arXiv:2302.04049v1 [math.NT] 8 Feb 2023

关于虚二次域上的 Gross 猜想

Saad El Boukhari*

摘要

设 k 是一个虚二次数域， F/k 是一个伽罗瓦群为 G 的有限阿贝尔扩张。我们证明，关于 Artin$L$-级数首项的 Gross 猜想对 F/k 以及所有在 k 中分裂且不整除 6 的有理素数成立。

*2020*年数学主题分类：11G40,19F27, 11R70.
关键词与短语：数域，代数 K-理论，Beilinson 调节子，Artin L-函数，等变 Tamagawa 数猜想。

1 引言

设 F 是一个数域， O_F 是其整数环。令 r 表示一个严格负整数。整数环 O_F 的 Quillen 高阶代数 K-群具有如下性质：

（**Borel** ）群 $K_{-2r}(O_F)$ 是有限群，而群 $K_{1-2r}(O_F)$ 是有限型的，定义在 $\mathbb{Z}$

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(K_{1-2r}(F)) := d_r = \begin{cases} r_1 + r_2 & \text{if r is even} \\ r_2 & \text{if r is odd} \end{cases}$$

其中 r_1 和 r_2 分别表示 F 的实赋值和复位。
文献中已知，对于 $r < 0$，奇数阶 K-群 $K_{1-2r}(O_F)$ 是 O_F 的单位群 O_F^* 的类似物，而偶数阶有限 K-群 $K_{-2r}(O_F)$ 是 F 的类群 Cl_F 的类似物。

设数域 F 是某个数域 k 的有限阿贝尔扩张，且令 $G := \mathrm{Gal}(F/k)$。我们还记 $G := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ 为 G 的一维（不可约）复特征的（乘法）群。令 $\mathrm{Ram}(F/k)$ 表示在 F/k 中分歧的 k 的有限赋值集合，并令 S_∞ 表示 k 的阿基米德位集合。若 $\chi \in G$，则与 χ 对应的 Artin L 函数在 $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ 上定义为

$$L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ram}(F/k) \cup S_\infty} (1 - \chi(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})\mathrm{N}\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

其中 $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \in G$ 是（未分歧）素数 $\mathfrak{p}$ 的弗罗贝尼乌斯。该函数可以解析延拓为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数。

Gross 在20世纪70年代提出了一个猜想，断言 Artin L 函数在任意严格负整数处的首项应当等于某个尚未确定的

*S. El Boukhari，梅克内斯毛莱伊·伊斯梅尔大学，数学系，B.P. 11201 Zitoune，梅克内斯，摩洛哥。电子邮箱：saadelboukhari1234@gmail.com

代数因子乘以 Beilinson 调节子（见下文第2.1小节）对奇数次高阶代数 K 群中某个元素的像（Gross 猜想于较晚近的 [13] 中发表）。Gross 猜想是高阶代数 K 理论和严格负整数情形下 Stark猜想（例如 [23]）的自然类比；Stark猜想指出，对于 k 的某个适当素数集合 S，存在与 $s=0$ 处的 $L(s,\chi)$ 函数特殊值相关联的特殊 S 单位。

在绝对阿贝尔情形（即 $k=\mathbb{Q}$）中，Gross 猜想中的单位可由 Beilinson 元素显式给出 [1]，并由 Beilinson-Deligne-Soulé元素 p-进地给出（例如 [22]）。它们在此情形中的应用很多，涉及高阶代数 K-群数论中的多个主题（例如 [17], [8], [9] 以及其他主题）。在非绝对阿贝尔情形中，Gross 猜想并未为这些特殊单位的定义提供任何具体公式。

接下来很自然的一步，是在“几乎”阿贝尔情形中寻找这些特殊单位，也就是 k 为虚二次域的情形。这正是本文的目标：在第2节中，我们利用 Beilinson 调节子给出虚二次域上 Gross 元素的定义。在第6节中，我们证明这一结果是等变 Tamagawa 数猜想的推论（简称 ETNc，该猜想在第4节中表述）。随后，我们考虑 ETNc 是一个定理的情形，以证明F/k的 Gross 猜想。

1.1 记号

记号如下:

- F/k 是数域的有限阿贝尔扩张，其中 k 为虚二次域，且$G:=\mathrm{Gal}(F/k)$。
- $\hat{}G:=\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^\times)$ 是有限群 G 的一维（不可约）复特征的（乘法）群。$\hat{}$
- E 是由特征 $\chi\in G$ 的所有取值在 $\mathbb{Q}$ 上生成的数域，且 O 是其整数环。
- $r<0$ 是一个有理整数。
- $E(r)_F$是（Tate）动机： $E(r)_F:=h^0(\mathrm{Spec}(F))_E(r)$。
- p 一个有理素数。
- $E_p:=E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$ 和 $O_p:=O\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$。
- S 是 k 的一个有限个地方的集合，其中包含集合 S_p（由 p-赋值和无限处组成），以及在 F/k中分歧的所有有限处。令 S_f 为 S的有限处子集。
- 若 A 是任意有限集，我们用 $|A|$ 表示其基数（即其元素的个数）。
- 对于 k 的任意有限位有限集 S'，记 $\varepsilon_{S'}(r):=\prod_{v\in S'}(1-\mathbf{N}v^{-r}$弗罗贝尼乌斯$_v e_{I_v})$。其中，弗罗贝尼乌斯$_v$ 是 G 中与有限处 v 相关的弗罗贝尼乌斯映射的任意一个代表元，而 e_{I_v} 是 $\mathbb{Q}[G]$ 中对应于惯性子群I_v的幂等元

$$e_{I_v}=\frac{\sum_{\sigma\in I_v}\sigma}{|I_v|}$$

- 对于任意数域 K，记 $\overline{K}$ 为 K 的一个固定代数闭包，记 O_K 为 K 的整数环。对于 K 的任意有限赋值集 $S_\prime$，若其包含 K 的阿基米德位集合 S_∞，则用 $O_{K,S_\prime}$ 表示 K 的 $S_\prime$-整数环（即 K 中所有满足对每个 $\mathfrak{p} \notin S_\prime$，其 $\mathfrak{p}$-进赋值为正的元素）。

- 若 A 是一个有限的 Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$)-模，且 i 是一个有理整数，我们用 $A(i)$表示 A的「Tate扭曲」。该群为 A，并赋予如下修正后的 Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$)-作用：$g.x := \chi_{cyc}(g)^i g(x)$，对所有 $g \in$ Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$) 均成立；其中$\chi_{cyc}$ 是圆分特征（例如参见 [19],定义（7.3.6））。

- 若 A 是一个 O_p 模（分别为 E-模、E_p-模），我们令 $A^\vee$ 表示 Hom(A, O_p)（分别为 Hom(A, E)、Hom(A, E_p）。若 X是一个由 O_p模（分别为 E-模、E_p-模）构成的复形，则类似地，我们将上文中的 Hom(X,)替换为 RHom(X,)来定义 $X^\vee$。

2 虚二次域上高阶代数 K理论中的 Gross 猜想

2.1 Beilinson 调节子

$r < 0$ 是一个有理整数。在复数域的 K-群上定义的 Beilinson 调节子（更多详情见 [21] ）是一个映射

$$\rho^r_{\mathbb{C}} : K_{1-2r}(\mathbb{C}) \to H^1_D(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), (2\pi i)^{1-r}\mathbb{R}) \cong (2\pi i)^{-r}\mathbb{R}$$

其中 H^1_D()是 Deligne上同调的第一个群，且 $i := \sqrt{-1}$。对于数域 F，我们将其与映射复合

$$K_{1-2r}(O_F) = K_{1-2r}(F) \to \prod_{\sigma:F\to\mathbb{C}} K_{1-2r}(\mathbb{C}),$$

其中乘积遍历复数域中 F 的所有嵌入 $\sigma \in$ Hom($F, \mathbb{C}$)。我们得到一个映射

$$\rho^r_F : K_{1-2r}(O_F) \to (X_F \otimes (2\pi i)^{-r}\mathbb{R})^+,$$

其中 X_F:= $\mathbb{Z}$[Hom($F, \mathbb{C}$)]（集合 Hom($F, \mathbb{C}$) 上的自由阿贝尔群），而 (X_F ⊗(2πi)$^{-r}\mathbb{R}$)$^+$是 (X_F ⊗(2πi)$^{-r}\mathbb{R}$) 的“正部分”，即在复共轭作用下保持不变的子模。

ρ^r_F 的像是 $\mathbb{R}$-向量空间 (X_F ⊗(2πi)$^{-r}\mathbb{R}$)$^+$中的一个完全格。Beilinson 调节子 ρ^r_F 的核满足

$$\ker(\rho^r_F) \subseteq K_{1-2r}(O_F)_{\mathrm{tors}}$$

其中，$K_{1-2r}(O_F)_{\mathrm{tors}}$是 $K_{1-2r}(O_F)$ 的 $\mathbb{Z}$-挠子群。因此，若将 $K_{1-2r}(O_F)$ 的无挠商群记为 $K_{1-2r}(O_F)_{/\mathrm{tors}}$，则 ρ^r_F 诱导出以下单射映射：

$$\rho^r_F : K_{1-2r}(O_F)_{/\mathrm{tors}} \hookrightarrow (X_F \otimes (2\pi i)^{-r}\mathbb{R})^+$$

如果将左侧与 $\mathbb{R}$ 张量积，则该映射成为同构。

2.2 虚二次域上高阶代数 K-群中的特殊“Gross 单位”

我们将 Hom($F,\mathbb{C}$) 视为 F 到复数域 $\mathbb{C}$ 中的嵌入集合，并通过设定 ($g\times w$)(σ) $=w\circ\sigma\circ g^{-1}$，将其赋予左$G\times$Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$)-模结构，其中 $g\in G$, $w\in$ Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$) 且$\sigma\in$ Hom($F,\mathbb{C}$)。

令 $\mathbb{Z}[\chi]$ 表示特征 χ 的取值环。通过标量扩张，我们可以将 Beilinson 调节子 ρ_F^r 改写为

$$\rho_F^r: K_{1-2r}(O_F)_{/\mathrm{tors}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\chi]\hookrightarrow(\prod_{\sigma:F\to\mathbb{C}}(2\pi i)^{-r}\mathbb{R})^{+}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\chi]$$

由于 $\mathbb{Z}[\chi]$ 是平坦的 $\mathbb{Z}$-模，因此此映射仍然是单射。对于任意特征 $\chi\in\hat{G}$，令 $L_S(s,\chi)$ 表示由下式定义的 S-截断 Artin L-函数，其定义域为 $\{s\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(s)>1\}$:

$$L_S(s,\chi)=\prod_{\mathfrak{p}\notin S}(1-\chi(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}})\mathbf{N}\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

此函数可以解析延拓为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数。我们用 $L_S'(s,\chi)$ 表示 $L_S(s,\chi)$ 的一阶导数。我们将用到以下引理:

引理 2.1 设 k 为虚二次域。那么存在一个 $\mathbb{R}[G]$-模的典范同构

$$\iota:(\prod_{\sigma:F\to\mathbb{C}}(2\pi i)^{-r}\mathbb{R})^{+}\cong\mathbb{R}[G]$$

证明 若 k是虚二次的，则对于每个嵌入 $\hat{}\sigma\in$Hom($F,\mathbb{C}$)，$\hat{}\sigma$或 $\tau\hat{}\sigma$均与一个自同构 $\sigma\in G$相同。

同构 ι 的具体定义如下：对于每个这样的嵌入 $\hat{}\sigma\in$ Hom($F,\mathbb{C}$)，将元素 (0,..,$(2\pi i)^{-r}a_{\hat{\sigma}}$,..,$(2\pi i)^{-r}a_{\tau\hat{\sigma}}$,.., 0)（其中 $a_\sigma=\pm a_{\tau\sigma}$ 取决于 r 的奇偶性）映射到 $a_{\hat{\sigma}}\sigma^{-1}$（若 $\hat{}\sigma=\sigma$），映射到 $a_{\tau\hat{\sigma}}\sigma^{-1}$（若 $\tau\hat{}\sigma=\sigma$）。□

利用上面的引理，我们可以将 Beilinson 调节子映射写为:

$$\rho_F^r: K_{1-2r}(O_F)_{/\mathrm{tors}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\chi]\hookrightarrow\mathbb{R}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\chi].$$

下面的猜想可以视为 [13] 中针对扩域 F/k所表述的 Gross 猜想:

猜想 **想** 2.2 存在唯一元素 $\epsilon(\chi,S)\in K_{1-2r}(O_F)_{/\mathrm{tors}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\chi]$，使得

$$\rho_F^r(\epsilon(\chi,S))=w_{1-r}(F^{\ker(\chi)})L_S'(r,\chi^{-1})|G|e_\chi\in\mathbb{R}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\chi]$$

其中:

1. $w_{1-r}(F^{\ker(\chi)}):=|H^0(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F^{\ker(\chi)}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1-r))|$.
2. $e_\chi:=\frac{1}{|G|}\Sigma_{\sigma\in G}\chi^{-1}(\sigma)\sigma$ *is the idempotent associated with* χ.

注记 元素 $\epsilon(\chi,\ S)$ 的唯一性由映射 ρ_F^r 在 $K_{1-2r}(O_F)_{/\mathrm{tors}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\chi]$ 上的单射性保证

3 主要结果

$K_{1-2r}(O_F)$ 在 Beilinson 调节子下的像是 $\mathbb{R}$-向量空间 $\mathbb{R}[G]$ 中的一个完备 $\mathbb{Z}$-格 T（见小节 2.1 和引理 2.1）。我们可以将 T 与环 O_p 作张量积，并通过在 O_p 上进行标量扩张来定义一个 p-adic 调节子

$$\rho_{F,p}^r : K_{1-2r}(O_F)_{/\mathrm{tors}} \otimes_{\mathbb{Z}} O_p \to \mathcal{T} \otimes_{\mathbb{Z}} O_p$$

本文的主要结果如下定理所述

定理 3.1 设 p 是一个在 k 中分裂且满足 $p \nmid 6$ 的有理素数。则有以下结论

(1) 元素 $w_{1-r}(F^{\ker(\chi)})L_S'(r,\chi^{-1})|G|e_\chi$ 属于 E-向量空间 $\mathcal{T} \otimes E$。

(2) 假设满足前述条件。则存在一个（唯一的）元素$\epsilon(\chi,S,p) \in K_{1-2r}(O_F) \otimes O_p$，使得

$$\rho_{F,p}^r(\epsilon(\chi,S,p)) = w_{1-r}(F^{\ker(\chi)})L_S'(r,\chi^{-1})|G|e_\chi,$$

注记 定理 3.1 证明了，对于所有在 k 中分裂且满足 $p \nmid 6$ 的有理素数 p，猜想 2.2 的 p-主部分成立。

4 等变 Tamagawa 数猜想

本节回顾动机 $E(r)_F$ 的等变 Tamagawa 数猜想（简称 ETNc）的陈述。

关于 ETNc 的更多细节，读者可参阅 M. Flach 在 [10] 中撰写的精彩综述。

4.1 ETNc 的记号

陈述 ETNc 所需的工具如下:

- 对于任意环 R，我们用 Det_R 表示 [16] 上的 Knudsen-Mumford 行列式函子，它是一个分次可逆（常秩 1 的投射） R-模。
- 我们令 $Y_r(F) := \prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})}(2\pi i)^{-r}\mathbb{Z}$。
- 我们将 $\Xi(E(r)_F)$ 记作“Fontaine 的基本直线” [12]。它是如下量:

  $$\Xi(E(r)_F) = \mathrm{Det}_{E[G]}^{-1}(K_{1-2r}(O_F)\otimes_{\mathbb{Z}} E)^{\#} \otimes \mathrm{Det}_{E[G]}(Y_r(F)^+ \otimes_{\mathbb{Z}} E)^{\#},$$

  其中，映射 $x \mapsto x^{\#}$ 表示群环 $\mathbb{Z}[G]$ 的 $\mathbb{Z}$-线性对合，它满足：对每个 $g \in G$，都有 $g^{\#} = g^{-1}$。
- 对于 étale 上同调群 $M_p := H^0_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(F) \times_k \overline{k}, E_p(r))$ 的任意伽罗瓦稳定格 T_p（M_p 也是动机 $M = E(r)_F$ 的 étale 实现），我们用 $R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)$ 表示紧支撑上同调复形（例如，[18], 5. 3.1）。复形 $R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)$ 位于一个典范的 distinguished 三角中

  $$R\Gamma_c(O_{k,S},T_p) \to R\Gamma(O_{k,S},T_p) \to \oplus_{v\in S} R\Gamma(k_v,T_p).$$

  其中，对于每个 $v \in S$， k_v 表示相对于赋值 v 的 k 的完备化。

- 我们将动机 $E(r)_F$ 的 S 截断的 $\mathbb{C}[G]$ 值 L 函数记为 $L_S(E(r)_F,\ s)$。关于典范识别 $\mathbb{C}[G]=\prod_{\chi\in\hat{G}}\mathbb{C}$，它可明确表示为

$$L_S(E(r)_F,s)=(L_S(s+r,\chi))_{\chi\in\hat{G}}$$

我们用 $L_S^*(E(r)_F,\ 0)$ 表示 $L_S(E(r)_F,\ s)$ 在 $s=0$ 处的特殊值，其定义为

$$L_S^*(E(r)_F,0):=(L_S^*(r,\chi))_{\chi\in\hat{G}}\in\mathbb{C}[G]^\times$$

其中，$L_S^*(r,\ \chi)$ 是函数 $L_S(s,\ \chi)$ 在 $s=r$ 处的特殊值（即其泰勒展开中第一个非零项的系数）。令 S_∞ 表示 k 的阿基米德位集合。我们分别将 $L_{S_\infty}(E(r)_F,\ s)$ 和 $L_{S_\infty}^*(E(r)_F,\ 0)$ 简写为 $L(E(r)_F,\ s)$ 和 $L^*(E(r)_F,\ 0)$。

- ETNc 的表述中涉及两个同构：
  - 第一个同构：

$$\vartheta_{F,\infty}^r:\Xi(E(r)_F)\otimes\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}\otimes E[G]^\#. \tag{1}$$

这是 [5], §3.2 中所述的同构与 E 张量积所得的同构。$\vartheta_{F,\ \infty}^r$ 的详细定义将在第 5.0.1 小节给出。

  - 第二个同构是 $E_p[G]$-等变同构

$$\vartheta_{F,S_p}^r:\Xi(E(r)_F)\otimes E_p\xrightarrow{\sim}\mathrm{Det}_{E_p[G]}\mathrm{R}\Gamma_c(O_{k,S_p},M_p) \tag{2}$$

这是 [5], 与 E 张量积中的同构 (9)。$\vartheta_{F,\ S_p}^r$ 的详细定义将在第 6.1.2 小节给出。

4.2 关于 F/k 的 ETNc 陈述

动机 $E(r)_F$ 的等变 Tamagawa 数猜想陈述如下

猜想 4.2（ETNc）成立

猜想4.2.1（有理性猜想）

$$(\vartheta_{F,\infty}^r)^{-1}(L^*(E(r)_F,0)^{-1}).E[G]\supseteq\Xi(E(r)_F)$$

猜想 4.2.2 ***(ETNc)***
如果有理性猜想 (4.2.1) 成立，那么我们有

$$O_p[G]\vartheta_{F,S_p}^r\circ(\vartheta_{F,\infty}^r)^{-1}(L^*(E(r)_F,0)^{-1})=\mathrm{Det}_{O_p[G]}\mathrm{R}\Gamma_c(O_{k,S_p},T_p)$$

5 定理 3.1 的 ETNcand 陈述 (1)

在本小节中，我们首先给出上文第4.1小节所述映射 $\vartheta_{F,\infty}^r$ 的显式定义。稍后我们将在计算中用到它，以证明定理 3.1 的第 (1) 部分。

5.0.1 同构 $\vartheta^r_{F,\ \infty}$

定义 设 R 表示一个环（含幺元）。对于任意有限生成R-模的同构 $\phi:\ V \xrightarrow{\sim} W$，令

$$\phi_{triv} : \mathrm{Det}_R^{-1}(V) \otimes \mathrm{Det}_R(W) \xrightarrow{\sim} R,$$

由以下同构的复合得到

$$\mathrm{Det}_R^{-1}(V) \otimes \mathrm{Det}_R(W) \xrightarrow{\mathrm{Det}_R^{-1}(\phi)\otimes \mathrm{id}}{}^{\sim} \mathrm{Det}_R^{-1}(W) \otimes \mathrm{Det}_R(W) \xrightarrow{\sim} R.$$

Beilinson 调节子映射诱导出一个同构

$$\rho^r_F : K_{1-2r}(O_F) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} Y_r(F)^+ \otimes \mathbb{R},$$

它定义了同构

$$\vartheta^r_{F,\infty} := ((\rho^r_F)^{\#})_{triv} : \Xi(\mathbb{Q}(r)_F) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[G]^{\#}.$$

对于动机 $E(r)_F$，标量扩张给出

$$\vartheta^r_{F,\infty} : \Xi(E(r)_F) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \otimes E[G]^{\#}.$$

注记 5.0.1 如上所述，也可以定义同构

$$\phi_{\widetilde{triv}} : \mathrm{Det}_R(V) \otimes \mathrm{Det}_R^{-1}(W) \xrightarrow{\sim} R,$$

从而得到一个同构

$$\tilde{\vartheta}^r_{F,\infty} := (\rho^r_F)_{\widetilde{triv}} : \Xi(E(r)_F)^{\vee} \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \otimes E[G].$$

由于对于任意完美的 $E[G]$-模或复形 A，都有 $\mathbf{Det}_{E[G]}A^{\vee} \cong \mathbf{Det}^{-1}_{E[G]}A^{\#}$（根据函子Det的定义，见 [16]），因此显然，$\vartheta^r_{F,\infty}$ 恰好是$\tilde{\vartheta}^r_{F,\infty}$的对偶的逆

因此，若 $A \subseteq \Xi(E(r)_F) \otimes \mathbb{R}$，则

$$(\vartheta^r_{F,\infty}(A))^{\vee} = \tilde{\vartheta}^r_{F,\infty}(A^{\vee})$$

命题5.1 假设 *ETNc*（猜想*4.2.1*）的有理部分对$E(r)_F$成立。那么对于每个特征 $\chi \in \hat{}G$，都存在一个元素 $\tilde{\epsilon}_{\chi}(F) \in e_{\chi}(K_{1-2r}(O_F) \otimes E)$满足

$$\rho^r_F(\tilde{\epsilon}_{\chi}(F)) = L^{'}(r, \chi^{-1})$$

证明 猜想4.2.1表述如下

$$(\vartheta^r_{F,\infty})^{-1}(L^*(E(r)_F, 0)^{-1}).E[G] \supseteq \Xi(E(r)_F)$$

其中

$$\Xi(E(r)_F) = \mathrm{Det}^{-1}_{E[G]}(K_{1-2r}(F) \otimes E)^{\#} \otimes \mathrm{Det}_{E[G]}(Y_r(F)^+ \otimes E)^{\#}.$$

根据 § 5.0.1，这等价于

$$L^*(E(r)_F, 0)^{-1}.E[G] \supseteq ((\rho^r_F)^{\#})_{triv}(\mathrm{Det}^{-1}_{E[G]}(K_{1-2r}(F) \otimes E)^{\#} \otimes \mathrm{Det}_{E[G]}(Y_r(F)^+ \otimes E)^{\#})$$

由于 k是虚二次的，我们有 $L^*(E(r)_F,\ 0) = L'(E(r)_F,\ 0)$（例如 $[7],(3.4)$），并且我们可以典范地将其识别为

$$Y_r(F)^+ \otimes E \cong E[G].$$

此对应将每个 $\sigma \in G$（视为嵌入 $\sigma:\ F \to \mathbb{C}$）对应的元素 $(0,\ ..,\ (2\pi i)^{-r}a_\sigma,\ ..,\ (2\pi i)^{-r}a_{\tau\sigma},\ ..,\ 0)$（其中 $a_\sigma = \pm a_{\tau\sigma}$）映射到 $a_\sigma\sigma^{-1}$。因此

$$\mathrm{Det}_{E[G]}(Y_r(F)^+ \otimes E)^\# = E[G]$$

因此，猜想4.2.1 等价于

$$(L^*(E(r)_F,0)^{-1})^\# E[G] \supseteq (\rho_F^r)_{triv}(\mathrm{Det}^{-1}_{E[G]}(K_{1-2r}(F)\otimes E)\otimes E[G])$$

ˆ令 $\chi \in G$ 和 e_χ 为相应的幂等元。由于 E 包含 G的此类特征的所有取值，我们得到 $e_\chi E[G] = e_\chi E$。在下文中，我们使用对应关系 $e_\chi E \cong E$。根据定义（见上文第 4.1 小节） $L'(E(r)_F,\ 0) = \Sigma_{\chi\in\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}}L'(r,\ \chi)e_\chi$。于是，猜想4.2.1 等价于以下命题对 G的所有特征均成立

$$L'(r,\chi^{-1})^{-1}E \supseteq (\rho_F^r)_{triv}(\mathrm{Det}_E^{-1}(e_\chi(K_{1-2r}(F)\otimes E))\otimes E)$$

由于 k 是虚二次的，根据 Beilinson 调节子

$$(K_{1-2r}(O_F)\otimes E)\otimes\mathbb{R} \simeq E[G]\otimes\mathbb{R}$$

E-向量空间 $e_\chi(K_{1-2r}(O_F)\otimes E)$ 的维数必为 1，而 $(\rho_F^r)_{triv}$ 在 χ-特征子空间上的限制定义如下

$$\begin{aligned}(\rho_F^r)_{triv} &: \mathrm{Det}_E^{-1}(e_\chi(K_{1-2r}(O_F)\otimes E))\otimes E \to E\\ &: \mathrm{Hom}(e_\chi(K_{1-2r}(O_F)\otimes E),E)\otimes E \overset{((\rho_F^r)^\vee)^{-1}\otimes Id_E}{\to} E\end{aligned}$$

由此可知，猜想4.2.1 等价于对G的所有特征，下述命题均成立

$$L'(r,\chi^{-1})E \subseteq \rho_F^r(e_\chi(K_{1-2r}(O_F)\otimes E))$$

这意味着，对于 G 的每个特征 χ，都存在一个元素 $\tilde{\epsilon}_\chi(F) \in e_\chi(K_{1-2r}(O_F)\otimes E)$，使其满足

$$\rho_F^r(\tilde{\epsilon}_\chi(F)) = L'(r,\chi^{-1}).$$

□

推论 5.2 如果 *ETNc* 的有理部分（即猜想*4.2.1*）成立，那么定理 *3.1* 的第 *(1)* 部分对所有有理素数 p 均成立。

证明 回忆一下，T 表示 $\mathbb{R}[G]$ 中的完备 $\mathbb{Z}$-格，它恰好是 Beilinson 调节子作用于$K_{1-2r}(O_F)$所得的像。
如果猜想4.2.1成立，那么命题5.1表明，该元素

$$w_{1-r}(F^{\ker(\chi)})L'(r,\chi^{-1})\chi^{-1}(\sigma)|G|e_\chi,$$

属于 T $\otimes E$。
一旦我们注意到 $L'_S(r,\ \chi) = L'(r,\ \chi)\prod_{v\in S\setminus S_\infty}(1-\chi(\mathrm{Frob}_v)\mathbf{N}v^{-r})$ 和$\prod_{v\in S\setminus S_\infty}(1-\chi(\mathrm{Frob}_v)\mathbf{N}v^{-r}) \in O$，证明便告结束。□

6 定理 3.1 的 ETNcand 陈述（2）

本节的主要命题如下

命题 6.1 假设 *ETNc*（猜想 *4.2.2*）对 $E(r)_F$ 成立。 n

$$\rho^r_{F,p}(K_{1-2r}(O_F)\otimes O_p).\mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(K_{-2r}(O_{F,S})\otimes O_p) = \varepsilon_{S_f}(r)^{\#}.L^*(E(r)_F,0)^{\#}.\mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(K_{1-2r}(O_F)_{\mathrm{tors}}\otimes O_p)$$

为证明命题 6.1，我们先概述文献中的一些结果：这些内容是小节 6.1 的预备知识。命题 6.1 的证明将在小节 6.2 中给出。

6.1 预备知识

6.1.1 从紧支撑上同调到 étale 上同调

接下来，我们固定 $T_p = O_p[G](r)$。

引理 6.2 设 p 为有理素数， S 为 k 的有限个地方的集合，其中包含无限处、 p-处以及在 F/k 中分歧的赋值。

*Sup*假设 p 为奇数，或者 k 是全虚的。存在一个 *distinguished* 三角

$$R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)\to R\Gamma(O_{k,S},T_p^\vee(1))^\vee[-3]\to(\prod_{\sigma:k\to\mathbb{C}}T_p)^+[0] \tag{3}$$

证明 distinguished 三角 (3) 与 ([5], §3.4) 中给出的三角相同。 □

6.1.2 同构 ϑ^r_{F,S_p}

在本小节中，我们回顾同构 ϑ^r_{F,S_p} 的精确定义（例如， [4], (1.17) 中也给出了此定义）。

6.1.3 f上同调

设 M 是混合动机范畴 $\mathrm{MM}_F(E)$ 中的一个对象，该范畴定义在 F 上，系数取自 E。对于这样的动机 M，记:

- $M^\vee(1)$ 表示 M 的「Tate 扭曲对偶」。
- $H^i{}_{\mathcal{M}}(M)$（分别为 $H^i{}_{\mathcal{M}}(M^\vee(1))$）表示 M（分别为 $M^\vee(1)$）的动机上同调。
- M_B M 的 Betti 实现，它带有复共轭作用。
- 对于每个有理素数 p，记 M_p 为 M 的 étale 实现

$$M_p := H^0_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(F)\times_k\overline{k},E_p(r)).$$

设 p 为一个有理素数。遵循 Fontaine [11], ，对于 k 的每个有限处 v ，我们用 $R\Gamma_f(k_v, M_p)$ 表示 M_p的局部非分歧上同调复形。对于 k 的任意有限赋值集 S ，若其包含 p-赋值集以及无限处集 S_∞ ，则记 $R\Gamma_f(O_{k,S}, M_p)$ 为 M_p的整体非分歧上同调复形。关于局部和整体非分歧上同调的详细介绍，建议读者参阅 T. Nguyen Quang Do 在 [20]发表的出色综述。

注记 为便于后续计算，我们回顾一下：若赋值 v 是阿基米德赋值，则局部 f-上同调的复形 $R\Gamma_f(k_v, M_p)$ 为

$$R\Gamma_f(k_v,M_p) := R\Gamma(k_v,M_p) \quad v\mid\infty$$

6.1.4 同构的定义 $\vartheta^r_{F,\ S_p}$

回顾一下， S_p 表示由 p-赋值和无限处组成的 k 的赋值集合。我们用 $S_{p,f}$ 表示 S_p 的有限赋值子集（即位于 p上方的赋值）。

命题 6.3 存在一个 *distinguished* 三角

$$R\Gamma_c(O_{k,S_p}, M_p) \to R\Gamma_f(O_{k,S_p}, M_p) \to \oplus_{v\in S_{p,f}} R\Gamma_f(k_v, M_p) \oplus \oplus_{v\in S_\infty} R\Gamma(k_v, M_p)$$

证明 这正是 [4] 中的 distinguished 三角 (1.11)。 □

命题 6.4 假设 p 为奇数，或者当 $p = 2$ 时 k 为全虚。令 $r < 0$。存在一个 $E_p[G]$-等变同构

$$\vartheta^r_{F,S_p} : \Xi(E(r)_F) \otimes E_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Det}_{E_p[G]} \mathrm{R}\Gamma_c(O_{k,S_p}, ((E(r)_F))_p)$$

P屋顶 由于我们研究动机 $M := E(r)_F$ 和 $r < 0$，基本线 i s

$$\Xi(M) := \mathrm{Det}_{E[G]}(H^1_{\mathcal{M}}(M^\vee(1))^\vee) \otimes \mathrm{Det}^{-1}_{E[G]}(M^+_B)$$

于是我们得到以下同构

- $M^+_B \otimes E_p \xrightarrow{\alpha}(\oplus_{v\in S_\infty} H^0(k_v,\ M_p))$
- 切尔恩映射同构

$$H^1_{\mathcal{M}}(M^\vee(1)) \otimes E_p \xrightarrow{ch}_{\sim} H^1_f(O_{k,S_p}, M^\vee_p(1)).$$

同构 $\vartheta^r_{F,\ S_p}$一方面由这些同构和命题 6.3 的 distinguished 三角诱导；另一方面，由于 $r < 0$, 复形 $R\Gamma_f(k_v,\ M_p)$ 对所有有限位都是无环的（例如，见 [3], §2，引理 1 之后）。□

需要特别指出，在定义 $\vartheta^r_{F,\ S_p}$时，模 $\mathrm{Det}^{-1}_{E_p[G]}(\oplus_{v\in S_{p,\ f}} R\Gamma_f(k_v,\ M_p) = \otimes_{v\in S_{p,\ f}} \mathrm{Det}^{-1}_{E_p[G]} R\Gamma_f(k_v,\ M_p)$ 映射到 $E_p[G]$ 的方式如下（例如，见 [3], §2）：设 $V_v \to V_v$为复形 $R\Gamma_f(k_v,\ M_p)$，则 $\mathrm{Det}^{-1}_{E_p[G]} R\Gamma_f(k_v,\ M_p)$ 通过以下方式映射到 $E_p[G]$

$$\mathrm{Id}_{V_v,triv} : \det^{-1}_{E_p[G]} V_v \otimes \det_{E_p[G]} V_v \xrightarrow{\sim} E_p[G].$$

and

$$\vartheta^r_{F,S_p} := \mathcal{J}_{S_p} \circ (\mathrm{Det}(ch^\vee) \otimes \mathrm{Det}^{-1}(\alpha) \otimes (\ \otimes_{v\in S_p} (\mathrm{Id}_{V_v,triv})^{-1})).$$

˜6.1.5 同构 ϑ^r_{F,S_p}

还有另一种方法，可以通过逐一映射相应的上同调群，将 $\Xi(E(r)_F) \otimes E_p$映射到 $\mathrm{Det}^{E_p[G]}$ $\mathrm{R}\Gamma_c(O_{k,S_p},((E(r)_F))p)$（例如参见 [4], §1.4 以及 (1.16) 后的注记）。具体做法如下:

由于 $R\Gamma_f(k_v, M_p)$ 是无环的，且复形 $R\Gamma_f(O_{k,S_p}, M_p)$ 在次数 2 之外无环（$r < 0$），命题 6.3 的正合列给出

$$\begin{cases} H^1_c(O_{k,S_p}, M_p) \simeq \oplus_{v\in S_\infty} H^0(k_v, M_p) \\ H^2_c(O_{k,S_p}, M_p) \simeq H^2_f(O_{k,S_p}, M_p) \end{cases}$$

˜同构 ϑ^r_{F,S_p} 由这些同构以及映射诱导

$$\det^{-1}_{E_p[G]}H^0_f(k_v,M_p)\otimes\det_{E_p[G]}H^1_f(k_v,M_p)\xrightarrow{\sim}E_p[G]$$

注意，映射 ϑ^r_{F,S_p} 和 $\tilde{\vartheta}^r_{F,S_p}$ 的区别仅在于 $\otimes_{v\in S_{p,f}}\mathbf{Det}^{-1}_{E_p[G]}R\Gamma_f(k_v,M_p)$ 到 $E_p[G]$ 的映射方式。

由 ([3] ,(11), (12)) 可得

$$\tilde{\vartheta}^r_{F,S_p}=\varepsilon_{S_{p,f}}(r).\vartheta^r_{F,S_p}$$

以及 $\varepsilon_{S_{p,f}}(r)\in(E[G])^\times$. 此外，注意到 $\varepsilon_{S_p}(r)$ 是 [3], 中所用因子的倒数，因为与 Loc. cit. 相比，我们采用了 ETNc 的对偶表述。

˜6.1.6 同构 ∇ 和 ∇

设 S 为 k 的任意有限个地方的集合，且包含集合 S_p （由 p-赋值和无限处组成）。我们回顾 distinguishedtriangle（例如 [15], 引理 2.3）

$$R\Gamma_c(O_{k,S},M_p)\to R\Gamma_c(O_{k,S_p},M_p)\to\oplus_{v\in S_f\setminus S_{p,f}}R\Gamma_f(k_v,M_p)$$

于是得到一个同构

$$\tilde{\nabla}:\mathrm{Det}_{E_p[G]}R\Gamma_c(O_{k,S},M_p)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Det}_{E_p[G]}R\Gamma_c(O_{k,S_p},M_p)\tag{4}$$

我们还可以定义一个同构

$$\nabla:\mathrm{Det}_{E_p[G]}R\Gamma_c(O_{k,S},M_p)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Det}_{E_p[G]}R\Gamma_c(O_{k,S_p},M_p)\tag{5}$$

˜∇与 ∇的区别在于我们将$\otimes_{v\in S_f\setminus S_{p,f}}\mathbf{Det}_{E_p[G]}R\Gamma_f(k_v,M_p)$映射到 $E_p[G]$的方式。˜对于 ∇，我们使用命题 6.4 的证明中引入的映射$\otimes_{v\in S_f\setminus S_{p,f}}\mathbf{Id}_{V_v,triv}$。对于 ∇，我们利用 $R\Gamma_f(k_v,M_p)$的上同调在有限位处是无环的这一事实。因此:

$$\nabla=\varepsilon_{S_f\setminus S_{p,f}}(r).\tilde{\nabla},$$

6.1.7 其他考虑:

1. 设 p 为一个有理素数， S 为 k 的有限个地方的集合，其中包含集合 S_p （由无限处和 p-处组成）以及在 F/k中分歧的赋值集合。令

$$\tilde{\vartheta}^r_{F,S}:=\tilde{\nabla}^{-1}\circ\tilde{\vartheta}^r_{F,S_p}\qquad\text{and}\qquad\vartheta^r_{F,S}:=\nabla^{-1}\circ\vartheta^r_{F,S_p}$$

˜其中 ∇ （分别为 ∇）是第 6.1.6 小节中的同构 (4)（分别为 (5)。

回顾一下（参见小节 6.1.5 或例如 [3] , (11)、(12)）

$$\tilde{\vartheta}^r_{F,S_p}=\varepsilon_{S_{p,f}}(r)\vartheta^r_{F,S_p}$$

以及（参见第 6.1.6 小节）:

$$\nabla=\varepsilon_{S_f\setminus S_{p,f}}(r).\tilde{\nabla}$$

因此

$$(\vartheta^r_{F,S})^{-1}=\varepsilon_{S_f}(r).(\tilde{\vartheta}^r_{F,S})^{-1}.$$

2. 如同我们在定理 5.1 的证明中所做的，由于 k 是虚二次的，我们作如下典范识别

$$Y_r(F)^+ \cong \mathbb{Z}[G]$$

并将 Beilinson 调节子视为一个映射

$$\rho_F^r : K_{1-2r}(O_F) \to \mathbb{R}[G]$$

通过与引理 2.1 的同构 ι 复合。

3. 考虑到最后一点，我们在定理 5.1 的证明中证明了

$$e_\chi(\rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)) \otimes E) = L^{'}(r, \chi^{-1})e_\chi E$$

因此，通过识别 $L^*(E(r)_F,0) = \Sigma_{\chi\in\hat{}G}L^{'}(r,\chi)e_\chi$，我们得到

$$\rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)) \otimes E = L^*(E(r)_F, 0)^{\#}E[G]$$

由于 $L^*(E(r)_F, 0) \in \mathbb{R}[G]^\times$，我们也得到

$$((L^*(E(r)_F, 0)^{\#})^{-1}.\rho_F^r(K_{1-2r}(O_F))) \otimes E = E[G]$$

Let

$$\tilde{\mathcal{T}} := (L^*(E(r)_F, 0)^{\#})^{-1}.\rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)$$

由于 $L^*(E(r)_F,\ 0)^{\#}$ 可逆，$\tilde{}$T 是向量空间$\mathbb{R}[G]$的一个 $\mathbb{Z}$-阶（完全格）。

通过T标量扩张的，我们可以构造 $(e_\chi)_{\chi\in\hat{G}}$生成，其中 $\tilde{a_\chi} \in E^\times$ 对所有 $\chi \in \hat{}G$均成立。
我们有以下关于 T $\otimes O_p$的$\tilde{}$性质：

命题 6.5

a. $\tilde{}\mathcal{T} \otimes O_p$ 是一个秩为一的自由 $O_p[G]$-模。

b. 存在一个非零元素 $\delta \in O$ 使得

$$\delta|G| . \left(\tilde{\mathcal{T}} \otimes O_p\right) \subseteq O_p[G]$$

证明 要证明 $(a.)$，只需注意到：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{T}} \otimes O_p &= \Sigma_{\chi\in\hat{G}} a_\chi e_\chi O_p \\ &= \frac{(\Sigma_{\chi\in\hat{G}}|G|a_\chi e_\chi)}{|G|}.O_p[G]\end{aligned}$$

以及 $\Sigma_{\chi\in\hat{G}}|G|a_\chi e_\chi \in E[G]^\times$。
断言 $(b.)$ 显然成立。 □

注记 6.1.7 根据命题 6.5 证明中给出的相同论证，可以看出 $\rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)) \otimes O_p$ 也是一个秩一自由 $O_p[G]$-模。

6.2 命题 6.1 的证明

回想一下， S 表示 k 的一个有限个地方的集合，其中包含集合 S_p （由无限处和p-赋值组成）以及在 F/k 中分歧的赋值集合。ETNc 在将素数集合 S_p 扩大为 S 时保持相容（例如，[15], 引理 2.3）。对于扩大的素数集合 S ，ETNc 的陈述为

$$O_p[G]\vartheta^r_{F,S}\circ(\vartheta^r_{F,\infty})^{-1}(L^*(E(r)_F,0)^{-1})=\mathrm{Det}_{O_p[G]}R\Gamma_c(O_{k,S},T_p),$$

and

$$(\vartheta^r_{F,S})^{-1}\mathrm{Det}_{O_p[G]}R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)=\varepsilon_{S_f}(r).(\tilde{\vartheta}^r_{F,S})^{-1}R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)$$

对 ETNc 的陈述取对偶，并利用注记 5.0.1，可得

$$\begin{aligned}O_p[G](\tilde{\vartheta}^r_{F,\infty})^{-1}(L^*(E(r)_F,0)^{\#})&=\frac{1}{\varepsilon_{S_f}(r)^{\#}}(\tilde{\vartheta}^r_{F,S})^{\vee}\mathrm{Det}_{O_p[G]}R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)^{\vee}\\&=\frac{1}{\varepsilon_{S_f}(r)^{\#}}(\tilde{\vartheta}^r_{F,S})^{\vee}\mathrm{Det}_{O_p[G]}(R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)^{\vee}[-2])\end{aligned}$$

其中，在此情形下，$(\,)^{\vee}$ 表示 RHom(O_p)。
由 distinguished 三角 3，可得

- $H^0(R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)^{\vee}[-2])=H^1(O_{F,S},O_p(1-r))$
- $H^1(R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)^{\vee}[-2])=H^2(O_{F,S},O_p(1-r))\oplus(\prod_{\sigma:k\to\mathbb{C}}T_p)^{+})^{\vee}$
- $H^i(R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)^{\vee}[-2])=0$ for all $i\neq 0,1$.

˜根据小节 6.1.5，我们知道，同构 $\vartheta^r_{F,S}$ 由作用于动机上同调群（即高阶 K-群的对偶）的切尔恩同构 ch 以及作用于 $M_B^+\otimes E\simeq(Y_r(F)^+\otimes E)^{\vee}$ 上的同构 α 诱导。以下同构（在 O_p 上作标量扩张）

- $H^1(O_{F,S},O_p(1-r))\xrightarrow{ch^{\vee}}{\sim}K_{1-2r}(O_F)\otimes O_p$
- $H^2(O_{F,S},O_p(1-r))\oplus T_p^{\vee}\xrightarrow{ch^{\vee}\oplus\alpha^{\vee}}{\sim}(K_{-2r}(O_{F,S})\otimes O_p)\oplus(Y_r(F)^+\otimes O_p)$

由于 k 是虚二次的，对所有 p 都成立，因此在导出范畴中诱导出 $R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)^{\vee}[-2]$ 与复形 $C^{\bullet}$ 之间的一个同构（即拟同构），该复形满足

- $H^0(C^{\bullet})=K_{1-2r}(O_F)\otimes O_p$
- $H^1(C^{\bullet})=(K_{-2r}(O_{F,S})\otimes O_p)\oplus(Y_r(F)^+\otimes O_p)$
- $H^i(C^{\bullet})=0$ for all $i\neq 0,1$.

例如，这一点在（[2], 引理 11.1.1）中已有隐含提及。因此，我们有：

$$(\tilde{\vartheta}^r_{F,S})^{\vee}\mathrm{Det}_{O_p[G]}(R\Gamma_c(O_{k,S},T_p)^{\vee}[-2])=\mathrm{Det}_{O_p[G]}(C^{\bullet})$$

令 $\mathbb{C}_p$ 为 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 的完备化。ETNc 表述为：

$$\varepsilon_{S_f}(r)^{\#}.L^*(E(r)_F,0)^{\#}.O_p[G]=\tilde{\vartheta}^r_{F,\infty}\mathrm{Det}_{O_p[G]}(C^{\bullet}),$$

其中 $L^*(E(r)_F, 0)^{\#}.O_p[G] \subset \mathbb{C}_p[G]$。由于 Beilinson 调节子诱导出一个同构

$$\rho_F^r : K_{1-2r}(O_F)_{/\text{tors}} \xrightarrow{\sim} \rho_F^r(K_{1-2r}(O_F))$$

它给出了同构

$$K_{1-2r}(O_F) \otimes O_p \xrightarrow{\sim} K_{1-2r}(O_F)_{\text{tors}} \otimes O_p \oplus \rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)) \otimes O_p$$

这在导出范畴中诱导出 $C^\bullet$ 与复形 $D^\bullet$ 之间的拟同构，该复形满足

- $H^0(D^\bullet) = K_{1-2r}(O_F)_{\text{tors}} \otimes O_p \oplus \rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)) \otimes O_p$
- $H^1(D^\bullet) = (K_{-2r}(O_{F,S}) \otimes O_p) \oplus (Y_r(F)^+ \otimes O_p)$
- $H^i(D^\bullet) = 0$ for all $i \neq 0, 1$.

并且

$$\tilde{\vartheta}^r_{F,\infty}\text{Det}_{O_p[G]}(C^\bullet) := \text{Det}_{O_p[G]}(D^\bullet).$$

我们进一步推进这一过程：考虑映射：

- $\rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)) \otimes O_p \hookrightarrow K_{1-2r}(O_F)_{\text{tors}} \otimes O_p \oplus \rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)) \otimes O_p$ and
- $\delta|G\mid .(L^*(E(r)_F, 0)^{\#})^{-1}\rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)) \otimes O_p \hookrightarrow Y_r(F)^+ \otimes O_p$

其中，第二个映射中的元素 $\delta \in O\backslash\{0\}$ 在（命题 6.5，$(b.)$）中引入。这个映射是有意义的，这要归功于命题 6.5，以及 $Y_r(F)^+ \otimes O_p \cong O_p[G]$（参见第 6.1.7 段，（2。））。

The这两个映射在导出范畴中诱导出一个态射 f，从完美复形

$$Z^\bullet : 0 \to \rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)) \otimes O_p \xrightarrow{0} \delta|G\mid .(L^*(E(r)_F, 0)^{\#})^{-1}\rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)) \otimes O_p \to 0$$

其中非零模分别位于次数 0 和 1，映射锥 f 也因此是完美的，并且我们有

$$\begin{aligned}\text{Det}_{O_p[G]}D^\bullet &= \text{Det}_{O_p[G]}Z^\bullet \otimes_{O_p[G]} \text{Det}_{O_p[G]}\text{Cone}(f)\\ &= \frac{L^*(E(r)_F, 0)^{\#}}{\delta|G\mid}.\text{Det}_{O_p[G]}\text{Cone}(f)\end{aligned}$$

现在我们可以观察到以下结论

1- ETNc 成立，当且仅当 $\text{Det}^{O_p[G]}\text{Cone}(f) = \delta|G\mid .\varepsilon_{S_f}(r)^{\#}.O_p[G]$。

2- 复形 $\text{Cone}(f)$ 的有限上同调群如下

- $H^0(\text{Cone}(f)) = K_{1-2r}(O_F)_{\text{tors}} \otimes O_p$
- $H^1(\text{Cone}(f)) = (K_{-2r}(O_{F,S}) \otimes O_p) \oplus \frac{O_p[G]}{\delta|G|.(L^*(E(r)_F,0)^{\#})^{-1}\rho_F^r(K_{1-2r}(O_F))\otimes O_p}$
- $H^i(\text{Cone}(f)) = 0$ for all $i \neq 0, 1$.

回忆一下（例如参见 [3] 引理 3 后的讨论以及 [2]的第 3 段），给定任意一个仅有两个非零上同调群 $H^0(X)$ 和 $H^1(X)$ 的 $O_p[G]$-模完美复形 X，导出范畴中对应于 X 的元素可以表示为一个 Yoneda 扩张类

$$e(X) \in \text{Ext}^2_G(H^1(X), H^0(X)),$$

其代表元可以选取为一个 2-扩张（正合列）

$$0 \to H^0(X) \to A \to B \to H^1(X) \to 0$$

其中 A 和 B 均为完美 $O_p[G]$-模。
现在我们的证明将遵循（[6], 推论 2 的证明，第 181–183 页）中的步骤。令 $\mathrm{D}^{\mathrm{p,f}}(O_p[G])$ 表示由有限上同调群的 $O_p[G]$-模所构成的完美复形范畴。由于 $\mathrm{Cone}(f) \in \mathrm{D}^{\mathrm{p,f}}(O_p[G])$，且 $\mathrm{Cone}(f)$ 的上同调仅在次数 0 和 1 非零，因此存在一个 $O_p[G]$-模的正合列：

$$0 \to H^0(\mathrm{Cone}(f)) \to Q \xrightarrow{d} Q^{'} \to H^1(\mathrm{Cone}(f)) \to 0 \tag{6}$$

该列满足 Q 和 $Q^{'}$ 均为有限的，且在 $O_p[G]$ 上的投射维数至多为 1（注意，这与 [6] 的序列 (14) 完全相同，只是有一个平移）；并且在 $\mathrm{D}^{\mathrm{p,f}}(O_p[G])$ 中，$\mathrm{Cone}(f)$ 与复形 $Q \xrightarrow{d} Q^{'}$ 之间存在一个同构（其中各模分别置于次数 0 和 1，且上同调分别与 $H^0(\mathrm{Cone}(f))$ 和 $H^1(\mathrm{Cone}(f))$ 相对应）。因此：

$$\mathrm{Det}_{O_p[G]}\mathrm{Cone}(f) = \mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(Q)^{-1}\mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(Q^{'})$$

现在我们可以将 [6] 的引理 5 应用于正合列 (6)。这表明 ETNc 等价于以下命题

$$\delta|G \mid \varepsilon_{S_f}(r)^{\#}.\mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(H^0(\mathrm{Cone}(f))^*) = \mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(H^1(\mathrm{Cone}(f))$$

其中 $(\,)^*$ 表示 Pontryagin 对偶，或者等价地

$$\rho_F^r(K_{1-2r}(O_F)).\mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(K_{-2r}(O_{F,S})\otimes O_p) = \varepsilon_{S_f}(r)^{\#}.L^*(E(r)_F,0)^{\#}.\mathrm{Fitt}_{O_p[G]}\Big((K_{1-2r}(O_F)_{\mathrm{tors}}\otimes O_p)^*\Big)$$

现在，由于 $(K_{1-2r}(O_F) \otimes \mathbb{Z}_p)_{\mathrm{tors}}$ 是 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-r)$ 的有限子群，$O_p[G]$-模 $K_{1-2r}(O_F)_{\mathrm{tors}} \otimes O_p$ 是一个循环群。我们可以利用这一事实和（[6], 第 183 页的注 9）证明

$$\mathrm{Fitt}_{O_p[G]}\Big((K_{1-2r}(O_F)_{\mathrm{tors}} \otimes O_p)^*\Big) = \mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(K_{1-2r}(O_F)_{\mathrm{tors}} \otimes O_p)$$

. □

推论 6.6 如果 *ETNc*（即猜想 *4.2*）成立，那么定理 *3.1* 的（*2*）对所有有理素数 p 都成立。

证明 设：

- $A := \rho_{F,p}^r(K_{1-2r}(O_F) \otimes O_p).\mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(K_{-2r}(O_{F,S}) \otimes O_p)$
- $B := \varepsilon_{S_f}(r)^{\#}.L^*(E(r)_F,0)^{\#}.\mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(K_{1-2r}(O_F)_{\mathrm{tors}} \otimes O_p)$

那么命题 6.1 蕴含 $A = B$。由于对所有 $\chi \in \hat{G}$，都有 $|G|e_\chi \in O[G]$，我们得到

$$|G|e_\chi B \subseteq A \subseteq \rho_{F,p}^r(K_{1-2r}(O_F) \otimes O_p)$$

然而 $|G|e_\chi B = |G|.\chi(\varepsilon_{S_f}(r)^{\#}).L^{'}(r,\chi^{-1}).(e_\chi \mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(K_{1-2r}(O_F)_{\mathrm{tors}} \otimes O_p))$。证明以注意到以下事实作为结束：

$$w_{1-r}(F^{\ker(\chi)})L_S^{'}(r,\chi^{-1})|G|e_\chi \in |G|.\chi(\varepsilon_{S_f}(r)^{\#}).L^{'}(r,\chi^{-1}).(e_\chi \mathrm{Fitt}_{O_p[G]}(K_{1-2r}(O_F)_{\mathrm{tors}} \otimes O_p))$$

□

7 第 5 节和第 6 节的结论

结合推论 5.2 和推论 6.6，可得如下结论：

推论 7.1 假设 *ETNc*（猜想 *4.2*）对 $E(r)_F$成立。那么定理 *3.1* 的陈述 *(1)* 和 *(2)* 对所有有理素数 p均成立。

7.1 定理 3.1 的证明

定理 3.1 是推论 7.1 的结果，并且基于以下事实：对于所有在 k 中分裂且满足 $p \nmid 6$ 的有理素数 p，ETNc 在 k 虚二次的情形下成立（根据[14], 主定理，第 4 页）。□

参考文献

[1] A. Beilinson. 多重对数与圆分元素。预印本，（1990）。[2] D. Burns. 关于等变动机 L 函数的首项与特殊值。Pure and Applied Math. Quart., 6(1), (2010), 83-171.[3] D. Burns and M. Flach. 关于与 Tate 动机相关的伽罗瓦结构不变量。Invent. Math., 153, (2003), 303-359.[4] D. Burns and M. Flach. 动机 L 函数与伽罗瓦模结构。Math. Ann., 305, (1996), 65-102.[5] D. Burns and C. Greither. 关于 Tate 动机的等变 Tamagawa 数猜想。Am. J. Math., 120, (1998), 1343-1397.[6] D. Burns and C. Greither. 等变 Weierstrass 预备定理与负整数处 L函数的取值。Doc. Math. (Extra Vol.), Kazuya Kato 五十岁生日纪念文集，（2003），157-185。[7] C. Deninger. 虚二次域 II 的高阶调节子与 Hecke L级数。Annals of Math. 132, (1990), 131-158.[8] S. El Boukhari. 偶 K 群同型分量的 Fitting 理想。Manuscripta Mathematica, 157(1), 23-49, (2018).[9] S. El Boukhari. 高阶 Stickelberger 理想与偶 K群。Proc. AMS, 150(8), 3231-3239, (2022).[10]M. Flach. 等变 Tamagawa 数猜想：综述。DOI: 10.1090/conm/358/06537, (2003).[11] J.M. Fontaine. 动机 L 函数的特殊值。Bourbaki 研讨班，报告 751，2 月，（1992）。[12] J.M. Fontaine and B. Perrin-Riou. 关于 Bloch 和 Kato 猜想：伽罗瓦上同调与 L 函数值。Proc. Symp. Pure Math., 55(1), (1994), 599-706.[13] B. H. Gross. 高阶调节子与 Artin L函数的取值。Pure App. Math. Q. 1 (1), (2005), 1-13。

[14]J. Johnson-Leung. 几乎阿贝尔扩张的局部等变 *Tamagawa* 数猜想。Women in numbers 2：数论研究方向，Contemp. Math.,**606**, (2013), 1-27。[15] J. Johnson-Leung and G. Kings. 关于虚二次域上的等变主猜想。纯粹与应用数学杂志，**653**，(2011), 75-114。[16] F. Knudsen and D. Mumford.稳定曲线模空间的射影性 I：关于*"det"*和*"div"*的预备知识。Math.Scand.,**39**, (1976), 19-55.[17] M. Kolster, T. Nguyen Quang Do and V. Fleckinger. 扭曲 *S*-单位、*p* 进类数公式与 *Lichtenbaum* 猜想。Duke Math.**84** (3), (1996), 679-717.[18] J. Nekovar. *Selmer* 复形。法国数学学会，（2006）。[19]J. Neukirch, A. Schmidt and K. Wingberg. 数域上同调。Springer，（2000），ISBN 3-540-66671-0。[20] T. Nguyen Quang Do. 关于 *Tamagawa* 数猜想的行列式方法。《黎曼 ζ 函数的 Bloch-Kato 猜想》（伦敦数学学会讲义系列），剑桥大学出版社，（ 2015 ），154-192。[21] M. Rapoport, N. Schappacher and P. Schneider.*Beilinson* 关于特殊值的猜想 L-函数。Academic Press，（1988），ISBN 0-12-581120-9。[22] C. Soulé. 关于高阶 p-进调节子。代数 K理论，埃文斯顿 1980（1980 年于伊利诺伊州埃文斯顿西北大学举行的会议论文集），Springer，柏林，（1981），372-401。Astérisque，**147/148**，（1987），225-257。[23] J. Tate.斯塔克关于 *Artin* L 函数在 *s* 处的猜想$=0$。Springer，第一版，（1984）。ISBN-13：9783764331887。