arXiv:2302.04056v2 [eess.SP] 2 Mar 2023

实际应用场景下压缩感知中正交匹配追踪的分析

Hamed Masoumi、Michel Verhaegen 和 Nitin Jonathan Myers 代尔夫特系统与控制中心，代尔夫特理工大学，荷兰 电子邮箱： {H.Masoumi、M.Verhaegen、N.J.Myers}@tudelft.nl

摘要—正交匹配追踪（OMP）是压缩感知（CS）中广泛使用的稀疏信号恢复贪心算法。然而，关于 OMP 的既有研究仅在压缩感知矩阵各列具有相同范数的假设下提供了重建保证；由于硬件限制，这一假设在许多实际压缩感知应用中并不现实。本文针对压缩感知矩阵各列范数不相等的情况，推导了使用 OMP 进行稀疏恢复的保证。最后，我们证明，列范数具有可比性的压缩感知矩阵能够为稀疏信号支撑集的成功恢复以及估计结果较低的均方误差提供严格保证。

索引词—**压缩感知、正交匹配追踪、支撑集恢复、互相干性。**

一、引言

压缩感知是一种从压缩表示中恢复稀疏信号的方法 [1], ，该压缩表示由已知压缩感知矩阵与未知稀疏信号相乘得到。由于压缩感知矩阵的行数少于列数，重构该信号是一个病态问题。然而，压缩感知算法可以利用稀疏先验估计未知信号。

正交匹配追踪 [2] 是压缩感知中的一种常用贪心算法。压缩感知领域的一项关键挑战是确定在什么条件下能够保证稀疏解唯一。这类条件通常基于受限等距常数（RIC） [3]–[6] 以及压缩感知矩阵的相干性 [7]–[12]。基于 RIC 的条件取决于压缩感知矩阵的受限等距性质（RIP）；对于某些随机构造，可以较为容易地获得该性质。然而，一般而言，验证给定的确定性矩阵是否满足 RIP 是 NP 困难问题 [13]。压缩感知矩阵的相干性，即其两个不同 ℓ_2 归一化 列之间内积绝对值的最大值，对于给定的压缩感知矩阵是易于计算的。因此，当压缩感知矩阵已知时，推导基于相干性的压缩感知保证较为方便。

在若干应用中，压缩感知矩阵的各列具有不相等的 ℓ_2 列范数，例如基于压缩感知的低分辨率相控阵无线信道估计。在此类相控阵中，硬件缺陷会导致压缩感知矩阵的列范数不可避免地出现变化。尽管已知正交匹配追踪等压缩感知算法即使在此类矩阵下也能表现良好，但列范数变化对稀疏信号恢复的影响仍不明确。为弥补文献中的这一空白，我们研究了适用于列范数可能不同的通用压缩感知矩阵的正交匹配追踪算法性能保证。

下面，我们讨论基于相干性的正交匹配追踪算法性能保证相关文献。对于无噪声压缩感知场景， [11] 给出了成功进行支撑集恢复和稀疏信号精确重构的保证。在 [7], [8], 中，推导了成功进行支撑集恢复的充分条件，并给出了重建信号均方误差（MSE）的上界。最后，在假设压缩感知测量受到加性高斯噪声干扰的情况下，[9], [12] 获得了改进的基于相干性的正交匹配追踪性能保证。 [7]–[9], [11], [12], 中的工作均假设采用列归一化压缩感知矩阵，即其各列具有相同的ℓ_2 列范数。当压缩感知矩阵未经列归一化时， [14]给出了基于相干性的条件，以使用正交匹配追踪从由非负元素构成的无噪声测量值集合中恢复稀疏向量的支撑集。

本文推导了在压缩感知矩阵的列具有不等的 ℓ_2 范数且测量值含有噪声时，识别复值稀疏向量支撑集的充分条件。随后，我们推导了使用正交匹配追踪重构信号的均方误差上界。我们的推导遵循与 [7] 中类似的结构。因此，当压缩感知矩阵的列范数相等时，我们的结果可化为 [7] 中的结果。对于弗罗贝尼乌斯范数固定的压缩感知矩阵，与列范数差异显著的矩阵相比，列范数相近的压缩感知矩阵使用正交匹配追踪能够获得更好的稀疏恢复性能。

记号： a、$\mathbf{a}$ 和$\mathbf{A}$ 分别表示标量、向量和矩阵。a_i 是$\mathbf{a}$ 的第 i^{th} 个元素。此外，$\mathbf{a}_i$ 是$\mathbf{A}$的第 i^{th} 列。 $\|\cdot\|_2$ 是 ℓ_2 范数算子。$(\cdot)^T$ 和 $(\cdot)^*$ 分别表示转置和共轭转置算子。 $[N]$ 表示集合 $\{1, 2, ..., N\}$。 $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2)$ 表示方差为 σ^2 的零均值复高斯分布。 $\mathbf{0}_{N\times 1}$ 表示全零向量。 $\mathbb{E}[\cdot]$ 是期望算子，$\Pr\{\mathcal{E}\}$表示事件 $\mathcal{E}$ 发生的概率。最后，$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$。

II. 预备知识

考虑一个定义在支撑集 $\Lambda \subseteq [N]$ 上的 k 稀疏 $N \times 1$ 复向量 $\mathbf{x}$ 。支撑集的基数定义为 $|\Lambda| = k$。我们用 $\mathbf{A}$ 表示一个满足 $M < N$ 的 $M \times N$ 压缩感知矩阵，并用 $\mathbf{y}$ 表示含有 M 的含噪压缩感知测量。测量值中的噪声建模为一个 $M \times 1$ 高斯随机向量$\mathbf{v}$ ，其各分量独立服从 $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$ 分布。因此，

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}. \tag{1}$$

对于 $\mathbf{A}$ 的第 j^{th} 列，我们将其列范数定义为 $d_j = \|\mathbf{a}_j\|_2$。我们还定义 $d_{\max} = \max_{j\in[N]} d_j$ 和 $d_{\min} = \min_{j\in[N]} d_j$。我们假设压缩感知矩阵的弗罗贝尼乌斯范数固定为 $\sqrt{N}$，等价地，$\sum_{j=1}^{N} d_j^2 = N$。在此假设下，

$$0 < d_{\min} \le 1, \tag{2}$$

$$1 \le d_{\max} < \sqrt{N}. \tag{3}$$

当 $d_{\min} = d_{\max}$ 时，我们观察到 $\mathbf{A}$ 变为列归一化矩阵，即列范数相等的矩阵。

$\mathbf{A}$ 的互相干性 μ 是衡量其稀疏恢复性能的指标，定义如下：

$$\mu = \max_{\{(j,\ell):j\neq\ell, j\in[N], \ell\in[N]\}} \frac{|\mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_\ell|}{d_j d_\ell}. \tag{4}$$

具有较小 μ 的压缩感知矩阵能够实现更好的支撑集恢复，并减小稀疏向量 [7] 估计值的误差。

已知稀疏度 k，正交匹配追踪（OMP）可在 k 次迭代中，根据式（1）中的压缩感知测量值 $\mathbf{y}$ 估计 $\mathbf{x}$ [7]。在 OMP 的每次迭代中，选取 A 的一列，并估计稀疏向量中与所选列对应的元素。令 Λ^i 表示估计的支撑集，$\hat{\mathbf{x}}^i$ 表示正交匹配追踪算法第 i^{th} 次迭代得到的稀疏向量估计值。此外，令 $\hat{\mathbf{x}}^i_{\Lambda^i}$ 表示 $\hat{\mathbf{x}}^i$ 中由 Λ^i 索引的子向量，$\mathbf{A}_{\Lambda^i}$ 表示通过保留 A 中由 Λ^i 索引的列得到的矩阵。当压缩感知矩阵的列范数不同时，正交匹配追踪算法总结于算法 1 中 [15]。

算法 1 [15] 的正交匹配追踪算法。

输入：稀疏度 k、压缩感知测量 $\mathbf{y}$ 和压缩感知矩阵 $\mathbf{A}$。**初始化**：$i = 1$, $\Lambda^0 = \emptyset$, $\hat{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{0}_{N\times 1}$ 和 $\mathbf{r}^0 = \mathbf{y}$。**当** $i \le k$ **时执行**：

1. $s = \underset{j\in[N]}{\text{argmax}} \dfrac{|\mathbf{a}_j^* \mathbf{r}^{i-1}|}{d_j}$.
2. $\Lambda^i = \Lambda^{i-1} \cup s$.
3. $\hat{\mathbf{x}}^i_{\Lambda^i} = (\mathbf{A}^*_{\Lambda^i} \mathbf{A}_{\Lambda^i})^{-1} \mathbf{A}^*_{\Lambda^i} \mathbf{y}$。
4. $\mathbf{r}^i = \mathbf{y} - \mathbf{A}_{\Lambda^i} \hat{\mathbf{x}}^i_{\Lambda^i}$。
5. $i \leftarrow i + 1$。

结束循环 **输出**：$\hat{\mathbf{x}}^i$。

算法 1中的关键步骤是 *i)* 在步骤 **x** 1 中正确检测 以及 *ii)* 通过在步骤 **x1** 中检测到的各项，在步骤 **3**中求解最小二乘问题来估计。因此，我们在第 III节中详细分析这两个步骤，并给出在步骤 **1**中以高概率保证支撑集恢复的条件。我们还推导出在步骤 **3**中估计的稀疏向量的均方误差上界。

III. 基于相干性的性能保证

在本节中，我们首先分析 $|\mathbf{a}_j^* \mathbf{r}^{i-1}|/d_j$ 步 **中**算法1，以找出能够实现正确支撑集恢复的压缩感知矩阵条件。然后，假设已正确检测到 $\mathbf{x}$ 的支撑集，我们将得到算法**第 3** 步中估计向量的均方误差上界。

A. 成功支撑集恢复的保证

令 $\bar{\mathbf{x}}^i = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^i$ 表示原始稀疏向量 $\mathbf{x}$ 与其在正交匹配追踪第 i^{th} 次迭代中估计值之间的差。因此，在第 i^{th} 次迭代中，残差$\mathbf{r}^i$ 为

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^i + \mathbf{v}, \tag{5}$$

且步骤**1** 中的支撑集恢复准则等价于

$$s = \underset{j\in[N]}{\text{argmax}} \frac{|\mathbf{a}_j^* \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^{i-1} + \mathbf{a}_j^* \mathbf{v}|}{d_j}. \tag{6}$$

由（6）可知，噪声项 $\mathbf{a}_j^* \mathbf{v}/d_j$ 可能导致支撑集检测错误。因此，为了控制噪声下的支撑集误检，我们首先考察事件

$$E = \left\{ \max_{j\in[N]} \frac{|\mathbf{a}_j^* \mathbf{v}|}{d_j} < \rho \right\} \tag{7}$$

满足 $\rho := \sigma\sqrt{2\ (1+\alpha)\ \log N}$且 $\alpha > 0$ [7]。引理 1给出了事件 E发生概率的下界。文献 [7] 针对实值压缩感知问题推导了一个类似的引理，其中压缩感知矩阵是列归一化的，即 $d_{\max} = d_{\min}$。然而，我们的结果适用于更一般的压缩感知场景。

引理 1. 事件 E 在 （7）中的概率下界为

$$\Pr\{E\} \ge \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)\right)^{2N}. \tag{8}$$

证明。我们用 $\Re(\mathbf{a}_j^* \mathbf{v})$ 和 $\Im(\mathbf{a}_j^* \mathbf{v})$ 分别表示 $\mathbf{a}_j^* \mathbf{v}$ 的实部和虚部。由于 $\mathbf{v}$ 的各个元素独立同分布为 $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$，随机变量 $\{\Re(\mathbf{a}_j^* \mathbf{v})/d_j\}$和 $\{\Im(\mathbf{a}_j^* \mathbf{v})/d_j\}$ $\forall j \in [N]$联合服从高斯分布，且各自服从 $\mathcal{N}(0, \sigma^2/2)$。对于任意 $\kappa \in \mathbb{C}$，我们注意到，只要满足 $\Re(\kappa) < \rho/\sqrt{2}$ 且$\Im(\kappa) < \rho/\sqrt{2}$，就有 $|\kappa| < \rho$。将这一观察应用于（7），可得

$$\begin{aligned}\Pr\{E\} &\ge \Pr\left\{ \max_{j\in[N]} \frac{|\Im(\mathbf{a}_j^* \mathbf{v})|}{d_j} < \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cap \max_{j\in[N]} \frac{|\Re(\mathbf{a}_j^* \mathbf{v})|}{d_j} < \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right\} \\ &\overset{(a)}{\ge} \prod_{j\in[N]} \Pr\left\{ \frac{|\Im(\mathbf{a}_j^* \mathbf{v})|}{d_j} < \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right\} \Pr\left\{ \frac{|\Re(\mathbf{a}_j^* \mathbf{v})|}{d_j} < \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right\}.\end{aligned}$$

在（a）中，我们使用 ˇSid´ak 引理 [16, 定理 1]。现在，将上述方程右侧的概率值替换为与 [7],类似的上界，我们得到（8）。 □

接下来，当事件$\mathbf{x}$ 发生时，我们利用正交匹配追踪（OMP）得到能够保证成功恢复 E（7）中$\mathbf{x}$的支撑集的条件。该条件取决于稀疏向量 σ^2的非零元素的大小、噪声方差 ℓ_2、压缩感知矩阵各列的 d_j $\forall j \in [N]$-范数，即 μ，以及压缩感知矩阵的相干性（4）。

定理1。令 $x_{\max} = \max_{j\in\Lambda} |x_j|$ 和 $x_{\min} = \min_{j\in\Lambda} |x_j|$。如果

$$d_{\min} x_{\min} - (2k-1)\mu d_{\max} x_{\min} \ge 2\rho \tag{9}$$

且事件 E 在(7) 发生时，正交匹配追踪算法成功恢复$\mathbf{x}$的支撑集。

证明。我们的证明结构与 [7,引理 3]中的证明类似。我们先考察算法1的第**1**步。然后，通过归纳法，我们证明当事件 E 发生且$\mathbf{x}$ 满足（9）时，正交匹配追踪算法在$\mathbf{x}$ 次迭代后 k 正确恢复其支撑集。

现在，考虑算法1 的第一次迭代，并假设事件 E 发生，我们求出使所选列的索引（即使$|\mathbf{a}_j^*\mathbf{r}^0|/d_j$最大化的列索引）属于 Λ 的$\mathbf{x}$支撑集$\mathbf{r}^0=\mathbf{y}$。注意到

$$\max_{j\in\Lambda}\frac{|\mathbf{a}_j^*\mathbf{y}|}{d_j}>\max_{j\notin\Lambda}\frac{|\mathbf{a}_j^*\mathbf{y}|}{d_j}. \tag{10}$$

(10)的右侧，在事件 E发生的情况下，有

$$\begin{aligned}\max_{j\notin\Lambda}\frac{|\mathbf{a}_j^*\mathbf{y}|}{d_j}&=\max_{j\notin\Lambda}\frac{|\mathbf{a}_j^*\mathbf{v}+\sum_{i\in\Lambda}x_i\mathbf{a}_j^*\mathbf{a}_i|}{d_j}\\&\overset{(b)}{\leq}\max_{j\notin\Lambda}\frac{|\mathbf{a}_j^*\mathbf{v}|}{d_j}+\max_{j\notin\Lambda}\frac{\sum_{i\in\Lambda}|x_i\mathbf{a}_j^*\mathbf{a}_i|}{d_j}\\&\overset{(c)}{<}\rho+k\mu d_{\max}x_{\max}.\end{aligned} \tag{11}$$

在 (b) 中，我们使用三角不等式。在 (c) 中，我们使用事件 E 发生这一假设以及以下事实：

$$\frac{|x_i\mathbf{a}_j^*\mathbf{a}_i|}{d_j}=|x_i|\frac{|\mathbf{a}_j^*\mathbf{a}_i|d_i}{d_jd_i}\overset{(4)}{\leq}d_{\max}x_{\max}\mu.$$

在事件 E发生的情况下，对于 (10) 的左侧，有

$$\begin{aligned}\max_{j\in\Lambda}\frac{|\mathbf{a}_j^*\mathbf{y}|}{d_j}&=\max_{j\in\Lambda}\frac{|d_j^2x_j+\mathbf{a}_j^*\mathbf{v}+\sum_{i\in\Lambda\setminus\{j\}}x_i\mathbf{a}_j^*\mathbf{a}_i|}{d_j}\\&\geq d_{\min}x_{\max}-\max_{j\in\Lambda}\frac{\left|\mathbf{a}_j^*\mathbf{v}+\sum_{i\in\Lambda\setminus\{j\}}x_i\mathbf{a}_j^*\mathbf{a}_i\right|}{d_j}\\&>d_{\min}x_{\max}-\rho-(k-1)\mu d_{\max}x_{\max}.\end{aligned} \tag{12}$$

注意，在第一个不等式中，我们使用了$\max_{j\in\Lambda}|d_jx_j|\geq d_{\min}x_{\max}$。因此，由 (11) 和 (12)，可得

$$\max_{j\in\Lambda}\frac{|\mathbf{a}_j^*\mathbf{y}|}{d_j}>d_{\min}x_{\max}-(2k-1)\mu d_{\max}x_{\max}-2\rho+\max_{j\notin\Lambda}\frac{|\mathbf{a}_j^*\mathbf{y}|}{d_j}. \tag{13}$$

由 (13) 可知，在事件 E发生时，当

$$d_{\min}x_{\max}-(2k-1)\mu d_{\max}x_{\max}\geq 2\rho, \tag{14}$$

公式（10）成立，因此，算法 1 在第一次迭代中选取的元素将属于 $\mathbf{x}$的支撑集。我们注意到，（9）蕴含（14），并在证明 [7, 定理 4]时使用一种基于归纳法的技巧。接下来我们证明，在满足（9）和事件 E的条件下，算法 1 经过 k 次迭代后，将成功恢复完整的支撑集 Λ $\mathbf{x}$ 的。 □

条件（9）给出了 $\mathbf{x}$ 中最弱系数的下界，使得正交匹配追踪能够成功识别其支撑集。该下界适用于列范数可能不相等的一般压缩感知矩阵。对于 $d_{\max}=d_{\min}=1$的特殊情况，（9）中的下界与 [7, 定理 4]中推导出的下界完全相同。

使用具有较小 $d_{\max}/d_{\min}$ 的压缩感知矩阵时，正交匹配追踪能够识别较弱的系数。将（9）重写为以下形式即可得出这一结论：

$$x_{\min}\geq\frac{2\rho}{d_{\min}-(2k-1)\mu d_{\max}}=\frac{2\rho/d_{\min}}{1-\mu(2k-1)(d_{\max}/d_{\min})}. \tag{15}$$

由（2）和（3）可知，最小可能的$d_{\max}/d_{\min}$ 为1。

注 1。对于无噪声压缩感知问题，即 $\sigma=0$，算法 *1* 能够正确恢复 Λ *x* **的支撑集**，如果

$$k\leq\frac{1}{2}\left(1+\frac{d_{\min}}{\mu d_{\max}}\right). \tag{16}$$

当 $d_{\max}=d_{\min}$时，（16）退化为 *[7]*中推导出的结果。

证明。将（9）中的 $\sigma=0$代入即可得证。 □

接下来，假设（9）和（8）中的条件均满足，我们得到算法 **3** 第 1 步重构向量均方误差的一个上界。

B. 关于重建对噪声鲁棒性的保证

为了推导算法第 **3** 步中估计向量均方误差的上界1，我们首先利用引理$(\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda)^{-1}$ 考察其特征值2。

引理2。令 $\lambda_{\max}\left((\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda)^{-1}\right)$ 表示正半定矩阵 $(\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda)^{-1}$ 的最大特征值。则，

$$\lambda_{\max}\left((\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda)^{-1}\right)\leq\frac{1}{d_{\min}\left(d_{\min}-(k-1)\mu d_{\max}\right)}. \tag{17}$$

证明。若 $\lambda_{\min}(\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda)$ 是 $\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda$ 的最小特征值，我们可以写作

$$\lambda_{\max}\left((\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda)^{-1}\right)=\left(\lambda_{\min}\left(\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda\right)\right)^{-1}. \tag{18}$$

现在，利用格尔施戈林圆盘定理 [17,定理7.2。1],我们可以给出特征值 λ_i，$\forall i\in[k]$ 的界 $\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda$ 如下

$$\left|\lambda_i-\|\mathbf{a}_i\|_2^2\right|\leq\sum_{\{j\in\Lambda,j\neq i\}}|\mathbf{a}_i^*\mathbf{a}_j|. \tag{19}$$

因此，我们可以写作

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}\left(\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda\right)&\geq\min_{i\in\Lambda}\{d_i^2-\sum_{\{j\in\Lambda,j\neq i\}}|\mathbf{a}_i^*\mathbf{a}_j|\}\\&\overset{(4)}{\geq}\min_{i\in\Lambda}d_i\left(d_i-\sum_{\{j\in\Lambda,j\neq i\}}d_j\mu\right)\\&\geq d_{\min}\left(d_{\min}-(k-1)d_{\max}\mu\right).\end{aligned} \tag{20}$$

最后，结合（20）和（18），即可完成证明。 □

现在，利用引理2，我们得到算法1所恢复向量的均方误差上界。

定理2。设 $\hat{}\mathbf{x}$ 表示经过 k 次迭代后使用正交匹配追踪重构得到的向量。如果 (8)和 (9)成立，则可写为

$$\|\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|_2^2\leq\left(\frac{d_{\max}}{d_{\min}}\right)^2\frac{k\rho^2}{\left(d_{\min}-(k-1)\mu d_{\max}\right)^2}. \tag{21}$$

证明。 由于$\mathbf{x}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 的支撑集均为 Λ，因此有

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|_2^2 &= \|(\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda)^{-1}\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{y}-\mathbf{x}_\Lambda\|^2 = \|(\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda)^{-1}\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{v}\|^2 \\ &\le \left[\lambda_{\max}\left((\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda)^{-1}\right)\right]^2 \sum_{j\in\Lambda}|\mathbf{a}_j^*\mathbf{v}|^2 \\ &\le \left[\lambda_{\max}\left((\mathbf{A}_\Lambda^*\mathbf{A}_\Lambda)^{-1}\right)\right]^2 k(\max_j|\mathbf{a}_j^*\mathbf{v}|)^2. \qquad (22)\end{aligned}$$

我们在 (7) 和(17) 中使用 (22) 得到 (21)。最后，我们注意到，当 $d_{\max}/d_{\min}$ 趋近于 1时，(21) 中的界是紧的。 □

IV. 仿真

我们在基于压缩感知的稀疏空间信道估计的背景下，讨论由$N=32$ 根天线组成的相控阵与单天线接收机之间的情形。该设置中的稀疏无线信道被建模为一个 $N\times 1$ 复向量 $\mathbf{x}$ ，其中有 $k=2$ 个非零项。非零项的索引均匀随机选取，相应的非零系数从 $\mathcal{CN}(0,1)$ 分布中采样。随后，将稀疏向量归一化为单位范数。

我们定义 $\mathbb{Q}=\{q:\ |q|=1\}$ ，用于建模相控阵中施加的权重。我们通过将 $M<N$ 个不同的随机循环移位码字$\mathbf{f}\in\mathbb{Q}^N$ 施加到相控阵上，来获取该设置中的信道测量值。我们用$\mathbf{F}\in\mathbb{Q}^{M\times N}$ 表示由所施加的码字构成的矩阵，即 $\mathbf{F}$ 的每一行都是$\mathbf{f}$的一个循环移位版本。这种基于循环移位的测量技术曾在 [18], [19] 中用于毫米波频段的信道估计。此时的压缩感知矩阵可表示为$\mathbf{A}=\mathbf{F}\mathbf{U}_N$，其中 $\mathbf{U}_N$是一个 $N\times N$酉离散傅里叶变换（DFT）矩阵 [19]。

我们描述了通过为$\mathbf{f}$选择不同向量而生成的压缩感知矩阵。当$\mathbf{f}$的 DFT 幅度平坦时，可以证明压缩感知矩阵$\mathbf{A}$ 具有相等的列范数。Zadoff-Chu（ZC）序列$\mathbf{f}^{\mathrm{ZC}}$ [20]，定义为$f_i^{\mathrm{ZC}}=\exp\left(-\mathrm{j}\pi(i-1)^2/N\right),\ i\in[N]$，是能够实现平坦 DFT 幅度的序列示例。然而，实现该序列需要为包含 N 个阵元的阵列配备 $\log_2 N$ 位移相器；在我们的设置中，这相当于 5 位移相器。在实践中，由于低分辨率移相器具有较低的功耗和硬件复杂度 [21]，因此更倾向于使用低分辨率移相器（例如 2 位移相器）。在这一低分辨率约束下，并不总能构造出具有均匀 DFT 幅度的$\mathbf{f}$ [22]。在这种情况下，可以从适用于压缩感知的可行低分辨率码集合中随机选择$\mathbf{f}$ [23]。

在本文中，我们从 2 位字母表 $\{1,\mathrm{j},-1,-\mathrm{j}\}^{32}$ 中选择了两个编码 $\mathbf{f}^1$ 和 $\mathbf{f}^2$。向量 $\mathbf{f}^1$ 生成了具有 $d_{\max}/d_{\min}\approx 2.43$ 的压缩感知矩阵，而 $\mathbf{f}^2$ 生成了具有 $d_{\max}/d_{\min}\approx 2.83$ 的压缩感知矩阵。作为基准，我们还考虑了基于 5 位字母表的 ZC 序列，其结果为

列范数为 $d_{\max}/d_{\min}=1$ 的压缩感知矩阵中，我们使用 $\rho=2.63\sigma$ 式（21），其对应于 $\Pr\{E\}\ge 0.97$ 式（8）。我们根据成功识别支撑集的概率以及估计值的归一化均方误差（NMSE），采用正交匹配追踪对三种压缩感知矩阵设计进行评估。估计稀疏向量 $\hat{\mathbf{x}}$ 的归一化均方误差定义为 $\mathbb{E}[\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|_2^2]/\mathbb{E}[\|\mathbf{x}\|_2^2]$。

从图 1 可以看出，具有 $d_{\max}/d_{\min}=1$ 的压缩感知矩阵，其归一化均方误差比具有1.43 dB 低约 $d_{\max}/d_{\min}\in\{2.43,2.83\}$。这一观察结果与定理 2中的发现一致，如图1中的上界曲线所示。支撑集恢复概率定义为正交匹配追踪准确恢复Λ的实例所占比例。图2 表明，较小的 $d_{\max}/d_{\min}$对应着较高的稀疏支撑恢复概率。为了达到98% 的支撑集恢复成功率，我们观察到，当$\mathbf{x}_{\min}\approx 0.79\sigma$ 时，$d_{\max}/d_{\min}=1$；而当$\mathbf{x}_{\min}\approx 1.05\sigma$ 时，$d_{\max}/d_{\min}=2.43$。因此，较小的 $d_{\max}/d_{\min}$对正交匹配追踪而言是理想的，因为即使稀疏系数的幅值较小，也能实现支撑集恢复。

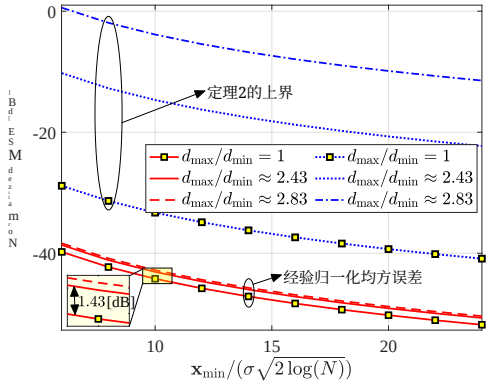

图 1。列范数相等（即 $d_{\max}/d_{\min}=1$）的压缩感知矩阵，使用正交匹配追踪时，其归一化均方误差小于列范数不同的矩阵。这一结果与我们在定理 2 中的分析一致。在此示例中，$N=32$，$M=20$ 且 $k=2$。

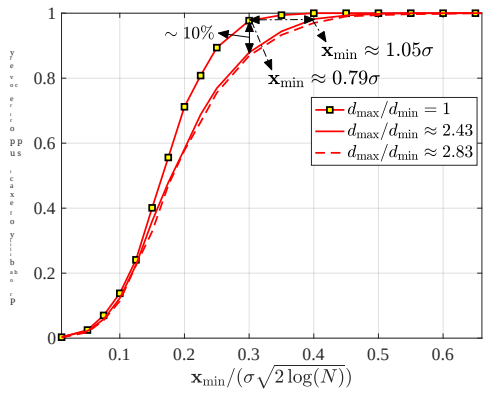

图 2。对于采用正交匹配追踪的压缩感知，列范数相等的压缩感知矩阵比列范数不同的矩阵具有更高的支撑集恢复概率。这里，$N=32$、$M=20$ 和 $k=2$。

V. 结论

正交匹配追踪算法的分析通常假设压缩感知矩阵的列范数相等，但在典型的压缩感知应用中，这一假设并非总是成立。本文推导了压缩感知矩阵列范数不相等时正交匹配追踪的性能保证。我们的结果表明，最大列范数与最小列范数之比接近 1 的压缩感知矩阵，能使正交匹配追踪表现得更好。这一结论对于硬件受限应用十分重要，因为在此类应用中，可能无法找到列范数相等的压缩感知矩阵；同时，该结论也可为选择有效的压缩感知矩阵提供指导。

参考文献

[1] E. J. Cand`es 和 M. B. Wakin，“压缩采样简介”，IEEE 信号处理杂志，第25卷，第2期，第21–30页，2008年。[2] J. A. Tropp 和 A. C. Gilbert，“通过正交匹配追踪从随机测量中恢复信号”，IEEE 信息论汇刊，第53卷，第12期，第4655–4666页，2007年。[3] T. T. Cai 和 L. Wang，“含噪稀疏信号恢复的正交匹配追踪”，IEEE 信息论汇刊，第57卷，第7期，第4680–4688页，2011年。[4] J. Wang、S. Kwon 和 B. Shim，“利用受限等距常数获得正交匹配追踪的近最优界”，EURASIP 信号处理进展期刊，第8期，第1–7页，2012年。[5] L.-H. Chang 和 J.-Y. Wu，“通过正交匹配追踪进行稀疏信号恢复的改进型基于受限等距性质的性能保证”，IEEE 信息论汇刊，第60卷，第9期，第5702–5715页，2014年。[6] C. Liu、Y. Fang 和 J. Liu，“关于通过正交匹配追踪精确恢复稀疏信号支撑集的充分条件的一些新结果”，IEEE 信号处理汇刊，第65卷，第17期，第4511–4524页，2017年。[7] Z. Ben-Haim、Y. C. Eldar 和 M. Elad，“在随机噪声下估计稀疏向量的基于相干性的性能保证”，IEEE 信号处理汇刊，第58卷，第10期，第5030–5043页，2010年。[8] Y. Chi 和 R. Calderbank，“正交匹配追踪的基于相干性的性能保证”，载于 IEEE 第50届 Allerton 通信、控制与计算年会论文集（Allerton），第2003–2009页，2012年。[9] E. Miandji、M. Emadi、J. Unger 和 E. Afshari，“利用互相干性进行正交匹配追踪时支撑集恢复的概率”，IEEE 信号处理快报，第24卷，第11期，第1646–1650页，2017年。[10] M. Emadi、E. Miandji 和 J. Unger，“利用互相干性获得正交匹配追踪的性能保证”，电路、系统与信号处理，第37卷，第4期，第1562–1574页，2018年。[11] L. Stankovi´c、M. Brajovi´c、D. Mandic、I. Stankovi´c 和 M. Dakovi´c，“压缩感知中改进的基于相干性指标的界”，IEEE 信号处理快报，第28卷，第1110–1114页，2021年。[12] C. Amiraz、R. Krauthgamer 和 B. Nadler，“高斯噪声下正交匹配追踪的紧致恢复保证”，信息与推断：IMA 期刊，第10卷，第2期，第573–595页，2021年。[13] A. S. Bandeira、E. Dobriban、D. G. Mixon 和 W. F. Sawin，“验证受限等距性质是困难的”，IEEE 信息论汇刊，第59卷，第6期，第3448–3450页，2013年。[14] A. M. Bruckstein、M. Elad 和 M. Zibulevsky，“线性方程组的稀疏非负解是唯一的”，载于 IEEE 第3届国际通信、控制与信号处理研讨会论文集，第762–767页，2008年。[15] M. Gharavi-Alkhansari 和 T. S. Huang，“一种快速正交匹配追踪算法”，载于 IEEE 国际声学、语音与信号处理会议（ICASSP）论文集，第3卷，第1389–1392页，1998年。[16] Z. ˇSid´ak，“多元正态分布均值的矩形置信区域”，美国统计学会杂志，第62卷，第318期，第626–633页，1967年。[17] G. H. Golub 和 C. F. Van Loan，《矩阵计算》。约翰·霍普金斯大学出版社，2013年。[18] N. J. Myers、A. Mezghani 和 R. W. Heath，“FALP：采用低分辨率移相器的毫米波系统快速波束对准”，IEEE 通信汇刊，第67卷，第12期，第8739–8753页，2019年。[19] N. J. Myers、A. Mezghani 和 R. W. Heath，“用于毫米波相控阵快速波束对准的空间 Zadoff-Chu 调制”，载于 IEEE Globecom 研讨会（GC 研讨会）论文集，第1–6页，2018年。[20] D. Chu，“具有良好周期相关特性的多相码”，IEEE 信息论汇刊，第18卷，第4期，第531–532页，1972年。[21] E. V. Anjos、D. M.-P. Schreurs、G. A. Vandenbosch 和 M. Geurts，“一种采用全通网络、适用于5G移动应用的14–50 GHz移相器”，IEEE 微波理论与技术汇刊，第68卷，第2期，第762–774页，2019年。[22] J. Armario 和 D. Flannery，“具有最优自相关的近似补充差集与四元序列”，密码学与通信，第12卷，第4期，第757–768页，2020年。[23] J. Romberg，“基于随机卷积的压缩感知”，SIAM 成像科学期刊，第2卷，第4期，第1098–1128页，2009年。