arXiv:2302.04044v1 [math.RA] 8 Feb 2023

三种斐波那契链非周期代数

DANIELE CORRADETTI、David Chester、Raymond Aschheim 和 Klee Irwin

Abstract. 非周期代数是无限维代数，其生成元对应于非周期集合中的一个元素。这些代数已被证明是研究可在多层结构中传播的元激发，以及构建量子力学中某些可积模型的有用工具。承接 Patera 和 Twarock 的研究，我们提出了三种基于斐波那契链准晶的非周期代数：一种准晶李代数、一种非周期维特代数，以及一种非周期约当代数。虽然此前已有通过修改斐波那契链构造准晶李代数的工作，但我们在此提出一种与原始准晶完全吻合的非周期代数。此外，据我们所知，这是首次提出非周期约当代数，为理论和应用方面的进一步发展留下了空间。

1. Introduction

晶体学考克斯特群是李理论中的重要工具，与复数域上的半单有限维李代数一一对应，因此在物理学中发挥着基础作用。另一方面，非晶体学考克斯特群与二十面体准晶及许多非周期结构密切相关 [MP93, KF15]。因此，在这样的背景下，研究在非晶体学对称性下保持不变的代数，尤其是非周期李代数，自然是顺理成章的。

非周期代数是一类无限维代数，其中每个生成元都对应非周期集合中的一个元素。Patera、Pelantova 和 Twarock 首先引入了一族非周期李代数 [PPT98], ，随后该族被推广并扩展[PT99, TW00a] ，之后又由 Mazorchuk 进行研究 [Ma02, MT03]。事实证明，这些代数适用于物理应用和理论模型，例如 [Tw99a] 中维拉索罗对称性的破缺，以及 [TW00b] 中精确可解模型的构造。事实上，这并不令人意外，因为通过研究可在组分按准周期方式排列的多层结构中传播的元激发，人们取得了重要成果。这些激发包括等离激元-极化激元、自旋波、光波和电子等 [AC03]。在这一背景下，相关物理性质通过哈密顿量进行分析[Ja21, SCP]; 对于最近邻紧束缚模型，其形式为

$$(H\psi)_n = t\psi_{n+1} + t\psi_{n-1} + \lambda V_n \psi_n, \tag{1.1}$$

其中， λ 表示势能强度，而势能序列 V_n 则根据某种非周期替换规则 [Ma] 生成，例如斐波那契、图厄-莫尔斯、倍周期、三进制康托等。因此，我们重新关注能够与这些链，尤其是斐波那契链，完全匹配的非周期代数。

本文针对一类斐波那契链准晶[LS86]，介绍三种非周期代数：第一种是准晶李代数，第二种是带有 Virasoro 扩张的非周期维特代数，最后介绍一种非周期约当代数。

本研究获量子引力研究所资助。

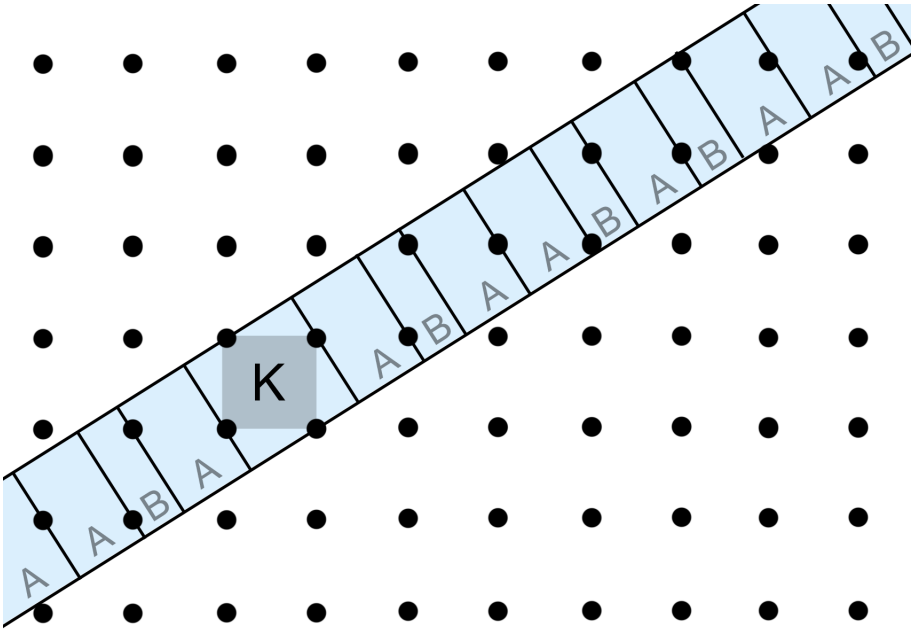

FIGURE 1. 一种 $\mathcal{F}$ 通过切割与投影方案获得的一维准晶。该一维准晶通过将整数格与接受窗 Ω 相交而获得 $\mathbb{Z}^2$，此处接受窗表示为由两条无理斜率直线围成的区域 $1/\tau$。落入接受窗的点被投影到下方直线上，准晶便位于该直线上。

本文结构如下。第 2 节遵循 [LS86]，简要回顾一般情形下的一维斐波那契链 准晶。随后，我们定义准加法 这一二元运算，它体现了这类准晶的一种几何不变性。在第 3、4 和 5 节中，我们构造三种不同的斐波那契链非周期代数。第 3 节讨论的第一种代数是准晶李代数，回顾了 Twarock 和 Patera[PPT98, TW00a], 的原始研究，这些研究构成了我们的出发点。至于第二种非周期代数，即第 4 节讨论的非周期维特代数及其 Virasoro 扩张，我们采用了与 [TW00a]略有不同的方法。具体而言，我们聚焦于斐波那契链准晶的解析定义，并采用基于整数而非非周期准晶坐标的指标方案来定义非周期维特代数。在该代数的定义中，我们避免了 [PPT98, TW00a],引入的点缺陷，因此作为我们非周期代数基础的准晶仅包含长度为 τ 和 τ^2 的砖片，与斐波那契链准晶完全吻合。最后，在第 5 节中，我们介绍第三种非周期代数——一种利用准加法在斐波那契链准晶上的不变性构造的约当代数。据我们所知，这是文献中首次提出非周期约当代数。

2. THE FIBONACCI-CHAIN QUASICRYSTAL

2.1. 定义。 斐波那契链 $\mathcal{F}$ 是一种一维非周期序列，可通过替换规则 $A \longrightarrow AB, \quad B \longrightarrow A,$ 以起始点 $S_0 = B$ 得到，进而生成以下序列

$$B,\ A,\ AB,\ ABA,\ ABAAB,\ \ldots \tag{2.1}$$

n		$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$\mathcal{F}_{1,\ 0}(n)$		$\cdots$	$-2-4\tau$	$-1-3\tau$	$-1-2\tau$	$-\tau$	1	$1+\tau$	$2+2\tau$	$2+3\tau$	$3+4\tau$	$\cdots$
$\mathcal{F}_{1/2,\ 0}(n)$		$\cdots$	$-2-4\tau$	$-2-3\tau$	$-1-2\tau$	$-1-\tau$	0	$1+\tau$	$1+2\tau$	$2+3\tau$	$2+4\tau$	$\cdots$
$\mathcal{F}_{0,\ 0}(n)$		$\cdots$	$-3-4\tau$	$-2-3\tau$	$-2-2\tau$	$-1-\tau$	0	τ	$1+2\tau$	$1+3\tau$	$2+4\tau$	$\cdots$

TABLE 1. 斐波那契链准晶的元素 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}(n)$，其中 $\alpha \in\left\{1, \frac{1}{2}, 0\right\}$ 和 $\beta=0$。

很容易注意到，(2.1) 中块的数量按斐波那契数列 1，1，2，3，5.....递增，并且 A 与 B 的比值趋近于黄金比例 $\tau=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$。

2.2. 斐波那契链准晶的实现。现在，我们将从切割-投影方案出发，给出斐波那契链 $\mathcal{F}$ 在一维准晶中的不同实现。如图 (1) 所示，我们将考虑一个整数格 $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ 和一个区域，称为接受窗，它由两条具有相同无理斜率 $1/\tau \approx 0.618...$的直线围成，两条直线之间的间隔长度为 1。落入接受窗的格点随后将投影到较低的直线上，从而实现一维斐波那契链准晶。显然，接受窗的平移对应于同一斐波那契链准晶的不同实现。

为了使这一构造在理论上严谨，我们在此定义一个切投影方案，同时也给出准晶坐标的显式公式。令$\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$为整数格，令 $\mathbb{Z}[\tau]=\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$为狄利克雷环。注意到方程 $x^2=x+1$ 的两个根为 $\tau \approx 1.618...$ 和 $1-\tau \approx -0.618...$，因此自然定义了一个伽罗瓦自同构 $*$，使得对于每个数 $n \in \mathbb{Z}[\tau]$ 都对应

$$n=n_1+n_2\tau \longrightarrow n^*=n_1+(1-\tau)n_2. \tag{2.2}$$

式（2.2）中的伽罗瓦自同构适合作为我们切投影准晶的星映射，即将点从平行空间映射到垂直空间，反之亦然的对合[BG17]。于是，斐波那契链准晶可表示为

$$\mathcal{F}(\Omega)=\left\{n \in \mathbb{Z}[\tau]\,; n^* \in \Omega\right\}, \tag{2.3}$$

其中接受窗 Ω 是线段（$0,1$]。

值得指出的是，根据（2.3），狄利克雷整数 $n \in \mathbb{Z}[\tau]$ 属于斐波那契链准晶，当且仅当特征函数 $\chi_\Omega(n^*)=1$。这一记号将在下一节定义 Witt非周期代数时派上用场。

定义前述斐波那契链准晶 $\mathcal{F}$ 的一种更明确方式，是按照 [LS86], 中的形式直接给出坐标，其中，一类一般的斐波那契链准晶被定义为集合 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 该集合包含狄利克雷数，这些数是.....的像

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(m)=\left\lfloor \frac{m}{\tau}+\alpha \right\rfloor + m\tau+\beta, \tag{2.4}$$

其中 m，$\beta \in \mathbb{Z}$、$\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $\lfloor x \rfloor$ 是 x的下取整函数。由于项 β 起平移作用，我们主要关注 $\beta=0$，而主要感兴趣的是 $\alpha=0$，$1/2$ 或 1。事实上，很容易看出，对于 $\alpha=1$ 和 $\beta=0$, 该集合等于 $\mathcal{F}(\Omega)$，其中 $\Omega=(0,1]$；其明确取值列表见表1第一行。另一个值得注意的斐波那契链准晶由集合 $\left\{\mathcal{F}_{1/2,0}(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 给出，它也称为回文斐波那契链准晶，其元素也可在表1中找到。这种准晶关于原点具有180度旋转对称性，有时便于将其推广到高维。更一般地，经过直接计算可得

$x \vdash y$	y	$-1-3\tau$	$-1-2\tau$	$-\tau$	1	$1+\tau$	$2+2\tau$	$2+3\tau$	$\cdots$
x		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$-1-3\tau$	$\cdots$	$-1-3\tau$	$-2-4\tau$	$-3-6\tau$	$-4-8\tau$	$-5-9\tau$	$-6-11\tau$	$-7-12\tau$	$\cdots$
$-1-2\tau$	$\cdots$	$-\tau$	$-1-2\tau$	$-2-4\tau$	$-3-6\tau$	$-4-7\tau$	$-5-9\tau$	$-6-11\tau$	$\cdots$
$-\tau$	$\cdots$	$2+2\tau$	$1+\tau$	$-\tau$	$-1-3\tau$	$-2-4\tau$	$-3-6\tau$	$-4-7\tau$	$\cdots$
1	$\cdots$	$4+5\tau$	$3+4\tau$	$2+2\tau$	1	$-\tau$	$-1-3\tau$	$-2-4\tau$	$\cdots$
$1+\tau$	$\cdots$	$5+7\tau$	$4+6\tau$	$3+4\tau$	$2+2\tau$	$1+\tau$	$-\tau$	$-1-2\tau$	$\cdots$
$2+2\tau$	$\cdots$	$7+11\tau$	$6+9\tau$	$5+7\tau$	$4+5\tau$	$3+4\tau$	$2+2\tau$	$1+\tau$	$\cdots$
$2+3\tau$	$\cdots$	$8+12\tau$	$7+11\tau$	$6+9\tau$	$5+7\tau$	$4+6\tau$	$3+4\tau$	$2+3\tau$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

TABLE 2. $x \vdash y$ 的准加法，其中 x 和 y 属于斐波那契链准晶 $\mathcal{F}(n)$。

对于 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$，集合 $\mathcal{F}(\Omega)$ 与 $\Omega = (-1+\alpha+\beta,\ \alpha+\beta]$相对应。因此，准晶 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 的特征函数 $\chi_{\alpha,\ \beta}$ 为

$$\chi_{\alpha,\beta}(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } -1+\alpha+\beta < n \leq \alpha+\beta \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \tag{2.5}$$

其中 $n \in \mathbb{Z}[\tau]$。

2.3.准加法。斐波那契链准晶的一种重要对称性通过一种称为准加法 [MP93] 的二元运算来表示，其定义如下

$$n \vdash m = \tau^2 n - \tau m, \tag{2.6}$$

对每个 $n,\ m \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$均成立。显然，准加法既不具有交换性，也不具有结合性，但具有柔性，即 $n \vdash (m \vdash n) = (n \vdash m) \vdash n$，并具有以下性质

$$n \vdash n = n, \tag{2.7}$$
$$n \vdash (n \vdash m) = m \vdash n, \tag{2.8}$$
$$(n+p) \vdash (m+p) = (n \vdash m) + p, \tag{2.9}$$
$$(n \vdash m) + (m \vdash n) = n + m, \tag{2.10}$$
$$(n \vdash m) - (m \vdash n) = (n-m) \vdash (m-n), \tag{2.11}$$

对每个 $n,\ m,\ p \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$均成立。这种运算的一个重要特点是，给定斐波那契链准晶 $\mathcal{F}(\Omega)$ 中的任意两点$n,\ m$，则 $n \vdash m$ 仍属于 $\mathcal{F}(\Omega)$。事实上，如果星映射 $n^*,\ m^*$ 在 ((2.2)) 中的像属于 Ω，那么

$$(n \vdash m)^* = (1-\tau)^2 n - (1-\tau) m, \tag{2.12}$$

由于该集合是凸的，因此属于 Ω。因此，斐波那契链准晶在准加法下封闭。准加法乘法表的一个示例见表 2。

$[L_x, L_y]$	L_0	L_1	$L_{1+\tau}$	$L_{2+2\tau}$	$L_{2+3\tau}$
$L_{-2-4\tau}$	$(2+4\tau)L_{-2-4\tau}$	0	$(3+5\tau)L_{-1-3\tau}$	0	$(4+7\tau)L_{-\tau}$
$L_{-1-3\tau}$	$(1+3\tau)L_{-1-3\tau}$	0	0	0	$(3+6\tau)L_1$
$L_{-1-2\tau}$	$(1+2\tau)L_{-1-2\tau}$	0	$(2+3\tau)L_{-\tau}$	$(3+4\tau)L_1$	$(3+5\tau)L_{1+\tau}$
$L_{-\tau}$	$\tau L_{-\tau}$	0	$(1+2\tau)L_1$	0	$(2+4\tau)L_{2+2\tau}$
L_0	0	L_1	$(1+\tau)L_{1+\tau}$	$(2+2\tau)L_{2+2\tau}$	$(2+3\tau)L_{2+3\tau}$
L_1	$-L_1$	0	0	0	0
$L_{1+\tau}$	$(-1-\tau)L_{1+\tau}$	0	0	0	$(1+2\tau)L_{3+4\tau}$
$L_{2+2\tau}$	$(-2-2\tau)L_{2+2\tau}$	0	0	0	$\tau L_{4+5\tau}$
$L_{2+3\tau}$	$(-2-3\tau)L_{2+3\tau}$	0	$(-1-2\tau)L_{3+4\tau}$	$-\tau L_{4+5\tau}$	0

TABLE 3. $\mathfrak{L}(\mathcal{F}(\Omega))$ 的一组生成元在不同 $x, y \in \mathcal{F}(\Omega)$ 下的对易关系。

3. A Fibonacci-Chain Quasicrystal Lie Algebras

在接下来的几节中，我们将介绍三种非周期代数，其生成元与前文定义的斐波那契链准晶一一对应。第一个准晶李代数只是对 [PPT98] 中所介绍内容的回顾：该内容针对一种由斐波那契链经修改而形成的一维准晶，该准晶在$x = 1/2$处具有反射对称性。原点处的砖片是一个长度为 1 的缺陷，而其他所有砖片的长度为 τ和 τ^2。这条链的坐标为 $\mathcal{F}_{1,0}(n)$（见表 (1)），再加上元素 0，即

$$..., -1-3\tau, -1-2\tau, -\tau, 0, 1, 1+\tau, 2+2\tau, ... \tag{3.1}$$

按照 [PPT98], ，我们现在将斐波那契链准晶 $\mathfrak{L}(\mathcal{F}(\Omega))$ 的准晶李代数定义为由 $\{L_x\}_{x\in\mathcal{F}(\Omega)}$ 张成的无限维向量空间，其双线性乘积定义为

$$[L_x, L_y] = (y-x)\,\chi_\Omega(x^*+y^*)\,L_{x+y}, \tag{3.2}$$

其中 $x, y \in \mathcal{F}(\Omega)$，且 $\Omega = [0,1]$ 是准晶的接受窗。由 (3.2) 可知，它显然是反对称的，因此我们只需证明它满足雅可比恒等式。事实上，这很容易验证，因为

$$[L_x, [L_y, L_z]] = (z-y)\,(y+z-x)\,\chi_\Omega(x^*+y^*+z^*)\,\chi_\Omega(y^*+z^*)\,L_{x+y+z}, \tag{3.3}$$
$$[L_y, [L_z, L_x]] = (x-z)\,(z+x-y)\,\chi_\Omega(x^*+y^*+z^*)\,\chi_\Omega(z^*+x^*)\,L_{x+y+z}, \tag{3.4}$$
$$[L_z, [L_x, L_y]] = (y-x)\,(x+y+z)\,\chi_\Omega(x^*+y^*+z^*)\,\chi_\Omega(x^*+y^*)\,L_{x+y+z}, \tag{3.5}$$

由于 $\chi_\Omega(x^*+y^*+z^*) = 1$ 意味着对于每个 x^*，y^*，$z^* \in \Omega = [0,1]$ 以及更一般地，对于满足 $ab \geq 0$ 的 $\Omega = [a,b]$，都有 $\chi_\Omega(x^*+y^*) = 1$。根据前面的方程，我们有

$$[L_x, [L_y, L_z]] + [L_y, [L_z, L_x]] + [L_z, [L_x, L_y]] = 0, \tag{3.6}$$

从而满足雅可比恒等式。因此，对于满足 $ab \geq 0$ 的每个 $\Omega = [a,b]$，定义 (3.2) 都是一个李代数。表 3 中明确给出了一个包含 x，$y \in \mathcal{F}(\Omega)$ 的对易关系 $[L_x, L_y]$ 示例。

观察式 (3.2) 可轻易发现几点。首先，我们注意到，若将接受窗 $\Xi = [a,1]$ 取为任意区间，那么当 $a \geq 1/2$ 时，李代数是阿贝尔的，因为对于每个 x，$y \in \mathcal{F}(\Xi)$，$\chi_\Xi(x^*+y^*)$ 按定义恒为零。此外，

$[L_m, L_n]$	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
L_{-4}	$-4L_{-4}$	0	$-6L_{-2}$	0	0	$-9L_1$	0	$-11L_3$
L_{-3}	$-3L_{-3}$	$-4L_{-2}$	$-5L_{-1}$	0	$-7L_1$	$-8L_2$	$-9L_3$	$-10L_4$
L_{-2}	$-2L_{-2}$	0	0	0	0	$-7L_3$	0	0
L_{-1}	$-L_{-1}$	0	$-3L_1$	0	$-5L_3$	$-6L_4$	0	$-8L_6$
L_0	0	$-L_1$	$-2L_2$	$-3L_3$	$-4L_4$	$-5L_5$	$-6L_6$	$-7L_7$
L_1	L_1	0	$-L_3$	0	0	$-4L_6$	0	$-6L_8$
L_2	$2L_2$	L_3	0	0	$-2L_6$	$-3L_7$	$-4L_8$	$-5L_9$
L_3	$3L_3$	0	0	0	0	$-2L_8$	0	0
L_4	$4L_4$	0	$2L_6$	0	0	$-L_9$	0	$-3L_{11}$

TABLE 4. 非周期维特代数 $\mathfrak{W}(\mathcal{F}_{0,0})$ 的一组生成元的对易关系。

$[L_m, L_n]$	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
L_{-4}	0	$-5L_{-3}$	0	$-7L_{-1}$	$-8L_0$	0	$-10L_2$	0
L_{-3}	0	0	0	$-6L_0$	0	0	0	0
L_{-2}	0	$-3L_{-1}$	$-4L_0$	$-5L_1$	$-6L_2$	0	$-8L_4$	$-9L_5$
L_{-1}	0	$-2L_0$	0	$-4L_2$	0	0	$-7L_5$	0
L_0	0	0	0	0	0	0	0	0
L_1	0	0	0	$-2L_4$	$-3L_5$	0	$-5L_7$	0
L_2	0	0	0	$-L_5$	0	0	0	0
L_3	0	$2L_4$	L_5	0	$-L_7$	0	$-3L_9$	$-4L_{10}$
L_4	0	$3L_5$	0	L_7	0	0	$-2L_{10}$	0

TABLE 5. 非周期维特代数 $\mathfrak{W}(\mathcal{F}_{1,0})$ 的一组生成元的对易关系。

子代数 $\mathfrak{L}(\mathcal{F}(\Xi))$ 是 $\mathfrak{L}(\mathcal{F}(\Omega))$ 的理想，当 $\Xi = [c, 1]$ 时，其中 $0 < c$。这意味着 $\mathfrak{L}(\mathcal{F}(\Omega))$ 从来不是半单李代数。

4. An aperiodic Witt algebra and its Virasoro extensions

现在我们定义一种非周期维特代数及其 Virasoro 扩张。这类代数最初见于 [TW00a], ，但此处以一种等价的方式，在以整数为指标的基底$\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 上加以介绍，而非在基底 $\{L_x\}_{x\in\mathcal{F}_{\alpha,\beta}}$ 上介绍；后者的指标由斐波那契链准晶中的点给出。首先，我们必须从 (2.4) 注意到，$F_{\alpha,\beta}$ 具有如下形式

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(n) = n' + \tau n, \tag{4.1}$$

对于某个 $n' \in \mathbb{Z}$。因此，只需令 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(n) \longrightarrow n \in \mathbb{Z}$，即可轻易得到 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 与 $\{L_x\}_{x\in\mathcal{F}_{\alpha,\beta}}$ 之间的对应关系。因此，我们将非周期维特代数 $\mathfrak{W}(\mathcal{F}_{\alpha,\beta})$ 定义为由 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 张成的向量空间，并赋予以下双线性乘积

$$[L_n, L_m] = (n-m)\,\chi_\Omega\left(\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(n)^* + \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(m)^*\right) L_{n+m}. \tag{4.2}$$

与上一节中的计算类似，经过直接计算可知，当 $(-1+\alpha+\beta)(\alpha+\beta) \geq 0$ 时，这确实是一个李代数。这意味着，在回文斐波那契链这一特殊情形下，当 $\alpha = 1/2$ and $\beta = 0$ 时，我们并没有得到非周期维特代数。另一方面，令 $\beta = 0$，则 $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$ 会生成

$[L_m, L_n]$	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
L_{-4}	$-4L_{-4}$	0	$-6L_{-2}$	0	$5C$	$-9L_1$	0	$-11L_3$
L_{-3}	$-3L_{-3}$	$-4L_{-2}$	$-5L_{-1}$	$2C$	$-7L_1$	$-8L_2$	$-9L_3$	$-10L_4$
L_{-2}	$-2L_{-2}$	0	$\frac{1}{2}C$	0	0	$-7L_3$	0	0
L_{-1}	$-L_{-1}$	0	$-3L_1$	0	$-5L_3$	$-6L_4$	0	$-8L_6$
L_0	0	$-L_1$	$-2L_2$	$-3L_3$	$-4L_4$	$-5L_5$	$-6L_6$	$-7L_7$
L_1	L_1	0	$-L_3$	0	0	$-4L_6$	0	$-6L_8$
L_2	$2L_2$	L_3	0	0	$-2L_6$	$-3L_7$	$-4L_8$	$-5L_9$
L_3	$3L_3$	0	0	0	0	$-2L_8$	0	0
L_4	$4L_4$	0	$2L_6$	0	0	$-L_9$	0	$-3L_{11}$

TABLE 6. 非周期 Virasoro 代数的一组生成元的对易关系 $\mathfrak{V}(\mathcal{F}_{0,\ 0}(\Omega))$。

$[L_m, L_n]$	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
L_{-4}	0	$-5L_{-3}$	0	$-7L_{-1}$	$5C-8L_0$	0	$-10L_2$	0
L_{-3}	0	0	0	$2C-6L_0$	0	0	0	0
L_{-2}	0	$-3L_{-1}$	$\frac{1}{2}C-4L_0$	$-5L_1$	$-6L_2$	0	$-8L_4$	$-9L_5$
L_{-1}	0	$-2L_0$	0	$-4L_2$	0	0	$-7L_5$	0
L_0	0	0	0	0	0	0	0	0
L_1	0	0	0	$-2L_4$	$-3L_5$	0	$-5L_7$	0
L_2	0	0	0	$-L_5$	0	0	0	0
L_3	0	$2L_4$	L_5	0	$-L_7$	0	$-3L_9$	$-4L_{10}$
L_4	0	$3L_5$	0	L_7	0	0	$-2L_{10}$	0

TABLE 7. 非周期 Virasoro 代数的一组生成元的对易关系 $\mathfrak{V}(\mathcal{F}_{1,\ 0}(\Omega))$。

两个不同的非周期维特代数，它们是非阿贝尔的，因此是值得关注的情形。从 $\alpha = 0$ and $\beta = 0$ 出发， $\mathfrak{W}(\mathcal{F}_{0,\ 0})$ 的显式对易关系列于表 (4)，而 $\alpha = 1$ and $\beta = 0$，即 $\mathfrak{W}(\mathcal{F}_{1,\ 0})$ 的显式对易关系列于表 (5)。这里的结构常数以狄利克雷整数表示，它们通常是无理数。

4.1. 非周期 Virasoro 扩张。现在我们将重点研究满足 $\alpha = 0$，1 的斐波那契链准晶 $\mathcal{F}_{\alpha,\ 0}$。虽然斐波那契链准晶李代数（如 $\mathfrak{L}(\mathcal{F}(\Omega))$）不允许中心扩张（参见 [PT99]），但先前定义的非周期 Witt 代数 $\mathfrak{W}(\mathcal{F}(\Omega))$ 可以。为在我们的情形中实现这一中心扩张，即构造斐波那契链 $\mathfrak{V}(\mathcal{F}_{\alpha,\ 0}(\Omega))$ 的非周期 Virasoro 代数，我们只需遵循 [TW00a]，并根据我们的特殊情形和记号加以调整。随后我们将 $\mathfrak{V}(\mathcal{F}_{\alpha,\ 0}(\Omega))$ 定义为由 $C \cup \{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 张成的向量空间，其中 C 是该扩张的中心生成元，其双线性乘积定义如下：$[L_n, C] = 0$ 对所有 $L_n \in \{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 以及

$$[L_n, L_m] = (n-m)\quad \chi_\Omega\left(\mathcal{F}_{\alpha,0}(n)^* + \mathcal{F}_{\alpha,0}(m)^*\right) L_{n+m} + \tfrac{1}{12} n\left(n^2-1\right)\delta_{n,-m} C, \tag{4.3}$$

对每个 n， $m \in \mathbb{Z}$ 都成立。这种扩张可能并不唯一，但由于它在理论物理中的潜在应用，是一种有趣的代数（参见 [Tw99a] 中的类似代数），因此值得一提。

5. A Fibonacci-chain Jordan Algebra

本节首次定义一种非周期约当代数，它是一个无限维约旦代数 $\mathfrak{J}(\mathcal{F})$，其生成元 $\{L_x\}_{x\in\mathcal{F}}$与斐波那契链准晶 $\mathcal{F}$一一对应。由于我们的构造对所有 α 和 β 均有效，我们将省略这类记号，除非有必要，否则只写 $\mathcal{F}$。接着，我们将 $\mathfrak{J}(\mathcal{F})$ 定义为由 $\{L_x\}_{x\in\mathcal{F}(\Omega)}$ 张成的实向量空间，其双线性乘积定义为

$$L_x \circ L_y = \frac{1}{2}\left(L_{x\vdash y} + L_{y\vdash x}\right). \tag{5.1}$$

（5.1）中的乘积显然定义良好，因为对每个 $x,\ y\in\mathcal{F}$，于是 $x\vdash y,\ y\vdash x\in\mathcal{F}$，如（2.12）所示。此外，它显然具有交换性，即

$$L_x \circ L_y = L_y \circ L_x, \tag{5.2}$$

因此，为了证明其为约当代数，只需证明它满足约旦恒等式。事实上，由于 $x\vdash x = x$，我们有

$$\begin{aligned}
(L_x \circ L_y)\circ(L_x \circ L_x) &= (L_x \circ L_y)\circ L_x && (5.3)\\
&= \frac{1}{2}\left(L_{x\vdash y}\circ L_x + L_{y\vdash x}\circ L_x\right) && (5.4)\\
&= \frac{1}{2}\left(L_x \circ L_{x\vdash y} + L_x \circ L_{y\vdash x}\right) && (5.5)\\
&= L_x \circ (L_y \circ L_x) && (5.6)\\
&= L_x \circ \left(L_y \circ (L_x \circ L_x)\right), && (5.7)
\end{aligned}$$

因此约旦恒等式

$$(L_x \circ L_y)\circ(L_x \circ L_x) = L_x \circ \left(L_y \circ (L_x \circ L_x)\right), \tag{5.8}$$

成立。约当代数因幂等元数量众多而闻名，这里也不例外。事实上，我们注意到，由于 $x\vdash x = x$，基 $\{L_x\}_{x\in\mathcal{F}_{1/2}}$中的所有元素都是幂等元。

该代数还可以在一个基上给出另一种定义，其元素由整数编号。事实上，令 $\mathcal{F}(n) = n'+\tau n$和 $\mathcal{F}(m) = m'+\tau m$，然后考虑两个元素的准加法，即

$$\mathcal{F}(n)\vdash\mathcal{F}(m) = \tau^2\left(n'+\tau n\right) - \tau\left(m'+\tau m\right). \tag{5.9}$$

直接计算可得

$$\mathcal{F}(n)\vdash\mathcal{F}(m) = \mathcal{F}\left(n'-m'+2n-m\right), \tag{5.10}$$

另一方面，交换两个加数后，我们得到

$$\mathcal{F}(m)\vdash\mathcal{F}(n) = \mathcal{F}\left(m'-n'+2m-n\right). \tag{5.11}$$

现在，我们在由 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$张成的向量空间上得到了 $\mathfrak{J}(\mathcal{F})$ 的一个等价定义，其双线性乘积定义为

$$L_n \circ L_m = \frac{1}{2}\left(L_{n'-m'+2n-m} + L_{m'-n'+2m-n}\right), \tag{5.12}$$

其中 $n',\ m'\in\mathbb{Z}$以及 $n' = \tau n - \mathcal{F}(n)$ 和 $m' = \tau m - \mathcal{F}(m)$。

$L_a \circ L_b$	L_{-2}	L_{-1}	L_0	L_1	L_2
L_{-4}	$\frac{1}{2}(L_1+L_{-7})$	$\frac{1}{2}(L_4+L_{-9})$	$\frac{1}{2}(L_7+L_{-11})$	$\frac{1}{2}(L_9+L_{-12})$	$\frac{1}{2}(L_{12}+L_{-14})$
L_{-3}	$\frac{1}{2}(L_{-1}+L_{-4})$	$\frac{1}{2}(L_2+L_{-6})$	$\frac{1}{2}(L_5+L_{-8})$	$\frac{1}{2}(L_7+L_{-9})$	$\frac{1}{2}(L_{10}+L_{-11})$
L_{-2}	L_{-2}	$\frac{1}{2}(L_1+L_{-4})$	$\frac{1}{2}(L_4+L_{-6})$	$\frac{1}{2}(L_6+L_{-7})$	$\frac{1}{2}(L_9+L_{-9})$
L_{-1}	$\frac{1}{2}(L_1+L_{-4})$	L_{-1}	$\frac{1}{2}(L_{-3}+L_2)$	$\frac{1}{2}(L_4+L_{-4})$	$\frac{1}{2}(L_7+L_{-6})$
L_0	$\frac{1}{2}(L_4+L_{-6})$	$\frac{1}{2}(L_{-3}+L_2)$	L_0	$\frac{1}{2}(L_2+L_{-1})$	$\frac{1}{2}(L_5+L_{-3})$
L_1	$\frac{1}{2}(L_6+L_{-7})$	$\frac{1}{2}(L_4+L_{-4})$	$\frac{1}{2}(L_2+L_{-1})$	L_1	$\frac{1}{2}(L_4+L_{-1})$
L_2	$\frac{1}{2}(L_9+L_{-9})$	$\frac{1}{2}(L_7+L_{-6})$	$\frac{1}{2}(L_5+L_{-3})$	$\frac{1}{2}(L_4+L_{-1})$	L_2
L_3	$\frac{1}{2}(L_{11}+L_{-10})$	$\frac{1}{2}(L_9+L_{-7})$	$\frac{1}{2}(L_7+L_{-4})$	$\frac{1}{2}(L_6+L_{-2})$	$\frac{1}{2}(L_4+L_1)$
L_4	$\frac{1}{2}(L_{14}+L_{-12})$	$\frac{1}{2}(L_{12}+L_{-9})$	$\frac{1}{2}(L_{10}+L_{-6})$	$\frac{1}{2}(L_9+L_{-4})$	$\frac{1}{2}(L_7+L_{-1})$

TABLE 8. 非周期 Jordan 代数 $\mathfrak{J}(\mathcal{F}_{1,\ 0})$ 的一组生成元的乘法表。

对 (5.12) 进行简单分析，可以看出上述约旦乘积具有一个有用的性质。令$n,\ m \in \mathbb{Z}$ 并称 $p,\ q \in \mathbb{Z}$ 为生成元的指标，使得

$$L_n \circ L_m = \frac{1}{2}\left(L_p + L_q\right). \tag{5.13}$$

因此，由（5.12）和直接计算可得

$$p + q = n + m. \tag{5.14}$$

为了使我们的构造更加具体，我们现在将关注一个特定的非周期约当代数，即 $\mathfrak{J}(\mathcal{F}_{1,\ 0})$。对于这种代数，其部分乘法表见表 8。由（5.14）、生成元的幂等性以及表 8 中的乘法关系可知，代数 $\mathfrak{J}(\mathcal{F}_{1,\ 0})$ 没有单位元。事实上，假设存在一个单位元 I。这将意味着 $I \circ L_0 = L_0 \circ I = L_0$。于是我们有

$$L_0 \circ L_{n_1} + L_0 \circ L_{n_2} + ... + L_0 \circ L_{n_m} + ... = L_0 \tag{5.15}$$

这意味着至少有一个元素 L_r 会给出 $L_0 \circ L_r = L_0$。但根据（5.14），唯一的可能是 $L_0 = L_r$。对所有 L_n 重复这一论证可知，单位元必定具有 $I = ... + L_{-1} + L_0 + L_1 + L_2 + ...$ 的形式。但是，若如此，则考虑

$$L_0 \circ \left(... + L_{-1} + L_0 + L_1 + L_2 + ...\right). \tag{5.16}$$

由于（5.12）中的函数 $0 \vdash n$ 和 $n \vdash 0$ 是 n 中的单调函数，因此由 $L_0 \circ L_1$ 得到的 L_{-1}（见表（8））无法通过其他任何满足 $n \in \mathbb{Z}$ 的 $L_0 \circ L_n$ 得到。因此，L_{-1} 分量非零，因而与 I 是单位元相矛盾。

类似的论证表明，理想 $\mathfrak{k} = \{L_0 \circ x\colon\ x \in \mathfrak{J}(\mathcal{F}_{1,0})\}$ 是 $\mathfrak{J}(\mathcal{F}_{1,0})$ 的真理想，因为 $L_1 \notin \mathfrak{k}$。因此，$\mathfrak{J}(\mathcal{F}_{1,0})$ 不是单代数。

6. 结论与进展

本文介绍了三种自然源自一类特殊斐波那契链准晶的非周期代数。第一种是对 [PPT98] 中所引入代数的回顾，它是通过在斐波那契链准晶 $\mathcal{F}_{1,0}$中引入单点缺陷而得到的准晶李代数；第二种是非周期维特代数，即 $\mathfrak{W}(\mathcal{F}_{1,0})$，它与这种准晶完全吻合，并且可以扩展为维拉索罗代数 $\mathfrak{V}(\mathcal{F}_{1,0})$。最后，我们介绍了一类全新的非周期代数，即非周期约旦代数，并给出了同一斐波那契链

准晶，即 $\mathfrak{J}(\mathcal{F}_{1,0})$。这类非周期约旦代数得以建立，依托于斐波那契链准晶的一种重要对称性；这种对称性由准加法编码，在更高维准晶中也同样成立。从数学角度看，这类代数的定义本身就是一个有趣的课题；而从物理角度看，我们认为，本文介绍的三类代数对于所有关注可用斐波那契链准晶建模的物理非周期结构的人来说，都是不可或缺的工具。

事实上，非周期维拉索罗代数可用于研究卡洛杰罗–萨瑟兰型精确可解模型的变形 [TW00b]。更具体地说，描述圆周上由 n 个质量为 m 的相同粒子组成的多体量子力学系统的哈密顿量扰动，可以用非周期维拉索罗代数的生成元表示。另一方面，与非周期约当代数类似，有限维约当代数与多场科特韦格–德弗里斯方程之间存在一一对应关系，这一点广为人知。事实上，20世纪90年代初，斯维诺卢波夫 [Sv91]和索科洛夫证明，KdV方程的一种推广，即

$$u_t^i = u_{xxx}^i - 6a_{jk}^i u^j u_x^k \tag{6.1}$$

当且仅当 $\left\{a_{jk}^i\right\}$ 是某个有限维约当代数的结构常数时，才具有非退化的广义对称性或守恒律[Sv93，定理1。1]。类似结果也适用于修正KdV方程[Sv93]，、正弦-戈登方程以及非线性薛定谔方程的推广形式[Sv92]。虽然非周期约当代数 $\mathfrak{J}(\mathcal{F}_{1,\ 0})$是无限维的，但仍可用它定义有限维代数：将准晶的非周期集合限制在一组连续的特定元素上，并规定当两个元素的准加法结果落在所选准晶片段之外时，其乘积为0。经过这一修改，交换律和约旦恒等式仍然成立，因此所得代数是有限维的，符合斯维诺卢波夫定理的假设。事实上，我们预计，在研究孤子沿着从斐波那契链准晶中的点出发的平行线上传播时，可能会出现如下类型的系统 (6.1)：其中的结构常数 $\left\{a_{jk}^i\right\}$ 是 $\mathfrak{J}(\mathcal{F}_{1,\ 0})$的结构常数。

7. Acknowledgments

本研究由量子引力研究所资助。作者谨此感谢方芳、Marcelo Amaral、Dugan Hammock 和 Richard Clawson 提供富有见地的讨论和建议。

References

[AC03] E.L. Albuquerque 和 M.G. Cottam, *Theory of elementary excitations in quasiperiodic structures*, 《物理报告》**376.4–5** (2003):225-337。[BG17] M. Baake 和 U. Grimm, *Aperiodic Order* 2 *Encyclopedia of Mathematics and its Appli-* , 《》卷，剑桥大学出版社，。[KF15] Fang F. 和 Klee J., 2017 *An Icosahedral Quasicrystal as a Golden Modification of the Icosagrid and its Connection to the E8 Lattice* 2015 71 1 , 《晶体学报A辑：基础与进展》( )(a)。[Ja21] A. Jagannathan, *The Fibonacci quasicrystal: Case study of hidden dimensions and multifractality*, 《现代物理评论》93.4 (2021):045001。[Ko99] Koecher M., *The Minnesota Notes on Jordan Algebras and Their Applications*, 施普林格出版社，1999。[LS86] D. Levine 和 P. J. Steinhardt, *Quasicrystals. I. definition and structure*, 《物理评论B辑》**34** (1986):596–616。[Ma] E. Macia, *The role of aperiodic order in science and technology*, 《物理进展报告》**69** (2006):397。[Ma02] V. Mazorchuk, *On quasicrystal lie algebras*。《数学物理学杂志》43.5 (2002):2791。

[MT03] V. Mazorchuk 和 R. Twarock, *Virasoro-type algebras associated with a penrose tiling*, 《物理学杂志 A: 数学与一般》36.15 (2003):4363-4373。[MP93] Moody R. V. 和 Patera J. *Quasicrystals and icosians*。《物理学杂志 A：数学与一般》，26 (12):2829, 1993。[PPT98] J. Patera、E. Pelantova 和 R. Twarock, *Quasicrystal Lie algebras*, 《物理快报 A》246.3-4 (1998):209-213。[PT99] J. Patera 和 R. Twarock, *Quasicrystal Lie algebras and their generalizations*, 《物理报告》315.1- 3 (1999):241-256。[SCP] A. Sen 和 C. Castro Perelman, *A Hamiltonian model of the Fibonacci quasicrystal using non-local interactions: simulations and spectral analysis* **93 4** 2020 , 《欧洲物理学杂志 B》，.( )。[Se95] M. Senechal, *Quasicrystals and Geometry*, 剑桥大学出版社，1995。[Sv91] Svinolupov S.I., *Jordan algebras and generalized Korteweg-de Vries equations*。《理论与数学物理》87 (1991) 611–620。[Sv92] Svinolupov S.I., *Generalized Schrödinger equations and Jordan pairs*。《Commun.Math. Phys.》143 (1992) 559–575。

[93] *Jordan algebras and integrable systems* **27** 1993 257 265 Sv
[00] *Aperiodic Virasoro algebra* **41 7** 2000 5088 5106
Svinolupov S.I., 《功能分析及其应用》( ) – TW a R. Twarock, 。《数学物理学杂志》，.( ): - 。[TW00b] R. Twarock。 *An exactly solvable Calogero model for a non-integrally laced group*。《物理快报 A》275.3 (2000):169172。[Tw99a] R. Twarock *Breaking Virasoro symmetry* 载于 *Quantum Theory and Symmetries* 编者 H-D Doebner、V K Dobrev、J-D Hennig 和 W Lucke，新加坡：世界科学出版社，1999，第530–4页。

2020年数学学科分类：11B39, 52C23, 17B65, 17C50

Departimento de Matematica, Universidade do Algarve, Campus de Gambelas, Faro, PT
Email address: d.corradetti@gmail.com

Quantum Gravity Research, Los Angeles, California, CA 90290, USA,
Email address: DavidC@QuantumGravityResearch.org

Quantum Gravity Research, Los Angeles, California, CA 90290, USA,
Email address: Raymond@QuantumGravityResearch.org

Quantum Gravity Research, Los Angeles, California, CA 90290, USA,
Email address: Klee@QuantumGravityResearch.org