arXiv:2302.04070v1 [math.RA] 8 Feb 2023

C^2有限数列的阶数界*

Manuel Kauers[1], Philipp Nuspl[2], 和 Veronika Pillwein[2]

manuel.kauers@jku.at, philipp.nuspl@jku.at, veronika.pillwein@risc.jku.at

[1] *Johannes Kepler University Linz, Institute for Algebra*
[2] *Johannes Kepler University Linz, Research Institute for Symbolic Computation*

摘要

如果一个数列满足常系数线性递推关系，则称其为 C有限数列。我们研究满足系数为 C有限数列的线性递推关系的数列。最近有研究表明，这类 C^2有限数列具有与 C有限数列类似的闭包性质。特别是，它们构成一个差分环。

本文介绍了对 C^2 有限数列进行这些闭包运算的新技术。这些方法还使我们能够推导出此前尚未知晓的阶数界。此外，它们也让我们更深入地了解这些计算的有效性。

这些结果基于代数数的指数格。我们介绍了一种迭代算法，可用于计算此类格的基。

1 引言

能够用有限的信息表示并可通过例如闭包运算有效计算的无限对象，是符号计算中值得研究的自然对象。这尤其包括可由系数具有有限描述的线性递推关系定义的数列。如果这些系数是多项式，这类数列称为全纯数列或 D 有限数列；其中系数为常数的特殊情形称为 C 有限数列。

众所周知， [13, 17] 这些类在若干运算下封闭，例如加法、乘法、交错以及取子序列等。这些闭包运算具有算法性，已在若干计算机代数系统中实现，并有助于“全纯工具包” [11] 自动证明和推导恒等式。

已有研究表明，许多这类闭包性质同样适用于并且可以通过具有 C-有限系数的线性递推关系来定义的数列实现，这类数列也称为C^2-有限数列。据我们所知， C^2-有限数列最早由 Kotek 和 Makowsky 在图多项式的背景下正式引入。Thanatipanonda 和 Zhang 概述了多项式、 C-有限数列以及全纯序列的不同性质，并考虑了以 X-递推数列名义进行的扩展。Krityakierne 和 Thanatipanonda 给出了一份关于线性递推数列（包括 C^2-有限数列）闭包性质的综述。

处理这类新型 C^2-有限数列时，主要的计算问题在于零因子的存在。尽管已有研究表明， C^2-有限数列构成一个差分环，但迄今为止尚不清楚其闭包性质是否能够被有效计算，另见下文第 2.2 节中的讨论。

本文介绍了一种执行闭包性质的新方法，尤其能够给出阶数界。该技术的一个关键要素，是计算系数递推的特征值所对应的指数格的基。为进行计算，我们

*本研究由奥地利科学基金（FWF）通过资助项目 W1214-N15、项目 DK15 以及资助项目 P33530、P31571 和 I6130 提供经费支持。

介绍了 Ge算法 的迭代版本 [7] ，该版本在第 3 节中进行了描述。环运算、交错以及取子序列所得到的阶数界见第 5 节。

2 预备知识

本节介绍本文中通篇使用的一些基本符号和定义。我们用 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 表示自然数集。此外，$\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}$ 表示一个代数数域。在逐项加法和逐项乘法下的数列 $\mathbb{K}$-代数记作 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$。为使符号更简洁，$c(n)$ 既可表示一个数列 $(c(n))_{n\in\mathbb{N}}$，也可表示其第 n 项。具体含义总能从上下文中明确。移位算子 σ 作用于数列 $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 时，满足 $\sigma\left((a(n))_{n\in\mathbb{N}}\right) = (a(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$。差分子环 $R \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ 是一个子环，并且对移位运算封闭，即对所有 $a \in R$，都有 $\sigma(a) \in R$。通常，递推算子环 $R[\sigma]$ 是非交换的；其中，满足 $c_i \in R$ 的元素 $\mathcal{A} := \sum_{i=0}^{r} c_i\sigma^i \in R[\sigma]$ 作用于数列 $a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 时，结果为 $\mathcal{A}a = \sum_{i=0}^{r} c_i(n)a(n+i)$。若 $\mathcal{A}a = 0$，则称算子 $\mathcal{A}$ 湮灭数列 a。若 $c_r \neq 0$，则称 r 为算子 $\mathcal{A}$ 的阶数。湮灭 a 的算子的最小阶数称为数列 a 的阶数，记作 $\mathsf{ord}(a)$。

2.1 C-有限数列

被算子 $\mathcal{C} = \sum_{i=0}^{r} \gamma_i\sigma^i \in \mathbb{K}[\sigma]$ 消去的数列 $c \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ 称为 C-有限数列。等价地，这些数列满足一个常系数线性递推关系

$$\gamma_0 c(n) + \cdots + \gamma_r c(n+r) = 0 \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

The 域 $\mathbb{K}$ 上的 C-有限数列集合构成一个 $\mathbb{K}$-代数，我们将其记为 $\mathcal{R}_C$。设 se $c, d, c_1, \dots, c_m \in \mathcal{R}_C$。那么，以下闭包性质众所周知（例如，[13]）：

1. $c + d \in \mathcal{R}_C$，其中 $\mathsf{ord}(c+d) \leq \mathsf{ord}(c) + \mathsf{ord}(d)$,
2. $cd \in \mathcal{R}_C$ 且 $\mathsf{ord}(cd) \leq \mathsf{ord}(c)\,\mathsf{ord}(d)$
3. $c_{\ell,\,k} := (c(\ell n + k))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_C$ 且 $\mathsf{ord}(c_{\ell,\,k}) \leq \mathsf{ord}(c)$，对所有 $\ell, k \in \mathbb{N}$ 均成立。
4. 设 e 是 $c_1,\dots,c_m$ 的交错，即对所有满足 $0 \leq r < m$ 的 $n = qm + r$，$e(n) = c_r(q)$。那么，$e \in \mathcal{R}_C$ 且 $\mathsf{ord}(e) \leq m\sum_{j=1}^{m} \mathsf{ord}(c_j)$。

D-有限数列同样具有这些闭包性质和阶数界，即被算子 $\mathcal{A} \in \mathbb{K}[x][\sigma]$ [17, 12] 湮灭的数列。

设 $\mathcal{C} := \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i\sigma^i + \sigma^r$ 是 $c \in \mathcal{R}_C$ 的唯一首一最小湮灭算子。多项式 $\sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i x^i + x^r \in \mathbb{K}[x]$ 称为 c 的特征多项式。在分裂域 $\mathbb{L}$ 上，多项式可完全分解为 $x^{n_0}\prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)^{d_i}$，其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{L}$ 两两不同，且 $n_0, d_1, \dots, d_m \in \mathbb{N}$。我们称这些 λ_i 为数列 c 的特征值。该数列也可以写成指数序列 λ_i^n 的多项式线性组合：特别地，存在多项式 $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{L}[x]$，使得对于 $i = 1, \dots, m$，$\mathsf{deg}(p_i) = d_i - 1$。

$$c(n) = \sum_{i=1}^{m} p_i(n)\lambda_i^n \text{ for all } n \geq n_0. \tag{1}$$

这称为 c [13, 19]的闭式。

如果 C-有限序列 c 具有特征值 $\lambda \neq \mu$，使得 $\frac{\lambda}{\mu}$ 是单位根，则称其为退化的。否则，该序列称为非退化的。

定理 1（[1, 5]）。设 c 是非退化的 C-有限数列。那么，c 要么是零序列，要么只有有限个零；也就是说，存在一个 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq n_0$，$c(n) \neq 0$。

设 c、d 是 C-有限数列，其特征值分别为 λ_1、……、λ_{m_1} 和 μ_1、……、μ_{m_2}。由 c 和 d 的闭式可知，$c+d$ 的特征值为 λ_1、……、λ_{m_1}、μ_1、……、μ_{m_2}，而 cd 的特征值为 $\lambda_i\mu_j$，其中 $1 \le i \le m_1$ 和 $1 \le j \le m_2$。数列 $(c(\ell n+k))_{n\in\mathbb{N}}$ 的特征值为 λ_1^ℓ、……、λ_{m}^ℓ。

2.2 C^2-有限数列

C^2-有限数列是对 C-有限数列的一种推广。它扩展了 C-有限数列和 D-有限数列，并包含许多组合数学中出现的其他数列。

定义 2. 若存在 C-有限数列 c_0、……、c_r，它们均定义在 $\mathbb{K}$ 上，且对某个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $c_r(n) \neq 0$ 对所有 $n \ge n_0$ 成立，则称数列 $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{K}$ 上是 C^2-有限的。

$$c_0(n)a(n) + \cdots + c_r(n)a(n+r) = 0, \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

C^2-有限数列的若干例子见 [29, 9]。本文还将给出更多例子。

C-有限数列 c 可以由一个最小递推式和 $\operatorname{ord}(c)$ 个初始值唯一确定。同样，C^2-有限数列也可以由其递推关系和有限个初始值唯一确定。唯一确定该数列所需的初始值个数取决于递推关系的首项系数 c_r 的零点。可以判定首项系数是否只有有限个零点 [1]。然而，这些有限个零点能否计算出来尚不得而知。这称为 Skolem 问题 [26]。

此前已经证明，C^2-有限数列与 C-有限数列类似，构成一个$\mathbb{K}$-代数，并且在对等差数列取子序列以及进行交错 [8, 9]时保持闭包性质。迄今为止，尚不清楚这些闭包性质能否有效计算。本文提出了一种能够有效实现这些闭包性质的方法。需要注意的是，这些计算可能会在首项系数中引入有限多个零项，从而在必须确定需要多少个初始值才能唯一确定该数列时引发问题。然而在实践中我们观察到，尽管 Skolem 问题通常非常困难，但对于实际中出现的大多数例子，通常都可以解决 [23]。

请注意，在 [8, 9] 中假设（2）中的首项系数 c_r 完全没有零项。这两个定义是等价的。如果一个数列满足定义 2 中的 C^2-有限递推关系，那么对该递推关系进行移位，就可以得到一个首项系数没有零项的递推关系。这里的定义使我们能够推导出与C-有限情形类似的闭包性质阶数界，而这些界限无法通过其他方式推导出来（见例 17）。

If $c_r(n) \neq 0$，那么只要 th
在 p
先前各项 $a(n), \ldots, a(n+r-1)$ 已知，就可以使用递推关系 (2) 计算出项

$$a(n+r) = -\tfrac{c_0(n)}{c_r(n)}a(n) - \cdots - \tfrac{c_{r-1}(n)}{c_r(n)}a(n+r-1).$$

M_a 的伴随矩阵 a 也能体现这一点，它定义如下：

$$M_a \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0/c_r \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1/c_r \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2/c_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{r-1}/c_r \end{pmatrix}.$$

如果对所有 $n \in \mathbb{N}$，$c_r(n) \neq 0$，那么

$$(\sigma a, \sigma^2 a, \ldots, \sigma^r a) = (a, \sigma a, \ldots, \sigma^{r-1} a)\, M_a.$$

在 a 是 C-有限序列这一特殊情形下，我们有 $M_a \in \mathbb{K}^{r\times r}$。由于序列的递推关系并不唯一，伴随矩阵也不唯一。

在递推关系 (2) 中，我们可以假设 $n_0 = 0$ 对所有系数 $c_0, \ldots, c_r$ 都满足闭式 (1)。这可以通过将闭式表示扩展到所有 $n \in \mathbb{N}$，并在所有系数 c_i 中引入多项式因子 $n(n-1)\cdots(n-n_0)$ 来实现。这只会增加系数 c_i 的阶数，而不会改变整体递推关系的阶数。

2.3 格

$\mathbb{Z}$-子模 L of $\mathbb{Z}^m$ 称为一个格。每个格 L 都有一个有限基 $v_1, \ldots, v_\ell \in \mathbb{Z}^m$，即模 L的一组线性无关生成元。我们称 ℓ 为格 L的秩。

LLL 算法可用于计算格 L [16, 3]的一组“短”向量基。这样的基称为约化基。设 $L = \langle v_1, \ldots, v_\ell \rangle \subseteq \mathbb{Z}^m$，即 L 是由 $v_1, \ldots, v_\ell \in \mathbb{Z}^m$生成的格。设 $b_1, \ldots, b_r$ 是 L 的约化基， $b_1, \ldots, b_r$ 是相应的 Gram- Schmidt 向量。约化基之所以称为“短”，是因为（参见 [16] 中的 (1.7) 或 [3] 中的定理 2.6.2）

$$\|b_j\|_2^2 \leq 2^{k-1} \left\|\bar{b}_k\right\|_2^2 \text{ for all } 1 \leq j \leq k \leq r. \tag{3}$$

设 $V \in \mathbb{Z}^{m \times \ell}$ 和 $r = \min(m, \ell)$。那么，我们可以计算酉模（即可逆）矩阵 $P \in \mathbb{Z}^{m \times m}$, $Q \in \mathbb{Z}^{\ell \times \ell}$ 以及对角矩阵 $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r) \in \mathbb{Z}^{m \times \ell}$，使得对所有 $i = 1, \ldots, r-1$ 都有 $d_i \mid d_{i+1}$。唯一的矩阵 D 称为 V 的史密斯标准形，最大的对角元素 d_r 称为 V的不变因子。若 e_i 表示 V的第 i 个行列式因子，即所有 V的 $i \times i$ 子式的最大公约数，则 $d_r = \frac{e_r}{e_{r-1}}$ [21, 20]。

3 代数数的指数格

设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \overline{\mathbb{Q}}$。这些代数数的关系集合

$$L := L(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) := \{(e_1, \ldots, e_m) \in \mathbb{Z}^m \mid \lambda_1^{e_1} \cdots \lambda_m^{e_m} = 1\}$$

构成一个格。在他的博士论文中， [7] Ge 给出了计算 L的一组基的算法。该算法结合了 LLL、对基向量大小的界，以及易于判定 L 的成员资格这一事实。 [10, 6, 35, 33, 34]中给出了 Ge 算法的变体。本文介绍另一种变体。我们的版本受到 van Hoeij 的多项式因式分解算法中 LLL 应用方式的启发 [30, 32, 31]。该版本的一个特点是，它所使用的近似值精度仅达到特定输入所需的程度，而非由最坏情况下的行为决定。我们版本的另一个优点是，其正确性证明非常简洁。

与 Ge 一样，我们首先注意到

$$(e_1, \ldots, e_m) \in L(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \iff \lambda_1^{e_1} \cdots \lambda_m^{e_m} = 1 \iff \sum_{i=1}^{m} e_i \log(\lambda_i) \in 2\pi \mathrm{i} \mathbb{Z}.$$

因此，我们无需为 $L = L(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ 求基，而是可以计算格的一个基

$$L_+ = \left\{ (e_1, \ldots, e_{m+1}) \in \mathbb{Z}^m \mid \sum_{i=1}^{m} e_i \log(\lambda_i) + e_{m+1} 2\pi \mathrm{i} = 0 \right\}$$

然后删去最后几个坐标，得到原格 L 的一个基。如果我们约定始终选取对数的标准分支，那么最后一个坐标将以 md 为界，其中 d 是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 的域扩张次数。根据 Masser 的一个结果 [18],，我们可以计算一个常数 $M \geq md$，使得 L，因此 L_+ 有一个由向量 b 构成的基，且满足 $\|b\|_\infty \leq M$。

还需要提供一种算法，用于计算一个基

$$L_+ = \{(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{Z}^n \mid e_1 x_1 + \cdots + e_n x_n = 0\}$$

其中 x_1、.....、 $x_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。由于在我们的情形中， x_i 具有特殊形式，我们可以计算任意精度的有理逼近 $\xi_i \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$ [2]。特别地，对于每个 $\epsilon > 0$，我们都可以计算 ξ_1、.....、 $\xi_n \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$，使得 $|\Re(x_i) - \Re(\xi_i)| < \epsilon$，并且 $|\Im(x_i) - \Im(\xi_i)| < \epsilon$，对所有 $i = 1$、 ..... 、 n 均成立。此外，我们可以利用成员判定 $(e_1$、.....、 $e_n) \in L_+$ 可进行检查这一事实，以及已知存在一个向量有界于 M 的基。

算法 3：计算 L_+ 的一个基

输入：可计算数 x_1、.....、 $x_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和 $M \in \mathbb{Q}$，使得格

$$L_+ = \left\{ (e_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^{n} e_i x_i = 0 \right\}$$

有一个由 $b \in \mathbb{Z}^n$ 构成的基，其中 $\|b\|_\infty \leq M$

需求： 可以判定对于任意 $b \in \mathbb{Z}^n$， $b \in L_+$ 是否成立

输出： L_+ 的一个基

$w \leftarrow 1$

$B \leftarrow \{(1, 0, \ldots, 0, 0, 0) \ldots, (0, \ldots, 0, 1, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$

当 $\exists (e_1, \ldots, e_n, *, *) \in B \colon (e_1, \ldots, e_n) \notin L_+$ **do**

  $w \leftarrow 2w$

  求出 $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$，使得 $|\Re(\xi_i) - \Re(x_i)| < \frac{1}{nw}$ 以及 $|\Im(\xi_i) - \Im(x_i)| < \frac{1}{nw}$ for 所有 $i = 1, \ldots, n$

  将每个向量 $(e_1, \ldots, e_n, *, *) \in B$ 替换为

$$e_1, \ldots, e_n, w \sum_{i=1}^{n} e_i \Re(\xi_i) \; w \sum_{i=1}^{n} e_i \Im(\xi_i) \Big)$$

  对 B应用 LLL，将输出向量称为 $b_1, \ldots, b_r$，相应的 Gram-Schmidt 向量 $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_r$

  当 $r > 0$ 和 $\|\bar{b}_r\|_2 > \sqrt{n+2}M$ 时，执行 $r \leftarrow r - 1$

  $B \leftarrow \{b_1, \ldots, b_r\}$

结束

返回 $\{(e_1, \ldots, e_n) : (e_1, \ldots, e_n, *, *) \in B\}$

为了证明算法 3 的正确性，我们将使用以下引理:

引理 4. [32, 引理 2] 若 $b_1, \ldots, b_r$ 是一个格基，且 $b_1, \ldots, b_r$ 是相应的 Gram-Schmidt 基，那么对于每个满足 $\|v\|_2 < \|\bar{b}_r\|_2$ 的 $v \in \langle b_1, \ldots, b_r \rangle$，事实上都有 $v \in \langle b_1, \ldots, b_{r-1} \rangle$。

证明。设 $v \in \langle b_1, \ldots, b_r \rangle$ 满足 $\|v\|_2 < \|\bar{b}_r\|_2$，不妨设 $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_r b_r$ 对某些 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{Z}$ 成立。我们需要证明 $\alpha_r = 0$。设 $\mu_{i,j}$ 满足 $b_i = \sum_{j \leq i} \mu_{i,j} b_j$ 对所有 i, j 成立;

注意到 $\mu_{i,i}=1$。现在

$$\begin{aligned}\left\|\bar{b}_r\right\|_2^2 > \|v\|_2^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i b_i\right\|_2^2 = \left\|\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}\alpha_i\mu_{i,j}\bar{b}_j\right\|_2^2 \\ &= \left\|\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=j}^{r}\alpha_i\mu_{i,j}\right)\bar{b}_j\right\|_2^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \sum_{j=1}^{r}\left|\sum_{i=j}^{r}\alpha_i\mu_{i,j}\right|^2\left\|\bar{b}_j\right\|_2^2 \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{r-1}\left|\sum_{i=j}^{r}\alpha_i\mu_{i,j}\right|^2\left\|\bar{b}_j\right\|_2^2}_{\geq 0} + |\alpha_r|^2\left\|\bar{b}_r\right\|_2^2 \geq |\alpha_r|^2\left\|\bar{b}_r\right\|_2^2\end{aligned}$$

再结合 $\alpha_r\in\mathbb{Z}$，可推出 $\alpha_r=0$，如前所述。 □

定理 5. 算法 3 正确且会终止。

证明。显然，每个输出向量都是 L_+ 的元素。为了说明这些输出向量生成 L_+，我们需要证明第 9 行中的删除操作是合理的。根据假设，我们知道 L_+ 有一个基，其元素的分量均以 M 为界。对于每个满足以下条件的向量 $(e_1,\ldots,e_n)\in L_+$：$|e_i|<M$ 对所有 i 均成立，我们有

$$\begin{aligned}w\left|\sum_{i=1}^{n}e_i\Re(\xi_i)\right| = w\left|\sum_{i=1}^{n}e_i\Re(\xi_i)-e_i\Re(x_i)\right| &\leq w\sum_{i=1}^{n}|e_i|\,|\Re(\xi_i)-\Re(x_i)| \\ &\leq w\sum_{i=1}^{n}|e_i|/(nw) < M\end{aligned}$$

虚部也同理。因此，我们只需关注由 B 生成的格中的向量 $b=(e_1,..,e_n,*,*)$，其中

$$\|b\|_2 \leq \sqrt{M^2+\cdots+M^2+M^2+M^2} = \sqrt{n+2}M.$$

根据引理 4，经过第 9 行的删除操作后，这些向量仍在该格中。

剩下要证明算法会终止。假设它不会终止，即集合 B 最终在每次迭代中都包含 r 个向量，且这些向量并非全都属于格 L_+。我们证明，从算法的某个阶段开始（即 w 足够大时），这种情况不可能发生，因为不属于 L_+ 的向量过长，因此会在算法的第 9 行被删除。

只有有限多个向量 $(e_1,\ldots,e_n)\in\mathbb{Z}^n$ 满足 $|e_i|\leq\sqrt{n+2}M$，对所有 $i=1,\ldots,n$.
Ther因此，存在一个 $\epsilon>0$ 使得

$$\max(|e_1\Re(x_1)+\cdots+e_n\Re(x_n)|,|e_1\Im(x_1)+\cdots+e_n\Im(x_n)|) > \epsilon$$

对所有 $(e_1,\ldots,e_n)\in\mathbb{Z}^n\setminus L_+$ 满足 $|e_i|\leq\sqrt{n+2}M$，对所有 i。选取这样一个 ϵ。假设我们处于算法第 3 行，其中 $w\geq\sqrt{n+2}M(1+2^{(r-1)/2})\epsilon$ 且 $b_j\in B\setminus L$ 满足 $j\in\{1,\ldots,r\}$。令

$$b_j = \left(e_1,\ldots,e_n,w\sum_{i=1}^{n}e_i\Re(\xi_i),w\sum_{i=1}^{n}e_i\Im(\xi_i)\right).$$

由于在上一次迭代的第 9 行中未移除 b_j，因此对于所有 $i=1$，.....，n，我们有 $|e_i|\leq\sqrt{n+2}M$。根据 ϵ 的选择，无论是 $f=\Re$ 还是 $f=\Im$，我们都有

$$\begin{aligned}w\left|\sum_{i=1}^{n}e_if(\xi_i)\right| = w\left|\sum_{i=1}^{n}e_i(f(\xi_i)-f(x_i)+f(x_i))\right| &= w\left|\sum_{i=1}^{n}e_i(f(\xi_i)-f(x_i))+\sum_{i=1}^{n}e_if(x_i)\right| \\ \geq w\left(\left|\sum_{i=1}^{n}e_if(x_i)\right|-\left|\sum_{i=1}^{n}e_i(f(\xi_i)-f(x_i))\right|\right) &> w\left(\epsilon-\left|\sum_{i=1}^{n}e_i(f(\xi_i)-f(x_i))\right|\right).\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} e_i(f(\xi_i)-f(x_i))\right| \le \sum_{i=1}^{n} |e_i|\,|f(\xi_i)-f(x_i)| < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n+2}M\tfrac{1}{nw} = \tfrac{\sqrt{n+2}M}{w}.$$

结合这一点以及上述不等式中关于 w 的条件，可得

$$w\left|\sum_{i=1}^{n} e_i f(\xi_i)\right| > we - \sqrt{n+2}M \ge 2^{(r-1)/2}\sqrt{n+2}M.$$

因此，$\|b_j\|_2 > 2^{(r-1)/2}\sqrt{n+2}M$。特别地，利用（3），

$$\left\|\bar{b}_k\right\|_2 \ge 2^{-(k-1)/2}\left\|b_j\right\|_2 > 2^{(r-k)/2}\sqrt{n+2}M \ge \sqrt{n+2}M$$

对于所有 $k=j$、...、r，因此，b_j、...、b_r 在之前的迭代中就已经被移除了且不能再属于集合 B，矛盾。 □

该算法的一个实现属于 rec sequences 软件包[1]，并可在 [22]公开获取。

4 挠数

为了证明 C^2-有限数列的阶数界，我们将大量依赖这样一个事实：C-有限数列 c 可以写成交错的非退化数列 $c(dn),\dots,c(dn+d-1)$[5, 定理 1。2]。更一般地，若我们有一个由 C-有限数列生成的有限生成差分代数，就可以确定一个数 $d\in\mathbb{N}$（称为挠数），使得代数中的每个数列都可以写成交错的 d 非退化子序列。

设 $c_0,\dots,c_r\in\mathcal{R}_C$ 的特征值为 $\lambda_1,\dots,\lambda_m$，并设 $R_d := \mathbb{K}_\sigma[c_0(dn),\dots,c_r(dn)]$ 是包含数列 $c_0(dn),\dots,c_r(dn)$ 的最小差分代数。假设 $c\in R_d$。那么，c 的每个特征值 λ 都具有 $\lambda=\lambda_1^{e_1}\cdots\lambda_m^{e_m}$ 的形式，其中 $e_1,\dots,e_m\in\mathbb{N}$。我们希望找到一个 d，使得每个数列 $c\in R_d$ 都是非退化的。等价地，我们希望找到一个 d，使得

$$\left(\frac{\lambda_1^{de_1}\cdots\lambda_m^{de_m}}{\lambda_1^{df_1}\cdots\lambda_m^{df_m}}\right)^k = 1 \implies \lambda_1^{de_1}\cdots\lambda_m^{de_m} = \lambda_1^{df_1}\cdots\lambda_m^{df_m}$$

对所有 $k,e_1,\dots,e_m,f_1,\dots,f_m\in\mathbb{N}$。为更简洁地表达这一点，我们定义乘法群 $G := \langle\lambda_1,\dots,\lambda_m\rangle \le (\mathbb{C}^\times,\cdot)$。于是，该条件可写为

$$\forall k\in\mathbb{N}_{\ge 1}\forall\lambda\in G\colon \lambda^{kd}=1 \implies \lambda^d=1.$$

下面的引理表明，数 d 也有纯粹的群论描述和纯粹的格论描述。

引理 6。设 $G := \langle\lambda_1,\dots,\lambda_m\rangle \le (\mathbb{C}^\times,\cdot)$。关于 $d\in\mathbb{N}_{\ge 1}$ 的以下条件等价：

1. 数 d 满足

$$\forall k\in\mathbb{N}_{\ge 1}\forall\lambda\in G\colon \lambda^{kd}=1 \implies \lambda^d=1.$$

2. 令 $T(G) := \{\lambda\in G \mid \operatorname{ord}(\lambda) < \infty\}$ 为 G 的挠子群。那么，d 满足

$$\operatorname{ord}(\lambda) \mid d \text{ for all } \lambda\in T(G).$$

[1]代码可在 https://github.com/PhilippNuspl/rec_sequences 的 IntegerRelations cla 获取 ss.

3. 令

$$L \coloneqq L(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \coloneqq \{(e_1, \dots, e_m) \in \mathbb{Z}^m \mid \lambda_1^{e_1} \cdots \lambda_m^{e_m} = 1\}$$

设其为 λ_1、……、λ_m 之间整数关系的格。则，d 满足

$$\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\, \forall v \in \mathbb{Z}^m \colon kdv \in L \implies dv \in L. \tag{4}$$

证明。$1 \implies 2$: 令 $\lambda \in T(G)$，并令 $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 为满足 $\lambda^m = 1$ 的最小值。显然，$\lambda^{md} = 1$。根据假设，$\lambda^d = 1$。由于 m 的选取是最小的，我们有 $m \mid d$。

$2 \implies 3$: 令 $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$、$v = (e_1, \dots, e_m) \in \mathbb{Z}^m$，且 $kdv \in L$。令 $\lambda = \lambda_1^{e_1} \cdots \lambda_m^{e_m}$。根据 L 的定义，

$$\lambda^{kd} = \lambda_1^{kde_1} \cdots \lambda_m^{kde_m} = 1.$$

因此，$\lambda \in T(G)$。所以，根据假设，$\mathsf{ord}(\lambda) \mid d$，从而 $\lambda^d = 1$ 和 $dv \in L$。

$3 \implies 1$: 令 $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$、$\lambda = \lambda_1^{e_1} \cdots \lambda_m^{e_m} \in G$ 和 $\lambda^{kd} = 1$。定义 $v \coloneqq (e_1, \dots, e_m) \in \mathbb{Z}^m$，得到 $kdv \in L$。根据假设，$dv \in L$，即 $\lambda^d = 1$。 □

考虑引理 6 的条件 2，可以看出，满足该条件的最小 d 就是扭群的指数。

定义 7. $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \overline{\mathbb{Q}}$ 的挠数 $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 定义为

$$d \coloneqq \exp(T(G)) \coloneqq \operatorname{lcm}(\operatorname{ord}(\lambda) \mid \lambda \in T(G))$$

其中 $G \coloneqq \langle \lambda_1, \dots, \lambda_m \rangle \leq (\mathbb{C}^\times, \cdot)$。

如果 d 是满足 (4) 的最小数，我们也称其为格 L 的挠数。使用纯模的术语，(4) 等价于 $\{v \in \mathbb{Z}^m \mid dv \in L\}$ 是纯格[4, III.16]。

引理 8. 设格 L的挠数为 d。那么，d' 满足引理 6 中的条件，当且仅当 $d \mid d'$。

证明. $\implies$: 根据定义，d 是满足引理 6 中条件的最小数。因此，$d' > d$，并且我们可以写成 $d' = dq + r$，其中 $0 \leq r < d$。设 $G \coloneqq \langle \lambda_1, \dots, \lambda_m \rangle$ 且 $\lambda \in T(G)$。那么，$\mathsf{ord}(\lambda) \mid d$ 且 $\mathsf{ord}(\lambda) \mid d'$。因此，

$$\operatorname{ord}(\lambda) \mid (d' - dq) = r.$$

由于 $d > r$ 是具有此性质的最小数，因此有 $r = 0$，所以 $d \mid d'$。

$\impliedby$: 由引理 6 的条件 2 可知。 □

现在，我们要证明代数数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \overline{\mathbb{Q}}$ 的挠数确实可以计算。首先，我们在第 3 节中设计了一种算法，用于计算格 $L \coloneqq L(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$的一组基 $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{Z}^m$。然后，由这组基构成的矩阵的不变因子恰好就是该格的挠数：

定理 9. 设 $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{Z}^m$ 是格 $L = \langle v_1, \dots, v_\ell \rangle \subseteq \mathbb{Z}^m$的一组基。设 $V \coloneqq (v_1, \dots, v_\ell) \in \mathbb{Z}^{m \times \ell}$。那么，$V$的不变因子就是 L的挠数。

证明。我们写作

$$PVQ = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} =: \overline{D} \in \mathbb{Z}^{m \times \ell}$$

其中，$D = \mathsf{diag}(d_1, \dots, d_{\ell-1}, d)$ 是史密斯标准形，$P \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{Z}^{\ell \times \ell}$ 是幺模矩阵。

首先，我们证明矩阵 V 的不变因子 d 满足 (4)：令 $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 和 $v \in \mathbb{Z}^m$，其中 $kdv \in L$。那么，存在一个 $w = (w_1, \dots, w_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$，使得

$$kdv = w_1 v_1 + \cdots + w_\ell v_\ell = Vw.$$

因此，

$$kdPv = PVw = PVQQ^{-1}w = \overline{D}\overline{w}$$

其中 $\overline{w} = Q^{-1}w$。第 ℓ 行给出 $kd(Pv)_\ell = d\overline{w}_\ell$，其中 $(Pv)_\ell$ 表示向量 Pv的第 ℓ 个分量。因此，$k \mid \overline{w}_\ell$。对于满足 $i < \ell$ 的第 i 行，我们有 $kd(Pv)_i = d_i\overline{w}_i$。根据史密斯标准形的性质，我们有 $d_i \mid d$，因此 $k \mid \overline{w}_i$。由于 Q 是幺模的，[20, 推论158] 给出

$$k \mid \gcd(\overline{w}) = \gcd(Q^{-1}w) = \gcd(w).$$

因此，$\frac{w}{k} \in \mathbb{Z}^\ell$ 并且

$$dv = \tfrac{1}{k}kdv = V\tfrac{w}{k} \in L.$$

其次，我们证明不变因子 d 是最小的数：假设 d' 是满足 (4) 的最小数。根据引理 8，存在一个 k 使得 $d = d'k$。令 $P^{-1} = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{Z}^{m\times m}$。由于 V 的列构成 L 的一个基，且 Q 是幺模的，我们有

$$L = V\mathbb{Z}^\ell = P^{-1}\overline{D}Q^{-1}\mathbb{Z}^\ell = P^{-1}\overline{D}\mathbb{Z}^\ell.$$

因此，

$$\{d_1p_1, \ldots, d_{\ell-1}p_{\ell-1}, dp_\ell\}$$

也是 L的一个基。令 $v \coloneqq dp_\ell = d'kp_\ell \in L$。根据假设，$d'p_\ell \in L$。因此，

$$\{d_1p_1, \ldots, d_{\ell-1}p_{\ell-1}, d'p_\ell\}$$

也是 L 的一组基。因此，存在一个幺模换基矩阵 $U \in \mathbb{Z}^{m\times m}$，使得

$$U(d_1p_1, \ldots, d_{\ell-1}p_{\ell-1}, dp_\ell) = (d_1p_1, \ldots, d_{\ell-1}p_{\ell-1}, d'p_\ell).$$

特别地，最后一列给出 $Udp_\ell = d'p_\ell$。由于 U 是幺模矩阵，我们有

$$d\gcd(p_\ell) = \gcd(Udp_\ell) = \gcd(d'p_\ell) = d'\gcd(p_\ell).$$

由于 $\gcd(p_\ell) \neq 0$，我们有 $d = d'$。 □

例 10. 令

$$\lambda_1 = 2^{1/2}, \lambda_2 = (-2)^{1/3}, \lambda_3 = \mathrm{i}, \lambda_4 = -\mathrm{i}.$$

矩阵的各列

$$V \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

是 $L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ 的一组基。因此，$d = 4$ 是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ 的挠数。

设 $c_0, \ldots\ldots, c_r \in \mathcal{R}_C$ 的特征值为 $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_m$。那么，我们已经看到，可以计算出一个数 $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$（即挠数），使得代数

$$R \coloneqq \mathbb{K}_\sigma[c_0(dn), \ldots, c_r(dn)]$$

仅包含非退化数列，即只包含有限个零项的数列。非退化数列在环 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ 中仍可能是零因子。不过，我们仍然可以定义局部化 $Q(R) \coloneqq \{\frac{c}{d} \mid c \in R, d \in R \setminus \{0\}\}$。该局部化 $Q(R)$ 是一个域。然而，$Q(R)$ 中的元素只能从某一项开始解释为 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ 中的数列（参见 [27] 或 [28]中的第 8.2 节相关讨论）。例如，数列 $\frac{3^n}{2^n-1}$ 无法在第 $n = 0$ 项取值。这对我们的应用并不是问题，正如我们将在第 5 节中看到的那样。我们在以下定理中总结本节的讨论：

定理 11。设 $c_0, \ldots, c_r \in \mathcal{R}_C$ 的特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$。那么，我们可以计算出一个数 $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$（即挠数），使得代数的局部化 $Q(R)$

$$R \coloneqq \mathbb{K}_\sigma[c_0(dn), \ldots, c_r(dn)]$$

是一个域。域 $Q(R)$ 的元素可以视为从某一项开始非零的数列。

从 C-有限数列的闭式可以看出，这些数列可视为单个嵌套乘积表达式之和的特例。挠数可用于求出这些数列的某个代数无关基 [28]。

5 阶数界

本节将推导 C^2-有限数列在环运算下的阶数界，以及其他闭包性质。

求出 C^2-有限数列的闭包性质，可归结为求解线性方程组 [8, 9]。一个 C^2-有限递推关系

$$x_0(n) + x_1(n)\sigma + \cdots + x_s(n)\sigma^s$$

对于某个合适的数列环 R，通过计算矩阵的核中的一个元素 $(x_0, \ldots, x_s)$，即可得到满足 $x_i \in R$ 的递推关系

$$\big(w_0, w_1, \ldots, w_s\big) \in Q(R)^{r\times(s+1)}. \tag{5}$$

w_i 可以使用 $w_{i+1} = M\sigma(w_i)$迭代计算，其中 $M \in Q(R)^{r\times r}$为适当的矩阵（移位算子 σ 按分量作用）。

- 在计算 $a+b$ 的递推关系时，我们使用 $w_0 = e_0 \oplus \tilde{e}_0$ 和 $M = M_a \oplus M_b$，其中M_a、M_b 是 a的伴随矩阵，b 和 e_0、$\tilde{e}_0$ 是相应维数的第一个单位向量。

- 在计算 ab 的递推关系时，我们使用 $w_0 = e_0 \otimes \tilde{e}_0$ 和 $M = M_a \otimes M_b$。
- 在计算 $a(\ell n)$的递推关系时，我们使用 $w_0 = e_0$ 和 $M = M_a(\ell n) \cdots M_a(\ell n + \ell - 1)$。

- 在计算 $c(jn^2 + kn + \ell)$的 C^2-有限递推关系（其中 j、k、$\ell \in \mathbb{N}$，且 c是一个 C-有限序列，不以 0 为特征值）时，我们使用

$$w_0 = M_c^{kn+\ell-r+1} e_{r-1} \text{ and } M = M_c^{j(2n+1)} \tag{6}$$

其中 M_c 是 c 的伴随矩阵，而 e_{r-1} 是最后一个单位向量。

底环 R是由 w_0和 M中出现的 C-有限数列c_0、.....、c_r生成的差分代数 $\mathbb{K}_\sigma[c_0, \ldots, c_r]$。

5.1 交错与子序列

The定理 12. 设 $a_1(n)$ ..., $a_d(n)$ 是最大阶数为 r的 C^2-有限数列。设 b 为 th e 交 错这些数列的结果。我们可以为 b计算出一个阶数至多为 dr 的 C^2-有限递推关系。

证明。通过适当地平移 a_s 的递推关系，我们可以假设它们都满足一个阶数为 r 的 C^2-有限递推关系，其形式为

$$c_{s,0}(n)a_s(n) + \cdots + c_{s,r}(n)a_s(n+r) = 0$$

对于 $s=1$, ..., d 个 C-有限数列 $c_{s,\,i}$ 其中 $c_{s,\,r}$ 只有有限个零点。令 e_{di} 为 $c_{1,\,i}$, ..., $c_{d,\,i}$ 对于 $i=0$, ..., r 的交错数列。这些 e_{di} 随后是 C-有限的，并且 e_{dr} 只有有限个零点。于是， b 满足递推关系

$$e_0(n)b(n)+e_d(n)b(n+d)+\cdots+e_{dr}(n)b(n+dr)=0.$$

□

如定理 12 的证明所示，计算 C^2-有限数列的交错，比计算 C-有限和 D-有限数列的交错更简单。这是因为递推关系的系数，即 C-有限数列，在交错运算下也封闭。

例 13. 设 c 是满足以下条件的 C-有限数列

$$c(n)-c(n+r)=0,\quad c(0)=1,c(1)=\cdots=c(r-1)=0.$$

此外，设 a 是 c 与零序列的 $d-1$ 倍的交错。定理 12 表明， a 是阶数至多为 dr 的 C^2-有限数列。数列 a 是循环的，并且有 $rd-1$ 个连续零项。因此，数列 a 的阶数也至少为 rd ，否则该数列将恒为零。因此，定理 12 中的界通常是紧的。

引理 14. 设 a 是阶数为 r 的 C^2-有限数列，且 d 是出现在 a 的递推关系中的特征值的挠数。设 $\ell\in\mathbb{N}$。我们可以计算出一个阶数至多为 r 的 C^2-有限递推关系，使所有数列 $a(d\ell n+i)$（其中 $i=0,\dots,d\ell-1$）都满足该递推关系。

证明。对于 $i=0,\dots,d-1$，数列 $a(n+i)$ 都满足相同的递推关系。根据 d 的选取，由出现在

$$M=M_a(d\ell n)\cdots M_a(d\ell n+d\ell-1)$$

中的数列生成的环 $\in$ 中的所有数列都是非退化的。根据定理 11， $Q(R)$ 是一个域。因此，若 $s=r$，则线性方程组 (5) 是欠定的，我们可以计算出核中的一个元素（清除分母后）$(x_0,\dots,x_r)\in R^{r+1}$，其中 $x_t\neq 0$ 且 $x_{t+1}=\cdots=x_r=0$，对某个 $t\leq r$ 成立。这就得到一个C^2-有限递推关系

$$x_0(n)+x_1(n)\sigma+\cdots+x_t(n)\sigma^t$$

因为根据 d 的选取， x_t 只有有限个零点。 □

为了将引理 14 扩展到任意等差数列上的子序列，我们将这样的任意子序列写成交错形式，即由若干子序列交错而成，并且可以对这些子序列应用引理 14。

定理 15. 设 a 是阶数为 r 的 C^2-有限数列，并设 d 是 a 的递推关系中出现的特征值的挠数。设 $\ell\in\mathbb{N}$。我们可以计算出一个阶数至多为 dr 的 C^2-有限递推关系，该递推关系由数列 $a(\ell n)$ 满足。

证明. 根据引理 14，我们可以计算出一个阶数至多为 r 的递推关系，对于 $i=0$, ..., $d\ell-1$，该递推关系由 $a(d\ell n+i)$ 满足。设 b 是以下 d 个数列的交错

$$a(d\ell n),a(d\ell n+\ell),\dots,a(d\ell n+(d-1)\ell).$$

根据定理 12， b 的阶数至多为 dr。我们证明 $b(n)=a(\ell n)$：令 $n=qd+s$，且 $0\leq s<d$。于是，根据 b的定义

$$b(n)=b(qd+s)=a(d\ell q+sl)=a(\ell(dq+s))=a(\ell n).$$

□

5.2 环运算

定理 16。设 a、b 分别是阶数为 r_1、r_2 的 C^2-有限对象，并设 d 是出现在 a、b 的递推关系中的特征值的挠数。那么，

1. 数列 $a+b$ 是阶数至多为 $d(r_1+r_2)$ 的 C^2-有限数列，并且

2. 数列 ab 是阶数至多为 dr_1r_2 的 C^2-有限数列。

此外，这类递推关系可以计算得出。

证明。根据引理 14，我们可以计算 $a(dn+i)$ $b(dn+i)$ 的最大阶数为 r_1、r_2 的 C^2-有限递推关系。通过求解域 $Q(R)$ 上的线性方程组，也可以计算闭包性质 $a(dn+i)+b(dn+i)$ 和 $a(dn+i)$ $b(dn+i)$。然后，与 C-有限和 D-有限的情形一样，适用相同的阶数界，因此数列 $a(dn+i)+b(dn+i)$ $a(dn+i)b(dn+i)$ 的最大阶数分别为 r_1+r_2、r_1r_2。根据定理 12，我们可以将这些数列交错排列，从而分别得到关于 $a+b$ 和 ab、阶数为 $d(r_1+r_2)$ dr_1r_2 的递推关系。 □

在两个 C^2-有限数列均为 C-有限或 D-有限的特殊情况下，挠数为 1，界限可简化为这些环已知的阶数界。

定理 16 并不意味着 C^2-有限数列构成的环是可计算的。我们可以计算和与积的 C^2-有限递推关系。然而，这些递推关系的首项系数可能有有限多个零点。为了唯一确定数列 $a+b$、ab，我们可能需要在这些奇点处定义额外的初始值。不过，根据 Skolem 问题，我们不知道这些奇点是否可计算。下一个例子也说明了这一点。

例 17. 令 $a(n)=2\binom{n+1}{2}$（OEIS 中的 A006125 [25]），且 $b(n)=4\binom{n}{2}$（A053763）。这两个数列都是 C^2-有限数列，满足递推关系

$$2^{n+1}\,a(n)-a(n+1)=0,\quad 4^n\,b(n)-b(n+1)=0.$$

$L(1,2,4)$ 的挠数为 $d=1$。$c=a+b$ 的递推关系系数由核中的一个元素给出

$$\begin{pmatrix}1 & 2^{n+1} & 2^{2n+3}\\ 1 & 2^{2n} & 2^{4n+2}\end{pmatrix}.$$

因此，例如，递推关系可表示为

$$2^{3n+3}(2^n-1)c(n)-2^{n+2}(2^{2n}-2)c(n+1)+(2^n-2)c(n+2)=0.$$

递推关系的阶数为 $\mathrm{ord}(a)+\mathrm{ord}(b)=2$，正如预期的那样，但首项系数在 $n=1$ 处有一项为零。对递推关系进行移位后，可得到一个阶数更高的递推关系，其首项系数不再含有任何零项。

例 18. 设 c 是 C-有限的，阶数为 2，且满足

$$c(n)-c(n+2)=0,\quad c(0)=-1,c(1)=1.$$

设 a,b 是 C^2-有限的，且满足

$$a(n)=1\quad c(n)b(n)-b(n+1)=0,\quad b(0)=1.$$

The 出现的特征值为 1 和 -1。因此，挠数为 $d=2$。设 $a_i(n)=a(2n+i)$ 和 $b_i(n)=b(2n+i)$，其中 $i=0,1$。这些甚至是阶数为 1 的 C-有限对象，且满足

$$a_i(n)-a_i(n+1)=0,\quad b_i(n)+b_i(n+1)=0.$$

令 $s_i=a_i+b_i$。这些 s_i 是 C 阶数为 2 的有限序列，满足

$$s_i(n)-s_i(n+2)=0.$$

s_0 与 s_1 的交错 $s = a + b$ 满足 C 阶数为 $4 = d$ 的有限递推关系（ord(a) + ord(b)）

$$s(n) - s(n+4) = 0.$$

然而， s 也满足一个阶数为 3 的 C^2-有限递推关系，即

$$c_0(n)s(n) + c_2(n)s(n+2) + s(n+3) = 0$$

with

$$\begin{aligned} &c_0(n) - c_0(n+2) = 0, && c_0(0) = -1, && c_0(1) = 0, \\ &c_2(n) - c_2(n+2) = 0, && c_2(0) = 0, && c_2(1) = -1. \end{aligned}$$

由于 $s(n)$ 包含 2 个连续零项，因此不存在更短的递推式。

5.3 稀疏子序列

定理 19. 设 c 是阶数为 r 的 C-有限数列， $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 是其特征值，且对所有 $i = 1, \ldots, m$, $\lambda_i \neq 0$。设 d 为这些特征值的挠数。则我们可以计算一个 C^2-有限递推式，其

$$c(jn^2 + kn + \ell)$$

最大阶数为 dr，对所有 $j, k, \ell \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。首先，我们说明如何为数列求出一个阶数为 r 的递推关系

$$a(n) = c(d(jn^2 + kn) + \ell).$$

引理 11 在 [14] 中表明，对于 p， $q \in \mathbb{Z}$ 是由 C-有限数列组成的矩阵。证明表明，这些数列的特征多项式就是 M^p 的特征多项式。令 M_c 为 c 的伴随矩阵。设

$$(x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_m)^{d_m}$$

是 c 的特征多项式，根据伴随矩阵的定义，它也等于 M_c 的特征多项式。然后，根据 C-有限数列的闭式， $c(pn)$ 的特征多项式为

$$(x - \lambda_1^p)^{d_1} \cdots (x - \lambda_m^p)^{d_m}$$

而它又等于 M_c^p 的特征多项式。根据 (6)，用于计算 $a(n)$ 的递推关系所用的底环 R 的生成数列，其特征多项式均等于 M_c^{dk} 和 M_c^{2dj} 的特征多项式。若 $s = r$，则很容易求得域 $Q(R)$ 上该线性方程组的一个核中的元素。这便为 a 导出了一个阶数为 r 的 C^2-有限递推关系。

任意数列

$$b(n) = c(jn^2 + kn + \ell)$$

可以写成若干数列的交错

$$a_r(n) = c(d(djn^2 + (2jr + k)n) + jr^2 + kr + \ell)$$

对于 $r = 0, \ldots, d-1$，交错数列中索引为 $n = qd + r$ 的项恰好由下式给出

$$\begin{aligned} a_r(q) &= c(d(djq^2 + (2jr + k)q) + jr^2 + kr + \ell) \\ &= c(j(d^2q^2 + 2rq + r^2) + k(dq + r) + \ell) = c(jn^2 + kn + \ell). \end{aligned}$$

根据证明的第一部分（选择 $j = dj$、 $k = 2jr + k$、 $\ell = jr^2 + kr + \ell$），我们可以计算这些数列 a_r 的 C^2-有限递推关系，其阶数为 r。因此，根据定理 12，我们可以计算 b 的一个 C^2-有限递推关系，其阶数为 dr。 □

例 20. 设 c 是满足下式的 C-有限数列（OEIS 中的 A006131）：

$$4\,c(n)+c(n+1)-c(n+2)=0,\quad c(0)=c(1)=1.$$

该数列的特征值为 $\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$，其挠数为 1。稀疏子序列 $a\ n\ =$ $c\ n^2$ C^2 2 ( ) ( ) 是阶数为 的 -有限数列，满足

$$c_0(n)a(n)-c(4n+3)a(n+1)+c(2n)a(n+2)=0$$

其中，c_0 是满足以下条件的阶数为 2 的 C-有限数列

$$4096\,c_0(n)-144\,c_0(n+1)+c_0(n+2)=0,\quad c_0(0)=-20, c_0(1)=-1856.$$

6 展望

最近，引入了简单的 C^2-有限数列类 [24]，它具有与 C^2-有限数列相同的计算性质，但不存在相同的技术问题。特别是，可以推导其渐近行为的界，可以通过生成函数进行刻画，并且可以更高效地计算闭包性质。

然而，目前尚不清楚是否能够像本文针对 C^2-有限数列所展示的那样，推导出简单 C^2-有限数列的阶数界。在这种情况下，需要处理一个非齐次线性系统，且底环不是主理想整环。因此，不能简单地对模的秩进行界定。

通常，给定一个 C^2-有限数列的定义递推式，很难论证它不满足更短的递推式。对于 D-有限数列，通常采用猜测并证明的方法来推导更短的递推式（或者首先寻找其为全纯数列的证据）。如果能有一个针对 C^2-有限数列的猜测程序，将会十分理想。由于朴素方法会导致一个非线性系统（另见 [29]），因此需要研究如何高效地求解该系统。

致谢
我们衷心感谢 Thierry Combot 和 Carsten Schneider 提供的建议。

参考文献

[1] Jean Berstel 和 Maurice Mignotte。线性递推数列的两个可判定性质。《法国数学会通报》，104:175–184，1976年。[2]Richard P. Brent。初等函数的快速多精度求值。《ACM杂志》，23(2):242–251，1976年。[3] Henri Cohen。《计算代数数论教程》。《数学研究生教材》。Springer Berlin Heidelberg，2013年。[4] Charles W. Curtis 和 Irving Reiner。《有限群与结合代数的表示论》。AMS Chelsea 出版丛书。Interscience Publishers，1966年。[5] Graham Everest、Alf van der Poorten、Igor Shparlinski 和 Thomas Ward。《递推数列》。《数学调查与专著》。美国数学会，2015年。[6] Paolo Faccin。代数中的计算问题：群环中的单位元与实单李代数的子代数。博士论文，特伦托大学，2014年。[7] Guoqiang Ge。《代数数的乘法表示相关算法》。博士论文，加州大学伯克利分校，1993年。

[8] Antonio Jim´enez-Pastor、Philipp Nuspl 和 Veronika Pillwein。关于 C^2-有限序列。载于 ISSAC 2021 论文集，线上活动，俄罗斯联邦，2021年7月18日至23日，第217–224页，2021年。[9] Antonio Jim´enez-Pastor、Philipp Nuspl 和 Veronika Pillwein。全纯序列的扩展： C^2-有限序列。《符号计算杂志》，116:400–424，2023年。[10] Manuel Kauers。《非线性高阶差分方程算法》。博士论文，林茨约翰·开普勒大学，2005年。[11] Manuel Kauers。全纯工具包。载于《量子场论中的计算机代数：积分、求和与特殊函数》，《符号计算专著》，第119–144页。施普林格，2013年。[12] Manuel Kauers。D-有限闭包性质的界。载于 ISSAC 2014 论文集，日本神户，第288–295页，纽约，美国，2014年。美国计算机协会。[13] Manuel Kauers 和 Peter Paule。《具体四面体》。《符号计算专著》。施普林格，2011年。[14] Tomer Kotek 和 Johann A. Makowsky。双迭代图族的图多项式递推关系。《欧洲组合学杂志》，41:47–67，2014年。[15] Tipaluck Krityakierne 和 Thotsaporn Aek Thanatipanonda。《简明 Ansatz：多项式、 C-有限、全纯和 C^2-有限序列的全面分步指南》，2022年。https://arxiv.org/abs/2201.08035。[16] Arjen K. Lenstra、Hendrik W. jun. Lenstra 和 L´aszl´o Lov´asz。利用有理系数因式分解多项式。《数学年刊》，261:515–534，1982年。[17] Christian Mallinger。《单变量全纯函数与序列的算法操作与变换》。毕业论文，林茨约翰·开普勒大学，1996年。[18] David W. Masser。代数群上的线性关系。《超越数理论新进展》，1988年。[19] Stephen Melczer。《解析组合学导论》。《符号计算专著》。施普林格，2021年。[20] Johannes Middeke。符号线性代数，2019年。[21] Morris Newman。《整数矩阵》。ISSN。爱思唯尔科学出版社，1972年。[22] Philipp Nuspl。 C-有限和 C^2-有限序列在 SageMath 中的应用。RISC报告系列 22-06，符号计算研究所（RISC），林茨约翰·开普勒大学，2022年。[23] Philipp Nuspl 和 Veronika Pillwein。证明线性递推序列正性的算法比较。载于《科学计算中的计算机代数》，计算机科学讲义第13366卷，第268–287页。施普林格国际出版社，2022年。[24] Philipp Nuspl 和 Veronika Pillwein。简单的 C^2-有限序列： C-有限序列的可计算推广。载于 Marc Moreno Maza 和 Lihong Zhi 编，《ISSAC '22：2022年国际符号与代数计算研讨会论文集》，第45–53页。美国计算机协会，2022年。[25]OEIS基金会。在线整数序列百科全书，2022年。http://www.oeis.org。[26] Jo¨el Ouaknine 和 James Worrell。线性递推序列的判定问题。载于《计算机科学讲义》，第21–28页。施普林格，2012年。

[27] Marko Petkovˇsek、Herbert S. Wilf 和 Doron Zeilberger。《B》。CRC出版社，1996 年。[28] Carsten Schneider。单重嵌套乘积的极小表示与代数关系。《程序设计与计算机软件》，46：133–161，2020 年。[29] Thotsaporn Aek Thanatipanonda 和 Yi Zhang。数列：多项式、C-有限、全纯……，2020 年。https://arxiv.org/pdf/2004.01370。[30] Mark van Hoeij。多项式因式分解与背包问题。《数论杂志》，95：167–189，2002 年。[31] Mark van Hoeij。有理数域上单变量多项式因式分解的复杂度。载于 ISSAC'13 会议录，第 13–14 页，2013 年。[32] Mark van Hoeij 和 Andrew Novocin。渐进式子格约化与一种新的多项式因式分解复杂度。《算法学》，63(3)：616–633，2012 年。[33] Tao Zheng。通过伽罗瓦群及类伽罗瓦群刻画多项式指数格的平凡性。载于 Fran.cois Boulier、Matthew England、Timur M. Sadykov 和 Evgenii V. Vorozhtsov（编），《科学计算中的计算机代数》，第 621–641 页。施普林格国际出版社，2020 年。[34] Tao Zheng。计算一般多项式根之间乘法关系的快速算法。《符号计算杂志》，104：381–401，2021 年。[35] Tao Zheng 和 Bican Xia。构造非零代数数指数格基的有效框架。载于《2019 年国际符号与代数计算研讨会会议录》，第 371–378 页，2019 年。