr{F}$-滤过。– p是由零截面 $X \to \mathbb{A}_X(\mathscr{F})$诱导的映射，因此与总微分相容。它也保持这两种滤过。– h 是一个次数为 -1 的导子，定义在齐次元素上，$f \in B, \alpha_i \in \mathbb{L}_A[-1], i = 1 \cdots p, d\xi_i \in \mathscr{F}^\vee[-1]$，$i = 1 \cdots m$ 以及 $\eta_i \in \mathscr{F}^\vee, i = 1 \cdots m'$ 上，定义如下：

$$h(f\alpha_{1\cdots p} \wedge (d\xi)_{1\cdots m} \wedge \eta_{1\cdots m'}) = \frac{1}{m+m'} \sum_{i=1}^{m} \epsilon_h f \alpha_{1\cdots p} \wedge (d\xi)^i_{1\cdots m} \wedge \xi^i \wedge \eta_{1\cdots m'}$$

其中 ϵ_h 遵循 h 为次数 -1 的导子时的符号规则：

$$\epsilon_h = (-1)^{n_h}, \qquad n_h = \sum_{j=1}^{i-1}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=i+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_i|$$

简而言之，h 将 $d\xi$ 变为 ξ。因此，h 保持 $\mathscr{F}$-滤过，并将德拉姆权重降低 1。

引理 5.2.18。

$$\ker(p) = \prod_{p+q\geq 1} \widehat{\mathrm{Sym}}_B \mathbb{L}_B[-1] \otimes_B \widehat{\mathrm{Sym}}^{\geq p}_B \mathscr{F}^\vee[-1] \otimes_B \mathrm{Sym}^{\geq q}_B \mathscr{F}^\vee := F^1_{\mathscr{F}}\mathrm{DR}(B)$$

证明。换言之，我们需要证明 p 的核是由 $\mathscr{F}^\vee$和 $\mathscr{F}^\vee[-1]$生成的 $\mathbf{DR}(B)$ 的理想。由于 p是由线性栈的零截面诱导的映射，它对应于 $\mathbf{Sym}_B \mathscr{F}^\vee \to B$ 的投影，并诱导出以下投影：

$$\mathrm{DR}(B) \simeq \mathrm{Sym}_A\left(\mathbb{L}_A[-1] \widehat{\oplus} \mathscr{F}^\vee[-1] \oplus \mathscr{F}^\vee\right) \to \widehat{\mathrm{Sym}}_A \mathbb{L}_A[-1] \simeq \mathrm{DR}(A)$$

因此，该映射的核确实是由 $\mathscr{F}^\vee$ 和 $\mathscr{F}^\vee[-1]$ 生成的理想。□

定理 5.2.19。 i、 p 和 h 定义了一个变形收缩:

$$\mathrm{DR}(A) \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathrm{DR}(B) \circlearrowleft h$$

证明。显然， $p \circ i = \mathrm{id}$。我们需要证明 h 是 id 与 $i \circ p$ 之间的一个同伦，且满足 $\mathrm{id} - i \circ p = [d, h]$。在 $\mathbf{DR}(B)$ 的生成元上，记作 $f \in B$, $\alpha_i \in \mathbb{L}_A[-1]$, $i = 1 \cdots p$, $d\xi_i \in \mathscr{F}^\vee[-1], i = 1 \cdots m$ 和 $\eta_i \in \mathscr{F}^\vee, i = 1 \cdots m'$，我们得到:

$$(\mathrm{id} - i \circ p)(f\alpha_{1\cdots p} \otimes 1 \otimes 1) = 0$$

$$(\mathrm{id} - i \circ p)(d\xi_{1\cdots m} \wedge \eta_{1\cdots m'}) = d\xi_{1\cdots m} \wedge \eta_{1\cdots m'} \quad \text{if} \quad m + m' \neq 0$$

容易验证 $[d, h](f\alpha_{1\cdots p}) = 0$，因为 h 将 $\widehat{\mathrm{Sym}}_B \Omega^1_B[-1]$ 映为零。我们只需在形如 $d\xi_{1\cdots m} \wedge \eta_{1\cdots m'}$ 的项上验证这个方程。

$$d_{\mathrm{dR}} \circ h(d\xi_{1\cdots m} \wedge \eta_{1\cdots m'}) = d_{\mathrm{dR}} \left(\frac{1}{m + m'} \sum_{i=1}^{m} \epsilon_h d\xi^i_{1\cdots m} \wedge \xi^i \wedge \eta_{1\cdots m'} \right)$$

$$= \frac{1}{m + m'} \left(\sum_{i=1}^{m} \epsilon_1 d\xi_{1\cdots m} \eta_{1\cdots m'} + \sum_{k=1}^{m'} \sum_{i=1}^{m} \epsilon_{dh} d\xi^i_{1\cdots m} d\eta_k \xi_i \eta^k_{1\cdots m'} \right)$$

其中:

$$\epsilon_1 = (-1)^{n_1}, \qquad n_1 = n_h + \sum_{j \neq i} (|\xi_j| + 1) + \sum_{j=i+1}^{m} (|\xi_j| + 1)(|\xi_i| + 1)$$

$$n_1 = \sum_{j=1}^{i-1} (|\xi_j| + 1) + \sum_{j=i+1}^{m} (|\xi_j| + 1)|\xi_i| + \sum_{j \neq i} (|\xi_j| + 1) + \sum_{j=i+1}^{m} (|\xi_j| + 1)|\xi_i| + \sum_{j=i+1}^{m} (|\xi_j| + 1)$$

$$= 2 \times \sum_{j \neq i} (|\xi_j| + 1) + 2 \times \sum_{j=i+1}^{m} (|\xi_j| + 1)|\xi_i|$$

由于这个数是偶数， $\epsilon_1 = 1$ 并且我们有:

$$\sum_{i=1}^{m} \epsilon_1 d\xi_{1\cdots m} \eta_{1\cdots m'} = m \times d\xi_{1\cdots m} \eta_{1\cdots m'}$$

现在我们考虑 ϵ_{dh}:

$$\epsilon_{dh} = (-1)^{n_{dh}}, \quad n_{dh} = n_h + \sum_{j \neq i} (|\xi_j| + 1) + |\xi_i| + \sum_{j=1}^{k-1} |\eta_j| + \sum_{j=1}^{k-1} |\eta_j|(|\eta_k| + 1) + |\xi_i|(|\eta_k| + 1)$$

我们得到

$$n_{dh} = \sum_{j=1}^{i-1} (|\xi_j| + 1) + \sum_{j=i+1}^{m} (|\xi_j| + 1)|\xi_i| + \sum_{j=1}^{m} (|\xi_j| + 1) - 1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\eta_j|(|\eta_k| + 2) + |\xi_i|(|\eta_k| + 1)$$

现在，对于 $h \circ d$:

$$h \circ d(d\xi_{1\cdots m} \wedge \eta_{1\cdots m'}) = h\left(\sum_{k=1}^{m'} \epsilon_d d\xi_{1\cdots m} \wedge d\eta_k \eta^k_{1\cdots m'}\right)$$

其中:

$$\epsilon_d = (-1)^{n_d}, \qquad n_d = \sum_{j=1}^{m}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=1}^{k-1}|\eta_j| + \sum_{j=1}^{k-1}|\eta_j|(|\eta_k|+1)$$

因此我们得到:

$$h\circ d(d\xi_{1\cdots m}\wedge\eta_{1\cdots m'}) = \frac{1}{m+m'}\left(\sum_{k=1}^{m'}\epsilon_2 d\xi_{1\cdots m}\wedge\eta_{1\cdots m'} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m'}\epsilon_{hd}d\xi^i_{1\cdots m}d\eta_k\xi_i\eta^k_{1\cdots m'}\right)$$

我们有:

$$\epsilon_2 = (-1)^{n_2}, \qquad n_2 = n_d + \sum_{j=1}^{m}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=1}^{k-1}|\eta_j||\eta_k|$$

$$\begin{aligned} n_2 =& \sum_{j=1}^{m}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=1}^{k-1}|\eta_j| + \sum_{j=1}^{k-1}|\eta_j|(|\eta_k|+1) + \sum_{j=1}^{m}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=1}^{k-1}|\eta_j||\eta_k| \\ =& 2\times\sum_{j=1}^{m}(|\xi_j|+1) + 2\times\sum_{j=1}^{k-1}|\eta_j|(|\eta_k|+1) \end{aligned}$$

由于 n_2 是偶数， $\epsilon_2 = 1$ 并且:

$$\sum_{k=1}^{m'}\epsilon_2 d\xi_{1\cdots m}\wedge\eta_{1\cdots m'} = m'\times d\xi_{1\cdots m}\wedge\eta_{1\cdots m'}$$

最后，我们得到:

$$\epsilon_{hd} = (-1)^{n_{hd}}, \qquad n_{hd} = n_d + \sum_{j=1}^{i-1}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=i+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_i| + |\xi_i|(|\eta_k|+1)$$

$$n_{hd} = \sum_{j=1}^{m}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=1}^{k-1}|\eta_j| + \sum_{j=1}^{k-1}|\eta_j|(|\eta_k|+1) + \sum_{j=1}^{i-1}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=i+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_i| + |\xi_i|(|\eta_k|+1)$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=1}^{k-1}|\eta_j|(|\eta_k|+2) + \sum_{j=1}^{i-1}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=i+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_i| + |\xi_i|(|\eta_k|+1)$$

现在，为了证明这个结果，我们需要证明 $n_{hd} = n_{dh} + 1$ 模 2，但通过直接计算可得：

$$n_{hd} - n_{dh} = 1$$

这表明：

$$[d,h](d\xi_{1\cdots m} \wedge \eta_{1\cdots m'}) = \frac{1}{m+m'}\left((m+m') \times d\xi_{1\cdots m} \wedge \eta_{1\cdots m'}\right) = d\xi_{1\cdots m} \wedge \eta_{1\cdots m'}$$

□

定理 **引理 5.2.20**。$(p,\ i,\ h)$ 构成一个强形变收缩。换句话说，我们有：

$$ph = hi = h^2 = 0$$

证明。沿用之前的记号，我们有：

$$ph(d\xi_{1\cdots m}\eta_{1\cdots m'}) = p\left(\frac{1}{m+m'}\sum_{i=1}^{m}\epsilon_h d\xi^i_{1\cdots m} \wedge \xi^i \wedge \eta_{1\cdots m'}\right) = 0$$

对于 α 定义在 B 上的次数为 n 的 p-形式：

$$hi(\alpha) = h(\alpha) = 0$$

$$h^2(d\xi_{1\cdots m}\eta_{1\cdots m'}) = h\left(\frac{1}{m+m'}\sum_{i=1}^{m}\epsilon_h d\xi^i_{1\cdots m} \wedge \xi^i \wedge \eta_{1\cdots m'}\right)$$

$$= \frac{1}{(m+m')^2}\sum_{i=1}^{m}\epsilon_h\left(\sum_{k=1}^{i-1}\epsilon_1 d\xi^{i,k}_{1\cdots m} \wedge \xi_i \wedge \xi_j \wedge \eta_{1\cdots m'} + \sum_{k=i+1}^{m'}\epsilon_2 d\xi^{i,k}_{1\cdots m} \wedge \xi_i \wedge \xi_j \wedge \eta_{1\cdots m'}\right)$$

with

$$\epsilon_1 = (-1)^{n_1}, \qquad n_1 = \sum_{j=1}^{k-1}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=k+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_k| - |\xi_k|$$

$$\epsilon_2 = (-1)^{n_2}, \qquad n_2 = \sum_{j=1}^{k-1}(|\xi_j|+1) - |\xi_i| - 1 + \sum_{j=k+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_k| + |\xi_k||\xi_i|$$

注意，此处 $n_1 = n_1(i,k)$ 和 $n_2 = n_2(i,k)$

$$\epsilon_h = (-1)^{n_h}, \qquad n_h = \sum_{j=1}^{i-1}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=i+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_i|$$

$$\begin{aligned} n_1 + n_h \mod 2 &= \sum_{j=k}^{i-1}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=i+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_i| + \sum_{j=k+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_k| - |\xi_k| \\ &= \sum_{j=k+1}^{i-1}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=i+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_i| + \sum_{j=k+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_k| + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 + n_h \mod 2 &= \sum_{j=i}^{k-1}(|\xi_j|+1) - |\xi_i| - 1 + \sum_{j=k+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_k| + |\xi_k||\xi_i| \\ &\qquad + \sum_{j=i+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_i| \\ &= \sum_{j=i+1}^{k-1}(|\xi_j|+1) + \sum_{j=k+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_k| + |\xi_k||\xi_i| + \sum_{j=i+1}^{m}(|\xi_j|+1)|\xi_i| \end{aligned}$$

(i,k)中关于 $k<i$ 的项于是为：

$$(-1)^{(n_1+n_h)(i,k)} d\xi^{i,k}_{1\cdots m} \wedge \xi_i \wedge \xi_j \wedge \eta_{1\cdots m'} = (-1)^{|\xi_i||\xi_k|} \times (-1)^{n_1+n_h} d\xi^{i,k}_{1\cdots m} \wedge \xi_k \wedge \xi_i \wedge \eta_{1\cdots m'}$$

The term for (k,i) is then given by:

$$(-1)^{(n_2+n_h)(k,i)} d\xi^{k,i}_{1\cdots m} \wedge \xi_k \wedge \xi_i \wedge \eta_{1\cdots m'}$$

但结果表明：

$$(n_1+n_h)(i,k) + |\xi_i||\xi_k| = (n_2+n_h)(k,i) + 1$$

这证明，对于所有 $k<i$，$(-1)^{(n_1+n_h)(i,k)} d\xi^{i,k}_{1\cdots m} \wedge \xi_i \wedge \xi_k \wedge \eta_{1\cdots m'} = -(-1)^{(n_2+n_h)(k,i)} d\xi^{k,i}_{1\cdots m} \wedge \xi_k \wedge \xi_i \wedge \eta_{1\cdots m'}$，因此对所有 i,k 求和必为 0。□

对于切瓦利–埃伦伯格代数

现在取定义在$X = \mathrm{Spec}(A)$上、集中于非正次数的完美 $\mathscr{L}_\infty$代数丛 $\mathscr{L}$，并令 A 余纤维化且几乎有限表示。记作：

$$B := \mathrm{CE}(\mathscr{L}) \simeq \widehat{\mathrm{Sym}}_A \mathscr{L}^\vee[-1]$$

其微分为 $\delta_B := = \delta_{\mathbf{CE}} = \delta_0 + \delta_1 + \cdots$ 关于$\mathrm{CE}(\mathscr{L})$的标准滤过的切瓦利–埃伦伯格微分的权分解。在第5.2节开头所述条件下，我们有：

$$\mathrm{DR}(B) \simeq \widehat{\mathrm{Sym}}_A \left(\mathscr{L}^\vee[-1] \oplus \mathbb{L}_A[-1] \oplus \mathscr{L}^\vee[-2]\right)$$

以及引理 5.2.22 中描述的微分。

定义 5.2.21。

– 我们将 DR(B) 的切瓦利–埃伦伯格滤过[1] 定义为由 CE($\mathscr{L}$) 上的切瓦利–埃伦伯格滤过诱导的滤过。：

$$F^p_{\mathscr{L}}\mathrm{DR}(B) := \prod_{n\geq 0} \widehat{\mathrm{Sym}}_A \mathbb{L}_X[-1] \otimes_A \widehat{\mathrm{Sym}}_A^{\geq n} \mathscr{L}^\vee[-2] \otimes_A \widehat{\mathrm{Sym}}_A^{\geq p-n} \mathscr{L}^\vee[-1]$$

特别地，对于所有 $i \geq 1$，我们再次有 $F^i_{\mathscr{L}}$DR(B) $\subset$ ker(p)。

– |DR|(B) 也自然带有由德拉姆权重诱导的通常德拉姆滤过：

$$F^p_{dR}\mathrm{DR}^{\geq p}(B) := \prod_{i\geq p} \mathrm{DR}(B)(i)$$

引理 5.2.22。 微分为：

$$D_B = d_{\mathrm{dR}} + (\delta_{\mathrm{CE}} - \delta_A) + \delta^v_A + \rho^* + \delta^v_{\mathscr{L}^\vee[-2]} + \delta_+ + \delta_\nabla$$

其中：

– d_{dR} *the de Rham differential. It has Chevalley–Eilenberg weight 0 and de Rham weight* 1.

– δ^v_A *the vertical differential on* $\widehat{\mathrm{Sym}}_A \mathbb{L}_A[-1] = \mathrm{DR}(A)$ *extended by zero on* $\mathscr{L}^\vee[-2]$ *and* $\mathscr{L}^\vee[-1]$. *It has de Rham and Chevalley–Eilenberg weight 0.*

– $\delta_{\mathrm{CE}} - \delta_A = \delta_{\mathscr{L}^\vee[-1]} + \delta_1 + \delta_2 + \cdots$ *is the differential on* B *(minus* δ_A*) extended by* 0 *on* $\mathbb{L}_B[-1]$ *and* $\mathscr{L}^\vee[-2]$. $\delta_{\mathscr{L}^\vee[-1]}$ *has de Rham weight 0 and* δ_i *has Chevalley–Eilenberg weight* i.

– $\delta^v_{\mathscr{L}^\vee[-2]}$ *is the differential on* $\mathscr{L}^\vee[-2]$ *induced by* $\delta_{\mathscr{L}^\vee[-1]} = \delta_0 - \delta_A$. *It has de Rham and Chevalley–Eilenberg weight* 0.

– $\rho^* : \mathbb{L}_A[-1] \to \mathscr{L}^\vee[-2]$ *is* A*-linear and extended by* 0 *on* $\mathscr{L}^\vee[-2]$ *and* $\mathscr{L}^\vee[-1]$. *It has de Rham weight* 0 *and Chevalley–Eilenberg weight* 1.

– δ_+ *is the part of the differential induced by* $(\delta_1 - \rho^* \circ d_{\mathrm{dR}}) + \delta_2 + \cdots$ *on* $\mathscr{L}^\vee[-2]$. *In particular it is valued in* $F^2_{\mathscr{L}}B$ *and increases the Chevalley–Eilenberg weight by* 1 *or more.*

– δ_∇ *the part of the differential induced by the connection, valued in:*

$$\widehat{\mathrm{Sym}}_A \mathbb{L}_A[-1] \otimes_A \widehat{\mathrm{Sym}}_A^{\geq 1} \mathscr{L}^\vee[-1]$$

且具有德拉姆权重和切瓦利–埃伦伯格权重0。

[1]这是之前的 $\mathscr{F}$-滤过的类似物。

我们将这些性质概括如下：

	d_{dR}	$(\delta_{\mathrm{CE}} - \delta_A)$	δ_A^v	ρ^*	$\delta^v_{\mathscr{L}^\vee[-2]}$	δ_+	δ_∇
Chevalley–Eilenberg 权重	0	≥ 1	0	1	0	≥ 1	0
DR 权重	1	0	0	0	0	0	0
取值于	F^1	$F^1_{\mathscr{L}}$	F^1	$F^1 \cap F^1_{\mathscr{L}}$	$F^1 \cap F^1_{\mathscr{L}}$	$F^1 \cap F^2_{\mathscr{L}}$	$F^1 \cap F^1_{\mathscr{L}}$

证明。 根据定义，我们有 $D_B = d_{\mathrm{dR}} + \delta_B^v$ 德拉姆分解和垂直微分。此外 δ_B^v 限制到 B 为 δ_B 自身，并且 δ_B^v 在 $\mathbb{L}_B[-1]$ 上是 $\mathbb{L}_B[-1]$的自然微分。利用第 $\mathbb{T}_{\mathrm{CE}(\mathscr{L})}$ 5.2 节开头给出的 5.2描述，我们有：

$$\mathbb{L}_B[-1] \simeq B \otimes_A (\mathbb{L}_A[-1] \oplus \mathscr{L}^\vee[-2])$$

其中右侧是一个 B-模，其微分定义为

$$\delta_A + \delta^v_{\mathscr{L}^\vee[-1]} + \delta_{\mathbb{L}_B} + \delta_\nabla + \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2 + \cdots$$

˜其中 δ_i 是由 δ_i 诱导的 $\mathbb{L}_B[-1]$ 上的微分部分（它使切瓦利–埃伦伯格权重增加 i）。

˜ ˆ˜注意， $\delta_1 = \rho^* \circ d + \delta_1$ 和 $\rho^* \circ d$ 恰好是 ρ^*：
$\mathbb{L}_A[-1] \to \mathscr{L}^\vee[-1]$。我们得到 $\tilde{\delta}_1 = \rho^* + \hat{}\delta_1$，其中 $\hat{}\,\delta_1$ 取值于 $F^2\mathbf{DR}(B)$。
于是我们可以定义：

$$\delta_+ = \hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2 + \cdots$$

它使切瓦利–埃伦伯格权重至少增加 1，且取值于 $F^2\mathbf{DR}(B)$。此外，我们有：

$$\delta_B + \delta_{\mathbb{L}_A} = \delta_{\mathscr{L}^\vee[-1]} + \delta_A^v + \delta_1 + \delta_2 + \cdots$$

其中 $\delta_1 + \delta_2 + \cdots = \delta_B - \delta_A = \delta_{\mathbf{CE}} - \delta_A$，而 δ_∇ 是通过协变导数将 $\mathscr{F}^\vee[-1]$ 映射到 $\mathbb{L}_A[-1] \otimes_A \mathscr{F}^\vee$ 中某个元素的微分部分。□

引理 5.2.23. 在此情形下，增广 $\mathrm{CE}(\mathscr{L}) \to A$ 仅当*“Forget”*增加切瓦利–埃伦伯格权重的切瓦利–埃伦伯格微分项时才有一个截面。这样做得到 $\mathrm{CE}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{L})$，并且它给出了一个半线性堆栈的函数代数的完备化。利用与定义*5.2.17*中相同的公式，我们得到映射：

$$\mathrm{DR}(A) \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} (\mathrm{DR}(B)^\sharp, \delta') \circlearrowleft h$$

其中，底层代数 $\mathrm{DR}(B)^\sharp$ 配备了一个微分，该微分由引理 *5.2.22*中所述的保持切瓦利–埃伦伯格权重的微分部分给出：

$$\delta' := d_{\mathrm{dR}} + \delta_{\mathscr{F}^\vee[-1]} + \delta_A^v + \delta^v_{\mathscr{L}^\vee[-2]} + \delta_\nabla$$

特别 尤其是，得益于定理 *5.2.19* 和 *5.2.20*，它构成一个强形变收缩 .

引理 5.2.24。 h保持切瓦利–埃伦伯格滤过。

证明。 由定义 h 的公式可知，它将一个由 $f\alpha_{1\cdots n}d\xi_{1\cdots m}\eta_{1\cdots m'}$ 给出的、切瓦利–埃伦伯格权重为 $m+m'$ 的元素映射为一系列切瓦利–埃伦伯格权重同样为 $m+m'$的元素之和（如果 $m=0$，则为 0；该元素的切瓦利–埃伦伯格权重也是 $m+m'$）。□

定理 5.2.25。 我们得到一个新的强形变收缩：

$$\mathrm{DR}(A) \underset{p}{\overset{i_\infty}{\rightleftarrows}} \mathrm{DR}(B) \circlearrowleft h_\infty$$

其中：

$$i_\infty = i + h \circ \sum (\Delta h)^k \circ \Delta \circ i$$

$$h_\infty = h + h \circ \sum (\Delta h)^k \circ \Delta \circ h$$

注记 5.2.26。由于 p 由投影 $B \to A$ 诱导（该投影保持微分）， p严格保持总微分，因此我们将得到$p_\infty = p$。然而，由于不存在保持微分的自然映射 $B \to A$ ， i 需要经过变形才能保持微分。

证明。 这个新的强形变收缩由引理 5.2.23中的强形变收缩通过同调扰动引理得到。我们得到：

$$\mathrm{DR}(A) \underset{p_\infty}{\overset{i_\infty}{\rightleftarrows}} \mathrm{DR}(B) \circlearrowleft h_\infty$$

赋予 DR(*A*) 微分 $D_{B,\ \infty}$。
我们有 $D_B = \delta' + \Delta$ ，其中 Δ 可以用引理 5.2.22来描述。于是，同调扰动引理的公式给出（参见 [Cra04]）：

$$p_\infty = p + p \circ \sum (\Delta h)^k \circ \Delta \circ h$$

$$i_\infty = i + h \circ \sum (\Delta h)^k \circ \Delta \circ i$$

$$h_\infty = h + h \circ \sum (\Delta h)^k \circ \Delta \circ h$$

$$D_{B,\infty} = D_B + p \circ \sum (\Delta h)^k \circ \Delta \circ i$$

我们只需证明 $D_{A,\ \infty} = D_A$ 以及 $p_\infty = p$。只需证明$p \circ \sum (\Delta h)^k \circ \Delta = 0$，这可由以下事实推出： Δ 提高切瓦利–埃伦伯格权重，因此其取值属于 $F^1_{\mathscr{L}} B \subset \ker(p)$；以及 h保持切瓦利–埃伦伯格权重（引理 5.2.24）。□

推论 5.2.27。 $\mathrm{CE}(\mathscr{L})$ 的德拉姆上同调与底空间 A 的德拉姆上同调同构。

推论 5.2.28。 闭元素 $a \in \mathrm{DR}(\mathrm{CE}(\mathscr{L}))$ 是恰当的，当且仅当 $p(f)$ 在 $\mathrm{DR}(A)$ 中是恰当的。此外，若 $p(f) = D_B b$，则有：

$$a = D_A(i_\infty(b) + h_\infty(a))$$

证明。 如果 a 是恰当的，那么 $p(a)$也是恰当的，因为 p 保持微分。此外，如果$p(a) = D_B b$，那么我们有：

$$\begin{aligned} a &= i_\infty \circ p_\infty(a) + D_B \circ h_\infty(a) - h_\infty \circ D_A(a) \\ &= i_\infty \circ D_B b + D_A \circ h_\infty(a) - h_\infty \circ D_A(a) \\ &= D_A(i_\infty(b) + h_\infty(a)) \end{aligned}$$

□

最后，我们需要了解所有映射相对于德拉姆权重的行为。

引理 5.2.29。 我们有如下结论：

– i 保持德拉姆权重。 – p 保持德拉姆权重。 – h 使德拉姆权重降低1。 – Δ 使德拉姆权重最多增加1。 – i_∞ 保持德拉姆权重。 – h_∞ 使德拉姆权重降低1。

5.3. **BV 构造示例**。

本节将说明，我们的框架涵盖并推广了许多已有的构造（在我们的框架所允许的范围内）。特别是，我们恢复了以下两类构造：

– f 的 Koszul–Tate 分解上的 BV 构造。– 具有壳外对称性（无论是否无穷小）的泛函的等变导出临界轨迹。

对于第二类构造，我们将看到，这恢复了文献 [BSS21]，中讨论的群作用的 BV 形式体系、李代数丛壳外作用的无穷小 BV 形式体系，以及在最一般情形下群胚壳外作用的 BV 形式体系。

我们还将看到，对于壳外作用，构造 5.0.2 和 5.0.1 中描述的启发式方法是一致的。

5.3.1. *Koszul–Tate* 分解的 *BV* 构造。

我们将说明 [FK14] 中的构造如何纳入我们的框架（参见构造 5.1.1）。更确切地说，他们的构造是一个 BV 构造，它针对的是由 严格临界点集的 Koszul–Tate 分解给出的几乎导出临界轨迹。

本节中，我们将取 $S := \mathbf{KT}(f)$ 为由 f 的 Koszul–Tate 分解给出的仿射栈，并假设模 $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}$ 是完美的。此外，在这个例子中，我们需要采用第 5.2 节开头所述的框架，并考虑非导出的切复形和余切复形。

构造的第二步确保我们所考虑的 (-1)-移位辛结构实际上是严格的辛结构，ω^{st} 如定义5.2.6 中对（不带微分的）分次代数的描述：

$$\mathrm{Sym}_A\left(\mathbb{T}_A[1] \oplus \mathscr{L}_{\mathrm{KT}}[2] \oplus \widehat{\mathscr{L}^{\vee}_{\mathrm{KT}}[-1]}\right)$$

那么，步骤（4）相当于在 $\pi_S^*\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}$ 上寻找一个 $\mathscr{L}_\infty$-代数丛结构，使其相伴的切瓦利–埃伦伯格代数具有一个不仅与辛结构相容，而且还是哈密顿的微分[1]。

现在，根据 BV 荷的构造，我们知道，交换微分分次代数 $\mathrm{BV}_{\mathrm{FK}}$ 是与以下结构相伴的切瓦利–埃伦伯格代数：$\mathscr{L}_\infty$在 $\pi^*\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}$上方、位于$\mathbf{KT}(f)$上的无穷小商的定义见5.1.5；该无穷小商由此切瓦利–埃伦伯格代数之谱的形式完备化给出。于是，相应的无穷小 BV 构造为：

$$\left[\mathbf{KT}(f)\big/_{\pi_s^*\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}}\right] := \mathbf{BV}_{\mathrm{FK}} := \mathbf{Spec}(\widehat{\mathrm{CE}(\mathscr{L}_{\mathrm{KT}})})_{\mathrm{KT}(f)}$$

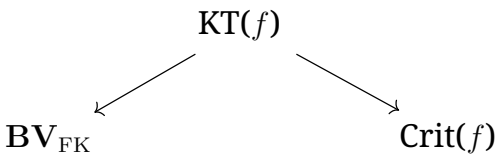
接下来，我们要证明这是一个广义无穷小辛约化，这正是下述定理的内容。为证明该定理，我们需要再次能够计算 $h^*\mathscr{T}_{\mathbf{BV}_{\mathrm{FK}}}$，它是仿射基底上的李代数丛的切瓦利–埃伦伯格代数的切复形的拉回。根据第 5.2 节所述的设定，我们有：

$$h^*\mathscr{T}_{\left[\mathbf{KT}(f)\big/_{\pi^*\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}}\right]} \simeq \mathscr{T}_{\mathrm{KT}(f)} \oplus^{\rho} \pi^*\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}[1]$$

请注意，在此语境下，定义 5.1.5 中的无穷小商概念（除了较弱的概念（5）之外）都是等价的。于是我们有：

[1]利用第 5.2 节的讨论可知，构造的主要输入并非存在 BV 荷，而是存在一个与 严格辛结构相容的李代数丛。

定理 5.3.1。 存在一个拉格朗日对应[1]:



证明。 典范辛结构的拉回在 KT(f) 中相等，因此我们可以选择零各向同性对应结构。为了证明这是一个拉格朗日对应，我们注意到以下图表是同伦笛卡尔的:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{T}_{\mathrm{KT}(f)} & \longrightarrow & p^*\mathscr{T}_{\mathbf{Crit}(f)} \simeq p^*\Omega^1_{\mathbf{Crit}(f)}[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ h^*\mathscr{T}_{\mathrm{BV_{FK}}} \simeq h^*\Omega^1_{\mathrm{BV_{FK}}}[-1] & \longrightarrow & \Omega^1_{\mathrm{KT}(f)}[-1] \end{array}$$

根据我们的假设:

$$p^*\mathscr{T}_{\mathrm{BV_{FK}}} \simeq \mathscr{T}_{\mathrm{KT}(f)} \oplus^{\rho} \pi^*\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}[1]$$

而栈 KT(f) $\to$ Crit(f) 的半线性表示上的一个联络给出一个等价:

$$\mathscr{T}_{\mathrm{KT}(f)} \cong i^*\mathscr{T}_{\mathbf{Crit}(f)} \oplus^{\nabla} \pi^*\mathscr{L}^{\vee}_{\mathrm{KT}}[-2]$$

将这些等价代入图表即可证明它是笛卡尔的。 □

这意味着 $\mathbf{BV}_{\mathrm{FK}}$ 是一个无穷小 BV 构造，符合定义 5.1.8 中关于包含映射 $\mathbf{KT}(f) \to \mathbf{Crit}(f)$ 的要求，其中该构造取自严格临界轨迹的 Koszul–Tate 分解。特别地，这是一个将 所有 对称性都纳入考虑的 BV 构造： f。

5.3.2. 群作用与动量映射。

本节旨在说明，针对群作用而非其李代数的无穷小作用，定义一种 BV 构造是有其动机的。其思路是，这种构造能够保留群的整体作用，因而也能保留群作用所引发的整体现象。本文在 [BSS21] 中对这一思路进行了更详细的讨论；他们将 G-等变导出临界轨迹作为这种更精细的 BV 构造概念的模型进行研究。我们认为，这属于本文意义下的 BV 构造，也是第 5.3.4 节中更一般构造的一个具体例子。

[1]在这种情形下，混合使用导出与非导出构造时，拉格朗日对应是根据 [PS20] 中定义的辛几何来定义的。特别是，非退化条件表明，严格 切复形与余切复形构成一个同伦笛卡尔方形。

我们关注这样的 BV 构造：对 S 的作用由一个群 G 的作用给出。同样，对于任意几乎导出临界轨迹，并不能保证这种 BV 构造存在。不过，我们将看到，给定一个壳外对称性的群作用（定义 5.1.14），总能构造一个几乎导出临界轨迹 S，其广义辛约化由 S 对 G 的作用所得到的商给出。

设 G 是一个作用于 X 的仿射代数群，使得 $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ 是 G-不变的。那么存在动量映射 $\mu : T^*X \to \mathfrak{g}^*$ (定义 4.3.2)，其辛约化为 $T^*\left[X/G\right]$ (例 4.3.7)。

由例 4.3.11 可知，对 μ 取拉格朗日交后，我们得到一个 (-1)-移位动量映射 $\mu_{-1} : \mathrm{Crit}(f) \to \mathfrak{g}^*[-1]$，其辛约化为 $\mathrm{Crit}([f])$。我们将证明，$\mathrm{Crit}([f])$ 是包含映射 $Z(\mu) \to \mathrm{Crit}(f)$ 的 BV 构造。我们唯一尚未证明的是，$Z(\mu_{-1})$ 是一个几乎导出临界轨迹：

引理 5.3.2。 $Z(\mu_{-1})$ 是一个几乎导出临界轨迹。

证明。 考虑如下交换图，其中所有方块都是拉回：

$$\begin{array}{ccccc} Z(\mu) & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \star \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T^*X & \xrightarrow{\mu\times\pi} & \mathfrak{g}^* \times X & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

T最左侧的方块是在线性栈上的拉回，因此我们有 ：

$$Z(\mu) \simeq \mathbb{A}_X(\mathbb{L}_X \times_{\mathfrak{g}^*\otimes\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X) \simeq \mathbb{A}_X(\mathbb{L}_X \oplus^{\mu} \mathfrak{g}^*[-1] \otimes \mathscr{O}_X)$$

特别地，由于 $X = \mathrm{Spec}(A)$，它是仿射的，其函数代数为 $\mathrm{Sym}_A(A \otimes \mathfrak{g}[1] \oplus \mathbb{T}_X)$。

现在考虑交换图：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{df} & T^*X & \xleftarrow{s_0} & X \\ \| & & \downarrow & & \| \\ X & \xrightarrow{s_0} & \mathfrak{g}^* \times X & \xleftarrow{s_0} & X \\ \| & & \uparrow & & \| \\ X & = & X & = & X \end{array}$$

该图表是交换的，因为 f 是 G-等变的，并且对该图表先取水平极限再取垂直极限，或反之，均可得到一个等价：

$$Z(\mu_{-1}) := \mathbf{Crit}(f) \times_{\mathfrak{g}^*[-1]\times X} X \simeq X \times_{Z(\mu)} X$$

右侧显然是仿射的，其函数代数为：

$$A \otimes_{\mathrm{Sym}_A \mathbb{T}_A \oplus^\mu A \otimes \mathfrak{g}[1]} A \simeq \mathrm{Sym}_A \left(\mathbb{T}_A[1] \oplus^\mu A \otimes \mathfrak{g}[2] \right)$$

且限制在 $\mathbb{T}_A[1]$ 上的微分是缩并 ι_{df}。这表明$Z(\mu_{-1})$是一个几乎导出临界轨迹。□

该引理与例 4.3.21 共同表明：

定理5.3.3。 设 X 是一个 *Artin* 栈， G 是作用于 X上的壳外对称性的仿射群。那么$\mathrm{Crit}([f])$是 $Z(\mu_{-1}) \to \mathbf{Crit}(f)$的广义辛约化，因此是 f 上的壳外 *BV* 构造（其中 $S = Z(\mu_{-1})$）。

根据命题 4.2.6 和例 4.1.8，我们已经看到 $\left[Z(\mu_{-1}) \middle/ X \times \mathfrak{g} \right]$ 是映射 $Z(\mu) \to \left[Z(\mu_{-1}) \middle/ G \right]$的形式完备化。

推论5.3.4。 如果 $Y := \left[S \middle/ G \right]$ 是由壳外对称性的作用得到的 *BV* 构造（即定理 *5.3.3*中的 *BV* 构造），使得 G 作用于 X上。那么形式完备化

$$\widehat{Y} \simeq \widehat{Y_S} \simeq \left[S \middle/ X \times \mathfrak{g} \right]$$

是按照定义 *5.1.8* 的无穷小 *BV* 构造。

证明。 这直接由定理 5.1.13 得出。 □

注5.3.5。 BV 构造的一个相互交叠的特征是，对于在 G 上的 X 壳外对称性作用，可以从构造 5.0.1 和构造 5.0.2 两种观点来理解。按照第一种观点，根据定义，它是几乎导出临界轨迹的一个商（嵌入拉格朗日对应中）。按照第二种观点，我们已证明，它也是商映射 $[f] : \left[X \middle/ G \right] \to \mathbb{A}^1$ 的导出临界轨迹（即等变导出临界轨迹）：

$$\mathbf{Crit}([f]) \simeq \left[X \middle/ G \right] \times_{T^*\left[X \middle/ G \right]} \left[X \middle/ G \right] \simeq \left[Z(\mu_{-1}) \middle/ G \right]$$

5.3.3. 李代数丛作用与动量映射。

上一节中，我们讨论了由壳外对称性群作用得到的 BV 构造。本节将说明，也可以通过壳外对称性李代数丛的无穷小作用构造出类似的结构。

由例子 4.3.21 可知，如果 $\mathscr{L}$ 是 X 上的壳外无穷小对称性的李代数丛（定义 5.1.15），那么 $\mathbf{Crit}(f) \to L^*[-1]$ 是一个 (-1)-移位动量映射，其无穷小辛约化由 $\mathscr{L}$-等变导出临界轨迹 $\mathbf{Crit}([f])$ 给出。

与引理 5.3.2 类似，我们可以证明 $Z(\mu_{-1})$ 是一个几乎导出临界轨迹，前提是 $\mathscr{L}$ 具有几乎有限表示，且集中于非正次数（参见命题 4.2.34，已知 X 是一个光滑代数簇）。

这证明了以下结论：

定理 5.3.6。 给定一个壳外对称的李代数丛 $\mathscr{L}$，则 $\mathbf{Crit}([f])$ 是一个无穷小 *BV* 构造（针对 $S = Z(\rho_{-1}^*)$）。

同样，这个由作用于 X 上的壳外对称的李代数丛所给出的无穷小 BV 构造 5.0.1，既可以从构造 5.0.2的角度来理解。对于第一种观点，根据定义，它是几乎导出临界轨迹的弱无穷小商 $Z(\rho_{-1}^*)$。对于第二种观点，它是商映射 $[f]: \left[X/\mathscr{L}\right] \to \mathbb{A}^1$的导出临界轨迹。

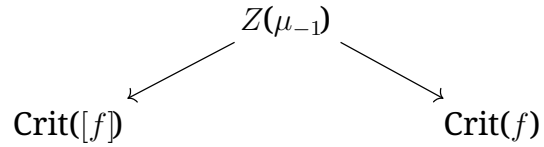
5.3.4. 群胚作用的 *BV* 构造。

本节给出了针对壳外对称性的最一般 BV 构造。它与第 5.3.2 节和 5.3.3 节都非常相似。

定理 5.3.7. 设 $\mathscr{G}^\bullet$ 是一个光滑的[1] 壳外对称性 *Segal* 群胚，作用于 X 并取一个动量映射 $\mu: T^*X \to L^*$，对应于定义 *4.3.23* 中的这一作用。那么，由推论 *4.3.29* 可得到一个动量映射：

$$\mu_{-1} : \mathbf{Crit}(f) \to L^*[-1]$$

其辛约化为 $\mathbf{Crit}([f])$，从而得到一个壳外 *BV* 构造：



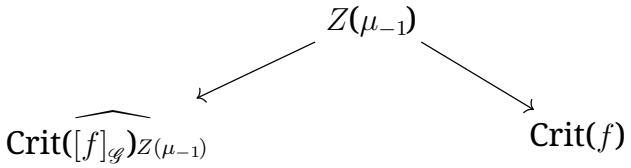
证明。 这基本上是例 4.3.21 以及以下事实的推论： $Z(\mu_{-1})$仍然是一个几乎导出临界轨迹。 □

回想命题 5.1.18 指出，任意 良好的 （按定义 4.2.13 的意义）关于 X 的离壳对称性的塞加尔群胚，都会导出一个具有形式完备化这一弱无穷小商的离壳无穷小对称性李代数丛：

$$\left[\widehat{Z(\mu_{-1})/\mathscr{G}}\right]_{Z(\mu_{-1})} \simeq \mathbf{Crit}\widehat{([f]_{\mathscr{G}})}_{Z(\mu_{-1})}$$

[1]~~事实上，~~这可以推广到任意满足典范 2-形式 $T^*\left[X/\mathscr{G}\right]$ 为辛形式的 $\mathscr{G}^\bullet$。

此外，根据命题 5.1.18，它是一个离壳无穷小 BV 构造：



命题 5.3.8. 设 X 是满足假设*3.2.2*的仿射栈。取 $\mathscr{L}$ 为定义在 X 上的李代数丛，且它良好地积分为一个光滑[1] 群胚 $\mathscr{G}$。那么我们有一个等价：

$$\mathbf{Crit}([f]_{\mathscr{L}}) \simeq \widehat{\mathbf{Crit}([f]_{\mathscr{G}})_{Z(\mu_{-1})}}$$

证明。 回忆命题 4.3.32 给出的等价：

$$T^*\left[X/\mathscr{L}\right] \simeq \left(\widehat{T^*\left[X/\mathscr{G}\right]}\right)_{Z(\mu)}$$

于是我们得到以下等价关系：

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{Crit}([f]_{\mathscr{G}})_{Z(\mu_{-1})}} \simeq & \mathbf{Crit}([f]_{\mathscr{G}}) \times_{\mathbf{Crit}([f]_{\mathscr{G}})_{\mathrm{DR}}} Z(\mu_{-1})_{\mathrm{DR}} \\
\simeq & \left(\left[X/\mathscr{G}\right] \times_{T^*\left[X/\mathscr{G}\right]} \left[X/\mathscr{G}\right]\right) \times_{\left(\left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}} \times_{\left(T^*\left[X/\mathscr{G}\right]\right)_{\mathrm{DR}}} \left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}\right)} \left(X_{\mathrm{DR}} \times_{Z(\mu)_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}}\right) \\
\simeq & \left(\left[X/\mathscr{G}\right] \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}}\right) \times_{\left(T^*\left[X/\mathscr{G}\right] \times_{\left(T^*\left[X/\mathscr{G}\right]\right)_{\mathrm{DR}}} Z(\mu)_{\mathrm{DR}}\right)} \left(\left[X/\mathscr{G}\right] \times_{\left[X/\mathscr{G}\right]_{\mathrm{DR}}} X_{\mathrm{DR}}\right) \\
\simeq & \widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]}_X \times_{\left(T^*\widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]}\right)_{Z(\mu)}} \widehat{\left[X/\mathscr{G}\right]}_X \\
\simeq & \left[X/\mathscr{G}\right] \times_{T^*\left[X/\mathscr{L}\right]} \left[X/\mathscr{G}\right] \\
\simeq & \mathbf{Crit}([f]_{\mathscr{L}})
\end{aligned}$$

wh这里，第五个等价关系由命题 4.3.32 和推论 4.2. 7. □

该命题意味着，如果 $\mathscr{L}$ 可以积成一个光滑塞加尔群胚，那么通过命题 5.1.18 由 $\mathbf{Crit}([f]_{\mathscr{G}})$ 给出的 BV 构造所得到的无穷小 BV 构造，就等价于$\mathbf{Crit}([f]_{\mathscr{L}})$ 中定理 5.3.6给出的无穷小 BV 构造。

[1]事实上，这可以推广到任意满足典范 2-形式$T^*\left[X/\mathscr{G}\right]$ 为辛形式的良好积分 $\mathscr{G}^\bullet$ 。

附录 A. 模型范畴框架

A.1. 良好模型结构。

本节将定义“良好”模型结构的概念。首先回顾一下，Mod_k 赋有其投射模型结构，其中弱等价是拟同构，纤维化是逐次数满射态射。此外，Mod_k 满足幺半群公理[1] 以及其他一些性质，从而确保我们在 Mod_k 上的交换幺半群（即交换微分分次 k-代数）以及其上的模上具有模型结构。我们将这些性质形式化，以定义良好模型结构的概念。

定义 A.1.1 ([CPT+17，第 1 节。1])。 考虑 $\mathscr{M}$ 一个闭对称幺半模范畴$_k$-富化（带有张量和余张量）的组合模型范畴。换言之， $\mathscr{M}$ 是一个对称幺半模范畴$_k$-模型代数，如 [Hov99中的定义 4.2 所述。20]此外，[CPT+17中的命题 A.11] 表明 $\mathscr{M}$ 是稳定的。若 $\mathscr{M}$满足以下条件，则称其为良好模型范畴：

– 单位对象 1 是 $\mathscr{M}$ 中的余纤维对象。 – 对于任意余纤维化 $j\colon X \to Y$（其中 $\mathscr{M}$），任意对象 $A \in \mathscr{M}$，以及任意态射 $u\colon A \otimes X \to C$（其中 $\mathscr{M}$）， $\mathscr{M}$ 中的严格推出方块是：

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & D \\ \uparrow & & \uparrow \\ A \otimes X & \longrightarrow & A \otimes Y \end{array}$$

是一个同伦推出方块。 – 对于任意余纤维对象 $X \in \mathscr{M}$，函子 $X \otimes -\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 保持弱等价（即 X 是 $\otimes$- 平坦的）。 – $\mathscr{M}$ 是一个可处理模型范畴，也就是说， $\mathscr{M}$ 中存在余纤维化生成集 I 和平凡余纤维化生成集 J，且它们的定义域均为余纤维对象。 – 等价在 $\mathscr{M}$ 中对滤过余极限和有限乘积封闭。

记号 A.1.2. 给定一个对称幺半范畴 $\mathscr{M}$，我们用$\mathrm{cdga}_{\mathscr{M}}$表示 $\mathscr{M}$ 中含幺交换幺半群构成的范畴，并称它们为代数（位于 $\mathscr{M}$中）。对于分次代数、滤过代数、完备滤过代数、分次混合代数和弱分次混合代数的范畴（见附录B和C），我们分别记作$\mathrm{cdga}^{\mathrm{gr}}$、$\mathrm{cdga}^{\mathrm{filt}}$、$\mathrm{cdga}^{\mathrm{cpl}}$、$\mathrm{cdga}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 和$\mathrm{cdga}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$ 。

定义 A.1.3。 代数 *(左)*模 $N \in \mathscr{M}$ 上的 $A \in$ 交换微分分次代数$_{\mathscr{M}}$ 是一个(左)作用 $\mu\colon A \otimes M \to M$，满足模的通常公理。

[1]对称幺半模型范畴 $\mathscr{M}$ （[SS00，定义 2.1]）中的幺半群公理是 [SS00，定义 2.2] 中给出的模型结构的一条公理，它为交换幺半群上的模和代数的模型结构提供了一些结果（[SS00，定理 3.1]）。$\mathscr{M}$。

A-模的范畴记为 $\mathrm{Mod}_A^{\mathscr{M}}$。对于分次模范畴、滤过模、完备滤过模、分次混合模、弱分次混合模，我们分别使用更简洁的记号 $\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{gr}}$、$\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{filt}}$、$\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{cpl}}$、$\mathrm{Mod}_A^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 和 $\mathrm{Mod}_A^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$。

命题 A.1.4. 设 $\mathscr{M}$ 是一个良好模型范畴，则：

– $\mathscr{M}$ 满足幺半群公理，因此范畴 交换微分分次代数$_{\mathscr{M}}$ 具有一个典范模型结构（通过自由-遗忘伴随定义）。– 对任意 $A \in$ 交换微分分次代数$_{\mathscr{M}}$，A-模的范畴赋有对称幺半组合模型范畴结构，其中等价和纤维化定义于 $\mathscr{M}$ 中。特别地，纤维化和弱等价由 $\mathscr{M}$ 中的结构检测。此外，模范畴$_A^{\mathscr{M}}$ 带有模型结构，使其成为一个良好模型范畴（参见[CPT+17的引言，第 1.3 节。1]）。– 对于 $A \to A'$ 中交换微分分次代数$_{\mathscr{M}}$中的任意等价，扩张-限制 *Quillen* 伴随：

$$\mathrm{Mod}_A^{\mathscr{M}} \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{A'}^{\mathscr{M}}$$

是一个 *Quillen* 等价。

注 A.1.5. 由于 $\mathrm{Mod}_A^{\mathscr{M}}$ 是一个良好模型范畴，我们还可以在 $\mathrm{Mod}_A^{\mathscr{M}}$ 中取交换幺半群和模，这实质上给出了 A-代数于$\mathscr{M}$ 及其模。

注 κA.1.6. 在 [Lur07，定理 1.5。14], 证明了存在一个等价：

$$\mathrm{Mod}_A^{\mathscr{M}} \simeq \mathbf{Stab}\left(\mathrm{cdga}_{/A}^{\mathscr{M}}\right)$$

此外，[Lur07，注 1.5。17]告诉我们，如果张量积对每个变量都是恰当的，那么取 $N \in$模范畴$_A^{\mathscr{M}}$ 其在复合下的像：

$$\mathrm{Mod}_A^{\mathscr{M}} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Stab}\left(\mathrm{cdga}_{/A}^{\mathscr{M}}\right) \xrightarrow{\Omega^\infty} \mathrm{cdga}_{/A}^{\mathscr{M}}$$

由 $A \boxplus N \to A$ 在 A.2.1 中定义的平方零扩张给出。

给定 $F : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ 两个良好模型范畴之间的对称幺半函子。它自然地诱导出函子：

$$F : \mathrm{cdga}_{\mathscr{M}} \to \mathrm{cdga}_{\mathscr{M}'} \qquad F : \mathrm{Mod}_A^{\mathscr{M}} \to \mathrm{Mod}_{F(A)}^{\mathscr{M}'}$$

例 A.1.7。我们有以下良好模型范畴：

– 模范畴$_k$ 是一个良好模型范畴，我们将记作：

$$\mathrm{cdga} := \mathrm{cdga}_{\mathrm{Mod}_k} \qquad \mathrm{Mod}_A := \mathrm{Mod}_A^{\mathrm{Mod}_k}$$

对所有 $A \in$ 交换微分分次代数。根据命题 A.1.4，对于所有 $A \in$ 交换微分分次代数，我们有 模范畴$_A$ 是一个良好模型范畴。

– 给定 $\mathscr{M}$ 一个良好模型范畴，其上的分次混合对象范畴$\mathscr{M}$，记作 $\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$，对于其内射模型结构，它仍是一个良好模型范畴（见附录 C）。

特别是，对于 $\mathscr{M}$ =模范畴$_k$，我们得到分次混合复形、代数和模，分别记为 $\mathrm{Mod}_k^{\epsilon-\mathrm{gr}}$、$\mathrm{cdga}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 和 $\mathrm{Mod}_A^{\epsilon-\mathrm{gr}}$，其中 $A \in \mathrm{cdga}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$。

假设A.1.8。在下文中，我们将在良好模型结构上采用两个额外条件：

(1) 张量积在每个变量上都是恰当的。*(2)* 张量积与余积可交换。

我们所考虑的所有良好模型范畴的例子都满足这两个附加条件。

A.2. $\mathscr{M}$中的余切复形。

令 $\mathscr{M}$ 为满足假设A.1.8的良好模型范畴。我们将回顾此良好模型范畴中切复形与余切复形的构造 $\mathscr{M}$。我们还将讨论关于选择 $\mathscr{M}$的若干函子性。

定义 A.2.1。给定任意 B-模 N，我们可以构造平凡平方零扩张（见[TV08，第 1.2 节。1]），$B \boxplus N$其作为B-模由直和给出，并且乘法由以下映射定义：

$$\begin{array}{c} (FA \oplus FM) \otimes (FA \oplus FM) \\ \downarrow \sim \\ (FA \otimes FA) \oplus ((FA \otimes FM) \oplus (FM \otimes FA)) \oplus FM \otimes FM \\ \downarrow \mu_A \oplus (\mu_M + \mu_M) \oplus 0 \\ FA \oplus FM \end{array}$$

这定义了一个函子 $B \boxplus -$：

$$\mathrm{Mod}_B \longrightarrow \mathrm{cdga}^{\mathscr{M}}_{A//B}$$

$$M \longmapsto B \boxplus M$$

例 A.2.2。如果 $\mathscr{M} = \mathrm{Mod}_k$，那么 $A \boxplus M$ 是乘法如下的交换代数：

$$(a, m)\dot{(}a', m') = (aa', am' + a'm)$$

该定义的要点在于得到如下导子描述：

引理 A.2.3。存在一个 B-模同构[1]：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cdga}^{\mathscr{M}}_{A//B}}(B, B \boxplus M) \cong \mathrm{Der}^{\mathscr{M}}_A(B, M)$$

[1]事实上，这可以取值于模范畴 $\mathscr{M}_B$或模范畴 $_B$中。

定义 A.2.4. 给定 $f\colon A \to B$，相对于 B A 的余切复形定义为表示导出的 A-线性导子的 B-模 $\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{B/A}$：

$$\mathrm{Hom}_B\left(\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{B/A}, M\right) \cong \mathbb{R}\,\mathrm{Der}_A(B, M)$$

构造 A.2.5. 感谢 [CPT+17、引理 1.3.4 和注 1.3，6], 函子：

$$B \boxplus - : \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{cdga}^{\mathscr{M}}_{A//B}$$

有一个导出左伴随 $\mathbb{L}^{\mathscr{M}}$，根据定义，我们有：

$$\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{B/A} := \mathbb{L}^{\mathscr{M}}(A \to B \xrightarrow{\mathrm{id}} B)$$

定义 A.2.6。一般而言，$f\colon A \to B$ 的相对切复形是B-模中 B的导出 A-线性导子：

$$\mathbb{T}^{\mathscr{M}}_{B/A} := \mathbb{R}\,\mathrm{Der}^{\mathscr{M}}_A(B, B)$$

利用余切复形的定义性质，我们得到：

$$\mathbb{T}^{\mathscr{M}}_{B/A} \simeq \mathrm{Hom}^{\mathscr{M}}_B\left(\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{B/A}, B\right)$$

命题 A.2.7。如命题 *A.1.4*所述，给定一个 $f\colon B \to B'$ 的 A-代数态射，我们得到一个伴随：

$$f^* : \mathrm{Mod}^{\mathscr{M}}_B \rightleftarrows \mathrm{Mod}^{\mathscr{M}}_{B'} : f_*$$

于是我们得到一个 B'-模的映射：

$$f^*\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{B/A} \to \mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{B'/A}$$

此外，该映射的余纤维是 $\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{B'/B}$。

证明。任意导子 $\phi\colon B' \to M$ 限制为一个导子 $\phi\colon B \to f_*M$ 从而诱导出一个映射[1]$\mathrm{Der}_{B'}(B', M) \to \mathrm{Der}_B(B, f_*M)$。这诱导出一个态射：

$$\mathrm{Hom}_{B'}(\mathbb{L}_{B'/A}, M) \to \mathrm{Hom}_B(\mathbb{L}_{B/A}, f_*M) \simeq \mathrm{Hom}_{B'}(f^*\mathbb{L}_{B/A}, M)$$

因此诱导出一个态射 $f^*\mathbb{L}_{B/A} \to \mathbb{L}_{B'/A}$。
要计算余纤维，我们先计算应用 $\mathrm{Hom}_{B'}(-, M$ 后得到的纤维):

$$\mathrm{fiber}\left(\underset{\mathrm{cdga}^{\mathscr{M}}_{A//B'}}{\mathrm{Hom}}(B', B' \boxplus M) \to \underset{\mathrm{cdga}^{\mathscr{M}}_{A//B}}{\mathrm{Hom}}(B, B \boxplus f_*M)\right)$$

[1]这是由限制映射诱导的：

$$\underset{\mathrm{cdga}^{\mathscr{M}}_{/B'}}{\mathrm{Hom}}(B', B' \boxplus M) \to \underset{\mathrm{cdga}^{\mathscr{M}}_{/B'}}{\mathrm{Hom}}(B, B' \boxplus M) \simeq \underset{\mathrm{cdga}^{\mathscr{M}}_{/B}}{\mathrm{Hom}}(B, B \boxplus f_*M)$$

换句话说，这就是将导子 ϕ: $B' \to M$ 限制到 ϕ : $B \to f_*M$ 的映射的纤维。但这恰好与以下纤维相同:

$$\operatorname{fiber}\left(\underset{\mathrm{cdga}^{\mathscr{M}}_{A//B'}}{\operatorname{Hom}}(B', B' \boxplus M) \to \underset{\mathrm{cdga}^{\mathscr{M}}_{A//B'}}{\operatorname{Hom}}(B, B' \boxplus M)\right)$$

其由导子 ϕ 给出: $B' \to M$ 使得 $\phi_{|B} \simeq 0$, 因此 ϕ 是取值于 B的线性导子。这证明了该纤维等价于:

$$\underset{\mathrm{cdga}^{\mathscr{M}}_{B//B'}}{\operatorname{Hom}}(B', B' \boxplus M) \simeq \operatorname{Hom}'_B\left(\mathbb{L}_{B'/B}, M\right)$$

□

推论 A.2.8。 给定 f : $A \to B$ 和 g : $B \to C$, 我们有一个同伦纤维序列:

$$\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{C/A} \longrightarrow \mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{C/B}$$

特别地，对于 $A = k$, 我们记 $\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{B/k} = \mathbb{L}^{\mathscr{M}}_B$并得到:

$$\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_B \otimes_B C \longrightarrow \mathbb{L}^{\mathscr{M}}_C \longrightarrow \mathbb{L}^{\mathscr{M}}_{C/B}$$

命题 A.2.9。 考虑如下推出图:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ C & \xrightarrow{j} & D \end{array}$$

于是我们得到一个推出图:

$$\begin{array}{ccc} i^*f^*\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_A \simeq j^*g^*\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_A & \longrightarrow & i^*\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ j^*\mathbb{L}^{\mathscr{M}}_C & \longrightarrow & \mathbb{L}^{\mathscr{M}}_D \end{array}$$

附录 B. 滤过与完备化

B.1. **滤过对象与完备滤过对象**。

本质上，取值于 $\mathscr{M}$ 良好模型范畴的滤过对象就是一个映射序列：

$$\cdots \to F^1V \to F^0V \to F^{-1}V \to \cdots$$

我们将其视为 $\operatorname{colim} F^pV$在“子对象[1]”中的分解。

定义 B.1.1. 令 $(\mathbb{Z}, \geq)$ 表示与有序集$\mathbb{Z}$ 相关联的范畴，其中存在唯一态射 $i \to j$ 当且仅当 $i \geq j$。在良好模型范畴 $\mathscr{M}$ （定义 A.1.1）中，滤过对象的范畴是函子范畴：

$$\mathscr{M}^{\mathrm{filt}} := \operatorname{Fun}\left((\mathbb{Z}, \geq), \mathscr{M}\right)$$

$\mathscr{M}^{\mathrm{filt}}$中的一个对象记作 $F^\bullet V$，或简写为 FV，其中 $F^pV \in \mathscr{M}$表示函子在 $p \in \mathbb{Z}$处的取值。

A 滤过对象称为 非负滤过，如果 $F^{-p}V = 0$ 对所有 $p > 0$均成立。

构造 B.1.2。

– 由于 $\mathscr{M}$ 是对称幺半的，因此 $\mathscr{M}^{\mathrm{filt}}$ 也是对称幺半的，并且 A 与 B 在 $\mathscr{M}^{\mathrm{filt}}$ 中的张量积定义为：

$$(\mathbb{Z}, \geq) \xrightarrow{\substack{n \mapsto \coprod \\ i+j=n}} (\mathbb{Z}, \geq) \times (\mathbb{Z}, \geq) \xrightarrow{A \times B} \mathscr{M} \times \mathscr{M} \xrightarrow{- \otimes_{\mathscr{M}} -} \mathscr{M}$$

– 对于每个滤过复形 $F^\bullet V$，我们可以取其余极限：

$$V := \operatorname*{colim}_{p \in (\mathbb{Z}, \geq)} F^pV$$

这是常值函子的左伴随[2]：

$$\operatorname{colim} : \mathscr{M}^{\mathrm{filt}} \rightleftarrows \mathscr{M} : \kappa$$

– 对于每个滤过对象 FV，我们可以定义其伴随分次$\mathrm{Gr}(FV) \in \mathscr{M}^{\mathrm{gr}}$，定义为：

$$\mathrm{Gr}^p(FV) := {F^pV}/{F^{p+1}V}$$

这定义了一个函子：

$$\mathscr{M}^{\mathrm{filt}} \to \mathscr{M}^{\mathrm{gr}}$$

称为滤过对象的伴随分次。

[1]我们称之为“子对象”，因为这些映射通常被视为余纤维化（在滤过对象范畴中取余纤维替换后）。[2]将对象 V映射到具有常值滤过的滤过对象，其中对所有$p \in \mathbb{Z}$，滤过均由 $F^pV = V$ 给出。

命题 B.1.3。 $\mathscr{M}^{\mathrm{filt}}$ 是一个闭对称幺半 模范畴$_k$ 富化组合模型范畴。此外，根据 [CCN21，注 2。18], 1 是余纤维化的。

注 B.1.4. $\mathscr{M}^{\mathrm{filt}}$ 通过如下设定在 $\mathsf{Mod}_k^{\mathrm{filt}}$ 上是丰化的：

$$F^p\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{filt}}_{\mathscr{M}^{\mathrm{filt}}}(FV, FW) := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(F^pV, F^pW)$$

Mod_k-丰化由下式给出：

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}^{\mathrm{filt}}}(FV, FW) := \mathrm{colim}\,\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{filt}}_{\mathscr{M}^{\mathrm{filt}}}(FV, FW) := \mathrm{colim}_p \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(F^pV, F^pW)$$

注 B.1.5. 通常所说的滤过复形 是上链复形的单态射序列：

$$\cdots \to F^1V \to F^0V \to F^{-1}V \to \cdots$$

事实证明，这些恰好是余纤维对象[1]，位于 模范畴$_k^{\mathrm{filt}}$ 中。经过纤维化替换后，我们总可以假设滤过复形具有这种形式。

引理 B.1.6. 余极限函子是对称幺半的：

$$\mathrm{colim}(FA \otimes FB) \simeq \mathrm{colim}(FA) \otimes \mathrm{colim}(FB)$$

证明。 目标是计算：

$$\mathrm{colim}_n \bigoplus_{p+q=n} F^pA \otimes F^qB$$

这些直和都是有限直和，因此也是余积。我们需要计算图表 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上的以下余极限：当且仅当 $|i'-i|+|j'-j| \le 1$时，存在唯一态射 $(i,j) \to (i',j')$。

$$\mathrm{colim}_{p,q\in\mathbb{Z}} F^pA \otimes F^qB$$

由于模的张量积与直和可交换，我们得到：

$$\mathrm{colim}_{p,q\in\mathbb{Z}} F^pA \otimes F^qB \simeq \mathrm{colim}_{p\in\mathbb{Z}} F^pA \otimes \mathrm{colim}_{q\in\mathbb{Z}} F^qB \simeq A \otimes B$$

□

滤过对象 FV可以看作由其余极限 V中的子对象 F^pV构成的集合。随着 p趋于无穷，F^pV会变得越来越小。我们想要考察那些满足 F^pV收敛于零且同时“完备”的滤过：

[1]更一般地， $\mathscr{M}^{\mathrm{filt}}$ 中的余纤维对象是逐权余纤维对象，并且它们之间存在余纤维化： $F^{p+1}V \to F^pV$。

定义 B.1.7. 滤过对象 $FV \in \mathscr{M}^{\mathrm{filt}}$ 称为完备，如果存在一个等价（其中 $V := $ 余极限 FV）：

$$V \xrightarrow{\sim} \lim_{p\in(\mathbb{Z},\leq)} {}^{V}\!/_{F^pV}$$

完备对象的满子范畴记作 $\mathscr{M}^{\mathrm{cpl}}$。包含映射 $\mathscr{M}^{\mathrm{cpl}} \to \mathscr{M}^{\mathrm{filt}}$ 有一个称为完备化函子的左伴随：

$$\widehat{(-)} : \mathscr{M}^{\mathrm{filt}} \rightleftarrows \mathscr{M}^{\mathrm{cpl}} : \iota$$

给定一个滤过复形 FV，其完备化由以下滤过对象给出：

$$\widehat{FV} = \lim_{p\in\mathbb{Z}} {}^{V}\!/_{F^pV} \qquad F^p\widehat{V} := \lim_{p\geq q} {}^{F^pV}\!/_{F^qV}$$

构造 B.1.8。

– 我们有一个左伴随函子（[Mou21，定义 3。2]）：

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}} \xrightarrow{\mathbf{Tot}} \mathrm{Mod}^{\mathrm{cpl}}$$

其中 Tot 将分次复形 $(V(p))_{p\in\mathbb{Z}}$ 映射为由以下内容给出的完备滤过复形：

$$\mathbf{Tot}(V) = \widehat{\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} V(p)} \qquad F^pV := \prod_{q\leq 0} V(q-p)$$

– 定义在滤过对象上的函子 Gr 限制后成为定义在完备滤过对象上的函子。– 我们可以定义一个函子：

$$\mathrm{colim} : \mathscr{M}^{\mathrm{cpl}} \to \mathscr{M}^{\mathrm{filt}} \xrightarrow{\mathrm{colim}} \mathscr{M}$$

这是左伴随与右伴随的复合。

– 与注 B.1.4 类似，$\mathscr{M}$ 中的完备滤过对象在滤过复形上是富化的；根据 [CCN21，命题 2 的证明，它们甚至在完备滤过复形上也是富化的。6]此外，利用模范畴$_k$ 函子，它们也在colim 上是富化的。

– 张量积不能限制到完备滤过对象范畴。不过，我们可以在 $\mathscr{M}^{\mathrm{cpl}}$ 上定义完备张量积 $\widehat{\otimes}$，定义如下：

$$\widehat{FV}\widehat{\otimes}\widehat{FW} := \iota(\widehat{FV})\widehat{\otimes}\iota(\widehat{FW})$$

这使得 $\widehat{\otimes}$ 成为 $\mathscr{M}^{\mathrm{cpl}}$ 上的闭对称幺半结构，并且 $\widehat{(-)}$成为对称幺半函子（参见 [CCN21，命题 2。6]）。换言之，自然映射：

$$\widehat{FA\otimes FB} \to \widehat{FA}\widehat{\otimes}\widehat{FB}$$

是一个等价。

命题 B.1.9。 对于 $\mathscr{M}$ 良好模型范畴， $\mathscr{M}^{\mathrm{cpl}}$上存在如下模型结构：

– 弱等价是满足下述映射条件的态射 f： $FA \to FB$

$$\mathrm{Gr}(f) : \mathrm{Gr}(FA) \to \mathrm{Gr}(FB)$$

是分次弱等价[1]。

– 纤维化是诱导分次对象纤维化的态射[2]：

$$\mathrm{Gr}(f) : \mathrm{Gr}(FA) \to \mathrm{Gr}(FB)$$

– 余纤维化 f： $FA \to FB$ 是容许余纤维化。换言之，每个映射 $F^pA \to F^pB$都是余纤维化，并且下述映射：

$$F^pA \coprod_{F^{p+1}A} F^{p+1}B \to F^pB$$

也都是余纤维化（见 [CCN21，引理 2。17]）。

Th是一个闭对称幺半 模范畴$_k$-富集的组合模型结构。

命题 B.1.10([CCN21，命题 2。6])。 该伴随：

$$\widehat{(-)} : \mathscr{M}^{\mathrm{filt}} \rightleftarrows \mathscr{M}^{\mathrm{cpl}} : \iota$$

是对称幺半模型范畴之间的 *Quillen* 伴随。

定义 B.1.11。 给定 FA 和 FB 两个（完备）滤过复形，我们可以将它们的直和定义为如下的（完备[3]）滤过复形：

$$F^p(FA \oplus FB) = F^pA \oplus F^pB$$

下面给出这一结果的几个推论：

引理 B.1.12。 滤过复形直和的底层复形是这些滤过复形的有限和：

$$\mathrm{colim}(FV \oplus FW) \simeq \mathrm{colim}(FV) \oplus \mathrm{colim}(FW) \simeq V \oplus W$$

证明。 由于上链复形的直和就是它们的余积，因此它与余极限交换，我们有：

$$\operatorname*{colim}_{p\in\mathbb{Z}} F^p(FV \oplus FW) = \operatorname*{colim}_{p\in\mathbb{Z}} F^pV \oplus F^pW \simeq \operatorname*{colim}_{p\in\mathbb{Z}} F^pV \oplus \operatorname*{colim}_{p\in\mathbb{Z}} F^pW \simeq V \oplus W$$

□

[1]这些是 Mgr 中的弱等价，也就是说，是每个权重上的弱等价。[2]在 Mgr 中，分次对象之间的纤维化 f： $V \to W$ 是逐权重的纤维化，也就是说，每个f_p： $V(p) \to W(p)$ 都是纤维化。[3]有限个完备滤过复形的直和也可以证明是完备的。

引理 B.1.13。 有限直和的滤过复形的完备化就是它们的完备化的有限直和：

$$\widehat{FV \oplus FW} \simeq \widehat{FV} \oplus \widehat{FW}$$

证明。 利用引理 B.1.12，我们必须计算以下极限：

$$\lim_p {}^{V \oplus W}\!/_{F^pV \oplus F^pW} \simeq \lim_p {}^{V}\!/_{F^pW} \oplus {}^{V}\!/_{F^pW}$$

复形的有限直和与这些复形的有限乘积相同，因此与极限可交换：

$$\widehat{FV \oplus FW} \simeq \lim_p {}^{V}\!/_{F^pV} \oplus {}^{W}\!/_{F^pW} \simeq \widehat{FV} \oplus \widehat{FW}$$

不难通过相同的操作看出，$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$
$FV \oplus FW$ 上的完备滤过与 $FV \oplus FW$ 上的自然完备过滤一致。□

B.2. **滤过代数与滤完备代数**。

本节旨在介绍滤过代数所需的基本内容，也就是说，滤过对象中的交换幺半群。

命题 B.2.1。 滤过（完备）代数范畴具有一种模型结构，其中纤维化和弱等价由遗忘函子 交换微分分次代数^{filt} $\to$模范畴$_k^{\mathrm{filt}}$ 检测。此外，存在一个自由-遗忘奎伦伴随：

$$\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{filt}} \rightleftarrows \mathrm{cdga}^{\mathrm{filt}}$$

命题 B.2.2。 滤过复形的完备化-包含伴随可以提升为滤过代数的一个奎伦伴随：

$$\widehat{(-)} : \mathrm{cdga}^{\mathrm{filt}} \rightleftarrows \mathrm{cdga}^{\mathrm{cpl}}$$

此外，以下左伴随函子图是交换的[1]：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{filt}} & \xrightarrow{\widehat{(-)}} & \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{cpl}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{cdga}^{\mathrm{filt}} & \xrightarrow{\widehat{(-)}} & \mathrm{cdga}^{\mathrm{cpl}} \end{array}$$

命题 B.2.3. 滤过复形的余极限-常值伴随可以提升为滤过代数之间的伴随：

$$\mathrm{colim} : \mathrm{cdga}^{\mathrm{filt}} \rightleftarrows \mathrm{cdga} : \kappa$$

[1]因为右伴随函子图显然是交换的。

此外，以下左伴随函子图是可交换的[1]：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{filt}} & \xrightarrow{\mathrm{colim}} & \mathrm{Mod}_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{cdga}^{\mathrm{filt}} & \xrightarrow{\mathrm{colim}} & \mathrm{cdga} \end{array}$$

特别是，最后两个命题表明，从完备滤过代数到代数的余极限函子与到（滤过）模的遗忘函子可交换。

例 B.2.4。

– 取一个 F-模。我们可以考虑 $\mathbf{Sym}_A F$ 上的非负分次滤过，其定义如下：

$$F^p \operatorname{Sym}_A F := \operatorname{Sym}_A^{\geq p} F := \bigoplus_{n \geq p} \operatorname{Sym}_A^n F$$

这些是以 A 为系数的 F 中的多项式。将 A 替换为 $\mathscr{O}_X$，即可将此推广到导出栈 X 上的拟凝聚层 F。– 给定交换代数 A 和 A 的一个理想 I，我们考虑由 $F^p A = I^p$ 给出的滤过，其完备化定义为：

$$\widehat{A_I} := \lim_{n \in \mathbb{Z}} {}^{A}\!/_{I^n}$$

这对应于 A 上的 I-进拓扑完备化。给定一个态射 $B \to A$，我们可以考虑增广理想 $\mathfrak{M}$，它在 B 上定义一个滤过。由此得到 $B \to A$ 的完备化，记作 $\wedge B_A$。

– $k[t]$ 可视为以 k 为系数、由单个生成元 t 生成的对称代数。从这个角度看，它的完备化是形式幂级数代数 $k[\![t]\!]$。考虑 $I = (t)$ 的 I-进完备化，也能得到相同结果。

更一般地，对称完备化等价于对称代数 $\mathbf{Sym}_A F$ 关于由 F 生成的理想的完备化$I = (F)$。我们将该完备化记为：

$$\widehat{\operatorname{Sym}}_A F$$

记号 B.2.5. 考虑一个 A-模 $F = F_1 \oplus F_2$。我们只考虑沿 F_2 的完备化。换言之，我们考虑沿 $\mathbf{Sym}_A F$ 中由 F_2 生成的理想进行完备化。此完备化记作：

$$\operatorname{Sym}_A(F_1 \oplus \widehat{F_2})$$

[1]因为右伴随图表显然是交换的。

此外，我们还有：

$$\mathrm{Sym}_A(F_1 \oplus \widehat{F_2}) \simeq \mathrm{Sym}_A F_1 \otimes_A \widehat{\mathrm{Sym}}_A F_2$$

记号 B.2.6. 若考虑一个 A-模 F，则 $\mathsf{Sym}_A F$ 可以赋予分次代数结构。我们用 $\mathsf{Sym}_A^{\mathrm{gr}} F$ 表示（非负）分次代数，其中权重为 p 的部分定义如下：

$$\mathrm{Sym}_A^p F$$

这是示例中所述对称代数的自然滤过所对应的自然伴随分次B.2.4。

附录 C. 分次混合对象

C.1. 分次混合复形。

我们将给出关于分次混合复形的相关结果与构造。我们遵循[CPT+17] 中的分次约定，并回顾一下，我们的良好模型范畴（定义 A.1.1）正是[CPT+17第 1 节中引入的范畴。1]本质上，给定一个良好模型范畴 $\mathscr{M}$，我们考察其上的分次对象 $\mathscr{M}$，引入“权分次”，然后添加一个会提高该权重的“混合微分”。

定义 C.1.1. 我们考虑 $\mathscr{M}$ 中的分次对象范畴，记为$\mathscr{M}^{\mathrm{gr}}$。其对象是由 $\mathscr{M}$ 中的元素构成的族 $(V(p))_{p\in\mathbb{Z}}$，其态射是保权态射。

注 C.1.2. $\mathscr{M}$ 中的分次对象可以视为函子范畴 $\mathrm{Fun}(\mathbb{Z},\mathscr{M})$，其中 $\mathbb{Z}$ 中唯一的态射是恒等态射。因此，它带有投射模型结构，其中纤维化、余纤维化和弱等价均逐对象定义。

注 C.1.3. $\mathscr{M}^{\mathrm{gr}}$ 显然是以 $\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{gr}}$ 为富集的（因为 $\mathscr{M}$ 是以 Mod_k 为富集的），其富集由逐权富集 $\mathscr{M}$ 给出。

记号 C.1.4. 取 $E\in\mathscr{M}^{\mathrm{gr}}$。

– E 的权重 p 部分记作 $E(p)$ – 我们用 $E((q))$ 表示权分次平移q 后的分次对象，使得：特别地，如果 V 集中于权重 0，则 $V((-p))$ 集中于权重 p。– 一个态射 $f\colon E\to E'$ 由每个权重上的一组态射构成，记作：

$$E((q))(p) := E(p-q)$$

$$f_p : E(p)\to E'(p)$$

定义 C.1.5. 一个分次混合复形 E 在 $\mathscr{M}$ 中由以下数据给出：

– 一个分次对象 $E\in\mathscr{M}^{\mathrm{gr}}$。– 一个称为混合微分的态射：

$$\epsilon : E\to E((-1))[-1]$$

使得 $\epsilon^2=0$。这可分解为以下映射：

$$\epsilon_p : E(p)\to E(p+1)[-1]$$

使权重增加 1。

我们将 $\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 记为分次混合复形范畴，其态射是保权态射，并且与混合微分相容。

根据关于 $\mathscr{M}$ 的假设， $\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 不仅是 $\mathrm{Mod}_k^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 上的富集范畴（记作 $\underline{\mathrm{Hom}}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(-,-)$）$\mathscr{M}^{\epsilon-\text{分次}}$，还通过如下定义成为 Mod_k 上的富集范畴：

$$\underset{\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}}}{\underline{\mathrm{Hom}}}(E,F) := \ker\left(\epsilon : \underset{\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}}}{\underline{\mathrm{Hom}}}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(E,F)(0) \to \underset{\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}}}{\underline{\mathrm{Hom}}}^{\epsilon-\mathrm{gr}}(E,F)(1)[1]\right)$$

引理 C.1.6. 记 $\mathbf{1}[\epsilon] := \mathbf{1} \boxplus \mathbf{1}((1))[1]$ 为 $\mathbf{1}$ 由 $\mathbf{1}((1))[1]$作出的平方零扩张，并将其视为 $\mathbf{1}$ 上的一个权重为 -1 、次数为 -1的模。那么，分次混合复形恰好是一个分次 $\mathbf{1}[\epsilon]$-模：

$$\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}} \simeq \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}_{\mathbf{1}[\epsilon]}$$

此外，投影 $\mathbf{1}[\epsilon] \to \mathbf{1}$ 诱导出一个伴随：

$$\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}} \simeq \mathrm{Mod}_{\mathbf{1}[\epsilon]} \rightleftarrows \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}_{\mathbf{1}} \simeq \mathscr{M}^{\mathrm{gr}}$$

证明。 投影 $\mathbf{1}[\epsilon] \to \mathbf{1}$ 诱导出一个遗忘函子[1]：

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}_{\mathbf{1}[\epsilon]} \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}_{\mathbf{1}} \simeq \mathscr{M}^{\mathrm{gr}}$$

由此得到对象的集合 $(E(p))_{p\in\mathbb{Z}}$。 $\mathbf{1}[\epsilon] \simeq \mathbf{1} \boxplus \mathbf{1}((1))[1]$-模在 E 上的结构由一个乘法 $\mathbf{1}((1))[1] \otimes E \to E$ 给出，该乘法由映射 $\epsilon : E \to E((-1))[-1]$给出。平方零乘法等价于满足$\epsilon^2 = 0$。□

命题 C.1.7。 $\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 上存在一种模型结构，其弱等价和余纤维化通过遗忘函子定义：

$$\mathscr{U}_\epsilon : \mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}} \to \mathscr{M}^{\mathrm{gr}}$$

定义 C.1.8。 Hom-张量伴随（应用于单位 $\mathbf{1}_{\mathscr{M}}$ 并使用模范畴$_k$ 的丰化）导出以下伴随：

$$\mathrm{Mod}_k \rightleftarrows \mathscr{M} : |-|$$

$$\mathrm{Mod}_k^{\epsilon-\mathrm{gr}} \rightleftarrows \mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}} : |-|$$

其中 $|-|$ 称为实现函子。特别地，对于 $\mathscr{M} =$ 模范畴$_k^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ ，第一个伴随定义了一个实现函子：

$$|-| : \mathrm{Mod}_k^{\epsilon-\mathrm{gr}} \to \mathrm{Mod}_k$$

命题 C.1.9 ([CPT+17，命题 1.5。1])。 当 $\mathscr{M} =$ 模范畴$_k$，那么我们有 *e:*

$$|-| := \underline{\mathrm{Hom}}(k,-)$$

˜这是通过取一个余纤维分解来计算的导出内部 *Hom* $k \to k$，该分解位于投射模型结构中[2]。特别地，我们得到：

[1]此函子会遗忘混合微分。[2]投射模型结构是由模范畴$_k$上的投射模型结构所诱导的分次混合复形上的模型结构。

$$|E| := \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{k}, E) \simeq \prod_{p\geq 0} E(p)$$

其中右侧赋有总微分 $D_E := d_E + \epsilon$。

注 C.1.10. 我们将看到，分次混合复形可以视为完备滤过对象（见第 C.2 节）。在这个记作 **Tot** 的全忠实嵌入下，我们有：

$$|E| := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{cpl}}}(\mathbf{Tot}(k), \mathbf{Tot}(E))$$

其中 $\mathbf{Tot}(k)$ 实际上是一个纤维且余纤维的完备滤过对象，使得 $F^p k = k$ 若 $p \geq 0$，而 0 否则。然后，我们还可以使用定义 C.1.12、推论 C.1.13 和注 B.1.4 来证明该命题。

这避免了为 k 取余纤维替换的困难。

注 C.1.11. 类似地，如果 $k((-q)) \to k((-q))$ 是一个余纤维分解，我们可以定义：

$$F^p |E| := \underline{\mathrm{Hom}}(k((-q)), E) \simeq \prod_{p\geq q} E(p)$$

其中右侧同样赋有总微分 $D_E = d_E + \epsilon$。正如记号所示，这在 $|E|$ 上定义了一个滤过；该滤过与通过从注 C.1.10 中取 Hom 函子所得到的自然滤过一致，不过这里是在完备滤过对象中进行的。

定义 C.1.12. 首先注意到，导出 Hom 对所有 $q \in \mathbb{Z}$ 都给出：

$$\mathrm{Hom}(k((-q)), k((-q-1))) \simeq k$$

选取 $1 \in k$ 对应于取一组映射 $k((-q)) \to k((-q-1))$。它们对所有 $p \in \mathbb{Z}$ 诱导出以下映射：

$$F^{p+1} |E| \to F^p |E|$$

从而定义一个滤过对象，其余极限就是 $|E|$ 本身。这个滤过是完备的，我们将此滤过对象记为 $\mathbf{Tot}(E)$，它定义了一个函子：

$$\mathbf{Tot} : \mathrm{Mod}_k^{\epsilon-\mathrm{gr}} \to \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{cpl}}$$

这将 B.1.8 中的构造函子推广了。

推论 C.1.13. 如果 $E \in$ 模范畴$_k^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 是非负权重的，那么我们有：

$$\mathrm{colim}\, \mathbf{Tot}(E) \simeq |E|$$

注 C.1.14。一般来说，$\mathrm{colim} \circ \mathbf{Tot}$ 称为 *Tate* 实现的 E（参见[CPT+17，定义 1.5。2]）。

我们在例 A.1.7 中看到，若 $\mathscr{M}$ 是一个良好模型范畴，那么 $\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$也是一个良好模型范畴，因此其交换幺半群范畴具有自然的模型结构，而其上的模也构成良好模型范畴（参见第 A.1节）。

记号 C.1.15. 我们用 $\mathrm{cdga}_{\mathscr{M}}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 表示$\mathscr{M}^{\epsilon-\text{分次范畴}}$中交换幺半群的范畴。

给定 $A \in \mathrm{cdga}_{\mathscr{M}}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$，我们用 $\mathrm{Mod}_A^{\epsilon-\mathrm{gr}}$ 表示 $\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}}$中交换幺半群的范畴。

C.2. **弱分次混合对象与完备滤过对象**。
根据定义 C.1.12，我们注意到分次混合复形给出完备滤过对象。但函子 **Tot** 并非等价，其本质像由微分具有权分解且集中于权重 0 和 1的滤过对象构成。

接下来我们将定义一种弱分次混合复形，其混合微分可使权重增加任意次数，从而这些对象的完备滤过实现将恢复所有完备滤过对象。

定义 C.2.1 ([CCN21，定义 2.23])。一个 弱分次混合复形在 $\mathscr{M}$是一个权分次复形 $E \in \mathscr{M}^{\mathrm{gr}}$，配备了 $\mathscr{M}$ 中权重为 k、次数为 1 的映射，对所有 $k \geq 1$:

$$\delta_k : E \to E((-k))[-1]$$

满足:

$$\left(d + \sum_{k\geq 1} \delta_k\right)^2 = 0$$

其中 d 是 E上的微分。
这个条件可以改写为:

$$d \circ \delta_k + \delta_k \circ d + \sum_{i+j=k} \delta_i \circ \delta_j = 0$$

我们用 $\mathscr{M}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$ 表示分次混合复形范畴，其态射是与 δ_k交换的分次对象态射。

我们已在引理 C.1.6 中看到，分次混合复形是$\mathbf{1}[\epsilon]$上的模。事实证明，弱分次混合复形是余纤维分解 的 $\mathbf{1}[\epsilon]$上的模。

引理 C.2.2. 考虑由 ϵ_i 生成的 $\mathscr{M}$ 中的半自由交换幺半群 $\mathbf{1}[\epsilon_i \mid i \geq 1]$，其次数为1，权重为 i，微分对所有 $k \geq 1$ 定义如下:

$$\delta(\epsilon_k) = -\sum_{i+j=k} \epsilon_i \epsilon_j$$

那么这就是 $\mathbf{1}[\epsilon]$ 的拟自由分解。

引理 C.2.3。 弱分次混合复形的范畴等价于 $\mathbf{1}[\epsilon_i \mid i \geq 1]$ 上的分次模范畴。

证明。 证明本质上是对引理C.1.6的证明的改编。 □

注 C.2.4. 这种对弱分次混合复形的描述使其成为一个良好模型范畴，因为它是良好模型范畴 $\mathscr{M}^{\mathrm{gr}}$ 上的模范畴。

推论 C.2.5. 严格分次混合复形到弱分次混合复形的包含映射是一个等价：

$$\mathscr{M}^{\epsilon-\mathrm{gr}} \simeq \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}_{\mathbf{1}[\epsilon]} \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}_{\mathbf{1}[\epsilon_i \mid i\geq 1]} \simeq \mathscr{M}^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$$

这个等价是与弱等价 $\mathbf{1}[\epsilon_i \mid i \geq 1] \to \mathbf{1}[\epsilon]$相关的扩张-限制标量伴随的一部分。因此，根据命题 *A.1.4*，这是一个 *Quillen* 等价。

与同伦代数结构（例如 L_∞-代数或代数胚）类似，弱分次混合复形也带有弱分次混合对象之间的 ∞-态射这一概念。

定义 C.2.6. 一个 ∞弱分次混合复形之间的态射 E 与 E' 由一组映射 ϕ_k：$E \to E'$ 组成，其次数为 0、权重为 k，并且对所有 $k \geq 0$，均满足：

$$\sum_{i+j=k} (\epsilon_i \phi_j + \phi_i \epsilon_j) = 0$$

其中依照惯例 $\epsilon_0 = d$。我们用 $\mathscr{M}_\infty^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$表示由弱分次混合复形及其 ∞-态射构成的范畴。

注 C.2.7. 根据 [CCN21，注 2.26]， $\mathscr{M}_\infty^{h\epsilon-\mathrm{gr}}$几乎具有模型结构，且包含映射 $\mathscr{M}^{h\epsilon-\mathrm{gr}} \to \mathscr{M}^{h\epsilon-}{}_{\mathrm{gr}\infty}$ 在对弱等价进行局部化后，诱导出两个∞-范畴之间的等价。

构造 B.1.8 中的全化函子和定义 C.1.12 可扩展为从弱分次混合复形出发的等价。

命题 C.2.8 ([CCN21，命题 2.27])。 函子：

$$\mathbf{Tot} : \mathrm{Mod}_k^{h\epsilon-\mathrm{gr}} \to \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{cpl}}$$

将 E 送至其底层滤过分次模由构造 *B.1.8* 给出的完备滤过交换微分分次代数，并为其添加总微分 $D = d + \sum_{k\geq 1} \epsilon_k$，从而诱导出 ∞-范畴之间的等价。

注 C.2.9。 定义 C.1.8 中的实现函子可扩展到弱分次混合复形。此外，若 $\mathscr{M} =$ 模范畴$_k$，我们可以得到命题C.1.9 的类似结果，将实现表示为：

$$|E| \simeq \prod_{p\geq 0} E(p)$$

以及总微分 $D_E = d_E + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots$。

L引理 C.2.10. 如果 E 是一个权重非负的弱分次混合对象，则 *n:*

$$\operatorname{colim} \mathbf{Tot}(E) \simeq |E|$$

证明。 这是注 C.2.9的直接推论。 □

引理 C.2.11. 我们有一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}_k^{\epsilon-\mathrm{gr}} & \xrightarrow{\mathbf{Tot}} & \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{cpl}} \\ & \searrow^{\mathrm{Forget}} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Gr}} \\ & & \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{gr}} \end{array}$$

其中 Forget 是遗忘混合微分的函子 ϵ_i，对于 $i \geq 1$ 由沿着 $\mathbf{1}[\epsilon_i \mid i \geq 1] \to \mathbf{1}$的标量扩张诱导。它与引理*C.1.6*中的伴随类似。

附录 D. 形式模空间问题与 Koszul 对偶背景

本节旨在描述形式模空间问题的概念。在第3.1节中，我们将讨论以李代数丛为底空间的形式模空间问题。这类似于李代数与（交换）形式模空间问题之间广为人知的对应关系。我们将介绍这类对应关系背后的一般理论，以及理解它们所需的基本定义和工具。

D.1. 形式模空间问题。

本节旨在公理化变形函子的概念。其思想是，可以将变形理解为这样的函子：它将一类称为“阿廷的”的“小参数对象”映射到沿这些对象的变形空间。例如，对于每个 Artin 局部代数 A，这样的变形函子会赋予一个 ∞-群胚，其中包含沿 X 的 谱(A)的变形。由于局部阿廷代数的范畴以及“无穷小”对象的概念将发挥重要作用，我们将遵循 [Lur11], [CG18] 和 [CCN20], 的做法，首先定义一个一般框架，使我们能够讨论沿这类对象的变形。

D.1.1. 变形背景中的阿廷代数与小代数。

阿廷代数背后的总体思路是选取一类被视为“小”的代数，使得沿这些代数进行变形等同于考察无穷小变形，也就是说，观察我们想要变形对象的形式邻域。我们总是假设环境范畴 $\mathscr{A}$（将在其中定义 Artin 对象的概念）具有终对象。这就引出了变形背景的一般框架：

定义 D.1.1 ([Lur11，定义 1.1。3])。一个变形背景是一个有序对$(\mathscr{A}，\ \{E_\alpha\}_\alpha)$，其中 $\mathscr{A}$是一个可呈示的[1] ∞-范畴，而 $\{E_\alpha\}_\alpha$ 是谱范畴$\mathbf{Stab}(\mathscr{A})$[2],中 $\mathscr{A}$的对象集合； $\mathscr{A}$表示 $\mathscr{A}$的稳定化。

直观地说， $\{E_\alpha\}_\alpha$ 对应于我们希望沿其进行变形的一阶对象。为了与经典图景进行比较，我们取 $\mathscr{A}$ 为代数范畴。于是，一阶变形就是沿 $k[\epsilon]$进行的变形，而我们将其视为谱 $E=(\cdots,k[\epsilon_2],k[\epsilon_1],k[\epsilon_0],\cdots)$的底层对象，其中 $k[\epsilon_i]$ 是具有 $|\epsilon_i|=-i$ 和 $\epsilon_i^2=0$的二维 k-增广代数。在我们的情形中，族 $\{E_\alpha\}_\alpha$ 将始终只包含一个谱对象。下面给出变形背景的其他一些例子。

[1] $\mathscr{A}$若一个范畴由一小组“小对象”在同伦余极限下生成，则称其为可呈示的。[2]回忆一下，$\mathbf{Stab}(\mathscr{A})$ 中的对象对应于 $\mathscr{A}_*$ 上的谱对象，即一列 $E=(\cdots,a_2,a_1,a_0,a_{-1},\cdots)$，其中各项都是 $\mathscr{A}$ 中的带基点对象，并且 a_i 等价于环路空间 Ωa_{i+1}。对于 $n\geq 0$，我们记 $\Omega^{\infty-n}E=a_n$。

例 D.1.2.

– 对于 $\mathscr{A} = \mathrm{Mod}_A$ （其中 $A \in \mathrm{cdga}$），我们可以定义变形背景（$\mathbf{Mod}_A$, $\{E\}$），其中只有一个谱对象（[CG18，例 2.2]）：

$$E = (A \boxplus A[n])_{n\in\mathbb{Z}}$$

– 给定 $A \in$ 交换微分分次代数，我们考虑 $\mathscr{A} =$ 交换微分分次代数$_{/A}$，并且可以定义如下变形背景[1]:

$$\left(\mathrm{cdga}_{/A}, \{E = (A \boxplus A[n])_{n\in\mathbb{Z}}\}\right)$$

其中 $A \boxplus A[n]$ 是由 A 通过 $A[n]$ ([CG18，注 2。5])。我们将这个变形背景称为 $\mathscr{A}_{/A}$。

给定一个变形背景，我们可以以 $\Omega^{\infty-n}E_\alpha$ 为构件，定义“小”对象和态射的概念。

定义 D.1.3 ([Lur11，定义 1.1。14])。 给定一个变形背景 $(\mathscr{A},\ \{E_\alpha\}_{\alpha\in T})$我们称:

– 态射 $f : B \to B'$ 称为 初等 态射，若它由下列形式的拉回给出:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \star \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & \Omega^{\infty-n}(E_\alpha) \end{array}$$

对于某个 $\alpha \in T$ 和 $n \geq 1$。– 态射 $f :\ B \to B'$ 称为小 态射，若它是有限个初等态射的复合。– 对象 $B \in \mathscr{A}$称为阿廷的，若态射 $\mathscr{A} \to \star$ 是小的[2]。我们用$\mathbf{Art}_{\mathscr{A}}$表示由小对象构成的 $\mathscr{A}$满子范畴。

例 D.1.4. 回到 A-增广代数的例子，我们有 $\Omega^{\infty-n}E = A \boxplus A[n]$，因此，为了计算 $\star \to \Omega^{\infty-n}E$ 的同伦拉回，可以用代数 $A \boxplus (A[n] \oplus A[n-1])$ 替换点 $\star = A$ （注意 $n \geq 1$），其微分由恒等映射 $A[n] \to A[n-1]$ 诱导。
因此，严格拉回表明 B 是沿着$A[n-1]$对 B' 的平方零扩张。

现在我们将这些定义专门化到我们感兴趣的变形背景，即 $\mathscr{A}_{/A}$。

命题 D.1.5. 范畴 $\mathbf{Art}_{/A}$ 是交换微分分次代数$_{/A}$ 的最小满子范畴，满足:

– $A \boxplus A[n] \in \mathbf{Art}_{/A}$ ***for all*** $n \geq 0$

[1]注意，**Stab**(交换微分分次代数$_{/A}$) $\simeq$ **Stab**(交换微分分次代数$_{A//A}$) $\simeq$模范畴$_A$。 [2]阿廷对象可以看作“小”对象。事实上，它们在[Lur11]中被称为“小”对象。

– 对任意 $B \in \mathbf{Art}_{/A}$ 以及任意映射 $B \to A \boxplus A[n]$，若有 $n \geq 1$，则同伦拉回 $B \times_{A \boxplus A[n]} A$ 也属于阿廷的：

$$\begin{array}{ccc} B \times_{A \boxplus A[n]} A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A \boxplus A[n] \end{array}$$

证明。根据定义，$A \boxplus A[n]$ 是阿廷的，因为映射 $A \boxplus A[n] \to A$ 是初等的，它由以下拉回给出：

$$\begin{array}{ccc} A \boxplus A[n] & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A \boxplus A[n+1] \end{array}$$

此外，映射 $B \times_{A \boxplus A[n]} A \to B$ 是初等的，因此如果 B 是阿廷的，那么复合 $B \times_{A \boxplus A[n]} A \to B \to 0$ 也很小。因此，$\mathscr{A}_{/A}$ 满足命题中给出的性质。它是满足这些性质的最小范畴，因为根据定义，任何 Artin 对象都可以通过沿着 $A \to A \boxplus A[n]$ 对 $n \geq 1$ 进行有限次拉回，从某个 $A \boxplus A[n]$ 得到。□

D.1.2. 形式模问题。

主要思想是，“形式模空间问题”是一个函子，它将 B 映射到一个由变形组成的∞-群胚。例如，给定一个对象 X，我们将关注这样一个函子：它将阿廷对象 A 映射到沿着 A 对 X 进行“所有变形的空间”。

定义 D.1.6 ([Lur11，定义 1.1。14])。给定一个变形背景 $(\mathscr{A}, \{E_\alpha\}_{\alpha \in T})$，一个函子 ∞-范畴之间的：

$$F : \mathbf{Art}_{\mathscr{A}} \to \mathbf{Gpd}_\infty$$

称为形式模空间问题，如果它满足以下条件：

– 沿着该点（终对象）的变形是平凡的：

$$F(\star) \simeq \star$$

– 沿小态射 $\phi : A \to B$ 的 $\mathbf{Art}_{\mathscr{A}}$ 中的任意拉回都会被映射为 $\mathbf{Gpd}_\infty$ 中的一个拉回：

$$F\left(\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}\right) = \begin{array}{ccc} F(A') & \longrightarrow & F(A) \\ \downarrow & & \downarrow F(\phi) \\ F(B') & \longrightarrow & F(B) \end{array}$$

这类 ∞-范畴的函子记作 $\mathbf{FMP}\left(\mathscr{A}, \{E_\alpha\}_{\alpha\in T}\right)$；若谱对象集合 E_α 明确，则简称为 $\mathbf{FMP}_{\mathscr{A}}$。对于我们感兴趣的变形背景，将使用以下记法[1]:

$$\mathbf{FMP}_A := \mathbf{FMP}_{\mathscr{A}_{/A}}$$

定义 D.1.7。对于任意 $B \in$ 交换微分分次代数$_{/A}$，以下函子是一个形式模空间问题:

$$\begin{aligned}\mathbf{Spf}_A(B) : \mathbf{Art}_{/A} &\longrightarrow \mathbf{Gpd}_\infty \\ C &\longmapsto \underset{\mathrm{cdga}_{/A}}{\mathrm{Map}}\,(B, C)\end{aligned}$$

此外，我们得到一个函子 $\mathrm{cdga}_{/A} \to$ 形式模问题$_A$，将 B 发送到 $\mathrm{Spf}_A(B)$。
$\mathrm{Spf}_A(B)$ 称为 B 在 A上的形式谱 。

命题 D.1.8。根据 [Lur11，引理 1.1。20], 一个态射 $f: B \to C$在阿廷代数之间，B，$C \in \mathbf{Art}_{/A}$ 是小的，当且仅当它诱导出交换环的一个满射 $H^0(B) \to H^0(C)$。因此，定义 *D.1.6* 中的第二个条件可以改述如下:

$\mathbf{Art}_{/A}$ 中满足 $H^0(B) \to H^0(C)$ 或 $H^0(B') \to H^0(C)$ 为满射的任何拉回，都会被发送到 群胚$_\infty$中的一个拉回:

$$F\left(\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}\right) = \begin{array}{ccc} F(A') & \longrightarrow & F(A) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\phi)} \\ F(B') & \longrightarrow & F(B) \end{array}$$

它恢复了经典的 *Schlessinger* 条件（见 [Sch68]）。

有一种古老的启发式观点认为，（交换）变形问题（在 k 上）由李代数分类；这归因于某种对偶性（Koszul 对偶背景），而这种对偶性实际上与李与交换拟运算的 Koszul 对偶有关（见 [CCN20]）。这一启发式观点由下述定理形式化:

定理 D.1.9（参见 [Lur11] 和 [Pri10]）。存在一个 ∞-范畴之间的等价:

$$\mathbf{MC}: \mathbf{Alg}_{\mathbf{Lie}} \underset{\longleftarrow}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} \mathbf{FMP}: \mathbb{T}[-1]$$

[1]这 应被理解为在 上的交换形式模空间问题 A 或在 $\mathrm{Spec}(A)$.

警告D.1.10。 对于 $\mathfrak{g}$ 一个李代数，可以将 MC 视为一个函子，它将 Artin代数 A 映射到 Maurer–Cartan 元素的空间[1]。遗憾的是，这个空间通常并不定义形式模空间问题，但距离实现这一点也不远。事实上，在有限维 $\mathfrak{g}$上，Maurer–Cartan函子给出了正确的函子。函子 MC 对 Maurer–Cartan函子作了推广，以规避这个问题。

D.2. **形式模问题与 Koszul 对偶**。

本节旨在说明定理 D.1.9如何推广到任意 Koszul 对偶背景，同时讨论 谱(A) 下形式模空间问题和李代数丛这一具体例子。

D.2.1. 形式模空间问题的切复形。

本节旨在说明，控制给定形式模空间问题的代数在某种意义上就是该形式模空间问题的“切丛”。这解释了为何一阶变形以及提升变形时遇到的障碍由切复形控制。

为阐明以下定义，我们先解释 A-增广交换代数B的形式谱（定义 D.1.7）这一例子。我们有

$$\mathbf{Spf}_A(B)(C) = \underset{\mathrm{cdga}_{/A}}{\mathrm{Map}}\,(B, C)$$

在一阶变形的情形下， $C = A[\epsilon]$，这个映射空间对应于$\mathrm{Spec}(B)$ 在点 f 处的切复形：$\mathbf{Spec}(A) \to \mathbf{Spec}(B)$。TV08 的命题 1.4.1 证明了，[TV08, 命题 1.4.1.6] 连通截断的几何实现$\mathbb{T}_{B,\,f} \simeq f^*\mathbb{T}_B$ 由下式给出：

$$\mathbf{Spf}_A(B)(A \boxplus A[n]) \simeq \underset{\mathrm{cdga}_{/A}}{\mathrm{Map}}\,(B, A \boxplus A[n]) \simeq \underset{A}{\mathrm{Map}}(A, f^*\mathbb{T}_B[n]) \simeq |f^*\mathbb{T}_B[n]| \tag{17}$$

事实上，映射 $f\colon B \to A$ 诱导出一个映射：

$$\underset{\mathrm{cdga}_{/A}}{\mathrm{Map}}\,(A, A \boxplus M) \to \underset{\mathrm{cdga}_{/A}}{\mathrm{Map}}\,(B, A \boxplus M) \simeq \underset{\mathrm{cdga}_{/A}}{\mathrm{Map}}\,(B, B \boxplus f_*M)$$

右侧由 $f^*\mathbb{L}_B$ 表示，并且取 $M = A$ 即可得到所要证明的结论。这启发我们将“切丛”定义为形式模问题函子在给定变形背景的所有“一阶元素”[2]上的取值。

---

[1]李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Maurer–Cartan元素空间，是由满足 Maurer–Cartan方程的元素 $x \in \mathfrak{g}$构成的空间：

$$dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0$$

[2]回顾一下，这类“一阶”对象对应于 $\{\Omega^{\infty-n}(E_\alpha)\}_{\alpha\in T\text{ 中的元素},\ n\in\mathbb{N}}$，例如，在 A-增广代数的情形下，平方零扩张 $A \boxplus A[n]$。

定义 D.2.1 (切丛函子，[Lur11，第 1 节。2])。给定一个变形背景 $(\mathscr{A}, \{E_\alpha\}_\alpha)$，我们将形式模空间问题 F在 α 处的切复形定义为谱对象：

$$F(E_\alpha) \in \mathbf{Sp} \coloneqq \mathbf{Stab}(\mathbf{sSet})$$

我们将其记为[1] $\mathbb{T}_F$ 若只有一个 $\alpha \in T$。

这个谱对象验证了$\Omega^{\infty-n}F(E_\alpha) \simeq F(\Omega^{\infty-n}E_\alpha)$ 对所有 $n \geq 0$ 均成立（参见 [Lur11，注 1.2。7]）。注意，切复形 $\mathbb{T}_F$ 实际上并非上链复形，而是先验上仅为一个谱对象。这两个范畴通过以下复合相关联：

$$\mathrm{Mod}_A \xrightarrow{\text{Forget}} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \overset{\text{DK}}{\simeq} \mathbf{Stab}(\mathbf{sAb}) \xrightarrow{\text{Forget}} \mathbf{Stab}(\mathbf{sSet}) = \mathbf{Sp} \tag{18}$$

命题 D.2.2 ([CCN20，引理 2。15])。形式模空间问题 $F \in$ 形式模问题$_A$在函子模范畴$_A$ 下有唯一的原像，函子(18)我们也将其记为 $\mathbb{T}_F$。此外，对任意 $n \geq 0$，我们有一个等价：

$$\underset{\mathrm{Mod}_A}{\mathrm{Map}}\left(A[-n], \mathbb{T}_F\right) \simeq F(A \boxplus A[n])$$

事实证明，与 $f^*\mathbb{T}_B$ 相关联的谱对象（由复合 (18) 给出）与由以下各项构成的谱对象一致：$\mathbf{Spf}_A(B)(A \boxplus A[n])$ 因此，余切复形 $f^*\mathbb{T}_B$ 是切丛函子$\mathbb{T}_{\mathbf{Spf}_A(B)}$的代表元，这得益于等价 (17)。

D.2.2. *Koszul* 对偶背景。

再次回到一般变形背景 $\mathscr{A}$的设定，我们希望将某个代数对象的 ∞-范畴 $\mathscr{B}$ 与形式模问题$_{\mathscr{A}}$对应起来。
形式谱 $\mathbf{Spf}$ （见定义 D.1.7 ）是一种函子性的方式，可由 $\mathscr{A}$中的对象构造形式模问题。假设所需的等价存在，我们便可以构造一个函子：

$$\mathfrak{D}\colon \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathbf{Spf}} \mathbf{FMP}_{\mathscr{A}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}.$$

该函子应被理解为一个“弱对偶”函子；它并非等价，但至少它限制在 Artin 对象上时，应当表现为到 $\mathscr{B}$ 的某个由“良好”对象构成的子范畴的等价。

本节将介绍 Koszul 对偶背景的概念，作为一种恰当的公理化框架，使我们能够得到所需的等价；该等价由定理D.2.11给出。

[1]这一记号是类比于切复形而来的，但先验地它仅仅是谱对象的（一个集合）。然而，我们将看到，$\mathbb{T}_F$ 可以由一个实际的切复形“表示”。

定义 D.2.3（对偶变形背景， [CG18，定义 2.11]）。 一对（$\mathscr{B}$， $\{F_\alpha\}_{\alpha\in T}$）称为对偶变形背景，如果 $\mathscr{B}$ 是一个可呈示的 ∞-范畴，并且 $\mathscr{F}_\alpha \in \mathbf{Stab}(\mathscr{B}^{\mathrm{op}})$。

我们称 $\mathscr{B}$ 中的一个对象（分别地，态射）是良的，如果将其视为 $(\mathscr{B}^{\mathrm{op}}, \{F_\alpha\}_{\alpha\in T})$[1] 中的对象时，它是阿廷的。我们用 $\mathscr{B}^{\mathrm{gd}}$ 表示 $\mathscr{B}$中良对象构成的满子范畴。

例 D.2.4.
– 若 $A \in$ 是交换微分分次代数，则 $\left(\mathbf{Mod}_A, (A[n])_{n\in\mathbb{Z}}\right)$ 是一个变形背景。由于取相反范畴会交换悬挂函子与去悬挂函子，我们得到对偶变形背景 $\left(\mathbf{Mod}_A, (A[-n])_{n\in\mathbb{Z}}\right)$。

当 A 有界且集中于非正次数时，[CG18，引理 2.16] 告诉我们，一个元素 $M \in \mathrm{Mod}_A$ 属于此对偶变形背景，若其完美且上同调集中于正次数，则它是良对象（另见 [CG18，注 2.17]）– 存在一个对偶变形背景：

$$(\mathrm{LieAlgd}_A, \{\mathrm{Free}(0 : A[-n] \to \mathbb{T}_A)\}_{n\in\mathbb{Z}})$$

请注意，每个良好的李代数丛，其底层都是余纤维化 A-模，并且在遗忘微分后是有限生成的，作为 $\mathbb{T}_A$ 上的模（参见[Nui19b，引理 6。10]）。

定义 D.2.5 （Koszul 对偶背景，[CG18，定义 2。18]）。
弱 Koszul 对偶背景由以下数据构成：
– 一个变形背景（$\mathscr{A}$， $\{E_\alpha\}_{\alpha\in T}$）– 一个对偶变形背景（$\mathscr{B}$， $\{F_\alpha\}_{\alpha\in T}$）– 一个伴随：

$$\mathfrak{D} : \mathscr{A} \rightleftarrows \mathscr{B}^{\mathrm{op}} : \mathfrak{D}'$$

使得对于所有 $n \geq 0$，都存在一个等价 $\Omega^{\infty-n}E_\alpha \simeq \mathfrak{D}'(\Omega^{\infty-n}F_\alpha)$。

如果满足以下条件，则称其为一个*Koszul* 对偶背景：
(1) 对每个对象 $B \in \mathscr{B}^{\mathrm{gd}}$，余单位态射 $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'A \to A$ 是一个等价。 (2) 对每个 α，函子

$$\Theta_\alpha : \mathscr{B} \to \mathbf{Sp}$$

将 $B \in \mathscr{B}$ 发送到以下给出的谱对象：

$$\left(\mathrm{Map}_{\mathscr{B}}(\Omega^{\infty-n}E_\alpha, B)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{Sp}$$

[1]这里，$(\mathscr{B}^{\mathrm{op}}, \{F_\alpha\}_{\alpha\in T})$ 通常不是变形背景，因为 $\mathscr{B}^{\mathrm{op}}$ 通常不可呈示。不过，阿廷对象的定义在 $\mathscr{B}^{\mathrm{op}}$ 中仍然有意义。

是保守的，并保持筛化余极限。

注D.2.6。 根据 Lurie 的术语，弱 Koszul 对偶背景与条件 (1) 一起为我们提供了一个弱变形理论， [Lur11，定义 1.3。1]。Koszul 对偶背景是一个变形理论的例子，依据 [Lur11，定义 1.3。9]。

例D.2.7。 设 $A \in$ 交换微分分次代数$^{\leq 0}$ 有界。我们有一个由对偶化给出的 Koszul 对偶背景（[CG18，例 2。20]）：

$$(-)^\vee : \left(\mathrm{Mod}_A, (A[n])_{n\in\mathbb{Z}}\right) \rightleftarrows \left(\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{op}}, (A[-n])_{n\in\mathbb{Z}}\right) : (-)^\vee$$

例D.2.8 ([CG18，定理 3。9] 和 [Nui19b])。
对于例D.1.2 和 D.2.4中的（对偶）变形背景，若 A 是余纤维化、非正分次、几乎有限呈现且最终余连通的（换言之，满足假设 3.2.2），则我们有一个 Koszul 对偶背景：

$$\mathbf{CE} : \mathrm{LieAlgd}_A \rightleftarrows \left(\mathrm{cdga}_{/A}\right)^{\mathrm{op}} : \mathfrak{D}$$

命题 D.2.9([CG18，命题 2。22])。
给定一个 *Koszul* 对偶背景（记号与定义*D.2.5*相同），我们有以下结论：

– $\mathfrak{D}(\Omega^{\infty-n}E) \simeq \Omega^{\infty-n}F$ 对所有 $n \geq 0$均成立。– 对每个阿廷对象 $A \in \mathbf{Art}_{\mathscr{A}}$，单位映射 $A \to \mathfrak{D}'\mathfrak{D}A$ 是一个等价。– 伴随 $\mathfrak{D} \dashv \mathfrak{D}'$ 诱导出一个等价：

$$\mathfrak{D} : \mathbf{Art}_{\mathscr{A}} \rightleftarrows \left(\mathscr{B}^{\mathrm{gd}}\right)^{\mathrm{op}} : \mathfrak{D}'$$

– 若 $M \in \mathbf{Art}_{\mathscr{A}}$ 且 $f\colon A \to B$ 是 $\mathscr{A}$ 中的小态射，则 $\mathfrak{D}$ 将拉回图表：

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ M & \longrightarrow & B \end{array}$$

映射为一个拉回图表。

推论 D.2.10。 给定一个 *Koszul* 对偶背景，我们可以构造以下函子：

$$\psi : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbf{Fun}\left(\mathscr{B}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Gpd}_\infty\right) \xrightarrow{\circ\mathfrak{D}} \mathbf{Fun}\left(\mathscr{A}, \mathbf{Gpd}_\infty\right)$$

然后 ψ 通过 形式模问题（$\mathscr{A}$，$\{E_\alpha\}$）分解，并得到一个映射：

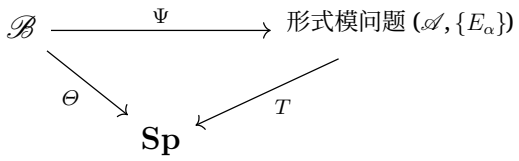
$$\Psi : \mathscr{B} \to \mathbf{FMP}(\mathscr{A}, \{E_\alpha\})$$

事实证明，Koszul 对偶背景的定义确保映射Ψ： $\mathscr{B} \to \mathrm{FMP}(\mathscr{A}, \{E_\alpha\})$确实是一个等价。

定理 D.2.11 ([CG18，定理 2。33] 或 [Lur11，定理 1.3。12])。 给定如上所述的 *Koszul* 对偶背景，函子 Ψ 是一个等价：

$$\Psi : \mathscr{B} \to \mathbf{FMP}(\mathscr{A}, \{E_\alpha\})$$

命题 D.2.12 ([CG18，命题 2.36])。 我们有如下交换图：



注D.2.13。 该图表明 TF等价于 Θ（$\mathbb{T}_F$） 其中 $\mathbb{T}_F \in \mathscr{B}$，因此该切丛函子具有不仅仅是谱对象的更多结构。此外，当 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{/A}$且 $F = \mathbf{Spf}$（B） 时，$\mathbb{T}_F = f^* \mathbb{T}_B$其中 f： $B \to A$（见引理 1.3.27）。

参考文献

[ABB17] Lino Amorim 和 Oren Ben-Bassat。偏范畴化的拉格朗日对应。Adv. Theor. Math. Phys.，21(2)：289–381，2017。[AC12] Camilo Arias Abad 和 Marius Crainic。李代数丛的同伦表示。J. Reine Angew. Math.，663：91–126，2012。[AC21] Mathieu Anel 和 Damien Calaque。导出临界轨迹的移位辛约化。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2106.06625，2021年6月。[AGV72] 拓扑斯理论与概形的 étale 上同调。第1卷：拓扑斯理论。《数学讲义》，第269卷。Springer-Verlag，柏林-纽约，1972年。布瓦-马里代数几何研讨班 1963–1964（SGA 4），由 M. Artin、A. Grothendieck 和 J. L. Verdier 主持。与 N. Bourbaki、P. Deligne 及 B. Saint-Donat 合作。[BBJ19] Christopher Brav、Vittoria Bussi 和 Dominic Joyce。具有移位辛结构的导出概形的达布定理。J. Amer. Math. Soc.，32(2)：399–443，2019。[Bou98] Nicolas Bourbaki。代数 I。第1–3章。《数学基础》（柏林）。Springer-Verlag，柏林，1998年。译自法文，重印1989年的英文译本 [MR0979982 (90d:00002)]。[BSS21] Marco Benini、Pavel Safronov 和 Alexander Schenkel。群作用的经典 BV 形式体系。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2104.14886，2021年4月。[BV81] I. A. Batalin 和 G. A. Vilkovisky。规范代数与量子化。Phys. Lett. B，102(1)：27–31，1981。[BV83] I. A. Batalin 和 G. A. Vilkovisky。具有线性相关生成元的规范理论量子化。Phys. Rev. D (3)，28(10)：2567–2582，1983。[Cal14] Damien Calaque。关于导出辛几何与拓扑场论的三讲。Indag. Math. (N.S.)，25(5)：926–947，2014。[Cal15] Damien Calaque。映射叠上的拉格朗日结构与半经典拓扑场论。载于《几何、拓扑与代数中的栈与范畴》，《当代数学》第643卷，第1–23页。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2015年。[Cal19] Damien Calaque。移位余切叠是移位辛的。Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)，28(1)：67–90，2019。[Cal21] Damien Calaque。辛几何中的导出栈。载于《物理学中的新空间——形式与概念反思》，第155–201页。剑桥大学出版社，剑桥，2021年。[CCN20] Damien Calaque、Ricardo Campos 和 Joost Nuiten。歌剧代数的模空间问题。2020年。[CCN21] Damien Calaque、Ricardo Campos 和 Joost Nuiten。李代数丛是曲李代数。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2103.10728，2021年3月。[CCT14] Damien Calaque、Andrei Căldăraru 和 Junwu Tu。关于导出自交的李代数丛。数学进展，262：751–783，2014。[CF03] Marius Crainic 和 Rui Loja Fernandes。李括号的可积性。Ann. of Math. (2)，157(2)：575–620，2003。[CG18] Damien Calaque 和 Julien Grivaux。形式模空间问题与形式导出栈。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:1802.09556，2018年2月。[CG21] Kevin Costello 和 Owen Gwilliam。量子场论中的因子化代数。第2卷，《新数学专著》第41卷。剑桥大学出版社，剑桥，2021年。[CHS21] Damien Calaque、Rune Haugseng 和 Claudia Scheimbauer。导出代数几何中的 AKSZ 构造作为扩展拓扑场论。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2108.02473，2021年8月。

[CPT+17] Damien Calaque、Tony Pantev、Bertrand Toën、Michel Vaquié 和 Gabriele Vezzosi。移位泊松结构与变形量子化。《J. Topol.》，10(2):483–584，2017。[Cra04] Marius Crainic。关于扰动引理与变形。arXiv：代数拓扑，2004。[CRvdB10]Damien Calaque、Carlo A. Rossi 和 Michel van den Bergh。李代数丛的霍赫希尔德（上）同调。《Int. Math. Res. Not. IMRN》，(21):4098–4136，2010。[FK14] Giovanni Felder 和 David Kazhdan。经典主方程。载于《表示论展望》，当代数学第 610 卷，第 79–137 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014。附录由 Tomer M. Schlank 撰写。[FR12] Klaus Fredenhagen 和 Katarzyna Rejzner。经典场论函数方法中的 Batalin-Vilkovisky 形式体系。《Comm. Math. Phys.》，314(1):93–127，2012。[FR13] Klaus Fredenhagen 和 Katarzyna Rejzner。微扰代数量子场论中的 Batalin-Vilkovisky 形式体系。《Comm. Math. Phys.》，317(3):697–725，2013。[GR20] D. Gaitsgory 和 N. Rozenblyum。《导出代数几何研究：第二卷：变形、李理论与形式几何》。数学调查与专著。美国数学会，2020。[Gra22] Albin Grataloup。导出临界点集上的导出拉格朗日纤维化。《Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu》，第 1–35 页，2022。[Hab16] Márton Hablicsek。霍赫希尔德上链复形上的导出交。arXiv 电子预印本，第 arXiv:1608.06965 页，2016年8月。[Hin97] Vladimir Hinich。同伦代数的同调代数。《Comm. Algebra》，25(10):3291–3323，1997。[Hov99] Mark Hovey。《模型范畴》，数学调查与专著第 63 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999。[Joy15] Dominic Joyce。导出临界点集的经典模型。《J. Differential Geom.》，101(2):289–367，2015。[Kla17] Ralph L. Klaasse。几何结构与李代数丛。arXiv 电子预印本，第 arXiv:1712.09560 页，2017年12月。[Lur04] Jacob Lurie。导出代数几何。麻省理工学院，2004。博士论文——麻省理工学院。[Lur07] Jacob Lurie。《导出代数几何 IV：变形理论》。arXiv 电子预印本，第 arXiv:0709.3091 页，2007年9月。[Lur09a] Jacob Lurie。《导出代数几何 V：结构化空间》。arXiv 电子预印本，第 arXiv:0905.0459 页，2009年5月。[Lur09b] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》，数学年鉴研究第 170 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009。[Lur11] Jacob Lurie。《导出代数几何 X：形式模问题》。2011。可见：https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/DAG-X.pdf。[Lur12] Jacob Lurie。《导出代数几何 XIV：可表性定理》。2012。[Lur17] Jacob Lurie。《高阶代数》。2017。[LV12] Jean-Louis Loday 和 Bruno Vallette。《代数歌剧》，《数学科学基础原理》第 346 卷，*[《数学科学基础原理》]*。Springer，海德堡，2012。[Mil80] James S. Milne。《étale 上同调》。普林斯顿数学丛书，第 33 号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1980。[MLM94] Saunders Mac Lane 和 Ieke Moerdijk。《几何与逻辑中的层》。Universitext。Springer-Verlag，纽约，1994。拓扑斯理论初步，1992 年版的修订重印本。

[Mon21] Ludovic Monier。关于线性栈的札记。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2103.06555 页，2021年3月。[Mou21] Tasos Moulinos。滤过的几何。《伦敦数学学会会刊》，53(5):1486–1499，2021。[Nui19a] Joost Nuiten。李代数丛的同伦代数。《应用范畴结构》，27(5):493–534，2019。[Nui19b] Joost Nuiten。李代数丛的 Koszul 对偶。《数学进展》，354:106750，63，2019。[Pav22] Emanuele Pavia。Chevalley-Eilenberg 函子上的混合分次结构。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2207.12012 页，2022年7月。[Pri10] J.P. Pridham。统一导出变形理论。《数学进展》，224(3):772–826，2010。[PS20] Brent Pym 和 Pavel Safronov。移位辛李锚丛。《Int. Math. Res. Not. IMRN》，(21):7489–7557，2020。[PTVV13] Tony Pantev、Bertrand Toën、Michel Vaquié 和 Gabriele Vezzosi。移位辛结构。《Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.》，117:271–328，2013。[PV13] Mauro Porta 和 Gabriele Vezzosi。单纯代数的无穷小扩张与平方零扩张。arXiv 电子预印本，第 arXiv:1310.3573 页，2013年10月。[Rej11] Katarzyna Rejzner。局部协变场论中的 Batalin-Vilkovisky 形式体系。arXiv 电子预印本，第 arXiv:1111.5130 页，2011年11月。[RM17a] Jacqueline Rojas 和 Ramón Mendoza。关于模上联络与协变导数存在性的一则简短札记。《Proyecciones》，36(2):225–244，2017。[RM17b] Jacqueline Rojas 和 Ramón Mendoza。关于模上联络与协变导数存在性的一则简短札记。《Proyecciones》，36(2):225–244，2017。[Saf16] Pavel Safronov。通过经典 Chern–Simons 理论进行拟哈密顿约化。《数学进展》，287:733–773，2016。[Saf20] Pavel Safronov。移位几何量子化。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2011.05730 页，2020年11月。[Sch68] Michael Schlessinger。Artin 环的函子。《Trans. Amer. Math. Soc.》，130:208–222，1968。[SS00] Stefan Schwede 和 Brooke E. Shipley。幺半模型范畴中的代数与模。《Proc. London Math. Soc. (3)》，80(2):491–511，2000。[Tab09] Gonçalo Tabuada。dg 范畴的 Postnikov 塔、 k-不变量与障碍理论。《J. Algebra》，321(12):3850–3877，2009。[Tat57] John Tate。Noether 环与局部环的同调。《Illinois J. Math.》，1:14–27，1957。[Toe09] Bertrand Toen。高阶层叠与导出层叠：全局概览。载于《代数几何——西雅图 2005。第一部分》，纯数学研讨会论文集第 80 卷，第 435–487 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009。[Toe14] Bertrand Toen。导出代数几何。《EMS Surv. Math. Sci.》，1(2):153–240，2014。[TV05] Bertrand Toën 和 Gabriele Vezzosi。同伦代数几何。I. 拓扑斯理论。《数学进展》，193(2):257–372，2005。[TV08] Bertrand Toën 和 Gabriele Vezzosi。同伦代数几何。II. 几何栈及其应用。《Mem. Amer. Math. Soc.》，193(902):x+224，2008。[Vez20] Gabriele Vezzosi。导出临界点集上的基本结构。《微分几何及其应用》，71:101635，2020。

Albin Grataloup，IMAG，蒙彼利埃大学，法国国家科学研究中心，蒙彼利埃，
法国电子邮箱地址： albin.grataloup@umontpellier.fr