arXiv:2302.04073v1 [math.RT] 8 Feb 2023

超代数 变形与网络范畴：有限网络 S

NICHOLAS DAVIDSON、JONATHAN R. KUJAWA、ROBERT MUTH 和 JIERU ZHU

Abstract. 设 $\mathbb{K}$ 是一个特征零整环。对于一个局部含幺 $\mathbb{K}$-超代数 A，其具有指定的幂等元 I 和偶子代数 $a \subseteq A_{\bar{0}}$，我们定义并研究与之相关的图解幺半 $\mathbb{K}$-线性超范畴 $\mathrm{Web}_{A,\ I}{}^{a}$。该超范畴为广义舒尔代数 $T_a^A(n, d)$ 提供了图解描述。我们还证明，存在一个渐近忠实函子，它从 $\mathrm{Web}_{A,\ I}{}^{a}$ 映射到由自然模的对称幂生成的 $\mathfrak{gl}_n(A)$-模构成的幺半超范畴。当该函子满时，单个图解超范畴 $\mathrm{Web}_{A,\ I}{}^{a}$ 便为所有 $n \geq 1$下的这一模范畴提供组合描述。我们还利用这些结果，在 A 为半单时，建立 $\mathfrak{gl}_m(A)$ 与 $\mathfrak{gl}_n(A)$ 之间的 Howe 对偶。

Contents

1. 引言 3
1.1. 广义舒尔代数 3
1.2. (A, a)-网 3
1.3. 主要结果：网 3
1.4. 主要结果：舒尔化与花环积 4
1.5. 主要结果：豪双对偶 5
1.6. 未来方向 6
1.7. 致谢 6
2. 预备知识 6
2.1. 基环、超代数与超范畴 6
2.2. 良对 7
2.3. 组合学 7
3. $\mathrm{Web}^{A,\ I}{}^{a}$ 范畴 8
3.1. 定义 $\mathrm{Web}^{A,\ I}{}^{a}$ 范畴 8
3.2. $\mathrm{Web}^{A,\ I}{}^{a}$ 的另一种表示 11
4. $\mathrm{Web}^{A,\ I}{}^{a}$ 中的隐含关系 11
4.1 表示的等价性。 11
4.2. $\mathrm{Web}^{A,\ I}{}^{a}$ 中的单调关系 13
5. 定义表示 19
5.1. 扭转映射 19
5.2. 对称幂 20
5.3. 超代数 $M_n(A)$ 与李超代数 $\mathfrak{gl}_n(A)$ 20
5.4. $\mathfrak{gl}_n(A)$ 的带色对称幂模 21
5.5. $\mathrm{Web}^{A,\ I}{}^{a}$ 的定义表示 21
6. $\mathrm{Web}^{A,\ I}{}^{a}$ 的特殊态射与基 22
6.1. 展开与收缩 22

Date: 2023年2月9日。第二作者获得了西蒙斯数学家合作资助（编号 525043）的部分支持。

6.2. 附加贴片 6.3. 态射的张成集 6.4. 在带色对称幂模上的作用 6.5. $\mathrm{Web}^{A,\ I^{a}}$ 的张成结果 6.6. $\mathrm{Web}^{A,\ I^{a}}$ 的基结果 6.7. 关于任意交换环的备注 6.8. 良好子对 6.9. 截断 7. 与舒尔化的联系 7.1. 代数 $W^{A,\ n\ d^{a}}$, 7.2. (A, a) 的舒尔化 7.3. 连接代数 7.4. 幺半等价 8. 花环范畴 8.1. 花环范畴（一） 8.2. 花环范畴（二） 9. 表示的丰满性 9.1. 定义表示 9.2. 网范畴的丰满性 9.3. 花环范畴的丰满性 10. 范畴 $\dot{\mathrm{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))$ 10.1. 范畴 $\dot{\mathrm{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))$ 10.2. 从 $\dot{\mathrm{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))$ 到 $\mathrm{Web}^{A,\ \{1\}^{a},\ n}$ 的函子 11. 多项式表示与舒尔–韦尔对偶 11.1. 多项式表示 11.2. 舒尔–韦尔对偶 11.3. 有限维半单超代数的表示 11.4. 花环积超代数的表示 11.5. 舒尔–韦尔–Berele–Regev–Sergeev 对偶 11.6. 多项式表示与广义 Schur–Weyl 对偶 12. 豪双对偶 12.1. 对称空间 $\mathrm{S}_{m,\ n}$ 12.2. 杂项 12.3. 由 $\mathrm{S}_{m,\ n}$ 得到的范畴表示 12.4. 范畴化与有限型豪对偶 12.5. 强无重数分解 13. 例子 13.1. $\mathfrak{gl}_n$-网范畴 13.2. 分圆舒尔代数 13.3. $\mathfrak{q}_n$-网范畴 13.4. 之字形超代数与 RoCK 块 参考文献

1. Introduction

1.1. 广义舒尔代数。设 $\mathbb{K}$ 是一个整环，并设 $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ 是一个含幺 $\mathbb{K}$-超代数，且作为 $\mathbb{K}$-超模是自由的。前缀“超”表示对象是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次的，因此应采用通常定义的分次版本；详情见第 2.1 节。尽管我们的结果对普通的 $\mathbb{K}$-代数（即当 $A_{\bar{1}} = 0$ 时）也成立且颇有意义，但分次在若干启发我们研究的例子中发挥着重要作用。

固定 n、$d \geq 1$，设 $V_n = A^{\oplus n}$，并设 $\mathfrak{S}_d \wr A$ 为对称群 $\mathfrak{S}_d$ 与 A的花环积超代数。$\mathfrak{S}_d \wr A$ 在 $V_n^{\otimes d}$ 上有一个右作用，其中 $\mathfrak{S}_d$ 通过位置置换作用，$A^{\otimes d}$通过右乘作用，并且这两种作用都取决于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次。此处及下文中，$\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$。$A$ 的广义舒尔超代数定义为

$$S^A(n,d) = \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d \wr A}\left(V_n^{\otimes d}\right).$$

与这些数据相关联的还有李超代数 $\mathfrak{gl}_n(A)$，它由元素取自 A 的 $n \times n$ 矩阵构成，李括号由分次交换子给出。这一框架涵盖了多种有趣的代数。当 $A = \mathbb{k}$ 时，这给出一般线性李代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ 和舒尔代数 $S(n,d)$。当 A 是阶为 r 的循环群的群代数 C_r 时，$\mathfrak{S}_d \wr C_r$ 是复反射群，而 $S^A(n,d)$ 是分圆舒尔代数。当 $A = k[t]$ 或 $A = \mathbb{k}[t, t^{-1}]$ 时，$\mathfrak{gl}_n(A)$ 分别是流代数或环路代数。更一般地，如果 A 是某个簇（或概形）的坐标环，那么 $\mathfrak{gl}_n(A)$ 就是相应的映射代数。如果 $A = \mathbf{Cl}_1$ 是由一个奇生成元生成的克利福德超代数，那么 $\mathfrak{gl}_n(A)$ 是李超代数 $\mathfrak{q}_n(\mathbb{K})$，而 $S^A(n,d)$ 是 Q 型舒尔超代数。如果 Λ 是由一个奇生成元生成的外超代数，那么 $\mathfrak{sl}_2(\Lambda)$ 作用于缝合环带克霍万诺夫同调 [25]。

广义舒尔代数有一个最近受到关注的改进版本。固定一个含幺子代数 $a \subseteq A_{\bar{0}}$，它是一个具有自由直和补的自由 $\mathbb{K}$-超模。对于这一对 (A,a)，存在一个与之相关的满秩 $\mathbb{K}$-子代数，

$$T_a^A(n,d) \subseteq S^A(n,d),$$

有时称为 A 的舒尔化。注意，$S^A(n,d)$ 并未消失，因为 $T^A_{A_{\bar{0}}}(n,d) = S^A(n,d)$。

给定环扩张 $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{K}$，可以扩张标量，定义 $T_a^A(n,d)_{\mathbb{K}}$ 和 $S^A(n,d)_{\mathbb{K}}$。一般而言，它们是秩相同但彼此不同构的 $\mathbb{K}$-超代数。这两个代数都很有意义，但如今人们认识到，$T_a^A(n,d)_{\mathbb{K}}$ 在表示论中发挥着尤为重要的作用。具体而言，若 $\mathbb{K}$ 是正特征域，那么对于一个合适的之字形超代数 $\bar{Z}$ 和子代数 $\bar{z} \subseteq \bar{Z}_{\bar{0}}$，Evseev–Kleshchev 证明，代数 $T_{\bar{z}}^{\bar{Z}}(n,d)_{\mathbb{K}}$ 与对称群 [20] 的权 d RoCK 块 Morita等价，从而证明了 Turner [41] 的一个猜想。特别是，这意味着借助 Chuang–Rouquier [13] $T_{\bar{z}}^{\bar{Z}}(n,d)_{\mathbb{K}}$ 的导出分块等价，可以将其视为具有非阿贝尔缺陷群的对称群分块的“局部”对象。人们预期，选择其他的 (A,a) 也会在其他情形下得到类似结果。例如，有人猜想，对于某些明确的 Brauer 树代数对 (Z,z) 和 (Z',z')，代数 $T_z^Z(n,d)$ 将与舒尔代数 [32, 的权 d RoCK 块 Morita等价（猜想 7.58]）；而 $T_{z'}^{Z'}(n,d)$ 将与权 d 自旋 RoCK 块 [28, Morita等价（猜想 1]）。

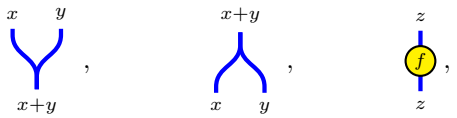
代数 $T_a^A(n,d)_{\mathbb{K}}$ 似乎也比定义方式更直观的 $S^A(n,d)_{\mathbb{K}}$表现得更好。例如，Kleshchev–Muth 证明，若 A 是基拟遗传的，那么只要满足 $n \geq d$ [30]，$T_a^A(n,d)_{\mathbb{K}}$ 也将是基拟遗传的。而 $S^A(n,d)_{\mathbb{K}}$则未必如此。类似地，在适当的假设下，若 (A,a) 是对称的或胞腔的，那么 $T_a^A(n,d)$ 也具有相同性质。详情见 [3, 19, 30, 31, 32]。

1.2. (A,a)-网。本文旨在说明，图示超范畴的语言可自然地用于描述 $T_a^A(n,d)$、$U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 和 $\mathfrak{S}_d \wr A$及其表示论。

设 (A,a) 是如上所述的一对含幺超代数。事实上，在本文正文中，我们将采用更一般的局部含幺超代数 A（或等价地，一个小的 $\mathbb{K}$-线性超范畴）。

尽管应用需要这种一般性，但为便于阐述，我们在引言中聚焦于含幺情形。

对于 (A, a) 的数据，我们关联一个由生成元和关系定义的严格幺半超范畴 $\mathbf{Web}^{A,\,a}$，称之为 (A, a)-网。对象是非负整数构成的元组，词的拼接构成幺半积。$\mathbf{Web}^{A,\,a}$ 的生成态射由下列图给出：



对于 $x,y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $z \in \mathbb{Z}_{>0}$，且当 $z = 1$ 时为 $f \in A$，当 $z \geq 2$ 时为 $f \in a$。我们的约定是从下往上读取图。复合由竖直拼接给出，幺半积由水平拼接给出。因此，$\mathbf{Web}^{A,\,a}$ 中的态射是由反复拼接生成图表构成的图的线性组合，并满足一组相当简单的局部关系。详情见定义 3.1.1。特别地，读者将在那里看到，如果 A 是局部含幺的，那么线股由指定幂等元着色，并且还会有一族额外的“交叉”态射作为生成元。本文正文中介绍的结果通常会在这一更一般的情形下得到证明。

范畴 $\mathbf{Web}^{A,\,a}$ 推广了若干网范畴构造。特别地，当 $A = \mathbb{K}$ 时，我们得到 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ 的对称网；它们是文献 [11, 35, 37, 40]，中所出现对象的非量子化版本，并且与 [8, 15] 中定义的范畴同构。当 $A = \mathsf{Cl}_1$ 是秩一克利福德代数时，我们的构造得到 [6]，的构造；后者是 [5] 中所给构造的非量子版本。关于这些例子及其他例子的更多细节，请参见第 13 节。

1.3. 主要结果：网。我们的第一组结果研究幺半超范畴 $\mathbf{Web}^{A,\,a}$ 的性质。若将 $V_n = A^{\oplus n}$ 视为长度为 n 的行向量，则 $\mathfrak{gl}_n(A)$ 通过矩阵乘法从右侧作用。得益于包络代数 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 的余交换余乘法以及 $\mathfrak{S}_d$ 的置换作用，对所有 $d \geq 1$，都有 $\mathfrak{gl}_n(A)$-超模 $V_n^{\otimes d}$ 和 $S^d V_n$，分别为 d 阶张量幂和对称幂。右 $\mathfrak{gl}_n(A)$-超模范畴是一个幺半超范畴。令 $\mathrm{mod}_S\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)$ 表示 $\mathfrak{gl}_n(A)$-超模构成的满幺半子范畴，其对象具有如下形式

$$S^{x_1} V_n \otimes \cdots \otimes S^{x_t} V_n,$$

其中 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

我们在定理 5.5.1 和推论 6.6.2 中确立了以下结果。

定理 A. 对所有 $n \geq 1$，都存在一个幺半超范畴的函子，

$$G_n : \mathbf{Web}^{A,a} \to \mathrm{mod}_S\text{-}\mathfrak{gl}_n(A),$$

该函子本质上是满射的，并且渐近忠实，其含义是，对于任意固定的态射空间，当 $n \gg 0$ 时，该函子定义一个单射。

我们将其称为 $\mathbf{Web}^{A,a}$ 的定义表示。理解由生成元与关系给出的范畴的一项基本工具，是态射空间的显式基。为此，在命题 6.5.1 和推论 6.6.3 中，我们利用定义表示给出 $\mathbf{Web}^{A,a}$ 的态射空间的基。

1.4. 主要结果：舒尔化与花环积。在第 7 节中，我们将 $\mathsf{Web}^{A,a}$ 与舒尔化 $T_a^A(n,d)$ 联系起来。取 $\Omega(n,d)$ 为 d 的 n-部分分拆的集合，则存在一组正交幂等元 $\{\xi_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in \Omega(n,d)\} \subseteq T_a^A(n,d)$，它们的和为单位元。因此，

$$\mathbf{T}^{A,a} := \bigoplus_{\substack{n,d\geq 0\\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega(n,d)}} \xi_{\mathbf{y}} T_a^A(n,d)\xi_{\mathbf{x}} = \bigoplus_{n,d\geq 0} T_a^A(n,d)$$

可视为一个 $\Bbbk$-线性超范畴，其对象由 $\Omega(n,d)$ 索引，态射的复合由 $T_a^A(n,d)$ 中的乘法给出。事实上，第 7.2 节中定义的移位星积赋予 $\mathbf{T}^{A,a}$ 幺半超范畴结构。

我们在定理 7.3.3 和 7.4.2 中证明了以下结论。

定理 B. 存在一个幺半超范畴之间的等价

$$\mathbf{T}^{A,a} \to \mathbf{Web}^{A,a},$$

并且对于所有 $n,d \geq 0$，都存在一个显式的超代数同构

$$T_a^A(n,d) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega(n,d)} \mathbf{Web}^{A,a}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

这一结果将 $T_a^A(n,d)$ 描述为一种图代数。这使得我们能够将新的工具和技术应用于对 $T_a^A(n,d)$ 及其表示论的研究。或许值得一提的是，文献中将 $T_a^A(n,d)$ 定义为 $S^A(n,d)$ 的子代数。相比之下，这里在 $\mathsf{Web}^{A,a}$中引入它，无需提及 $S^A(n,d)$。

同样地，在第 8 节中，我们证明花环积超代数 $\mathfrak{S}_d \wr A$ 也自然地作为 $\mathsf{Web}^{A,a}$中的自同态代数出现。具体而言，我们通过生成元与关系定义一个图示幺半超范畴 Wr^A，并在命题 8.1.2 中证明它等价于 $\mathsf{Web}^{A,a}$ 的满幺半子范畴；该子范畴由形如 $\{1^d := (1,\dots,1) \mid d \geq 0\}$的对象组成。我们还在推论 8.2.2 中证明，对于每个 $d \geq 1$，都存在一个超代数同构：

$$\mathbf{Web}^{A,a}(1^d,1^d) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{S}_d \wr A.$$

1.5. 主要结果：豪双对偶。一个基本问题是确定定义表示 G_n 何时是满的。当它是满的时，$\mathsf{Web}^{A,a}$ 为超范畴 $\mathsf{mod}_S\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)$ 提供了一个完整的组合模型。Web-slingers 知道，G_n 的满性必定与 $\mathfrak{gl}_n(A)$ 存在豪双对偶密切相关。第 12 节证实了这一预期。

If $V_m = A^{\oplus m}$ 写成列向量，$V_n = A^{\oplus n}$ 写成行向量，则存在相互交换的作用ons,

$$U(\mathfrak{gl}_m(A)) \curvearrowright V_m \otimes_A V_n \curvearrowleft U(\mathfrak{gl}_n(A)),$$

由左、右矩阵乘法给出。因此，存在相互交换的作用，

$$U(\mathfrak{gl}_m(A)) \curvearrowright S^\bullet(V_m \otimes_A V_n) \curvearrowleft U(\mathfrak{gl}_n(A)). \tag{1.5.1}$$

对于一对 $(\mathfrak{gl}_m(A),\ \mathfrak{gl}_n(A))$，具有对称的豪双对偶，大致意味着这两个作用应当互为中心化子。我们在第 12.4 节中阐述这一情形下的豪双对偶，并证明它成立当且仅当相应的定义表示是满的。

我们在这一方向上最强的结果是在 $\Bbbk$ 为特征零域这一假设下得到的。在此情形下，定义表示 G_n 满，当且仅当超范畴 Wr^A 的定义表示满。这又等价于自然映射满射：

$$\mathfrak{S}_d \wr A \to \mathrm{End}_{S^A(n,d)}\left(V_n^{\otimes d}\right),$$

对所有 $d \geq 1$均成立。若对于所有 n、$d \geq 1$，此映射都是满射，则称 A 满足舒尔–韦尔对偶。当 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域且 A 是有限维半单

$\mathbb{K}$-超代数时，由半单超代数的双中心化子定理可知，舒尔–韦尔对偶成立。参见定理 11.2.2。这已经涵盖了许多值得关注的例子。剩下的问题是确切确定舒尔–韦尔对偶成立的条件。

当 $\mathbb{K}$ 是特征为零的代数闭域，且 A 是有限维半单超代数时，我们可以给出豪双对偶的一个更强版本。在这些条件下，我们在定理 12.5.1 中证明了以下强无重结果。

定理 C. 若 m、$n \geq 1$ 和 r 是 m 与 n的最小值，则对所有 $d \geq 0$,

$$S^d(V_m \otimes_A V_n) \cong \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+^A(r,d)} L_m(\boldsymbol{\lambda}) \circledast L_n(\boldsymbol{\lambda})^*$$

作为$(U(\mathfrak{gl}_m(A))\ U(\mathfrak{gl}_n(A)))$-双超模。这里，$L_t(\boldsymbol{\lambda})$表示一个特定的简单 $\mathfrak{gl}_t(A)$-超模，其指标由 d、$\Lambda_+^A(r,d)$的一个显式多重分拆集合给出。

1.6. 未来方向。我们计划在本文的续篇中重点研究 A 是 Frobenius 代数的情形，并研究仿射网范畴 $\mathrm{AffWeb}^{A,\,a}$。这是一个图示单对象超范畴，其生成元与关系如定义 3.1.1 所述，并加入了一个额外的仿射生成元贴片。正如 $\mathrm{Web}^{A,\,a}$ 可视为一种涵盖缠绕代数 $\mathfrak{S}_d \wr A$ 的粗股演算，$\mathrm{AffWeb}^{A,\,a}$ 则是一种涵盖仿射缠绕积代数 $\mathrm{A}_n(A)$ 的粗股演算，该代数定义于 [38]。我们预计，$\mathrm{AffWeb}^{A,\,a}$ 将在一般情形下建立某些 Morita 等价结果方面发挥关键作用；在对基域的特征施加限制时（例如 [29] 中的情形），已知这些结果对 $\mathrm{A}_n(A)$ 成立。

1.7. 致谢。本文的部分研究工作是在 AIM SQuaRE 合作项目“网范畴的超代数变形”期间完成的。作者谨向美国数学研究所致谢，感谢其提供的支持与热情接待。

2. Preliminaries

2.1. 基环、超代数与超范畴。

2.1.1. 超模与超范畴。设 k 是一个特征零整环，其分式域为 K。对于 $R \in \{\mathbb{k}, \mathbb{K}\}$，记 R-sMod 为左 R-超模范畴，记 R-smod 为有限生成 R-超模的全子范畴。这里的前缀“超”表示我们处于 $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次的情形。为简洁起见，我们常常省略前缀“超”。我们将 R视为 Z2-分次且集中于奇偶性 $\bar{0} \in \mathbb{Z}2$，而一个 R-超模就是一个 Z2-分次的 R-模。给定一个 Z2-分次对象 $X = X_{\bar{0}} \oplus X_{\bar{1}}$，若 $x \in X_{\bar{x}}$，我们记 $\bar{x} \in \mathbb{Z}2$。若 $\bar{x} = \bar{0}$（分别为 $\bar{x} = \bar{1}$），我们有时称 x 为偶（分别为奇）。给定一个有限秩的自由 k-超模 M，我们用 $\dim \mathrm{k}(M)$ 表示 M的秩，用 $\mathrm{grdim}\ \mathrm{k}(M) = p|q$表示 M的分次秩；也就是说，当 $M_{\bar{0}}$ 的秩为 p 且 $M_{\bar{1}}$ 的秩为 q 时。

我们假定读者熟悉超代数、超模、（幺半）超范畴等。特别地，超范畴是指以超模范畴（例如，R-sMod）为丰的范畴。对于（幺半）超范畴、超函子以及（幺半）超范畴的图示演算，我们通常遵循 [7] 的约定。

有一点约定值得明确说明：我们选择将超模同态写在作用的另一侧。例如，若 M 和 N 是左 A-超模，则超模同态 $f\colon M \to N$是一个$\mathbb{K}$-线性映射，满足 $(am)f = a(mf)$，对所有 $a \in A$, $m \in M$均成立。若我们选择将它们写在左侧，那么齐次超模同态 $g\colon M \to N$将是一个$\mathbb{K}$-线性映射，满足 $g(am) = (-1)^{\bar{a}\bar{g}} ag(m)$，对所有齐次的 $a \in A$, $m \in M$均成立。给定一个齐次$\mathbb{K}$-线性映射 $f\colon M \to N$，定义 $g\colon M \to N$为 $g(x) = (-1)^{\bar{f}\bar{x}} f(x)$。一个简单的

检验可以验证，这给出了两种约定之间的双射；选择其中一种并不会造成任何损失。

给定幺半超范畴中的一组对象 X，我们用 $X^{\otimes d}$ 表示由 X 中的对象组成的所有 d 重张量积的集合。给定幺半超范畴中的一个对象 x，有时我们用 x^d 或 $x^{\otimes d}$ 表示该对象与自身的 d 重张量积。

2.1.2. 局部含幺超代数。若存在一组指定的 I 互相正交的偶幂等元，使得 $A = \bigoplus_{i,j\in I} {}_jA_i$，则称 $\Bbbk$-超代数 A 为局部含幺（参见 [10, 第 5] 节）。给定一个局部含幺的 $\Bbbk$-超代数 A，局部含幺左 A-超模是满足 $M = \bigoplus_{i\in I} iM$ 的左 A-超模。右超模和双超模也有显然的局部含幺概念。每当超代数是局部含幺的，我们就假定其超模也局部含幺。

给定这样的 A 和 I，我们可以定义一个与之对应的小型 $\Bbbk$-线性超范畴 A，使得 $\mathrm{Ob}(\mathsf{A}) = I$ 且 $\mathsf{A}(i,j) = {}_jA_i$，其中态射的复合 $f \circ g$ 由乘法 fg 给出。反过来，给定一个 $\mathrm{Ob}(\mathsf{A}) = I$ 的小型 $\Bbbk$-线性超范畴 A，我们可以定义一个局部含幺 $\Bbbk$-超代数 $A = \bigoplus_{i,j\in I} \mathsf{A}(i,j)$，其带有指定的幂等元系 $\{i \mid i \in I\}$，乘法则由态射复合线性延拓而成。这一对应关系 $A \leftrightarrow \mathsf{A}$ 在局部含幺 $\Bbbk$-超代数与小型 $\Bbbk$-线性超范畴之间建立了对应。

2.1.3. 超范畴的表示。$\Bbbk$-线性超范畴 A 的一个（左）表示是一个 $\Bbbk$-线性函子 $F\colon \mathsf{A} \to \Bbbk$-模。超自然变换给出了 A 的表示之间的态射。我们用 A-Rep 表示 A 的表示超范畴。

局部含幺 $\Bbbk$-超代数与小型 $\Bbbk$-线性超范畴之间的对应关系可推广到表示。具体而言，给定一个左表示 $F\colon \mathsf{A} \to \Bbbk$-模，$\bigoplus_{i\in I} F(i)$ 自然是一个左 A-超模。反过来，若 M 是一个局部含幺的左 A-超模，且有分解 $M = \bigoplus_{i\in I} iM$ 为 $\Bbbk$-超模，则存在一个与之关联的表示 $F_M\colon \mathsf{A} \to \Bbbk$-模，其在对象上的定义为 $F_M(i) = iM$，在态射上的定义为 $F_M(a)(m) = am$，其中 $a \in \mathsf{A}(i,j) = {}_jA_i$ 且 $m \in iM$。

2.2. 良对。

定义 2.2.1. 设 A 是一个局部含幺 $\Bbbk$-超代数，其指定幂等元集为 I。设 $I \subseteq a \subseteq A_{\bar{0}}$ 是 A 的一个偶子代数。若对所有 $i, j \in I$，都存在一个齐次 $\Bbbk$-基 ${}_j\mathsf{B}_i$，使得 ${}_jA_i$ 上的 ${}_j\mathfrak{b}_i := {}_j\mathsf{B}_i \cap a$ 构成 ${}_jai$ 的 $\Bbbk$-基，且 $i \in {}_i\mathfrak{b}_i \subseteq {}_i\mathsf{B}_i$，则称 $(A,a)_I$ 为良对。

我们指出，这一定义的良对比 [31, §2A], 中的定义略强，后者只要求 A/a 和 a 是 $\Bbbk$-自由的。我们的定义还增加了 $a/_{\Bbbk}I$ 也是 $\Bbbk$-自由的这一假设。作者所知的所有有趣例子都满足这一附加要求。

特别地，注意到如果 $(A,a)_I$ 是一个良对，那么 a 是一个带有指定幂等元集 I 的局部含幺代数。在处理良对时，我们总是假定已经固定了上文所述的一个基 $\mathsf{B} = \bigsqcup_{i,j\in I} {}_j\mathsf{B}_i$，以及 $\mathfrak{b} = \bigsqcup_{i,j\in I} {}_j\mathfrak{b}_i$。此外，我们还在 B 上固定某个全序 $<$。记 $A^{(1)} = A$ 和 $A^{(z)} = a$ 为 $z > 1$ 将会很方便。

如果 $(A,a)_I$ 和 $(A,a')_I$ 是良对，当 $(a,a')_I$ 是一个良对时，我们记 $(A,a')_I \subseteq (A,a)_I$。特别地，对于任意良对 $(A,a)_I$，我们总有良对链 $(A, {}_{\Bbbk}I)_I \subseteq (A,a)_I \subseteq (A, A_{\bar{0}})_I$。

2.3. 组合学。

2.3.1. 计数与集合。我们使用广义二项式系数：

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \in \mathbb{S},$$

对于任意 $n \in \mathbb{Z}$、$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。给定满足 $a \leq b$ 的整数 a、b，令 $[a,b] = \{a, a+1, \dots, b\}$。给定集合 X 和 Y，我们用 X^Y 表示由 X 中的元素组成、以 Y 为索引的元组集合。

2.3.2. 分拆。对于 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^t$，我们定义

$$|\mathbf{x}| = t, \qquad \|\mathbf{x}\| = \sum_{k=1}^{t} x_k, \qquad \mathbf{x}! = \prod_{k=1}^{t} (x_k!).$$

Set

$$\Omega(n,d) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid \|\mathbf{x}\| = d\} \qquad \text{and} \qquad \Omega = \bigsqcup_{n,d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Omega(n,d).$$

2.3.3. 带色分拆。对于 $n, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和集合 I，d 的一个 n 部分 I 色分拆是由一个分拆 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega(n, d)$ 以及一个元组 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n) \in I^n$ 组成的数据，记作 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} = (i^{(x_1)}{}_1, \dots, i^{(x_n)}{}_n)$。对于两个这样的 I 色分拆，只要 $i_t = j_t$ 在 $x_t \neq 0$ 时成立，我们就定义 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} = \mathbf{j}^{(\mathbf{x})}$；也就是说，分拆中零分量的着色无关紧要。定义

$$\Omega_I(n,d) = \{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} = (i_1^{(x_1)}, \dots, i_n^{(x_n)}) \mid \mathbf{i} \in I^n, \mathbf{x} \in \Omega(n,d)\} \qquad \text{and} \qquad \Omega_I = \bigsqcup_{n,d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Omega_I(n,d).$$

我们将 Ω_I 视为关于拼接运算的幺半群，其单位元为空分拆 $() \in \Omega_I(0,0)$。我们通过在 Ω_I 上添加以下关系，定义约化的 I-带色分拆幺半群 $\widehat{\Omega}_I$：对所有 $i \in I$，$() = (i^{(0)})$。换言之，只要删除所有零分量后两个带色分拆相同，$\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} = \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}$ 就属于 $\widehat{\Omega}_I$。记作

$$\widehat{\Omega}_I(n,d) = \{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} = (i_1^{(x_1)}, \dots, i_n^{(x_n)}) \mid \mathbf{i} \in I^n, \mathbf{x} \in \Omega(n,d)\} \subseteq \widehat{\Omega}_I.$$

例 2.3.1. 若 $I = \{\alpha, \beta\}$，则 $\alpha^{(2)}\beta^{(0)}\beta^{(3)} = \alpha^{(2)}\alpha^{(0)}\beta^{(3)}$ 同时属于 Ω_I 和 $\widehat{\Omega}_I$，而 $\alpha^{(2)}\beta^{(0)}\beta^{(3)} = \alpha^{(2)}\beta^{(3)}$ 属于 $\widehat{\Omega}_I$，但不属于 Ω_I。

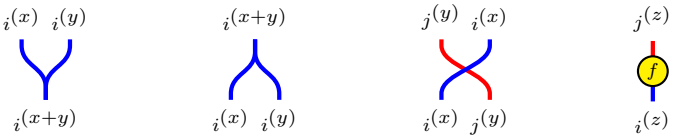
回忆一下，d 的分拆（分别地，多重分拆）是指各部分按弱递减排列的 d 的分拆（分别地，总和为 d的一组分拆）。从第 11 节开始，我们将介绍种类繁多的分拆和多重分拆。届时再作介绍。

3. The $\mathbf{Web}_I^{A,a}$ category

3.1. $\mathsf{Web}^{A,a}_I$ 范畴的定义。设 $(A,a)_I$ 是一个良对。

定义 3.1.1。令 $\mathsf{Web}^{A,a}_I$ 为如下定义的严格幺半 $\Bbbk$-线性超范畴。其对象类 $\mathrm{Ob}(\mathsf{Web}^{A,a}_I) = \widehat{\Omega}_I$。$\mathsf{Web}^{A,a}_I$ 上的对象幺半结构继承自幺半群 $\widehat{\Omega}_I$；特别地，$\mathsf{Web}^{A,a}_I$ 的对象由对象 $i^{(x)}$（其中 $i \in I$，$x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）幺半生成，且 $i^{(0)}$ 等同于单位对象 $\mathbb{I} \in \mathsf{Web}^{A,a}_I$，对所有 $i \in I$均成立。

$\mathsf{Web}^{A,a}_I$ 的生成态射由以下图给出：



(3.1.1)

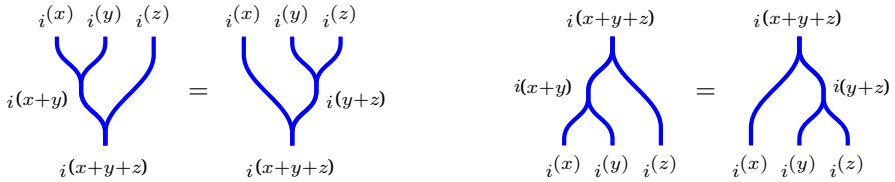
对于 $i, j \in I$, $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $z \in \mathbb{Z}_{>0}$, $f \in jA^{(z)}i$，其中图表按从下到上的顺序读取。我们将这些态射分别称为“分裂”“合并”“交叉”和“贴片”。分裂、合并和交叉的奇偶性为 $\bar{0}$，而 f 贴片的奇偶性为 $\bar{f}$。我们称标记为 $i^{(x)}$、颜色为 i、厚度为 x 的线股。厚度为 1 的线称为细股，否则称为粗股。回想一下

对于 $z>1$，有 $A^{(1)}=A$ 和 $A^{(z)}=a$。因此，粗股只能用偶子代数 a 中的贴片进行装饰，而细股则可以用 A 中的任意贴片进行装饰。

下文将采用以下约定：

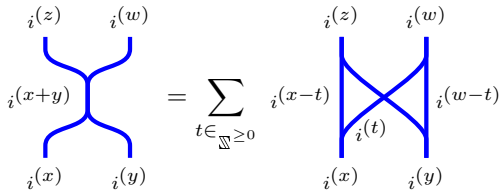
- 厚度为 0 的线股（及其上的任何贴片）均应删除；
- 包含负厚度线股的图表视为零。

对 Web 中态射施加的关系$^{A,\ a}_{I}$ 在 (3.1.2) - (3.1.12) 中给出：Web结合律。对于所有 $i\in I$、x、y、$z\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$：



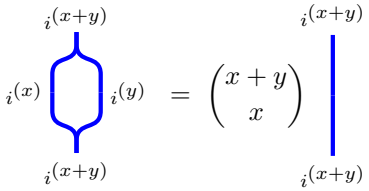
(3.1.2)

合并-拆分关系。对于所有满足 $x+y=z+w$ 的 $x,y,z,w\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$：



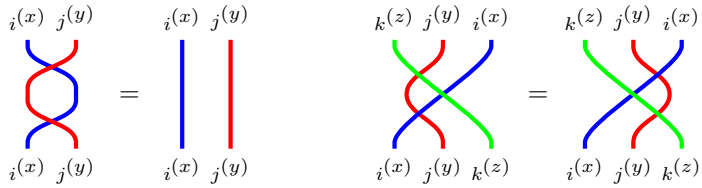
(3.1.3)

孔洞关系。对于所有 $x,y\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$：



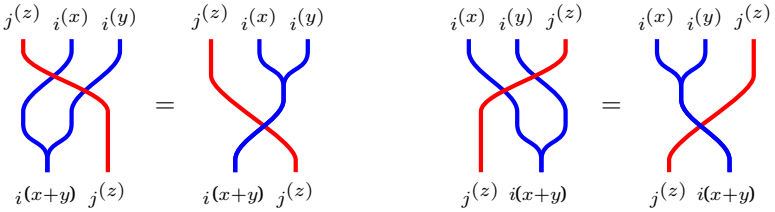
(3.1.4)

Coxeter关系。对于所有互不相同的 $i,j,k\in I$和 $x,y,z\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$：



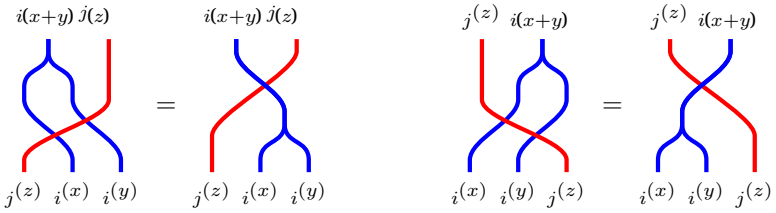
(3.1.5)

拆分-交织关系。对于所有互不相同的 i、$j\in I$ 和 x、y、$z\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$：



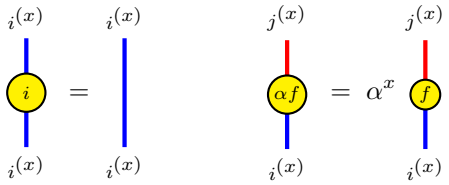
(3.1.6)

合并交织关系。对于所有互不相同的 i、$j \in I$ 和 x、y、$z \in \mathbb{N}^{\geq 0}$:

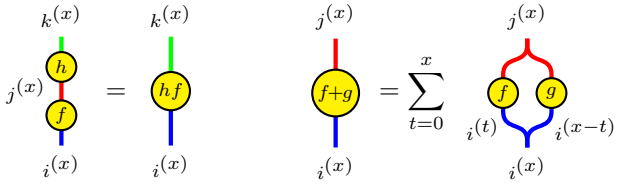


(3.1.7)

Coupon 关系。对于所有 $i, j, k \in I$, $x \in \mathbb{N}^{\geq 0}$, $f, g \in jA^{(x)}i$, $h \in kA^{(x)}j$, $\alpha \in \mathbb{K}$:

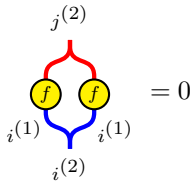


(3.1.8)



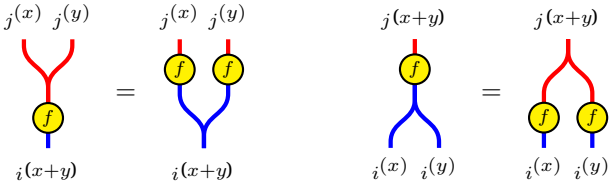
(3.1.9)

奇数节孔消去关系。对于所有 $i, j \in I$, $f \in jA_{\bar{1}}i$:



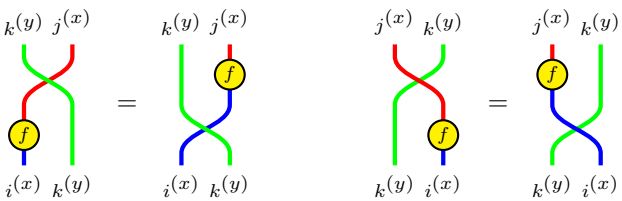
$= 0$ (3.1.10)

A-分裂/合并关系。对于所有 $i, j \in I, x, y \in \mathbb{N}^{\geq 0}, f \in jA^{(x+y)}i$:



(3.1.11)

A-交织关系。对于所有 $i, j, k \in I, x, y \in \mathbb{N}^{\geq 0}, f \in jA^{(x)}i$:



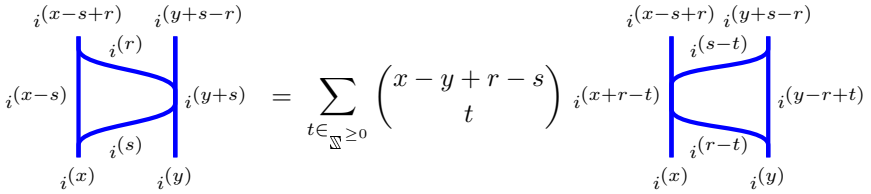
(3.1.12)

注 3.1.2。为使表述尽可能简洁，关系 (3.1.5) 至 (3.1.7) 在 $\mathrm{Web}^{A,\ I\ a}$ 中仅针对颜色互不相同的组合施加。推论 4.2.7 将证明，这些关系实际上对任意颜色组合都在 $\mathrm{Web}^{A,\ I\ a}$ 中成立。

注 3.1.3。在常见情形下，$I=\{1\}$（因此 A 也是引言中所述的含幺代数），这些关系并不像看起来那么繁复。$\mathrm{Web}^{A,\ \{1\}\ a}$ 中的所有线股都将是单调着色的，因此关系 (3.1.5) 至 (3.1.7) 中规定不同着色线股的部分不会产生任何贡献。不过，正如注 3.1.2 所述，这些关系的单调版本在此范畴中仍然成立。

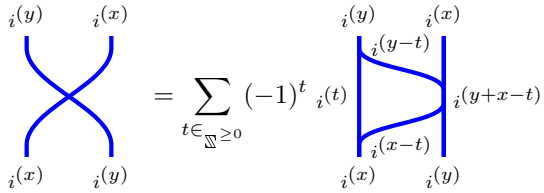
3.2. $\mathrm{Web}^{A,\ I\ a}$ 的另一种表示。第 4 节将说明，$\mathrm{Web}^{A,\ I\ a}$ 存在一种稍作修改的表示，如下所示。我们可以按照定义 3.1.1 定义 $\mathrm{Web}^{A,\ I\ a}$，但将关系 (3.1.3) 和 (3.1.4) 替换为以下两个关系：

梯级交换。对所有 $i\in I, x,y,r,s\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$：



(3.2.1)

单调交叉关系。对所有 $i\in I, x,y\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$：



(3.2.2)

I在某些情形下，这两种表示中的一种或另一种可能会更有用 l.

注 3.2.1。再次，在 $I=\{1\}$ 的情形下，我们可以使用 (3.2.2) 来定义 $\mathrm{Web}^{A,\ \{1\}\ a}$ 中唯一的单调交叉态射，将其表示为分裂态射和交叉态射，因此在我们的表示中不需要任何交叉生成元。

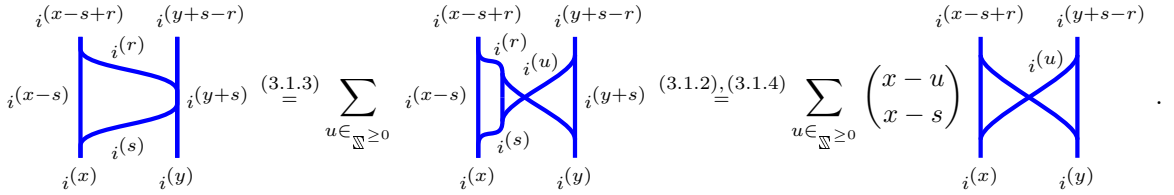
4. Implied relations in $\mathrm{Web}^{A,\ I\ a}$

本节将确立 $\mathrm{Web}^{A,\ I\ a}$ 中若干有用的关系，并证明第 3.2 节中的断言，即 $\mathrm{Web}^{A,\ I\ a}$ 具有另一种表示。

4.1 表示的等价性。为清楚起见，在本节中，我们将用 $\mathrm{Web}^{A,\ I\ a}$ 表示定义 3.1.1 中定义的范畴，并用 $\mathrm{Web}^{A,\ I\ a}_{\mathrm{alt}}$ 表示第 3.2 节中定义的范畴。推论 4.1.3 将证明这两个范畴是同构的。

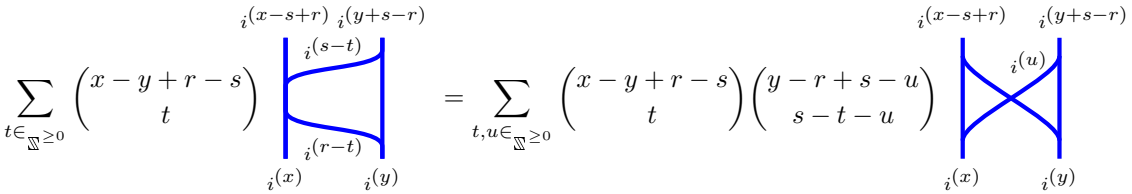
引理 4.1.1. 关系 (3.2.1) 和 (3.2.2) 在 $\mathrm{Web}^{A,\ I\ a}$ 中成立。

证明. 我们有：



$$\overset{(3.1.3)}{=} \sum_{u\in_{\mathbb{N}\geq 0}} \overset{(3.1.2),(3.1.4)}{=} \sum_{u\in_{\mathbb{N}\geq 0}} \binom{x-u}{x-s} \quad . \tag{4.1.1}$$

另一方面，通过与（4.1.1）类似的计算，我们得到：

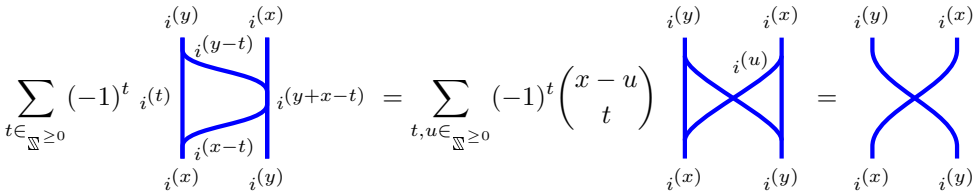


$$= \sum_{t,u\in_{\mathbb{N}\geq 0}} \binom{x-y+r-s}{t}\binom{y-r+s-u}{s-t-u} \quad .$$

但是，根据楚-范德蒙恒等式，我们得到

$$\binom{x-u}{x-s} = \sum_{u\in_{\mathbb{N}\geq 0}} \binom{x-y+r-s}{t}\binom{y-r+s-u}{s-t-u},$$

因此（3.2.1）成立。此外，我们有

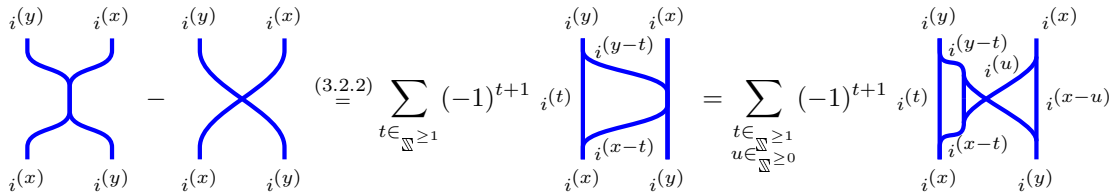


$$= \sum_{t,u\in_{\mathbb{N}\geq 0}} (-1)^t \binom{x-u}{t}$$

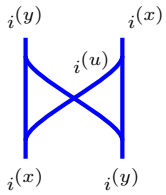
其中，第一个等式可通过与 (4.1.1) 类似的计算得出，第二个等式则由二项式定理得出，因为 $\sum_{t\in_{\mathbb{N}\geq 0}} (-1)^t \binom{x-u}{t} = \delta_{x,\,u}$。因此，(3.2.2) 也成立。□

引理 4.1.2。关系 (3.1.3) 和 (3.1.4) 在 $\mathrm{Web}^{A,\,I}{}^{a}{}_{,\,\mathrm{alt}}$ 中成立。

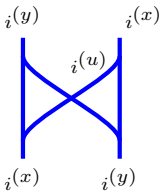
证明。首先，我们注意到 (3.1.4) 可视为 (3.2.1) 中的特殊情形 $y = 0$，因此现在着重证明 (3.1.3)。我们对 $n := x + y$ 使用归纳法，基础情形 $n = 0$ 显然成立。固定 n，并假设该命题对所有 $x' + y' < n$ 都成立。我们先考虑 $y = z$ 的情形。我们有



$$\overset{(3.1.2),(3.1.4)}{=}\sum_{\substack{t\in_{\mathbb{Z}\geq 1}\\ u\in_{\mathbb{Z}\geq 0}}}(-1)^{t+1}\binom{x-u}{t}$$



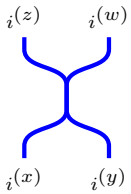
$$=\sum_{u=0}^{x-1}$$



,

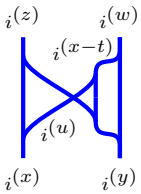
其中，第二个等式由归纳假设得出，第四个等式则由以下事实得出：根据二项式定理，对所有 $u\leq x$，都有 $\sum_{t\in_{\mathbb{Z}\geq 1}}(-1)^{t+1}\binom{x-u}{t}=-\delta_{x,\ u}+1$。这就完成了 $y=z$ 情形下的归纳步骤。

Now 假设 $y>z$（情形 $z>y$ 可以用类似的方法处理）。我们有 e

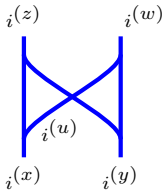


$$\overset{(3.2.1)}{=}\sum_{t\in_{\mathbb{Z}\geq 0}}\binom{z-y}{t}$$

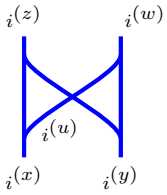
$$=\sum_{t,u\in_{\mathbb{Z}\geq 0}}\binom{y+z}{t}$$



$$\overset{(3.1.2),(3.1.4)}{=}\sum_{t,u\in_{\mathbb{Z}\geq 0}}\binom{z-y}{t}\binom{w-u}{w-x+t}$$



$$=\sum_{u\in_{\mathbb{Z}\geq 0}}$$



,

其中，第二个等式由归纳假设得出，第四个等式则由指标移位公式（见 [22, (6.69)]）得出。至此，归纳步骤和证明均告完成。□

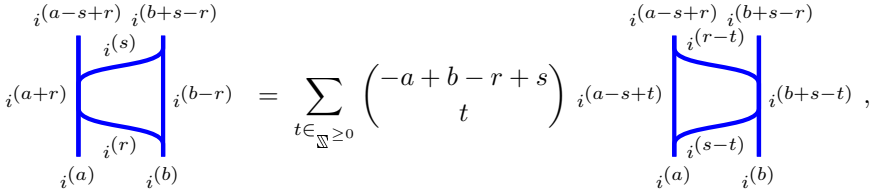
引理 4.1.1 和 4.1.2 一起意味着

推论 4.1.3。存在一个同构 $\mathsf{Web}^{A,\ _I{}^a}\cong\mathsf{Web}^{A,\ _I{}^a}$，替代，它在对象和图上的作用为单位元。

从此处开始，我们将使用定义 3.1.1 中定义的 $\mathsf{Web}^{A,\ _I{}^a}$，但也会根据引理 4.1.1 自由使用关系 (3.2.1) 和 (3.2.2)。

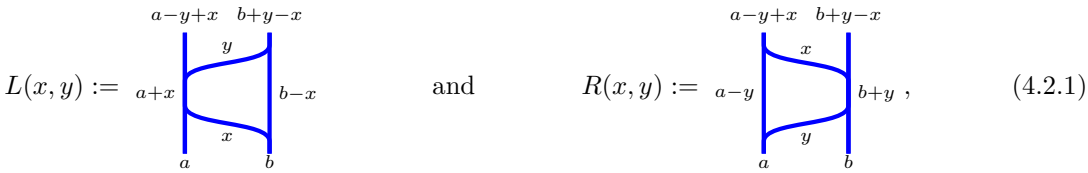
4.2. Web 中的单调关系$^{A,\ _I{}^a}$。本小节中的陈述都涉及单调图（其中所有线股都由相同的 i 着色，适用于某个 $i\in I$），因此为节省证明篇幅，我们常用 x 代替 $i^{(x)}$，等等。由于幂等元和贴片在这里不起作用，本节中的关系与先前研究中出现的关系类似；例如，量子情形下的 [11, 35, 37, 40]，以及非量子情形下的 [8]。特别是，这里出现的大多数结果都可以从现有文献中推导出来，但我们仍选择提供完整证明，以供读者参考。

引理 4.2.1。以下等式在 $\mathsf{Web}^{A,\ a}_{\ I}$ 中成立：



对所有 $i \in I$, $a, b, r, s \in \mathbb{N}_{\geq 0}$。

证明。回想一下，如本小节引言中所述，在图中我们用 x 代替 $i^{(x)}$。为节省篇幅，我们写作



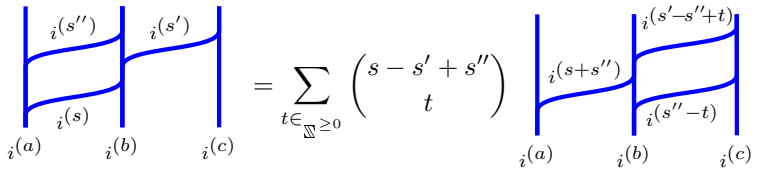
(4.2.1)

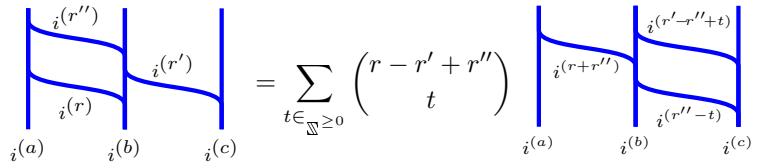
对于任意 $x, y \in \mathbb{N}_{\geq 0}$。我们对 $n = r + s$ 使用归纳法证明引理的结论。对于 $n = 0$, 1，该结论显然成立，因此令 $n \geq 2$ 并假设该结论对所有 $n' < n$ 都成立。我们有

$$\begin{aligned}
L(r,s) &\overset{(3.2.1)}{=} R(r,s) - \sum_{w\in\mathbb{N}_{>0}} \binom{a-b+r-s}{w} L(r-w, s-w) \\
&= R(r,s) - \sum_{w\in\mathbb{N}_{>0}} \binom{a-b+r-s}{w} \sum_{u\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \binom{-a+b-r+s}{u} R(r-w-u, s-w-u) \\
&= R(r,s) - \sum_{t\in\mathbb{N}_{>0}} \sum_{w=1}^{t} \binom{a-b+r-s}{w} \binom{-a+b-r+s}{t-w} R(r-t, s-t) \\
&= R(r,s) + \sum_{t\in\mathbb{N}_{>0}} \binom{-a+b-r+s}{t} R(r-t, s-t),
\end{aligned}$$

其中第二个等式由归纳假设得出，最后一个等式由 Chu–Vandermonde 恒等式得出。证明至此完成。□

引理 4.2.2。在 $\mathsf{Web}^{A,\ a}_{\ I}$ 中，以下等式成立：





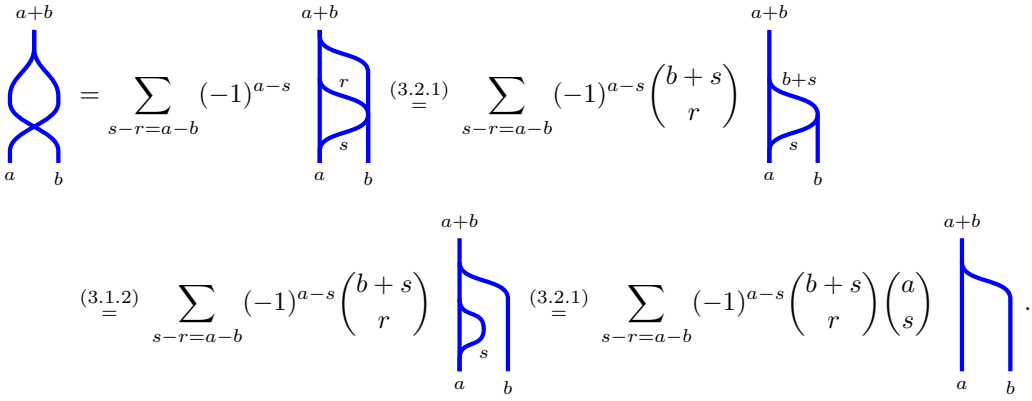
对所有 $i \in I$, $a, b, c, r, r', r'', s, s', s'' \in \mathbb{N}_{\geq 0}$。

证明。 [18, 引理 2.9], 中给出的证明适用于网范畴的情形，其中关系 (3.1.2) 和 (3.2.1) 成立；该证明可直接应用于我们的网$^{A,\ a}_{\ I}$ 范畴。□

引理 4.2.3。对于所有 $i \in I$, $a,b \in \mathbb{N}^{\geq 0}$，在网范畴 $\mathsf{Web}^{A,\ a}_{\ I}$ 中有以下等式：



证明。我们证明第一个等式。第二个类似。我们有

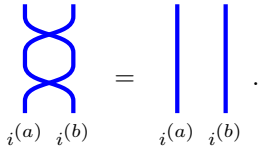


考虑最后一项中的系数，并使用代换 $t := a - s$，我们可以写成：

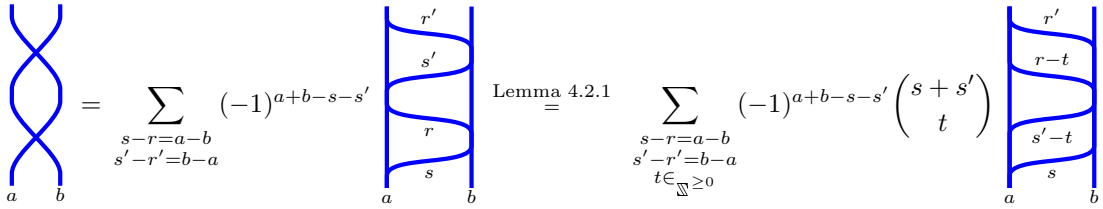
$$\sum_{s-r=a-b}(-1)^{a-s}\binom{b+s}{r}\binom{a}{s} = \sum_{t=0}^{a}(-1)^{t}\binom{b+a-t}{a}\binom{a}{t} = 1.$$

最后一个等式由应用欧拉有限差分定理得出（参见 [22, (10.13)]）。证明至此完成。□

引理 4.2.4。对于所有 $i \in I$, $a,b \in \mathbb{N}^{\geq 0}$，下式在 $\mathsf{Web}^{A,\ a}_{\ I}$ 中成立：



证明。我们有



$$\overset{(3.1.4)}{=} \sum_{\substack{s-r=a-b\\ s'-r'=b-a\\ t\in_{\mathbb{Z}^{\geq 0}}}} (-1)^{a+b-s-s'} \binom{s+s'-t}{s'+a-b}\binom{s+s'-t}{s}\binom{s+s'}{t} R(s+s'-t, s+s'-t),$$

其中最后一个等式用到了 $s+s'=r+r'$ 和 $r'=s'-a+b$ 这一事实，以及 (4.2.1) 中的记号。令 $m:=s+s'-t$, $k:=s+s'+a-b$, $c:=b-a$，我们可以将其改写为

$$\sum_{k,m\in_{\mathbb{Z}^{\geq 0}}} (-1)^k \binom{c+k}{m} \sum_{s=0}^{k} \binom{m}{k-s}\binom{m}{s} R(m,m). \tag{4.2.2}$$

现在我们可以利用二项式恒等式

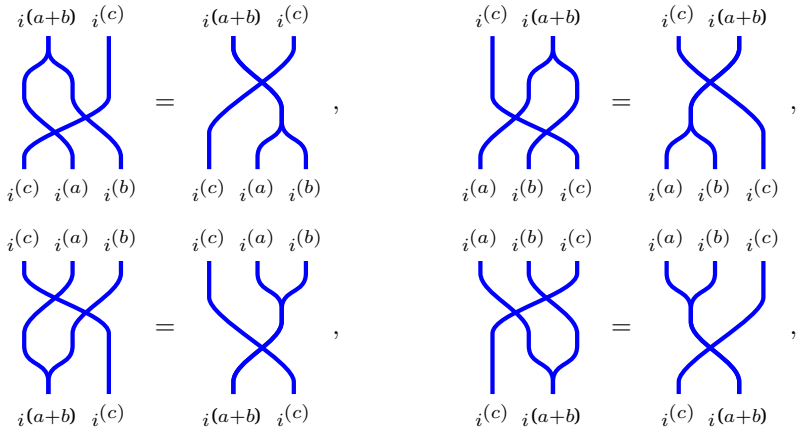
$$\binom{c+k}{m} = \sum_{u=0}^{m} \binom{c}{m-u}\binom{k}{u} \qquad \text{and} \qquad \sum_{s=0}^{k} \binom{m}{k-s}\binom{m}{s} = \binom{2m}{k}$$

将 (4.2.2) 改写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in_{\mathbb{Z}^{\geq 0}}} \sum_{u=0}^{m} \binom{c}{m-u} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{2m}{k}\binom{k}{u} R(m,m)\\
&\qquad = \sum_{m\in_{\mathbb{Z}^{\geq 0}}} \sum_{u=0}^{m} \binom{c}{m-u} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{2m}{u}\binom{2m-u}{k-u} R(m,m)\\
&\qquad = \sum_{m\in_{\mathbb{Z}^{\geq 0}}} \sum_{u=0}^{m} \binom{2m}{u}\binom{c}{m-u} \sum_{\ell=0}^{2m-u} (-1)^{(\ell+u)} \binom{2m-u}{\ell} R(m,m)\\
&\qquad = R(0,0),
\end{aligned}$$

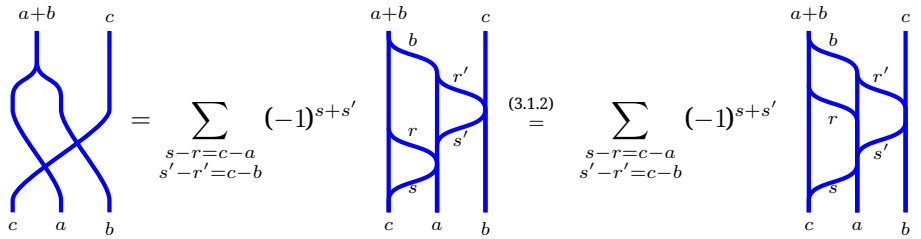
因为二项式定理蕴含 $\sum_{\ell=0}^{2m-u} (-1)^\ell \binom{2m-u}{\ell} = 0$，只要 $m>0$。 □

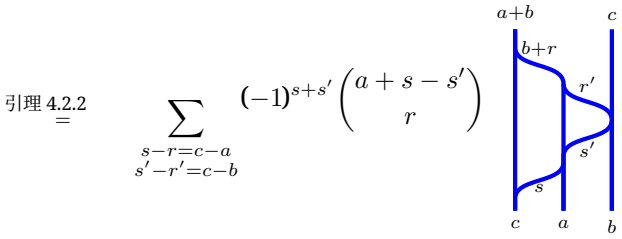
引理 4.2.5. 对所有 $i\in I$, $a,b,c\in_{\mathbb{Z}^{\geq 0}}$，以下等式在 $\mathsf{Web}^{A}_{,I}{}^{a}$ 中成立：

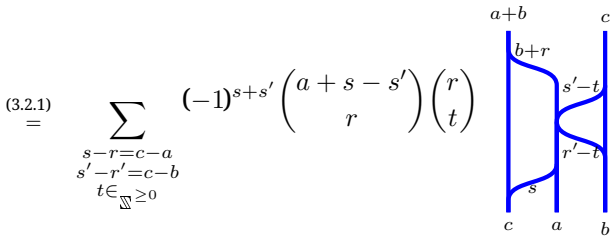


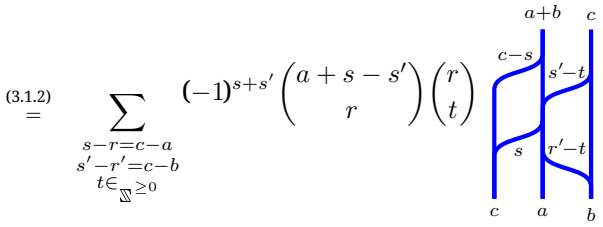
对于所有 $a,b,c\in_{\mathbb{Z}^{\geq 0}}$。

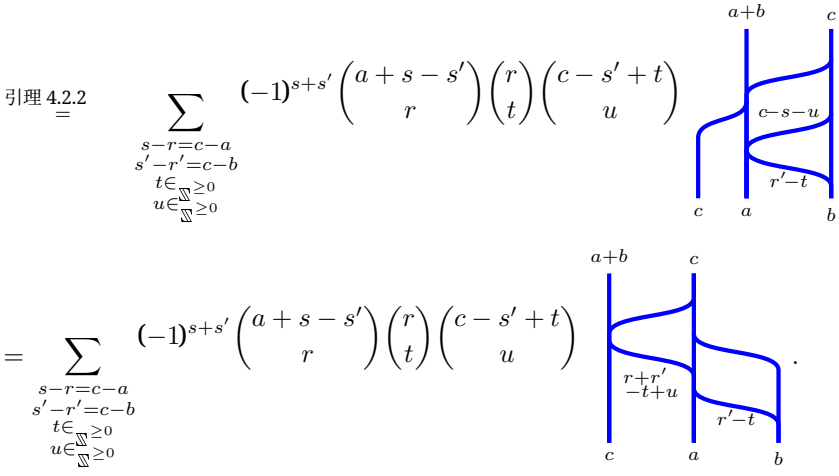
证明。我们证明第一个等式。其余等式可通过类似的论证证明。我们有



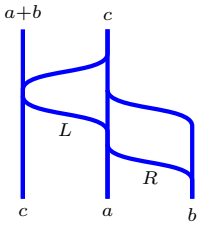








现在，固定 $L,R \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$，我们考虑上面总和中的系数 $\kappa(L,R)$。



在上面的总和中。利用代换 $A = L - R - a + c - s$, $B = c - s'$，我们得到

$$\begin{aligned}\kappa(L,R) &= (-1)^{L+R+a}\sum_{B=0}^{b-R}\sum_{A=0}^{b-R}(-1)^{A+B}\binom{L-R-A+B}{B}\binom{L-R-A}{b-R-B}\binom{b-R}{A}\\ &= \sum_{B=0}^{b-R}\sum_{A=0}^{b-R}(-1)^{a+A+B}\binom{b-R}{B}\binom{L-R-A+B}{b-R}\binom{b-R}{A}\\ &= (-1)^{L+R+a}\sum_{B=0}^{b-R}(-1)^{B}\binom{b-R}{B}\sum_{A=0}^{b-R}(-1)^{A}\binom{L-R-A+B}{b-R}\binom{b-R}{A}.\end{aligned}$$

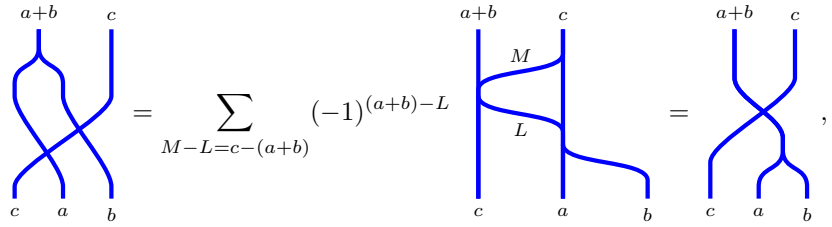
应用欧拉有限差分定理（见 [22, (10.13)]）可得

$$\sum_{A=0}^{b-R}(-1)^{A}\binom{L-R-A+B}{b-R}\binom{b-R}{A} = 1,$$

so

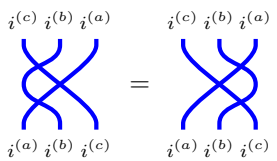
$$\kappa(L,R) = (-1)^{L+R+a}\sum_{B=0}^{b-R}(-1)^{B}\binom{b-R}{B} = (-1)^{L+a+b}\delta_{b,R},$$

根据二项式定理。因此，我们有



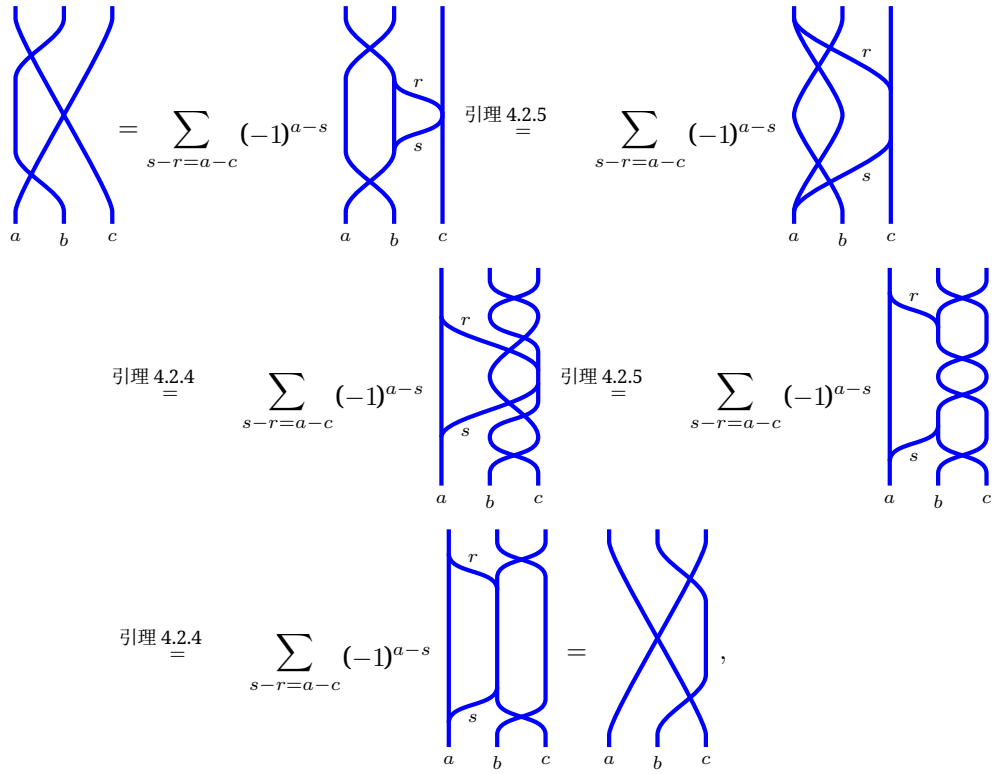
证明完毕。 □

引理 4.2.6。$\mathrm{Web}^{A}_{I}{}^{a}$ 中的单调交叉满足辫关系：



对于所有 $a,b,c \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$。

证明。我们有



如所期望的。 □

我们可以用以下推论概括引理 4.2.4 至 4.2.6：

推论 4.2.7. 关系 (3.1.5) 至 (3.1.7) 对任意 $i,j,k,\ell,m \in I$, $x,y,z \in \mathbb{N}^{\geq 0}$ 均成立。

证明。由引理 4.2.4 至 4.2.6 可立即得出，(3.1.6)、引理 4.2.5 以及 (3.1.5) 的左侧均成立。当 $i=j=k$ 时，由引理 4.2.6 可知 (3.1.5) 的右侧成立。要证明 $|\{i,j,k\}|=2$ 时 (3.1.5) 的右侧成立，我们注意到，任何同色交叉都可通过 (3.2.2) 改写为分裂与合并的组合；随后可使用 (3.1.6) 和 (3.1.7)，使这些分裂与合并穿过异色线股，再将其改写为同色交叉，从而得到所需结果。□

5. The defining representation

5.1. 扭转映射。令 $M,N \in \mathbb{K}$-模。回顾一下，为简便起见，我们将 $M \otimes N$ 写作 $M \otimes_{\mathbb{K}} N$。我们有扭转映射，

$$\tau_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M, \tag{5.1.1}$$

定义为

$$\tau_{M,N}(m \otimes n) = (-1)^{\overline{m}\cdot\overline{n}} n \otimes m,$$

对于齐次的 $m \in M$、 $n \in N$。张量运算和扭结使 $\mathbb{K}$-sMod 成为一个对称幺半超范畴。

We 在 $M^{\otimes d}$ 上具有对称群 $\mathfrak{S}_d$ 的右作用，该作用由带符号置换给出：

$$(m_1 \otimes \cdots \otimes m_d).\tau = (-1)^{\langle \tau;(m_1,\ldots,m_d)\rangle} m_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\tau(d)}$$

其中

$$\langle \tau;(m_1,\ldots,m_d)\rangle := \sum_{\substack{1\le r<s\le d\\ \tau(r)>\tau(s)}} \overline{m}_r \overline{m}_s.$$

5.2. 对称幂。设 $M \in {}_{\mathbb{K}}$-sMod。张量超代数 $M^\bullet = \bigoplus_{x=0}^\infty M^{\otimes x}$ 在乘积 $\otimes$下是一个 ${}_{\mathbb{K}}$-超代数。设 $J \subseteq M^\bullet$ 为由形如以下元素生成的理想

$$m_1 \otimes m_2 - (-1)^{\overline{m}_1\overline{m}_2} m_2 \otimes m_1, \qquad \text{and} \qquad m_3 \otimes m_3,$$

遍历所有齐次的 m_1、$m_2 \in M$ 以及所有 $m_3 \in M_{\bar{1}}$。对称超代数为 $S^\bullet M := M^\bullet/J$。令 σ: $M^\bullet \to S^\bullet M$ 表示 ${}_{\mathbb{K}}$-超模的典范商映射。对于 $x \in \mathbb{S}^{\ge 0}$，记 ${}_{\mathbb{K}}$-超模为 $S^x M := \sigma(M^{\otimes x})$，因此 $S^\bullet M = \bigoplus_{x=0}^\infty S^x M$。特别注意，$S^1 M \cong M$ 和 $S^0 M \cong \mathbb{K}$.

对称超双代数 $S^\bullet M$ 具有结合乘积 $\nabla\colon S^\bullet M \otimes S^\bullet M \to S^\bullet M$、余结合余乘法 $\Delta\colon S^\bullet M \to S^\bullet M \otimes S^\bullet M$，以及对所有 $x \in \mathbb{S}^{\ge 0}$ 的投影 $p_x\colon S^\bullet M \to S^x M$ 和嵌入 $\iota_x\colon S^x M \to S^\bullet M$。

5.2.1. 分裂映射。我们定义分裂映射 ${}_M\mathrm{spl}^{x\ y}_{x+y}\colon S^{x+y}M \to S^x M \otimes S^y M$ b y

$${}_M\mathrm{spl}^{x,y}_{x+y} = (p_x \otimes p_y) \circ \Delta \circ \iota_{x+y}.$$

明确地说，

$${}_M\mathrm{spl}^{x,y}_{x+y}(m_1 \cdots m_{x+y}) = \sum_{\substack{T=\{t_1<\cdots<t_x\}\\ U=\{u_1<\cdots<u_y\}\\ T\cup U=\{1,\ldots,x+y\}}} (-1)^{\varepsilon(T,U)} m_{t_1}\cdots m_{t_x} \otimes m_{u_1}\cdots m_{u_y}, \tag{5.2.1}$$

对所有齐次的 $m_1,\ldots,m_{x+y} \in M$，其中 $\varepsilon(T,U) \in {}_{\mathbb{S}}2$ 定义为

$$\varepsilon(T,U) = \#\{(t,u) \in T\times U \mid t>u,\ \overline{m}_t = \overline{m}_u = \bar{1}\}.$$

5.2.2. 合 并映射。类似地，我们可以定义合并映射 ${}_M\mathrm{mer}^{x+y}_{x\ ,y}\colon S^x M \otimes S^x M \to S^{x+y}M$ 为

$${}_M\mathrm{mer}^{x+y}_{x,y} := p_{x+y} \circ \nabla \circ (\iota_x \otimes \iota_y).$$

明确地说，

$${}_M\mathrm{mer}^{x+y}_{x,y}(m_1\cdots m_x \otimes m'_1\cdots m'_y) = m_1\cdots m_x m'_1\cdots m'_y, \tag{5.2.2}$$

对所有 m_1、…、m_x、m'_1、…、$m'_y \in M$。

5.3. 超代数 $M_n(A)$ 与李超代数 $\mathfrak{gl}_n(A)$。固定 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$。设 A 是一个以 I 为指定幂等元集的局部幺 k-超代数。矩阵代数 $M_n(A) = M_n(\mathbb{K}) \otimes A$ 也自然地是一个 k-超代数。对于 r、$s \in [1,n]$、$f \in A$，令 $E^f_{r\ ,s} := E_{r,s} \otimes f$ 为矩阵，其中 (r,s) 项为 f，其余各项均为零。对于齐次的 $f \in A$，有 $E^f_{r,s} = \overline{f}$。我们将 $\mathfrak{gl}_n(A)$ 记作 $M_n(A)$，并将其视为使用超交换子括号的李超代数。也就是说，$\mathfrak{gl}_n(A) = M_n(A)$ 是 $\mathbb{K}$-超模，并且

$$[E^f_{r,s}, E^{f'}_{r',s'}] = \delta_{s,r'} E^{ff'}_{r,s'} - (-1)^{\bar{f}\bar{f}'}\delta_{s',r} E^{f'f}_{r',s}$$

对所有 r、s、r'、$s' \in [1,n]$ 以及齐次的 f、$f' \in A$。我们将 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 记作 $\mathfrak{gl}_n(A)$ 的泛包络超代数。

当 I 是有限集时， A 是含幺的。在这种情况下，令 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_n$ 为由 $\left\{E^1_{r,r}\mid 1\le r\le n\right\}$ 生成的 $\mathfrak{gl}_n(A)$ 的 $\mathbb{K}$-子模。令 $X(T_n)=\bigoplus_{r=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_r$ 表示由生成元 ε_1、……、ε_n 生成的自由阿贝尔群，并令

$$\Lambda_n=\left\{\lambda=\sum_{i=1}^n \lambda_i\varepsilon_i\in X(T_n)\mid \lambda_i\ge 0 \text{ for } i=1,\dots,n\right\}.$$

给定一个左 $\mathfrak{gl}_n(A)$-模 M，若向量 $u\in M$ 的权为 $\lambda=\sum_{k=1}^n\lambda_i\varepsilon_i\in X(T_n)$，则有 $E^1_{i,\ i}u=\lambda_i u$ 对所有 $1\le i\le n$均成立。 M 中所有权为 λ 的向量构成 M的 λ 权空间。这些定义也有显然的右模版本。

5.4. $\mathfrak{gl}_n(A)$的带色对称幂模。对于 $i\in I$，记作 ${}_iV=\bigoplus_{j\in I}iAj\subseteq A$，并且${}_iV_n=({}_iV)^{\oplus n}$。对于 $f\in {}_iV, r\in[1,n]$，我们将用 v_r^f表示 ${}_iV_n$的第 r个分量中的 f。

$\mathfrak{gl}_n(A)$在 ${}_iV_n$ 上有一个右作用，其作用方式是对行向量进行右矩阵乘法，因此

$$v_r^f\cdot E^g_{s,t}=\delta_{r,s}v_t^{fg}$$

对所有 $r,s,t\in[1,n]$, $f\in {}_iV$, $g\in A$。由 $\Delta(u)=1\otimes u+u\otimes 1$ for$u\in\mathfrak{gl}_n(A)$ 给出的 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 上的余乘法，使右 $\mathfrak{gl}_n(A)$-超模范畴 mod-$\mathfrak{gl}_n(A)$ 成为一个幺半超范畴。具体而言，对于所有 $M,N\in$ mod-$\mathfrak{gl}_n(A)$， $\mathfrak{gl}_n(A)$ 在 $M\otimes N$ 上的作用在齐次元素上定义为

$$(m\otimes n)\cdot u=(-1)^{\overline{u}\,\overline{n}}mu\otimes n+m\otimes nu.$$

设 $x\in \mathbb{Z}_{>0}$。我们将 x 次对称幂 $S^x({}_iV_n)$ 记为 $S_i^xV_n$。然后，通过 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 的余乘法， $S_i^xV_n\in$ mod-$\mathfrak{gl}_n(A)$的作用在齐次元素上定义为

$$v_{r_1}^{f_1}\cdots v_{r_x}^{f_x}\cdot E^g_{s,t}=\sum_{u=1}^x(-1)^{\bar g(\bar f_{u+1}+\cdots+\bar f_x)}\delta_{r_us}v_{r_1}^{f_1}\cdots v_{r_{u-1}}^{f_{u-1}}v_t^{f_ug}v_{u+1}^{f_{u+1}}\cdots v_x^{f_x}.$$

对于所有 $f\in jA^{(x)}i$，我们有一个 $\mathbb{K}$-线性映射 $L_x^f\colon S_i^xV_n\to S_j^xV_n$，其定义为

$$L_x^f(v_{r_1}^{g_1}\cdots v_{r_x}^{g_x})=v_{r_1}^{fg_1}\cdots v_{r_x}^{fg_x}\tag{5.4.1}$$

对所有 $r_t\in[1,n]$、 $g_t\in {}_iV$、 $t\in[1,x]$。注意，当 $x\ge 2$、 $\bar f=\bar 0$ 时，无需担心符号。

我们将由对象 $S_i^xV_n$（对所有 $x\in \mathbb{Z}_{\ge 0}$、 $i\in I$）生成的右 $\mathfrak{gl}_n(A)$-模的满幺半子范畴记为 $\mathrm{mod}_{\mathcal{S}}$-$\mathfrak{gl}_n(A)$，使得

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{mod}_{\mathcal{S}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A))=\left\{S_{\mathbf{i}}^{\mathbf{x}}V_n:=S_{i_1}^{x_1}V_n\otimes\cdots\otimes S_{i_t}^{x_t}V_n\mid t\in\mathbb{Z}_{\ge 0},\mathbf{x}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^t,\mathbf{i}\in I^t\right\}.$$

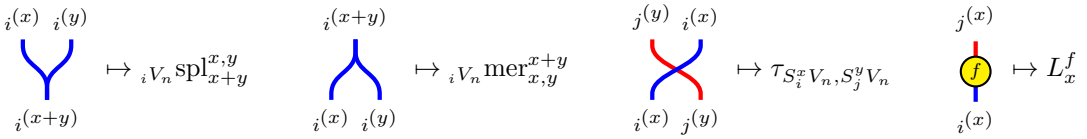
容易验证，(5.1.1)、(5.2.1)、(5.2.2) 和 (5.4.1) 中定义的映射 $\tau_{S_i^xV_n,\ S_j^yV_n}$、 ${}_iV_n\mathbf{spl}^{x\ y}_{x+y}$、 ${}_iV_n\mathbf{mer}^{x\ y}_{x+y}$、 L_x^f 都是右 $\mathfrak{gl}_n(A)$-超模的偶同态。

5.5. $\mathbf{Web}_I^{A,\ a}$ 的定义表示。

定理 5.5.1。存在一个幺半群超函子

$$G_n:\mathbf{Web}_I^{A,a}\to \mathrm{mod}_{\mathcal{S}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)$$

由 $G_ni^{(x)}=S_i^xV_n$ 在生成对象上的作用给出，并且



对所有 $x,y\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $i,j\in I$ 和 $f\in jA^{(x)}i$，在生成态射上。

证明。我们只需检查关系 (3.1.2)–(3.1.12) 的像在函子 G_n 下保持不变。这是例行工作。特别是，关系 (3.1.2)、(3.2.1) 和 (3.2.2) 可按照 [15, 定理 6.1.1] 中的方法进行检验（该论文的 arXiv 版本中包含完整细节）。关系 (3.1.5)–(3.1.7) 很容易处理，(3.1.11) 和 (3.1.12) 也是如此；注意 $\bar{f}=\bar{0}$ 适用于粗股上的 f-贴片。

(3.1.8) 的左侧显然成立。对于右侧，我们有

$$L_x^{\alpha f}(v_{r_1}^{g_1}\cdots v_{r_x}^{g_x}) = v_{r_1}^{\alpha f g_1}\cdots v_{r_x}^{\alpha f g_x} = \alpha^x v_{r_1}^{f g_1}\cdots v_{r_x}^{f g_x} = \alpha^x L_x^f(v_{r_1}^{g_1}\cdots v_{r_x}^{g_x}),$$

对所有 $\alpha\in\mathbb{K}$、$f\in jA i$、$r_t\in[1,n]_{\bar{\imath}}$、$g_t\in {}_iV$、$t\in[1,x]$，均如此。

(3.1.9) 的左侧显然成立。对于 $x=1$，右侧显然成立，因此假设 $x>1$，从而 $f=\overline{g}=0$。那么对所有 $r_t\in[1,n]_{\bar{\imath}}$、$h_t\in {}_iV$、$t\in[1,x]$，我们有：

$$\begin{aligned} L_x^{f+g}(v_{r_1}^{h_1}\cdots v_{r_x}^{h_x}) &= v_{r_1}^{(f+g)h_1}\cdots v_{r_x}^{(f+g)h_x} \\ &= \sum_{t=0}^{x}\sum_{\substack{B=\{b_1<\cdots<b_t\}\\ C=\{c_1<\cdots<c_{x-t}\}\\ B\cup C=[1,x]}} v_{r_1}^{(\delta_{1\in B}f+\delta_{1\in C}g)h_1}\cdots v_{r_x}^{(\delta_{x\in B}f+\delta_{x\in C}g)h_x} \\ &= \sum_{t=0}^{x}\sum_{\substack{B=\{b_1<\cdots<b_t\}\\ C=\{c_1<\cdots<c_{x-t}\}\\ B\cup C=[1,x]}} (-1)^{\varepsilon(B,C)} v_{r_{b_1}}^{fh_{b_1}}\cdots v_{r_{b_t}}^{fh_{b_t}} v_{r_{c_1}}^{gh_{c_1}}\cdots v_{r_{c_{x-t}}}^{gh_{c_{x-t}}}, \end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon(B,C)=\#\{(b,c)\in B\times C \mid b>c, \bar{h}_b=\bar{h}_c=\bar{1}\}.$$

利用公式 (5.2.1) 和 (5.2.2) 很容易看出，最后一行等于

$$\sum_{t=0}^{x} {}_{j}V_n\mathrm{mer}_{t,x-t}^{x}\circ(L_t^f\otimes L_{x-t}^g)\circ {}_{i}V_n\mathrm{spl}_{x}^{t,x-t}(v_{r_1}^{h_1}\cdots v_{r_x}^{h_x}),$$

正如所需。

最后，对于 (3.1.10)，设 i、$j\in I$、$f\in jA_{\bar{1}}i$。那么对于 r_1、$r_2\in[1,n]_{\bar{\imath}}$、$h_1$、$h_2\in {}_iV$，我们有

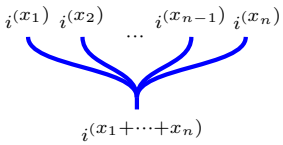
$$\begin{aligned} {}_{j}V_n\mathrm{mer}_{1,1}^{2}\circ(L_1^f\otimes L_1^f)\circ {}_{i}V_n\mathrm{spl}_{2}^{1,1}(v_{r_1}^{h_1}v_{r_2}^{h_2}) &= (-1)^{\bar{h}_1} v_{r_1}^{fh_1}v_{r_2}^{fh_2} + (-1)^{\bar{h}_2(\bar{h}_1+1)} v_{r_2}^{fh_2}v_{r_1}^{fh_1} \\ &= (-1)^{\bar{h}_1} v_{r_1}^{fh_1}v_{r_2}^{fh_2} + (-1)^{\bar{h}_1+1} v_{r_1}^{fh_1}v_{r_2}^{fh_2} = 0, \end{aligned}$$

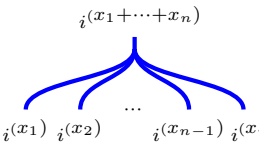
证明至此完成。 □

6. Special morphisms and bases for $\mathbf{Web}_I^{A,a}$

6.1. 展开与收缩。定义态射

$$y_i^{(x_1,\dots,x_n)} := \quad ; \qquad z_i^{(x_1,\dots,x_n)} := \quad , \tag{6.1.1}$$





分别在 $\mathsf{Web}^{A,a}_{I}(i^{(x_1+\cdots+x_n)}\ i^{(x_1)}\dots i^{(x_n)})$ 和 $\mathsf{Web}^{A,a}_{I}(i^{(x_1)}\dots i^{(x_n)}\ i^{(x_1+\cdots+x_n)})$ 中。这些图应解释为 $n-1$ 垂直复合的分裂（或合并）。由 (3.1.2) 可知，所得态射与分裂（或合并）的顺序无关。

对于 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}=i^{(x_1)}{}_{\bar{1}}\ \dots i^{(x_t)}{}_{\bar{t}}\ \in\mathsf{Ob}(\mathsf{Web}^{A,a}_{I})$，定义 $\mathbf{i}^{\mathbf{x}}=(i_1^{(1)})^{x_1}\cdots(i_t^{(1)})^{x_t}\in\mathsf{Ob}(\mathsf{Web}^{A,a}_{I})$，并且

$$Y_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}} := y_{i_1}^{(1,\dots,1)}\otimes\cdots\otimes y_{i_t}^{(1,\dots,1)}\in\mathbf{Web}_I^{A,a}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{i}^{\mathbf{x}})$$

$$Z_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}} := z_{i_1}^{(1,\dots,1)} \otimes \cdots \otimes z_{i_t}^{(1,\dots,1)} \in \mathbf{Web}_I^{A,a}(\mathbf{i}^{\mathbf{x}}, \mathbf{i}^{(\mathbf{x})})$$

那么对于 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}$、$\mathbf{j}^{(\mathbf{y})} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Web}^{A,a}_I)$，我们有线性映射：

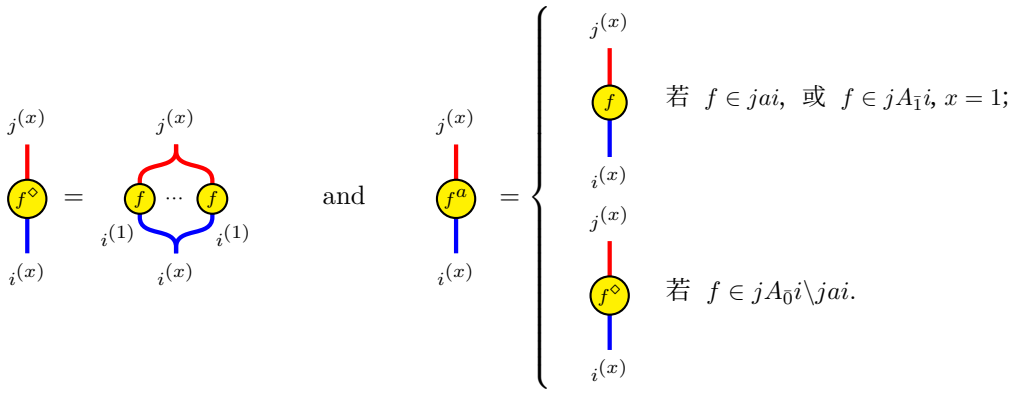
$$\begin{aligned} exp_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})}} &: \mathbf{Web}_I^{A,a}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}) \to \mathbf{Web}_I^{A,a}(\mathbf{i}^{\mathbf{x}}, \mathbf{j}^{\mathbf{y}}), \qquad f \mapsto Y_{\mathbf{j}^{(\mathbf{y})}} \circ f \circ Z_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}} \\ con_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})}} &: \mathbf{Web}_I^{A,a}(\mathbf{i}^{\mathbf{x}}, \mathbf{j}^{\mathbf{y}}) \to \mathbf{Web}_I^{A,a}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}), \qquad f \mapsto Z_{\mathbf{j}^{(\mathbf{y})}} \circ f \circ Y_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}} \end{aligned}$$

我们分别将这些映射称为展开和收缩。下一个引理可由反复应用 (3.1.4) 得出。

引理 6.1.1. 对所有 $f \in \mathbf{Web}^{A,a}_I(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$，我们有

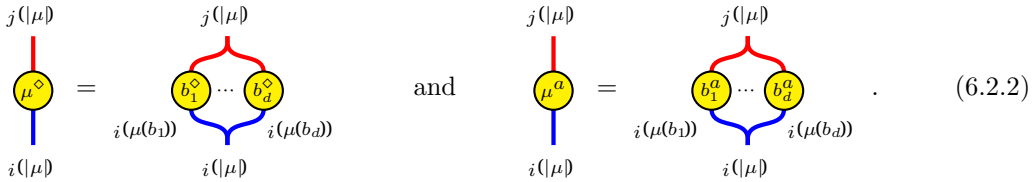
$$con_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})}} \circ exp_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})}}(f) = \mathbf{x}!\,\mathbf{y}!\,f.$$

6.2. 额外的贴片。令 $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i, j \in I$, $f \in jAi$。我们首先在 $\mathbf{Web}^{A,a}_I(i^{(x)}, j^{(x)})$ 中定义一些简写贴片。令：



(6.2.1)

我们将称有限支撑函数 $\mu : {}_j\mathrm{B}_i \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为受限的 ${}_j\mathrm{B}_i$-复合，只要 $\mu(b) \leq 1$ 当 $\overline{b} = \bar{1}$ 时成立。我们记 $|\mu| = \sum_{b \in {}_j\mathrm{B}_i} \mu(b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。于是，对于这样的 μ，枚举 $\mathrm{supp}(\mu) = \{b_1 < \cdots < b_d\}$ 后，我们在 $\mathbf{Web}^{A,a}_I(i^{(|\mu|)}, j^{(|\mu|)})$ 中定义如下态射：



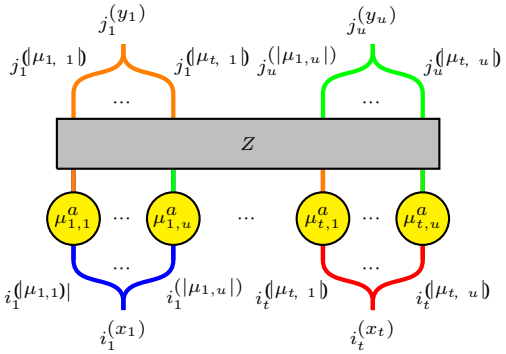
(6.2.2)

6.3. 态射的张成集。设 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} = i^{(x_1)} \cdots i^{(x_t)}$, $\mathbf{j}^{(\mathbf{y})} = j^{(y_1)} \cdots j^{(y_u)u} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Web}^{A,a}_I)$。令 $\mathbf{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$ 为元组 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{r,s})_{r\in[1,t],s\in[1,u]}$ 的集合，其中每个 $\mu_{r,s}$ 都是受限的 ${}_{j_s}\mathrm{B}_{i_r}$-复合，并且我们有

$$\sum_{s\in[1,u]} |\mu_{r,s}| = x_r \quad (\forall r \in [1,t]) \qquad \text{and} \qquad \sum_{r\in[1,t]} |\mu_{r,s}| = y_s \quad (\forall s \in [1,u]).$$

对于 $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$，我们定义一个相关的图 $\eta^a_{\boldsymbol{\mu}} \in \mathrm{Web}^{A,a}_{I}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{i}^{(\mathbf{y})})$，方法是令

$$\eta^a_{\boldsymbol{\mu}} :=$$



, (6.3.1)

其中，Z 是任意一个仅由交叉组成的图，其中底部标记为厚度$|\mu_{r,s}|$ 的线股会连接到 Z 顶部标记为厚度$|\mu_{r,s}|$ 的线股。类似地，我们将 $\eta^{\diamond}_{\boldsymbol{\mu}} \in \mathrm{Web}^{A,a}_{I}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{i}^{(\mathbf{y})})$定义为将上述图中的所有上标替换为 $\diamond$ 上标。

我们还将以下标量与 $\boldsymbol{\mu}$ 及任意一个 $\mathrm{m} \subseteq \mathrm{B}$ 相关联：

$$[\boldsymbol{\mu}]^!_m = \prod_{\substack{r\in[1,t],\, s\in[1,u]\\ b\in m}} \mu_{r,s}(b)! \qquad \in \mathbb{K}.$$

引理 6.3.1。对于 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Web}^{A,a}_{I})$，$\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$，有：

$$\eta^{\diamond}_{\boldsymbol{\mu}} = [\boldsymbol{\mu}]^!_{\mathrm{b}} \eta^a_{\boldsymbol{\mu}}.$$

证明。由 (6.2.2) 以及反复应用关系 (3.1.4) 和 (3.1.11) 可得。 □

6.4. 在带色对称幂模上的作用。

引理 6.4.1。设 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} = i^{(x_1)}_1 \cdots i^{(x_t)}_t$、$\mathbf{j}^{(\mathbf{y})} = j^{(y_1)}_1 \cdots j^{(y_u)u} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Web}^{A,a}_{I})$，且 $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$。则映射

$$G_n(\eta^a_{\boldsymbol{\mu}}) : S^{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}} V \to S^{\mathbf{y}}_{\mathbf{j}} V$$

由下式给出

$$G_n(\eta^a_{\boldsymbol{\mu}}) : \bigotimes_{\alpha=1}^{t} \prod_{\gamma=1}^{x_\alpha} v^{f^{(\alpha)}_\gamma}_{\ell^{(\alpha)}_\gamma} \mapsto [\boldsymbol{\mu}]^!_{\mathrm{B}\setminus\mathrm{b}} \sum_{T} (-1)^{\sigma_1(T)+\sigma_2(T)+\sigma_3(T)} \bigotimes_{\beta=1}^{u} \prod_{\alpha=1}^{t} \prod_{c\in\mathrm{B}}^{<} \prod_{\gamma\in T^c_{\alpha,\beta}}^{<} v^{cf^{(\alpha)}_\gamma}_{\ell^{(\alpha)}_\gamma} \tag{6.4.1}$$

对于所有 $\ell^{(\alpha)}_\gamma \in [1,n]$、$f^{(\alpha)}_\gamma \in {}_{i_\alpha}V$，其中求和遍历所有满足 $T^b_{r,s} \subseteq [1,x_r]$、$|T^b_{r,s}| = \mu_{r,s}(b)$ 以及 $\bigsqcup_{s,b} T^b_{r,s} = [1,x_r]$ 的集合组 $T = (T^b_{r,s})_{b\in\mathrm{B},\, r\in[1,t],\, s\in[1,u]}$，并且

$$\sigma_1(T) = \sum_{\substack{b\in\mathrm{B}\\ r'<r\in[1,t]\\ s\in[1,u]}} \sum_{\gamma\in[1,x_{r'}]} \overline{\mu}_{r,s}(b)\bar{b}\bar{f}^{(r')}_\gamma + \sum_{\substack{b,b'\in\mathrm{B}\\ r\in[1,t]\\ s'<s\in[1,u]}} \sum_{\gamma\in T^{b'}_{r,s'}} \overline{\mu}_{r,s}(b)\bar{b}\bar{f}^{(r)}_\gamma + \sum_{\substack{b'<b\in\mathrm{B}\\ r\in[1,t]\\ s\in[1,u]}} \sum_{\gamma\in T^{b'}_{r,s}} \overline{\mu}_{r,s}(b)\bar{b}\bar{f}^{(r)}_\gamma;$$

$$\sigma_2(T) = \sum_{\substack{r\in[1,t]\\ s'<s\in[1,u]\\ \gamma<\gamma'\in[1,x_r]}} \sum_{\substack{\gamma\in T^b_{r,s}\\ \gamma'\in T^{b'}_{r,s'}}} \bar{f}^{(r)}_\gamma \bar{f}^{(r)}_{\gamma'}; \qquad \sigma_3(T) = \sum_{\substack{b,b'\in\mathrm{B}\\ r<r'\in[1,t]\\ s'<s\in[1,u]}} \sum_{\substack{\gamma\in T^b_{r,s}\\ \gamma'\in T^{b'}_{r',s'}}} (\bar{b}+\bar{f}^{(r)}_\gamma)(\bar{b}'+\bar{f}^{(r')}_{\gamma'}).$$

证明。该公式直接由定理 5.5.1 以及公式 (5.1.1)、(5.2.1)、(5.2.2) 和 (5.4.1) 得出。符号 $(-1)^{\sigma_1(T)}$ 通过 $\eta^a_{\boldsymbol{\mu}}$ 中的优惠券态射产生，符号 $(-1)^{\sigma_2(T)}$ 通过分裂态射产生，而符号 $(-1)^{\sigma_3(T)}$ 通过 Z 态射产生。标量 $[\boldsymbol{\mu}]^!_{\mathtt{B}\setminus\mathtt{b}}$ 源自对 (6.2.1) 的考察以及以下计算：

$$G_n\left(\begin{array}{c} {\scriptstyle j^{(m)}} \\ b^a \\ {\scriptstyle i^{(m)}} \end{array}\right)\left(v_{z_1}^{g_1}\cdots v_{z_m}^{g_m}\right) = \begin{cases} v_{z_1}^{bg_1}\cdots v_{z_m}^{bg_m} & \text{if } b\in {}_j\mathtt{B}_i,\ \text{or } b\in({}_j\mathtt{B}_i)_{\bar{1}},\ x=1;\\ m!\,v_{z_1}^{bg_1}\cdots v_{z_m}^{bg_m} & \text{if } b\in({}_j\mathtt{B}_i)_{\bar{0}}\setminus {}_j\mathtt{b}_i, \end{cases}$$

对所有 $m\in\mathbb{S}^{\geq 0}$, $z_1,\dots,z_m\in[1,n]$, $g_1,\dots,g_m\in {}_iV$。 □

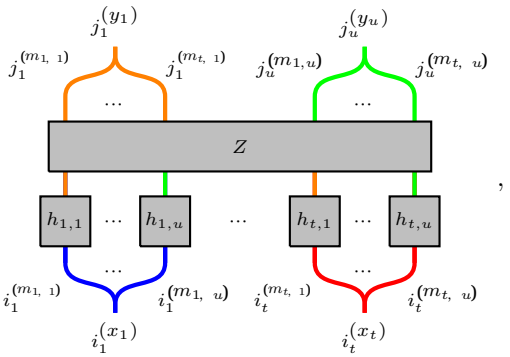
6.5. 网的张成结果 $\mathsf{Web}^{A}_{,I}{}^{a}$。

命题 6.5.1. 态射 $\{\eta^a_{\boldsymbol{\mu}} \mid \boldsymbol{\mu}\in \mathsf{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{i}^{(\mathbf{y})})\}$ 构成 $\mathsf{Web}^{A}_{,I}{}^{a}\left(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{i}^{(\mathbf{y})}\right)$ 的一个 $\mathbb{K}$-张成集。

证明。设 F 是 $\mathsf{Web}^{A}_{,I}{}^{a}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{i}^{(\mathbf{y})})$ 中的一个图。那么，我们可以将 F 改写为由生成分裂、合并、交叉和贴片组成的图的 $\mathbb{K}$-线性组合，其中：

- 任何分裂下方都没有合并（由 (3.1.3) 得）；
- 任何分裂下方都没有交叉（由 (3.1.6) 和 (3.1.7) 得）；
- 任何贴片下方都没有交叉（由 (3.1.12) 得）；
- 任何合并上方或分裂下方都没有贴片（由 (3.1.11) 得）；
- 每条线股上至多有一个贴片（由 (3.1.9) 得）；
- 所有贴片都是 B 中的元素（通过 (3.1.8) 和 (3.1.9)）；

以这种方式应用关系，并结合 (3.1.2) 和引理 4.2.3，我们可以将 F 表示为如下图的 $\mathbb{K}$-线性组合



, (6.5.1)

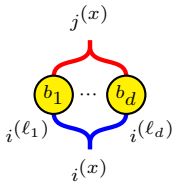
其中，Z 与 (6.3.1) 中相同，$\sum_{s=1}^{u} m_{r,s}=x_r$ 对所有 $r\in[1,t]$, $\sum_{r=1}^{t} m_{r,s}=y_s$ 对所有 $s\in[1,u]$，且 $h_{r,s}$ 是 $\mathsf{Web}^{A}_{,I}{}^{a}(i^{(m_{r,s})_r},j_s^{(m_{r,s})}$ 中的某个图。

将 (6.5.1) 与 (6.3.1) 对比，只需证明对于任意 $i,j\in I$, $x\in\mathbb{S}^{\geq 0}$，态射空间 $\mathsf{Web}^{A}_{,I}{}^{a}(i^{(x)},j^{(x)})$ 由这些图张成



(6.5.2)

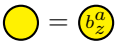
其中 μ 遍历 ${}_{j}\mathtt{B}_{i}$-复合的 x。事实上，在特殊情形 $t=u=1$ 下应用导出 (6.5.1) 的论证，可得 $\mathbf{Web}^{A,a}_{I}(i^{(x)},j^{(x)})$ 由如下形式的图张成



(6.5.3)

其中 $\ell_1+\cdots+\ell_d=x$，$b_1\le\cdots\le b_d\in {}_{j}\mathtt{B}_{i}$。假设 z 满足 $b_z=b_{z+1}=\cdots=b_{z+k}$ 对于某个 z，$k>0$。那么，虽然可能需要引入一个标量，我们可以将它们合并为一条线股，并使用简写优惠券 ${}_{b}b^{a}_{z}$ 如下。



- 若 $b_z\in {}_{j}\mathtt{b}_{i}$，则反复应用 (3.1.4) 可得到贴片 ${}_{b}z$ 的一个标量倍数  在线股上，其厚度为 $\ell_z+\cdots+\ell_{z+k}$。
- 若 $b_z\in ({}_{j}\mathtt{B}_{i})_{\bar{0}}\backslash {}_{j}\mathtt{b}_{i}$，则 $\ell_z=\cdots=\ell_{z+k}=1$，由此得到简写优惠券 ${}_{b}z^{\diamond}=b$  on 一条厚度为 $k+1$ 的线股。
- 若 $b_z\in({}_{j}\mathtt{B}_{i})_{\bar{1}}$，则根据 (3.1.10)，该图为零。

将 (6.5.3) 中相同的基元素如上所述归并到单条线股上后，我们便得到所需形式 (6.5.2) 的一个态射（乘以一个标量），从而完成证明。□

6.6. $\mathbf{Web}^{A,a}_{I}$ 的基结果。

命题 6.6.1。设 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}=i^{(x_1)}\cdots i^{(x_t)}$，$\mathbf{j}^{(\mathbf{y})}=j^{(y_1)}\cdots j^{(y_u)}\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Web}^{A,a}_{I})$，并假设 $n\ge\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|$。则态射 $\{\eta^{a}_{\boldsymbol{\mu}}\mid\boldsymbol{\mu}^{1}\in\mathrm{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})})\}$ 在函子 G^{1}_{n} 下的像线性无关；此外，G_n 定义了一个单射

$$G_n:\mathbf{Web}^{A,a}_{I}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})})\to\mathrm{Hom}_{\mathfrak{gl}_n(A)}(S^{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}V,S^{\mathbf{y}}_{\mathbf{j}}V).$$

证明。选择元组的一种枚举

$$\{(b_1,r_1,s_1),\dots,(b_z,r_z,s_z)\}=\{(b,r,s)\mid r\in[1,t],s\in[1,u],b\in {}_{j_s}\mathtt{B}_{i_r},\mu_{r,s}(b)>0\}.$$

注意，根据 $\boldsymbol{\mu}$ 的定义，我们有 $n\ge z$，因此可以定义相应的元素

$$v^{\boldsymbol{\mu}}=\bigotimes_{\ell=1}^{t}\prod_{m=1}^{z}(v^{i_\ell}_{m})^{\delta_{r_m,\ell}\mu_{\ell,s_m}(b_m)}\in S^{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}V,$$

and

$$w^{\boldsymbol{\mu}}=\bigotimes_{\ell=1}^{u}\prod_{m=1}^{z}(v^{b_m}_{m})^{\delta_{s_m,\ell}\mu_{r_m,\ell}(b_m)}\in S^{\mathbf{y}}_{\mathbf{j}}V.$$

对于所有 $y\in\mathbb{Z}_{\ge0}$，$j\in I$，$S^{y}_{j}V$ 都有一个由 v^{b}_{k} 中的受限单项式组成的 $\Bbbk$-基，这些单项式遍历 $k\in[1,n]$、$i\in I$ 和 $b\in {}_{j}\mathtt{B}_{i}$。这里，受限是指当 $\bar{b}=\bar{1}$ 时，单项式中 v^{b}_{k} 的重数小于或等于一。为每个 $S^{y}_{j}V$ 固定这样一个基后，这就给出了 $S^{\mathbf{y}}{}_{\mathbf{j}}V$ 的由单项式张量积组成的基 W。除符号外，$w^{\boldsymbol{\mu}}$ 是 W 的一个元素，因此我们有一个映射 $p_{\boldsymbol{\mu}}\colon S^{\mathbf{y}}{}_{\mathbf{j}}V\to\Bbbk w^{\boldsymbol{\mu}}$，它由沿 W 的线性投影给出。现在由引理 6.4.1 可知

$$p_{\boldsymbol{\mu}}\circ G(\eta^{a}_{\boldsymbol{\nu}})(v^{\boldsymbol{\mu}})=\pm\delta_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}}[\boldsymbol{\mu}]^{!}_{\mathtt{B}\backslash\mathtt{b}}w^{\boldsymbol{\mu}},$$

对于所有 $\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{\nu}\in\mathrm{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$。因此，态射 $\{\eta^{a}_{\boldsymbol{\mu}}\mid\boldsymbol{\mu}\in\mathrm{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{i}^{(\mathbf{y})})\}$ 在 G_n 下的像是线性无关的。□

下一个结果可直接得出。

推论 6.6.2. 函子 $\{G_n \mid n \in \mathbb{N}^{\geq 0}\}$ 在 $\mathrm{Web}^{A}_{\cdot,I}{}^{a}$ 上渐近局部忠实。也就是说，对于 $\mathrm{Web}^{A}_{\cdot,I}{}^{a}$ 中任意固定的态射空间，函子 G_n 定义了一个单射 $n \gg 0$。

命题 6.5.1 和 6.6.1 还得出以下结果。

推论 6.6。 态射 $\{\eta^{a}_{\boldsymbol{\mu}} \mid \boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})})\}$ 构成 $\mathrm{Web}^{A}_{\mathbb{K},I}{}^{a}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$ 的基。

6.7. 关于任意交换环的一个备注。回想一下，$\mathbb{K}$ 是一个特征零整环，令 $\mathbb{\Gamma}$ 为任意特征为 $p \geq 0$ 的交换环，并配备环同态 $\mathbb{K} \to \mathbb{\Gamma}$。令 $A_{\mathbb{\Gamma}} := \mathbb{\Gamma} \otimes_{\mathbb{K}} A, a_{\mathbb{\Gamma}} := \mathbb{\Gamma} \otimes_{\mathbb{K}} a$，我们可以遵循定义 3.1.1 构造一个 $\mathbb{\Gamma}$-线性幺半超范畴 $\mathrm{Web}^{A_{\mathbb{\Gamma}} a_{\mathbb{\Gamma}} I}$。由于所有关系都是在整系数上定义的，这个范畴同构于 $\mathbb{\Gamma} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Web}^{A}_{\cdot,I}{}^{a}$，因此推论 6.6.3 中的态射集构成 $\mathrm{Web}^{A_{\mathbb{\Gamma}} a_{\mathbb{\Gamma}} I}$ 中态射空间的一组 $\mathbb{\Gamma}$-基。

更一般地，若 $(A', a')_I$ 是由 $\mathbb{K}$-超代数进行标量扩张未必得到的 $\mathbb{\Gamma}$-超代数的一个良对，我们仍可按照定义 3.1.1 构造 $\mathbb{\Gamma}$-线性幺半超范畴 $\mathrm{Web}^{A' a'}_{I}{}_{,}$。在这种情形下，命题 6.5.1 仍然成立，但不再能保证存在与推论 6.6.3 类似的基结果。

6.8. 良好子对。本小节中，我们假设有一个良好子对 $(A, a')_I \subseteq (A, a)$。于是有一个包含函子 $\iota_{a',\ a} : \mathrm{Web}^{A\ a'}_{I} \to, \mathrm{Web}^{A}_{,\ I}{}^{a}$，它在对象和图上均由单位元给出。

引理 6.8.1. 对所有 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Web}^{A}_{,\ I}{}^{a})$ 以及 $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$，我们有

$$\iota_{a',a}(\eta^{a'}_{\boldsymbol{\mu}}) = [\boldsymbol{\mu}]^{!}_{\mathfrak{b}\setminus\mathfrak{b}'}\,\eta^{a}_{\boldsymbol{\mu}}.$$

证明。设 $\eta^{a}_{\boldsymbol{\mu}} \in \mathrm{Web}^{A}_{,I}{}^{a}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$ 和 $\eta^{a'}_{\boldsymbol{\mu}} \in \mathrm{Web}^{A\ a'}_{I}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$ 分别为根据它们各自范畴中的定义与 $\boldsymbol{\mu}$ 相关联的基图。这些图完全相同，唯一的区别是它们各自的简写优惠券分别具有 ${}_{\mathfrak{b}}a$ 和 ${}_{\mathfrak{b}}a'$ 的形式。当 $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{b}'$ 或 $\mathfrak{b} \in \mathfrak{b}'$ 券片在 $\iota_{a',a}$ 下的像为 ${}_{\mathfrak{b}}a$。当 $\mathfrak{b} \in \mathfrak{b}\setminus\mathfrak{b}'$ 时，厚度为 m 的线股上的券片 ${}_{\mathfrak{b}}a'$ 在 $\iota_{a',a}$ 下的像为 ${}_{\mathfrak{b}}\diamond = m!$ 根据 (3.1.4)，这就推出了所需结论。□

引理 6.8.1 和推论 6.6.3 推出了以下结果。

推论 6.8.2。函子 $\iota_{a',\ a} : \mathrm{Web}^{A\ a'}_{I} \to, \mathrm{Web}^{A}_{,\ I}{}^{a}$ 是忠实的，并且对所有 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}$、$\mathbf{j}^{(\mathbf{y})} \in \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Web}^{A}_{,\ I}{}^{a})$，$\mathrm{Web}^{A\ a'}_{I}$，$(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$ 在 $\iota_{a',\ a}$ 下的像是满秩 $\mathbb{K}$-子模

$$\mathbb{K}\{[\boldsymbol{\mu}]^{!}_{\mathfrak{b}\setminus\mathfrak{b}'}\eta^{a}_{\boldsymbol{\mu}} \mid \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{m}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})})\} \subseteq \mathbf{Web}^{A,a}_{I}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}).$$

也就是说，$\mathrm{Web}^{A\ a'}_{I}$，可识别为 $\mathrm{Web}^{A}_{,\ I}{}^{a}$ 中的一个 $\mathbb{K}$-形式。

注 6.8.3。特别地，可以利用推论 6.8.2，将 $\mathrm{Web}^{A}_{,\ I}{}^{a}$ 识别为 $\mathrm{Web}^{A\ A_{\bar{0}}}_{I},$ 中由形如 $[\boldsymbol{\mu}]^{!}_{\mathfrak{B}_{\bar{0}}\setminus\mathfrak{b}}\eta^{A_{\bar{0}}}_{\boldsymbol{\mu}}$ 的态射张成的 $\mathbb{K}$-形式。可以将这一特征与第 7.2 节中描述的 (A, a) 的舒尔化定义进行比较。

6.9. 截断。设 $(A, a)_I$ 是一个良对，并假设 I 是有限的。由于 A和 a 都含幺，且单位元为 $1 = \sum_{i\in I} i$，我们也可以考虑良对 $(A, a)_{\{1\}}$。那么，范畴 $\mathrm{Web}^{A}_{,\ I}{}^{a}$ 是 $\mathrm{Web}^{A}_{,\ \{1\}}{}^{a}$ 的幂等元截断，其含义将在定理 6.9.1 中予以说明。

对于 $i \in I$、$x \in \mathbb{N}$，定义

$$\varepsilon_{i^{(x)}} := \begin{array}{c} 1^{(x)} \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 1^{(x)} \end{array} \in \mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\}}(1^{(x)}, 1^{(x)}).$$

现在，我们按如下方式定义 $\mathsf{Web}^{A,a}_{\{1\}}$ 的“I-截断”版本。设 ${}_I\mathsf{Web}^{A,a}_{\{1\}}$ 为具有 $\mathrm{Ob}({}_I\mathsf{Web}^{A,a}_{\{1\}}) = \Lambda_I$ 的幺半超范畴，并且对于 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} = i^{(x_1)}_1 \cdots i^{(x_r)}_r$、$\mathbf{j}^{(\mathbf{y})} = j^{(y_1)}_1 \cdots j^{(y_s)}_s \in \mathrm{Ob}({}_I\mathsf{Web}^{A,a}_{\{1\}})$，定义：

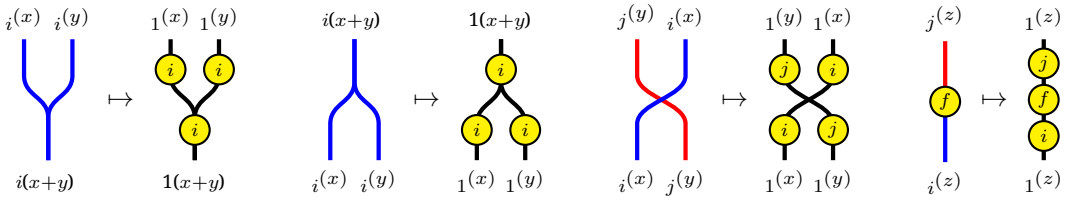
$$ {}_I\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\}}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}) = (\varepsilon_{j_1^{(y_1)}} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{j_s^{(y_s)}}) \circ \mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\}}(1^{(\mathbf{x})}, 1^{(\mathbf{y})}) \circ (\varepsilon_{i_1^{(x_1)}} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{i_r^{(x_r)}}), \tag{6.9.1} $$

态射的复合继承自 $\mathsf{Web}^{A,a}_{\{1\}}$。

定理 6.9.1。存在一个幺半超范畴的同构

$$ \iota_I : \mathbf{Web}^{A,a}_I \to {}_I\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\}} $$

由 $i^{(x)} \mapsto i^{(x)}$ 在生成对象上给出，并且



在生成态射上。

证明。容易验证，ι_I 是一个定义良好的函子。考虑到 (6.9.1) 以及推论 6.6.3 在 $\mathsf{Web}^{A,a}_I$ 和 $\mathsf{Web}^{A,a}_{\{1\}}$ 上的应用，也容易验证，ι_I 在态射空间的 $\Bbbk$-基之间诱导出一个双射，从而完成证明。□

7. Connection to Schurification

7.1. 代数 $W^{A,a}_{n,d}$。现在我们谈到一个主要动机：$\mathsf{Web}^{A,a}_I$ 与广义舒尔代数（即“舒尔化”）$T^A_a(n,d)$（定义见 [31]）之间的联系。在本节中，我们始终假设$(A,a)_I$ 是一个良对，且 I 是一个有限集。我们用 $1 = \sum_{i\in I} i$ 表示 A和 a中的单位元。对于 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_t) \in \mathbb{N}^t_{\geq 0}$，记 $1^{(\mathbf{x})} := 1^{(x_1)} \cdots 1^{(x_t)} \in \Omega\{1\}$。

对于 $n, d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega(n,d)$，令 $W^{A,a}_{n,d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathsf{Web}^{A,a}_{\{1\}}(1^{(\mathbf{x})}, 1^{(\mathbf{y})})$。接着令

$$ W^{A,a}_{n,d} := \bigoplus_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega(n,d)} W^{A,a}_{n,d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{7.1.1} $$

并将 $W^{A,a}_{n,d}$视为含幺超代数，如下所示。对于 $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \Omega(n,d)$，$f \in W^{A,a}_{n,d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $f' \in W^{A,a}_{n,d}(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$，令$ff' = \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}'} f \circ f' \in W^{A,a}_{n,d}(\mathbf{x}', \mathbf{y})$，其中复合是在 $\mathsf{Web}^{A,a}_{\{1\}}$中进行的。$W^{A,a}_{n,d}$ 中的单位元为$\mathbb{1} = \sum_{\mathbf{x}\in\Omega(n,d)} \mathrm{Id}_{1^{(\mathbf{x})}}$根据推论 6.6.3 $W^{A,a}_{n,d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$具有 k-基 $\{\eta^a_{\boldsymbol{\mu}} \mid \boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}(1^{(\mathbf{x})}, 1^{(\mathbf{y})})\}$。

7.2. (A,a) 的舒尔化。本节遵循 [31] 的定义来定义广义舒尔代数 $T^A_a(n,d)$，有关更多细节，请参阅该论文。张量积$\Bbbk$-超代数 $M_n(A)^{\otimes d}$ 具有对称群 $\mathfrak{S}_d$ 的带符号的置换作用，具体如第 5.1 节所述。记作

$$ S^A(n,d) := (M_n(A)^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d} $$

对于 $\mathfrak{S}_d$-不变元的子超代数。

设 $d_1, d_2 \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，其中对于 $k=1$， $\xi_k \in S^A(n, d_k)$ 为 2。设 $\mathscr{D}^{d_1,\ d_2}$ 是 $(\mathfrak{S}_{d_1} \times \mathfrak{S}_{d_2}) \backslash \mathfrak{S}_{d_1+d_2}$ 的右陪集代表元集合。然后我们定义结合星积：

$$\xi_1 * \xi_2 := \sum_{\sigma \in \mathscr{D}^{d_1,d_2}} (\xi_1 \otimes \xi_2)^\sigma \in S^A(n, d_1+d_2).$$

若 $U = \{u_1 < \ldots < u_t\}$ 是一个配备了全序 $<$ 的有限指标集，我们记

$$*_{u\in U}^{<} \xi_u = \xi_{u_1} * \cdots * \xi_{u_t}.$$

我们有“左”侧和“右”侧的单射代数同态 L_n^{n+m}、R_n^{n+m}： $M_n(A) \to M_{n+m}(A)$，其定义为 $\mathrm{L}_n^{n+m}(E_{r,\ s}^b) = E_{r,\ s}^b$ 以及 $\mathrm{R}_n^{n+m}(E_{r,\ s}^b) = E_{r+m,\ s+m}^b$，它们诱导出代数同态 L_n^{n+m}、R_n^{n+m}： $S^A(n,\ d) \to S^A(n+m,\ d)$。对于所有 $\xi_1 \in S^A(n_1,\ d_1)$、 $\xi_2 \in S^A(n_2,\ d_2)$，我们定义移位星积：

$$\xi_1 \bar{*} \xi_2 := \mathrm{L}_{n_1}^{n_1+n_2}(\xi_1) * \mathrm{R}_{n_2}^{n_1+n_2}(\xi_2) \in S^A(n_1+n_2, d_1+d_2).$$

对于 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \Omega(n,\ d)$、 $\boldsymbol{\mu} \in \mathsf{M}(1^{(\mathbf{x})},\ 1^{(\mathbf{x})})$，我们令

$$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}}^a := [\boldsymbol{\mu}]_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{b}}^! \left(*_{r=1}^n *_{s=1}^n *_{b\in\mathsf{B}}^{<} (E_{s,r}^b)^{\otimes \mu_{r,s}(b)} \right) \in S^A(n,d),$$

将 $(E_{s,\ r}^b)^{\otimes \mu_{r,\ s}(b)} \in S^A(n,\ \mu_{r,\ s}(b))$。虽然本文使用的记号略有不同，但不难验证，如果 $\mathsf{b} = (b_1,\ \ldots,\ b_d) \in \mathsf{B}^d$， $\mathsf{r} = (r_1,\ \ldots,\ r_d)$， $\mathsf{s} = (s_1,\ \ldots,\ s_d) \in [1,n]^d$ 满足

$$\#\{t \in [1,d] \mid b_t = b, r_t = r, s_t = s\} = \mu_{r,s}(b), \qquad \text{for all } r,s \in [1,n], b \in \mathsf{B},$$

那么我们有 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}}^a$ 等于 $\pm\eta_{\mathsf{b},\ \mathsf{r},\ \mathsf{s}}$，如 [31, §3B] 中所定义。接着我们定义

$$T_a^A(n,d) := \mathbb{K}\{\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}}^a \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega(n,d), \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}(1^{(\mathbf{x})}, 1^{(\mathbf{y})})\} \subseteq S^A(n,d).$$

引理 7.2.1. [31, 引理 3.10，命题 3.12] T_a^A（n， d）是 S^A（n， d）的含幺子超代数，其 $\mathbb{K}$-基为 $\{\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}}^a \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$（$n$， d） $\boldsymbol{\mu} \in \mathsf{M}$（$1^{(\mathbf{x})}$， $1^{(\mathbf{y})}$）$\}$。

7.3. 连接代数。固定 $n \geq 1$，令 $V_n = A^{\oplus n}$。将其视为高为n 、元素取自 A的列向量后，我们通过矩阵乘法将其视为左 M_n（A）-超模。

引理 7.3.1. 存在一个定义良好的 $\mathbb{K}$-超代数映射 τ： $W^{A,\ a}_{n,\ d} \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\left(V_n^{\otimes d}\right)$，其定义为

$$\tau(\eta_{\boldsymbol{\mu}}^a) : \bigotimes_{\gamma=1}^d v_{r_\gamma}^{f_\gamma} \mapsto [\boldsymbol{\mu}]_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{b}}^! \sum_T (-1)^{\sigma(T)} \bigotimes_{\gamma=1}^d v_{s_\gamma^T}^{b_\gamma^T f_\gamma}. \tag{7.3.1}$$

对所有 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega(n,d)$， $\boldsymbol{\mu} \in \mathsf{M}(1^{(\mathbf{x})}, 1^{(\mathbf{y})})$ 均成立。这里的求和遍及所有满足 $T_{r,s}^b \subseteq \{\gamma \in [1,d] \mid r_\gamma = r\}$， $\bigsqcup_{b,s} T_{r,s}^b = \{\gamma \in [1,d] \mid r_\gamma = r\}$，且 $|T_{r,s}^b| = \mu_{r,s}(b)$ 的 $T = (T_{r,s}^b)$。对于 $\gamma \in [1,d]$，令 $s_\gamma^T \in [1,n]$， $b_\gamma^T \in \mathsf{B}$ 为满足 $\gamma \in T_{r_\gamma, s_\gamma^T}^{b_\gamma^T}$ 的唯一元素。最后，符号定义为

$$\sigma(T) = \sum_{1\leq\gamma<\gamma'\leq d} \bar{b}_{\gamma'}^T \bar{f}_\gamma + \sum_{\substack{1\leq\gamma<\gamma'\leq d \\ r_{\gamma'}<r_\gamma}} \bar{b}_\gamma^T \bar{b}_{\gamma'}^T + \sum_{\substack{1\leq\gamma<\gamma'\leq d \\ r_{\gamma'}=r_\gamma \\ s_{\gamma'}^T<s_\gamma^T}} \bar{b}_\gamma^T \bar{b}_{\gamma'}^T + \sum_{\substack{1\leq\gamma<\gamma'\leq d \\ r_{\gamma'}=r_\gamma \\ s_{\gamma'}^T=s_\gamma^T \\ b_{\gamma'}^T<b_\gamma^T}} \bar{b}_\gamma^T \bar{b}_{\gamma'}^T.$$

证明。存在一个单射 $\mathbb{K}$-模同态：

$$\chi : V_n^{\otimes d} \to \bigoplus_{\mathbf{x}\in\Omega(n,d)} S^{\mathbf{x}} V_n, \qquad \bigotimes_{\gamma=1}^d v_{r_\gamma}^{f_\gamma} \mapsto (-1)^{\langle \mathbf{r}, \mathbf{f}\rangle} \bigotimes_{\alpha=1}^n \prod_{\substack{\gamma\in[1,d] \\ r_\gamma=\alpha}}^{<} v_\gamma^{f_\gamma} \in S^{\mathbf{y}} V_n, \tag{7.3.2}$$

其中 $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in [1,n]^d$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_d) \in A^d$, $y_\alpha = \#\{\gamma \mid r_\gamma = \alpha\}$, 并且

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{f} \rangle := \sum_{\substack{1 \le \gamma < \gamma' \le d \\ r_{\gamma'} < r_\gamma}} \bar{f}_\gamma \bar{f}_{\gamma'}.$$

在此及下文中, 符号 $\prod_{u \in U}^{<}$ 表示应按照集合 U 上的顺序 $<$, 以递增顺序取乘积。

于是我们有

$$G_n(\eta^a_{\boldsymbol{\mu}}) \circ \chi \left(\bigotimes_{\gamma=1}^{d} v_{r_\gamma}^{f_\gamma} \right) = (-1)^{\langle \mathbf{r}, \mathbf{f} \rangle} G_n(\eta^a_{\boldsymbol{\mu}}) \left(\bigotimes_{\alpha=1}^{n} \prod_{\substack{\gamma \in [1,d] \\ r_\gamma = \alpha}}^{<} v_\gamma^{f_\gamma} \right) \tag{7.3.3}$$

$$= [\boldsymbol{\mu}]^{\mathtt{l}}_{\mathtt{B} \setminus \mathtt{b}} (-1)^{\langle \mathbf{r}, \mathbf{f} \rangle} \sum_T (-1)^{\sigma'_1(T) + \sigma'_2(T) + \sigma'_3(T)} \bigotimes_{s=1}^{n} \prod_{r=1}^{n} \prod_{b \in \mathtt{B}}^{<} \prod_{\gamma \in T^b_{r,s}}^{<} v_\gamma^{b_\gamma^T f_\gamma} \tag{7.3.4}$$

$$= [\boldsymbol{\mu}]^{\mathtt{l}}_{\mathtt{B} \setminus \mathtt{b}} (-1)^{\langle \mathbf{r}, \mathbf{f} \rangle} \sum_T (-1)^{\sigma'_1(T) + \sigma'_2(T) + \sigma'_3(T) + \sigma'_4(T)} \bigotimes_{s=1}^{n} \prod_{\substack{\gamma \in [1,d] \\ s_\gamma^T = s}}^{<} v_\gamma^{b_\gamma^T f_\gamma} \tag{7.3.5}$$

$$= [\boldsymbol{\mu}]^{\mathtt{l}}_{\mathtt{B} \setminus \mathtt{b}} (-1)^{\langle \mathbf{r}, \mathbf{f} \rangle} \sum_T (-1)^{\sigma'_1(T) + \sigma'_2(T) + \sigma'_3(T) + \sigma'_4(T) + \langle (s_1^T, \ldots, s_d^T), (b_1^T f_1, \ldots, b_d^T f_d) \rangle} \chi \left(\bigotimes_{\gamma=1}^{d} v_{s_\gamma^T}^{b_\gamma^T f_\gamma} \right). \tag{7.3.6}$$

在上述表达式中,

$$\sigma'_1(T) = \sum_{\substack{1 \le \gamma < \gamma' \le d \\ r_\gamma = r_{\gamma'} \\ s_{\gamma'} < s_\gamma}} \bar{f}_\gamma \bar{f}_{\gamma'} + \sum_{\substack{1 \le \gamma < \gamma' \le d \\ r_\gamma = r_{\gamma'} \\ s_\gamma^T = s_{\gamma'}^T \\ b_{\gamma'}^T < b_\gamma^T}} \bar{f}_\gamma \bar{f}_{\gamma'},$$

$$\sigma'_2(T) = \sum_{\substack{\gamma, \gamma' \in [1,d] \\ r_\gamma < r_{\gamma'}}} \bar{b}^T_{\gamma'} \bar{f}_\gamma + \sum_{\substack{\gamma, \gamma' \in [1,d] \\ r_\gamma = r_{\gamma'} \\ s_\gamma^T < s_{\gamma'}^T}} \bar{b}^T_{\gamma'} \bar{f}_\gamma + \sum_{\substack{\gamma, \gamma' \in [1,d] \\ r_\gamma = r_{\gamma'} \\ s_\gamma^T = s_{\gamma'}^T \\ b_\gamma^T < b_{\gamma'}^T}} \bar{b}^T_{\gamma'} \bar{f}_\gamma,$$

$$\sigma'_3(T) = \sum_{\substack{\gamma, \gamma' \in [1,d] \\ r_\gamma < r_{\gamma'} \\ s_{\gamma'}^T < s_\gamma^T}} (\bar{b}^T_\gamma + \bar{f}_\gamma)(\bar{b}^T_{\gamma'} + \bar{f}_{\gamma'}),$$

$$\sigma'_4(T) = \sum_{\substack{1 \le \gamma < \gamma' \le d \\ s_\gamma^T = s_{\gamma'}^T \\ r_{\gamma'} < r_\gamma}} (\bar{b}^T_\gamma + \bar{f}_\gamma)(\bar{b}^T_{\gamma'} + \bar{f}_{\gamma'}).$$

等式 (7.3.4) 由 (6.4.1) 得出, 其中 $\sigma'_1(T)$ $\sigma'_2(T)$ $\sigma'_3(T)$ 是按 $\gamma \in [1,d]$ 重新编号后的值 $\sigma_1(T)$ $\sigma_2(T)$ $\sigma_3(T)$。等式 (7.3.5) 是将每个张量因子中的单项式重新排序, 使下标索引按递增顺序排列后得出的, 这会产生与$\sigma'_4(T)$相关的符号。等式 (7.3.6) 是 (7.3.2) 的直接应用。验证起来并不难, 尽管过程有些繁琐:

对于所有 T，我们都有

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{f} \rangle + \sigma_1'(T) + \sigma_2'(T) + \sigma_3'(T) + \sigma_4'(T) + \langle (s_1^T, \dots, s_d^T), (b_1^T f_1, \dots, b_d^T f_d) \rangle + \sigma(T) = \sum_{\substack{1 \le \gamma < \gamma' \le d \\ r_\gamma = r_{\gamma'} \\ s_\gamma^T = s_{\gamma'}^T \\ b_\gamma^T = b_{\gamma'}^T}} b_{\gamma'}^T \bar{f}_\gamma.$$

但是根据 $\boldsymbol{\mu}$的定义，如果 $r_\gamma = r'_\gamma$、 $s_\gamma^T = s_{\gamma'}^T$、 $b_\gamma^T = b_{\gamma'}^T$，那么必有$\bar{b}_{\gamma'}^T = \bar{0}$。因此

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{f} \rangle + \sigma_1'(T) + \sigma_2'(T) + \sigma_3'(T) + \sigma_4'(T) + \langle (s_1^T, \dots, s_d^T), (b_1^T f_1, \dots, b_d^T f_d) \rangle = \sigma(T).$$

将 χ^{-1}记作逆映射 $\chi(V_n^{\otimes d}) \to V_n^{\otimes d}$，于是可知，对任意非零的 $f \in W^{A,\ {}^a_{n\ d}}$，取 $\tau(f) := \chi^{-1} \circ G_n(f) \circ \chi$，即可满足该断言。□

引理 7.3.2. $T_a^A(n,d)$ 在 $V_n^{\otimes d}$ 上的左乘作用给出一个 $\mathbb{K}$-超代数映射 $\widetilde{\tau}\colon T_a^A(n,d) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_n^{\otimes d})$，满足

$$\widetilde{\tau}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}}^a) : \bigotimes_{\gamma=1}^d v_{r_\gamma}^{f_\gamma} \mapsto [\boldsymbol{\mu}]_{\mathtt{B}\setminus\mathtt{b}}^! \sum_T (-1)^{\sigma(T)} \bigotimes_{\gamma=1}^d v_{s_\gamma^T}^{b_\gamma^T f_\gamma}. \tag{7.3.7}$$

对所有 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega(n,d)$，$\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}(1^{(\mathbf{x})}, 1^{(\mathbf{y})})$，其中 T和 $\sigma(T)$ 如引理 7.3.1 所示。

证明. 我们有

$$\widetilde{\tau}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}}^a) \left(\bigotimes_{\gamma=1}^d v_{r_\gamma}^{f_\gamma} \right) = [\boldsymbol{\mu}]_{\mathtt{B}\setminus\mathtt{b}}^! \left(\ast_{r=1}^n \ast_{s=1}^n \ast_{b \in \mathtt{B}}^{<} (E_{s,r}^b)^{\otimes \mu_{r,s}(b)} \right) \cdot \bigotimes_{\gamma=1}^d v_{r_\gamma}^{f_\gamma} \tag{7.3.8}$$

$$= [\boldsymbol{\mu}]_{\mathtt{B}\setminus\mathtt{b}}^! \left(\sum_T (-1)^{\widetilde{\sigma}_1(T)} \bigotimes_{\gamma=1}^d E_{s_\gamma^T, r_\gamma}^{b_\gamma^T} \right) \cdot \bigotimes_{\gamma=1}^d v_{r_\gamma}^{f_\gamma} \tag{7.3.9}$$

$$= [\boldsymbol{\mu}]_{\mathtt{B}\setminus\mathtt{b}}^! \sum_T (-1)^{\widetilde{\sigma}_1(T) + \widetilde{\sigma}_2(T)} v_{s_\gamma^T}^{b_\gamma^T f_\gamma}, \tag{7.3.10}$$

其中

$$\widetilde{\sigma}_1(T) = \sum_{\substack{1 \le \gamma < \gamma' \le d \\ r_{\gamma'} < r_\gamma}} \bar{b}_\gamma^T \bar{b}_{\gamma'}^T + \sum_{\substack{1 \le \gamma < \gamma' \le d \\ r_{\gamma'} = r_\gamma \\ s_{\gamma'}^T < s_\gamma^T}} \bar{b}_\gamma^T \bar{b}_{\gamma'}^T + \sum_{\substack{1 \le \gamma < \gamma' \le d \\ r_{\gamma'} = r_\gamma \\ s_{\gamma'}^T = s_\gamma^T \\ .b_{\gamma'}^T < b_\gamma^T}} \bar{b}_\gamma^T \bar{b}_{\gamma'}^T$$

$$\widetilde{\sigma}_2(T) = \sum_{1 \le \gamma < \gamma' \le d} \bar{b}_{\gamma'}^T \bar{f}_\gamma.$$

等式 (7.3.9) 可通过删去 $\ast_{r=1}^n \ast_{s=1}^n \ast_{b \in \mathtt{B}}^{<} (E_{s,r}^b)^{\otimes \mu_{r,s}(b)}$ 中所有在 $\bigotimes_{\gamma=1}^d v_{r_\gamma}^{f_\gamma}$ 上作用为零的项得到。注意到 $\widetilde{\sigma}_1(T) + \widetilde{\sigma}_2(T) = \sigma(T)$，结论便得证。□

定理 7.3.3. 我们有一个超代数同构

$$w : W_{n,d}^{A,a} \xrightarrow{\sim} T_a^A(n,d), \qquad \eta_{\boldsymbol{\mu}}^a \mapsto \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}}^a,$$

对于所有 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \Omega(n,d)$，$\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}(1^{(\mathbf{x})}, 1^{(\mathbf{y})})$。

证明。由引理 7.3.1 和引理 7.3.2，对于所有 $\boldsymbol{\mu}$，我们有 $\tau(\eta_{\boldsymbol{\mu}}^a) = \widetilde{\tau}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}}^a)$，因此由推论 6.6.3 和引理 7.2.1 可得 $\tau(W^{A,\ {}^a_{n\ d\ ,}}) = \widetilde{\tau}(T_a^A(n,d))$。我们有一个包含映射 $\iota\colon T_a^A(n,d) \hookrightarrow S^A(n,d)$，以及一个映射 $\widetilde{\tau}'\colon S^A(n,d) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_n^{\otimes d})$，它由 $S^A(n,d)$ 在 $V_n^{\otimes d}$ 上的左作用诱导。根据引理

5.7], $\widetilde{\tau}'$ 是单射。因此 $\widetilde{\tau} = \widetilde{\tau}' \circ \iota$ 是单射，从而可得 $\widetilde{\tau}(T_a^A(n,d)) \cong T_a^A(n,d)$。记$\widetilde{\tau}^{-1}$为逆超代数映射 $\widetilde{\tau}(T_a^A(n,d)) \xrightarrow{\sim} T_a^A(n,d)$，于是我们有一个超代数映射$\widetilde{\tau}^{-1} \circ \tau \colon W^{A,a}_{n,d} \to T_a^A(n,d)$，它在基上给出一个双射 $\eta_{\boldsymbol{\mu}}^a \mapsto \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}}^a$，从而证明了结论。□

缠绕积超代数 $\mathfrak{S}_d \wr A$ 在 $V_n^{\otimes d}$上有一个自然的右作用，其中 A 在$V_n = A^{\oplus n}$ 上作对角作用，而 $\mathfrak{S}_d$ 通过置换张量因子来作用。

推论 7.3.4. 我们有

$$W_{n,d}^{A,A_{\bar{0}}} \cong S^A(n,d) \cong \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d \wr A}(V_n^{\otimes d}).$$

证明. 根据定理 7.3.3，左侧的同构成立，因为 $T_{A_{\bar{0}}}^A(n,d) = S^A(n,d)$，如 [31,备注 3.17]所述。右侧的同构源自 [19, 引理 5.7]。□

7.4. 幺半等价。回顾一下，$(A,a)_I$ 是一个良对，其中 I 有限且 $1 = \sum_{i\in I} i_{\bar{a}}$。对于任意 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} = i^{(x_1)}_1 \cdots i^{(x_n)}_n \in \Omega_I(n,d)$，定义

$$\xi_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}} = (E_{1,1}^{i_1})^{\otimes x_1} * \cdots * (E_{n,n}^{i_n})^{\otimes x_n} \in T_a^A(n,d). \tag{7.4.1}$$

我们指出，如果 $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{i}^{(\mathbf{x})})$由$\mu_{r,s}(b) = \sum_{k=1}^n \delta_{r,k}\delta_{s,k}\delta_{b,i_k} x_k$ 对所有 r,s,b定义，那么可推出 $\xi_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}} = \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}}^a$。集合$\{\xi_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}} \mid \mathbf{i}^{(\mathbf{x})} \in \Omega_I(n,d)\}$ 是$T_a^A(n,d)$中的一组正交幂等元，并且若 $I = \{1\}$，则有$1_{T_a^A(n,d)} = \sum_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} \in \Omega_I(n,d)} \xi_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}}$。

7.4.1. 范畴 $\mathbf{T}^{A,a}_I$。我们如下定义幺半超范畴 $\mathbf{T}^{A,a}_I$。令 $\mathrm{Ob}(\mathbf{T}^{\mathbf{A}}_{\boldsymbol{a}}) = \Omega_I$，其对象上的幺半结构继承自 Ω_I。对于 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})} \in \Omega_I$，将态射空间定义为

$$\mathbf{T}_I^{A,a}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}) = \xi_{\mathbf{j}^{(\mathbf{y})}} T_a^A(n,d) \xi_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}} \subseteq T_a^A(n,d)$$

对于某些 n,d，给定 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})} \in \Omega_I(n,d)$，并令 $\mathbf{T}^{A,a}_I(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}) = 0$ 否则。态射的复合由 $T_a^A(n,d)$ 中的乘法给出，而态射上的幺半结构由移位星积 $\bar{*}$ 给出。容易验证（例如参见 [31, §5C]），这构成了一个良定义的幺半超范畴。

注 7.4.1. 若 $I = \{1\}$，那么将其视为代数时，我们有

$$\widetilde{\mathbf{T}}^{A,a}_{\{1\}} = \bigoplus_{1^{(\mathbf{x})}, 1^{(\mathbf{y})} \in \Omega_{\{1\}}(n,d)} \xi_{1^{(\mathbf{y})}} T_a^A(n,d) \xi_{1^{(\mathbf{x})}} = \bigoplus_{n,d \geq 0} T_a^A(n,d),$$

因此，$\mathbf{T}^{A,a}_{\{1\}}$ 可作为 (A,a) 的所有舒尔化的总括。更一般地，$\widetilde{\mathbf{T}}^{A,a}_I$ 是 $\bigoplus_{n,d\geq 0} T_a^A(n,d)$ 的一个幂等元截断。

定理 7.4.2. 我们有一个幺半超范畴之间的等价

$$\chi : \mathbf{T}_I^{A,a} \to \mathbf{Web}_I^{A,a}$$

由对象上的单位映射给出，而 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}} \mapsto \eta_{\boldsymbol{\mu}}$ 则作用于态射。

证明。定理 7.3.3 的同构 w 和定理 6.9.1 的同构 ι_I 给出了一个同构

$$\mathbf{T}^{A,a}_{\{1\}}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}) = \widetilde{\eta}_{\mathbf{j}^{(\mathbf{y})}} T_a^A(n,d) \widetilde{\eta}_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}} \xrightarrow{w^{-1}} \eta_{\mathbf{j}^{(\mathbf{y})}} W^{A,a}_{n,d} \eta_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}} = {}_I\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\}}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}) \xrightarrow{\iota_I^{-1}} \mathbf{Web}_I^{A,a}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$$

对每个 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})} \in \Omega_I$，它将 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}} \mapsto \eta_{\boldsymbol{\mu}}$ 映射到……，因此函子 χ 定义良好且全忠实。χ 保持幺半结构这一点可由以下观察得出。令 $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})})$ $\boldsymbol{\nu} \in \mathrm{M}(\mathbf{k}^{(\mathbf{z})}, \mathbf{m}^{(\mathbf{w})})$，其中 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}, \in \Omega_I(n_1, d_1)$，$\mathbf{k}^{(\mathbf{z})}, \mathbf{m}^{(\mathbf{w})} \in \Omega_I(n_2, d_2)$，通过设定 $\omega_{r,s}(b) = \mu_{r,s}(b)$（对 $r,s \in [1,n_1]$），以及 $\omega_{r+n_1,s+n_1}(b) = \nu_{r,s}(b)$（对 $r,s \in [1,n_2]$），来定义 $\boldsymbol{\omega} \in \mathrm{M}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}\mathbf{k}^{(\mathbf{z})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}\mathbf{m}^{(\mathbf{w})})$。接下来不难验证 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\mu}} \bar{*} \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\nu}} = \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\eta_{\boldsymbol{\mu}} \otimes \eta_{\boldsymbol{\nu}} = \eta_{\boldsymbol{\omega}}$，从而得到结论。□

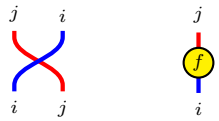
8. The wreath category

8.1. 花环范畴 I。现在，我们回到这样的假设：$(A,a)_I$ 是一个良对，其中I 不一定是有限的。

定义 8.1.1。花环范畴 Wr_I^A 是按如下方式定义的 $\mathbb{K}$-线性严格幺半超范畴。其对象由对象 i 对于 $i\in I$ 按幺半方式生成。于是有

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Wr}_I^A)=\left\{\mathbf{i}:=i_1\otimes\cdots\otimes i_t \mid t\in\mathbb{Z}^{\geq 0},\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_t)\in I^t\right\}.$$

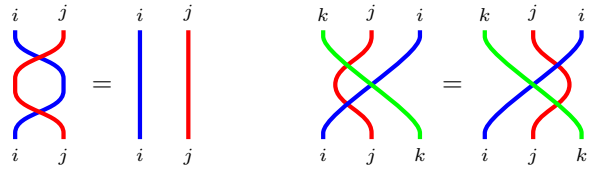
Wr_A 的生成态射由以下图表示：



(8.1.1)

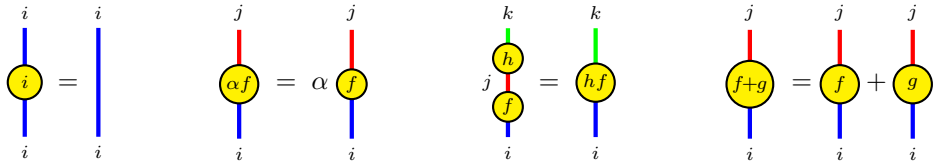
对于 i、$j\in I$、$f\in jAi$。交叉的奇偶性为 0，而 f 贴片的奇偶性为 f。态射满足以下关系：

Coxeter关系。对于所有 i、j、$k\in I$：



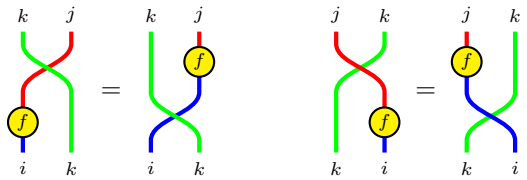
(8.1.2)

Coupon 关系。对于所有 i、j、$k\in I$、f、$g\in jAi$、$h\in kAj$、$\alpha\in\mathbb{K}$：



(8.1.3)

A-交织关系。对于所有 i、j、$k\in I$、$f\in jAi$：



(8.1.4)

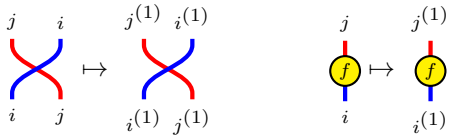
令 $\mathbf{Web}^{A,a}_{I,\text{细}}$ 为 $\mathbf{Web}^{A,a}_{I}$ 的满幺半子范畴，由“细股”组成；也就是说，它是由对象 $\{i^{(1)}\mid i\in I\}$ 生成的全子范畴，使得

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Web}^{A,a}_{I,\text{thin}})=\left\{i_1^{(1)}\otimes\cdots\otimes i_t^{(1)}\mid t\in\mathbb{Z}^{\geq 0},i_1,\ldots,i_t\in I\right\}.$$

命题 8.1.2. 存在一个幺半超范畴的同构，

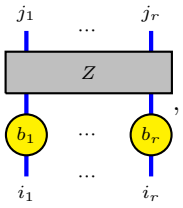
$$\iota_{\mathrm{Wr}}:\mathbf{Wr}_I^A\to\mathbf{Web}^{A,a}_{I,\text{thin}},$$

其在生成对象上的映射由 $i \mapsto i^{(1)}$ 给出，并且



对于所有的 i、$j \in I$、$f \in jAi$，关于生成态射。

证明。由 (3.1.8) 和 (3.1.9) 以及推论 4.2.7 可知，ι_{Wr} 是良定义的。根据 $\mathbf{Wr}_I^A$ 中的定义关系，容易看出，对于 $\mathbf{i} = i_1 \otimes \cdots \otimes i_r$、$\mathbf{j} = j_1 \otimes \cdots \otimes j_r \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Wr}_I^A)$，态射空间 $\mathbf{Wr}_I^A(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ 由以下形式的图张成：



(8.1.5)

对于某些 $\omega \in \mathfrak{S}_r$、$b_k \in {}_{j_{\omega(k)}}\mathbf{B}_{i_k}$，且对于所有 $k \in [1, r]$、Z，其仅由交叉组成，并将下方第 k 股线连到上方第 $\omega(k)$ 股线。但是，根据推论 6.6.3，这些态射的像构成 $\mathbf{Web}^A$，I ^{a}，$\mathrm{thin}(\iota_{\mathrm{Wr}}\mathbf{i}\ \iota_{\mathrm{Wr}}\mathbf{j})$ 的 $\mathbb{K}$-基，因此 ι_{Wr} 是同构。□

8.2. 花环范畴，II。我们给出花环积范畴的另一种表述。固定$d \geq 0$。令$\mathcal{W}_I^A(d)$为如下定义的$\mathbb{K}$-线性超范畴。其对象是集合中的元素

$$\{\mathbf{i} = 1_{\mathfrak{S}_d} \otimes i_1 \otimes \cdots \otimes i_d \mid i_1, \ldots, i_d \in I\}.$$

对于对象 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$，令

$$\mathcal{W}_I^A(d)(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \sigma \otimes j_{\sigma 1} A i_1 \otimes \cdots \otimes j_{\sigma d} A i_d.$$

齐次态射上的复合由以下规则给出

$$(\sigma \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_d) \circ (\tau \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_d) = (-1)^{\langle \tau; (f_1, \ldots, f_d) \rangle} \sigma\tau \otimes (f_{\tau(1)} g_1) \otimes \cdots \otimes (f_{\tau(d)} g_d),$$

其中符号取自第 5.1 节中的带符号位置置换作用。令

$$\mathcal{W}_I^A = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{W}_I^A(d).$$

这是一个通过拼接构成的幺半超范畴。具体而言，给定 $d_1, d_2 \geq 0$，令 $\iota = \iota_{d_1, d_2}$：$\mathfrak{S}_{d_1} \times \mathfrak{S}_{d_2} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{d_1 + d_2}$ 为如下嵌入：它以显然的方式将 $\mathfrak{S}_{d_1} \times \mathfrak{S}_{d_2}$ 识别为 $\mathfrak{S}_{d_1 + d_2}$ 的一个杨子群。于是，对象 $\mathbf{i} = 1_{\mathfrak{S}_{d_1}} \otimes i_1 \otimes \cdots \otimes i_{d_1}$ 和 $\mathbf{j} = 1_{\mathfrak{S}_{d_2}} \otimes j_1 \otimes \cdots \otimes j_{d_2}$ 的张量积为

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{j} = 1_{\mathfrak{S}_{d_1 + d_2}} \otimes i_1 \otimes \cdots \otimes i_{d_1} \otimes j_1 \otimes \cdots \otimes j_{d_2}.$$

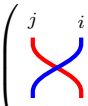
态射的张量积为

$$(\sigma \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_{d_1}) \otimes (\tau \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_{d_2}) = \iota(\sigma, \tau) \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_{d_1} \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_{d_2}.$$

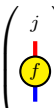
定理 8.2.1。存在一个幺半 k-线性超范畴之间的等价

$$\mathbf{Wr}_I^A \cong \mathcal{W}_I^A.$$

证明。令 $s_1 \in \mathfrak{S}_2$ 为非平凡元素。检查定义 8.1.1 中给出的关系可知，存在一个 $\mathbb{K}$-线性幺半函子 H : $\mathrm{Wr}_I^A \to \mathcal{W}_I^A$，其定义如下。在生成对象上的定义为：对 A 的所有对象 i， $H(i) = 1_{\mathfrak{S}_1} \otimes i$ 。在态射上，若 $f \in jAi$，则该函子在 Wr_I^A 的生成态射上的定义为

$H\Bigg($  $\Bigg) = s_1 \otimes (1_i \otimes 1_j) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_I^A}(1_{\mathfrak{S}_d} \otimes i \otimes j, 1_{\mathfrak{S}_d} \otimes j \otimes i)$,

and

$H\Bigg($  $\Bigg) = 1_{\mathfrak{S}_0} \otimes f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_I^A}(1_{\mathfrak{S}_d} \otimes i, 1_{\mathfrak{S}_d} \otimes j)$.

显然，该函子本质上是满射的且是满的。结合命题 8.1.2 和推论 6.6.3，可得到 Wr_A的态射空间的基。将 H 应用于这些基，可得到$\mathcal{W}_I^A$的态射空间的基。因此， H 是范畴等价。□

对于每个 $d \geq 0$，考虑 $\mathrm{Wr}_I^A(d)$ 的全子范畴 Wr_I^A，它由所有对象组成

$$I^{\otimes d} := \{\mathbf{i} = i_1 \otimes \cdots \otimes i_d \mid i_1, \ldots, i_d \in I\}.$$

由于 Wr_I^A中的每个态射都保持张量积中对象的数量不变，我们有如下分解

$$\mathbf{Wr}_I^A = \bigoplus_{d \geq 0} \mathbf{Wr}_I^A(d).$$

相应地，对于每个 $d \geq 0$，都有一个超代数

$$\mathrm{Wr}_I^A(d) = \bigoplus_{\mathbf{i},\mathbf{j} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Wr}_I^A(d))} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Wr}_I^A}(\mathbf{i}, \mathbf{j}).$$

令 $\mathfrak{S}_d \wr A$ 表示花环积超代数。由于 A 具有一个指定幂等元集合I，因此 $\mathfrak{S}_d \wr A$ 也有相应的指定幂等元集合：

$$1_{\mathfrak{S}_d} \otimes I^{\otimes d} = \{1_{\mathfrak{S}_d} \otimes i_1 \otimes \cdots \otimes i_d \mid i_1, \ldots, i_d \in I\}.$$

前一定理中的等价限制后给出等价 $\mathrm{Wr}_I^A(d) \cong \mathcal{W}_I^A(d)$，对每个$d \geq 0$ 均成立，并导出以下结果。

推论 8.2.2。对于每个 $d \geq 0$，都有一个幂等化超代数之间的偶同构 ，

$$\psi_{A,d} : \mathrm{Wr}_I^A(d) \to \mathfrak{S}_d \wr A.$$

9. Fullness of representations

9.1. 定义表示。用 $\mathrm{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)$ 表示由形如 ${}_{i_1}V_n \otimes \cdots \otimes {}_{i_d}V_n$ 的右 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$-超模构成的满幺半子范畴，其中 $d \geq 0$ 和 i_1、……、$i_d \in I$ 满足相应条件。对于固定的 d，令 $\mathrm{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)(d)$ 表示由上述形式中张量积恰好含有 d 项的对象构成的全子范畴。

我们将以下函子视为所讨论的图表范畴的定义表示：

$$G_n : \mathbf{Web}_I^{A,a} \to \mathrm{mod}_{\mathcal{S}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A),$$
$$F_n := G_n \circ \iota_{\mathrm{Wr}} : \mathbf{Wr}_I^A \to \mathrm{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A),$$

$$F_n^d : \mathbf{Wr}_I^A(d) \to \mathrm{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)(d),$$

其中， G_n 来自定理 5.5.1， ι_{Wr} 来自命题 8.1.2。显然，函子 G_n、F_n 和 F_n^d 本质上是满射的。

9.2. 网范畴的满性。以下结果表明，在特征零域上工作时，可以将问题化简为细股。

命题 命题 9.2.1。假设 $\mathbb{K}$ 是特征零域。给定 $n \geq 0$，函 r,

$$G_n : \mathbf{Web}_I^{A,a} \to \mathrm{mod}_{\mathcal{S}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A),$$

是满的，当且仅当该函子

$$F_n : \mathbf{Wr}_I^A \to \mathrm{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A),$$

是满的。

证明。证明中，令 $\widehat{G}_n : \mathsf{Web}^{A,I}{}^{a}{}_{,\text{薄}} \to \mathsf{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)$ 为 G_n 的限制。由于 ι_{Wr} 是一个 $\widehat{}$ $\widehat{}$等价， F_n 是满的，当且仅当 G_n 是满的。若 G_n 是满的，那么显然，将 G_n 限制到一个$\widehat{}$满子范畴后仍然是满的。另一方面，假设 G_n 是满的。利用第 6.1 节的展开映射和收缩映射的标准论证表明， G_n 也必定是满的。具体而言，展开映射和收缩映射连同引理 6.1.1 建立了一个交换图，如 [15, 引理 6.7.1] 中所示，随后将 [15, 定理 6.7.2] 证明中的论证稍作调整即可用于此处。□

9.3. 花环范畴的满性。考虑

$$\bigoplus_{\mathbf{i}\in\mathbf{Wr}_I^A(d)} F_n^d(\mathbf{i}) = \bigoplus_{\mathbf{i}=i_1\otimes\cdots\otimes i_d\in I^{\otimes d}} i_1V_n\otimes\cdots\otimes i_dV_n \cong V_n^{\otimes d}. \tag{9.3.1}$$

这是一个左 $\mathbf{Wr}_I^A(d)$-超模，并且根据$\psi_{A,\ d}$推论 8.2.2，它是一个左 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模。此作用与在 $V_n^{\otimes d}$上的作用一致，其中 $A^{\otimes d}$ 通过左乘作对角作用，而 $\mathfrak{S}_d$ 通过对张量因子进行带符号置换而作用。此外，此作用还与$\mathfrak{gl}_n(A)$通过右矩阵乘法给出的右作用可交换（其中我们将 $V_n = A^{\oplus n}$ 写成行向量）。

Let

$$\rho_{n,d}^A : \mathfrak{S}_d \wr A \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\left(V_n^{\otimes d}\right)$$

称其为相应的表示。我们称一个 $\mathbb{K}$-线性映射 f：若存在一个有限集 $J \subseteq I^{\otimes d}$，使得当 $\mathbf{i} \notin J$时 $f(F_n^d$ (i)) $= 0$，并且 f的像包含于$\bigoplus_{\mathbf{j}\in J}^{\mathbb{K}} F_n^d$(j)中，则称其关于 I有限。我们用 $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}\left(V_n^{\otimes d}\right)^{\mathrm{fin}}$表示所有有限映射构成的$\mathbb{K}$-超子代数，并注意到它包含 $\rho_{n,d}^A$的像。

命题 9.3.1. 对于任意固定的 $n \geq 0$，函子

$$F_n : \mathbf{Wr}_I^A \to \mathrm{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)$$

是满函子，当且仅当超代数映射

$$\rho_{n,d}^A : \mathfrak{S}_d \wr A \to \mathrm{End}_{U(\mathfrak{gl}_n(A))}\left(V_n^{\otimes d}\right)^{\mathrm{fin}}$$

对所有 $d \geq 0$ 都是满射。

证明。我们首先断言：如果从 $\mathsf{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)(d_1)$ 中的一个对象到 $\mathsf{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)(d_2)$ 中的一个对象存在非零态射，那么 $d_1 = d_2$。对于 A 中的任意有限集元素，都存在一个 $e \in A$，它由指定幂等元之和给出；当从右侧乘以这些元素时，该 $e \in A$ 对这些元素的作用是单位元。反过来，给定 $\mathsf{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)(d)$ 中一个对象的固定向量，就存在一个 $e \in A$，使得 $\sum_{r=1}^n E^e_{r,\ r} \in \mathfrak{gl}_n(A)$ 通过标量 $d \in$ 作用于该向量。现在，设有一个对象 X，它属于 $\mathsf{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n($ $A)(d_1)$，以及一个对象 Y，它属于 $\mathsf{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)(d_2)$，并且存在一个非零的 $\mathfrak{gl}_n(A)$-超模同态 f： $X \to Y$。取

$x \in X$，使得 $f(x) \neq 0$。于是存在 $e \in A$，使得 $\sum_{r=1}^{n} E_{r,r}^{e}$ 将 x 缩放为 d_1，并将 $f(x)$ 缩放为 d_2。因此，如所声称的，$d_1 = d_2$。

由上一段可知，存在一个分解

$$\mathrm{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A) = \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A)(d).$$

因此，函子 F_n 是满函子，当且仅当对每个 $d \geq 0$，函子 F_n^d 都是满函子。然而，根据本节开头的讨论，这当且仅当诱导的超代数映射

$$\rho_{n,d}^{A} : \mathfrak{S}_d \wr A \to \mathrm{End}_{U(\mathfrak{gl}_n(A))}\left(V_n^{\otimes d}\right)^{\mathrm{fin}}$$

是满射。 □

结合定理 11.2.2 与命题 9.2.1 和 9.3.1，可得以下情形，其中已知定义表示 G_n 和 F_n 是满的。

命题 9.3.2. 若 $\mathbb{K}$ 是特征零域，且 A 是有限维半单超代数，则函子

$$G_n : \mathbf{Web}_I^{A,a} \to \mathrm{mod}_{\mathcal{S}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A),$$
$$F_n : \mathbf{Wr}_I^{A} \to \mathrm{mod}_{\mathcal{T}}\text{-}\mathfrak{gl}_n(A),$$

是满的。

10. The category U($\mathfrak{gl}_n(A)$)

10.1. 范畴 U($\mathfrak{gl}_n(A)$)。本节中我们假设 $(A, a)_I$ 是一个良对，I 是有限的，并且$1 = \sum_{i\in I} i$。令 Λ_n 为以基 $\{\varepsilon_r \mid r \in [1, n]\}$为基、秩为 n 的自由 $\mathbb{N}^{\geq 0}$-模。对于 $\lambda \in \Lambda_n$，我们用 λ_r 表示 ε_r 在 λ中的系数。

定义 10.1.1. 令 U($\mathfrak{gl}_n(A)$) 为由对象 Λ_n 以及由符号生成的态射构成的 $\mathbb{K}$-线性超范畴

$$\{\mu E_{r,s}^{f}\lambda : \lambda \to \mu \mid r, s \in [1, n],\ \lambda, \mu \in \Lambda,\ \mu + \varepsilon_s = \lambda + \varepsilon_r,\ f \in A\}.$$

当态射的定义域/陪域是任意的或可由上下文明确得知时，我们通常省略符号 λ 和 μ，写作 $E_{r,s}^{f}$。态射的奇偶性由 $E_{r,s}^{f} = \bar{f}$给出。U($\mathfrak{gl}_n(A)$) 中的态射满足以下关系，其中 $\lambda \in \Lambda_n$、r、s、p、$q \in [1, n]$均为可容许的，且 f、$g \in A$为齐次：

(1) $E_{r}^{kf}{}_{,s} = kE_{r,s}^{f}$ 对所有 $k \in \mathbb{K}$ 成立。(2) $E_{r}^{f+g}{}_{,s} = E_{r}^{f}{}_{,s} + E_{r}^{g}{}_{,s}$。(3) $E_{r,r}^{1}\lambda = \lambda_r \mathrm{id}_\lambda$。(4) $E_{p,q}^{f}E_{r,s}^{g} - (-1)^{\bar{f}\bar{g}}E_{r,s}^{g}E_{p,q}^{f} = \delta_{q,r}E_{p}^{fg}{}_{,s} - (-1)^{\bar{f}\bar{g}}\delta_{p,s}E_{r}^{gf}{}_{,q}$。(5) $(E_{r,s}^{f})^2 = \delta_{r,s}E_{r}^{f^2}{}_{s}$，若 $\bar{f} = \bar{1}$。

注释 10.1.2. 如果 $\mathbb{K}$ 是一个环，且 2 可逆，那么关系 (5) 是多余的，因为当 $\bar{f} = \bar{1}$ 时，(4) 蕴含 $2(E_{r,s}^{f})^2 = 2\delta_{r,s}E_{r}^{f^2}{}_{s}$。

10.2. 从 $\dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))$ 到 $\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\},n}$ 的函子。令 $\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\},n}$ 为 $\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\}}$ 的全子范畴，其对象为 $1^{(\lambda_1)}\dots 1^{(\lambda_n)}$，其中 $\lambda=\sum\lambda_i\varepsilon_i\in\Lambda_n$。本节中，由于所有线股都单调着色为 1，为了节省空间，我们常将对象 $1^{(x)}\in\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\},n}$ 记作 x，将 $\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\},n}$ 中的对象 $1^{(\lambda_1)}\dots 1^{(\lambda_n)}$ 记作 λ。

设 $t\in\mathbb{Z}_{>0}$、r、$s\in[1,n]$、$\lambda\in\Lambda_n$ 和 $f\in A^{(t)}$。我们定义以下相关态射于 $\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\},n}$ 中：

$$e^{(f,t)}_{[r,s],\lambda}:=\begin{cases}
\begin{array}{ccccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_r+t & & \lambda_{r+1} & & \lambda_{s-1} & \lambda_s-t & & \lambda_n\\
| & \cdots & | & & \cdots & & | & | & \cdots & |\\
\lambda_1 & & \lambda_r & & \lambda_{r+1} & & \lambda_{s-1} & \lambda_s & & \lambda_n
\end{array}
\ \text{if } r<s;\\[2ex]
\begin{array}{ccccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_s-t & & \lambda_{s+1} & & \lambda_{r-1} & \lambda_r+t & & \lambda_n\\
| & \cdots & | & & \cdots & & | & | & \cdots & |\\
\lambda_1 & & \lambda_s & & \lambda_{s+1} & & \lambda_{r-1} & \lambda_r & & \lambda_n
\end{array}
\ \text{if } r>s;\\[2ex]
\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_{r-1} & & \lambda_r & & \lambda_{r+1} & & \lambda_n\\
| & \cdots & | & & \cdots & & | & \cdots & |\\
\lambda_1 & & \lambda_{r-1} & & \lambda_r & & \lambda_{r+1} & & \lambda_n
\end{array}
\ \text{if } r=s.
\end{cases}$$

我们有时 省略 λ 下标，并在定义域为一般情形或可从上下文明确时写作 $e^{(f,t)}_{[r,s]}$。

定理 10.2.1. 对每个 $n\geq 0$，存在一个函子

$$W_n:\dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))\to\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\},n}$$

在对象上的定义为

$$W_n\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\varepsilon_i\right)=1^{(\lambda_1)}\cdots 1^{(\lambda_i)}$$

在态射上的定义为

$$W_n\left(E^f_{r,s}\lambda\right)=e^{(f,1)}_{[r,s],\lambda}.$$

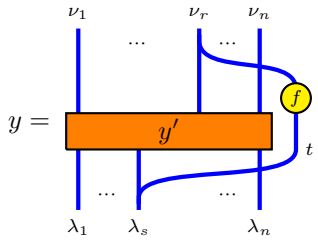
证明。我们检查定义 10.1.1 中的定义关系在 W_n 下保持不变。事实上，(1) 由 (3.1.8) 得出，(2) 由 (3.1.9) 得出，(3) 由 (3.1.4) 得出，(4) 由 (3.1.2)、(3.1.3) 和 (3.1.9) 得出，(5) 则由 (3.1.3) 和 (3.1.10) 得出。□

引理 10.2.2. 令 $k\in\mathbb{Z}_{>0}\cup\{\infty\}$，并设

$$Y^n_k:=\left\{e^{(f,t)}_{[r,s],\lambda}\;\middle|\;\lambda\in\Lambda_n,r,s\in[1,n],1\leq t\leq k,f\in A^{(t)}\right\}. \tag{10.2.1}$$

令 S^n_k 表示 $\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\},n}$ 的 $\Bbbk$ 线性子范畴，它包含 $\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\},n}$ 中的所有对象，且其态射由 Y^n_k 生成。对于所有 λ、$\nu\in\Lambda_n$、r、$s\in[1,n]$、$1\leq t\leq k$、$f\in A^{(t)}$ 和 $y'\in S^n_k$（$\lambda-$

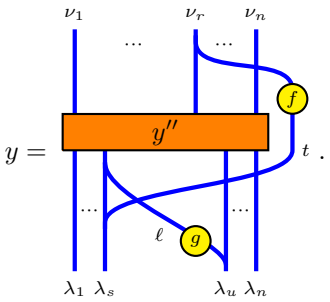
$t\varepsilon_s$、$\nu - t\varepsilon_r$），态射



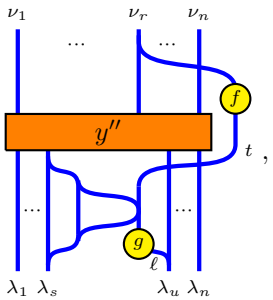
属于 $S_k^n(\lambda, \nu)$。

证明。我们可以假设 y' 本身是 Y_1^n 中 m 个态射的复合。首先注意，若 $t = 0$，则结论显然成立；若 $m = 0$，则 $y = e_{[r,s]}^{(f,t)}$，$\lambda \in Y_k^n$，因此现在作归纳假设，设 $m > 0$、$t > 0$，且当 $m' < m$ 或 $t' < t$ 时结论成立。

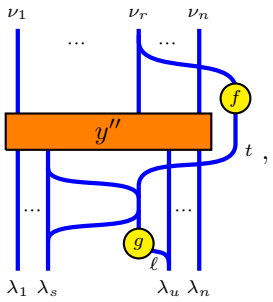
由于 $m > 0$，我们可以将 $y' = y''e_{[v,u]}^{(g,\ell)}$ 写成某些 v、$u \in [1, n]$、$1 \leq \ell \leq k$、$g \in A^{(\ell)}$，其中 y'' 是来自 Y_k^n 的 $m-1$ 个态射的复合。若 $v \neq s$，则 $e_{[v,u]}^{(g,\ell)}$ 可以在 y 中第 s 条线股的分裂下方自由移动。随后可利用关于 m 的归纳假设完成该结论的证明。因此现在假设 $v = s$，于是 $y' = y''e_{[s,u]}^{(g,\ell)}$，并利用 (3.1.2)、(3.1.11) 和 (3.1.12) 可写为：



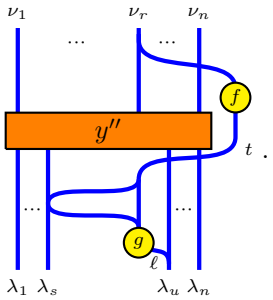
（注意，即使在 $u = s$ 时，上述等式仍然成立。）现在，应用 (3.2.2)，y 可以改写为如下形式的图的 $\mathbb{K}$-线性组合



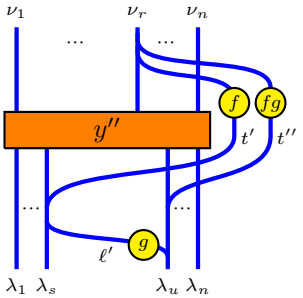
它可能 n，利用 (3.1.2) 和 (3.1.4)，可写成如下形式的图的 $\mathbb{K}$-线性组合



根据 (3.2.1)，它又可以写成如下形式的图的 $\mathbb{K}$ 线性组合：



最后，应用 (3.1.2) 和 (3.1.11)，我们可以将此类图写成如下形式的图的 $\mathbb{K}$ 线性组合：



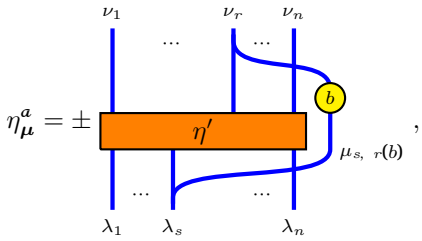
其中 $t'+t''=t$和 $\ell'+t''=\ell$。如果 $t'=0$或 $t''=0$，则根据对 m的归纳假设，这些图属于 $S_k^n(\lambda,\nu)$。如果 t'，$t''>0$，那么将对 t 的归纳假设应用于 t'-加厚线股，随后应用于 t''-加厚线股，可知这些图属于 $S_k^n(\lambda,\nu)$。这就完成了归纳步骤和引理的证明。□

定理 10.2.3。$\mathrm{Web}^{A,\overset{a}{\{1\}},n}$ 中的态射在复合下由 (10.2.1) 中的集合 Y_∞^n 生成。如果 $\mathbb{K}$ 是特征零域，那么 $\mathrm{Web}^{A,\overset{a}{\{1\}},n}$ 中的态射在复合下由集合生成

$$\widetilde{Y}_1^n := \left\{ e^{(1,1)}_{[r,s],\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_n, r,s \in [1,n] \right\} \cup \left\{ e^{(f,1)}_{[r,r],\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_n, r \in [1,n], f \in A \right\} \subseteq Y_1^n.$$

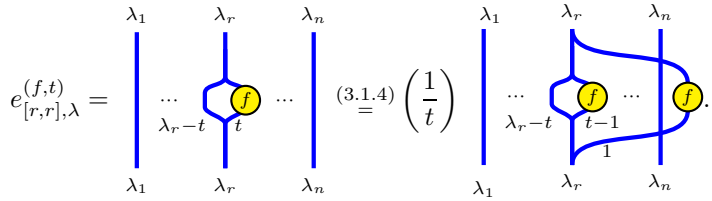
证明。对于第一个断言，由命题 6.5.1 可知，$\mathrm{Web}^{A,\overset{a}{\{1\}},n}$ 中的态射空间由形如 $\eta^a_{\boldsymbol{\mu}}$ 的元素张成。我们通过对 $d=|\lambda|$ 使用归纳法，证明这些张成元素属于集合 S^n_∞。设 $\eta^a_{\boldsymbol{\mu}}$，其中 $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}(\lambda,\nu)$，且 $|\lambda|=d$。若 $d=0$，则 $\eta^a_{\boldsymbol{\mu}}$ 是恒等态射。

因此，我们可以假设 $d>0$，并且断言对所有 $d'<d$ 都成立。于是存在某些 $r,s\in[1,n]$，$b\in\mathrm{B}$，使得 $\mu_{s,\,r}(b)>0$。因此，在 $\eta^a_{\boldsymbol{\mu}}$ 中将带有贴片 b、厚度为 μ_s 的线股 b 向右移开，r 后，我们可以写成



其中，对于某个 $\boldsymbol{\mu}'\in\mathrm{M}(\lambda-\mu_{s,\,r}(b)\varepsilon_s,\nu-\mu_{s,\,r}(b)\varepsilon_r)$，有 $\eta'=\eta^a_{\boldsymbol{\mu}'}$。根据关于 d 的归纳假设，我们有 $\eta'\in S^n_\infty$，因此由引理 10.2.2 得到 $\eta^a_{\boldsymbol{\mu}}\in S^n_\infty$。至此，完成了上述第一个断言的归纳步骤和证明。

对于第二个断言，假设 $\Bbbk$ 是特征零域。我们首先证明，Y^n_∞ 中的态射也是 S^n_1 中的态射。注意，当 $r\neq s$ 时，通过反复应用 (3.1.4)，我们有 $e^{(f,t)}_{[r,s]}=\frac{1}{t!}(e^{(f,1)}_{[r,s]})^t$，因此 $e^{(f,t)}_{[r,s]}\in S^n_1$。接下来，我们对 t 使用归纳法证明 $e^{(f,t)}_{[r,r]}\in S^n_1$。事实上，对于 $t>1$，我们有：



注意，最后这个图的中心部分是 $e^{(f,t-1)}_{[r,r],\,\lambda-\varepsilon_r}$，根据归纳假设，它属于 S^n_1。但由引理 10.2.2 可得 $e^{(f,t)}_{[r,r],\,\lambda}\in S^n_1$。

因此，当 $\Bbbk$ 是特征为 $\tilde{}$零的域时，$\mathbf{Web}^{A,\,a}_{\{1\},\,n}$ 在复合运算下由 Y^n_1生成。为了证明它由更小的集合 Y^n_1生成，我们注意到，对于所有 $f\in A$、r、$s\in[1,n]$，都有

$$e^{(f,1)}_{[r,s]}=e^{(1,1)}_{[r,s]}e^{(f,1)}_{[s,s]}-e^{(f,1)}_{[s,s]}e^{(1,1)}_{[r,s]},$$

这是由 (3.1.3) 的应用得到的。 □

以下结论是前一结果的直接推论。

推论 10.2.4. 设 $\Bbbk$ 是特征零域。那么函子

$$W_n:\dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))\to\mathbf{Web}^{A,a}_{\{1\},n}$$

对所有 $n\geq 0$ 都是满的

11. Polynomial representations and Schur–Weyl duality

11.1. 多项式表示。本节中，我们假设（A，a）$_I$ 是一个良对，I 是有限的，并且$1=\sum_{i\in I}i$。设$_{\mathbb{K}}$ 是一个赋有含单位环同态 $\Bbbk\to\mathbb{K}$的域。

回想第 9.3 节，$V_n^{\otimes\Bbbk}$是一个 $(\mathfrak{S}_d\wr A,U(\mathfrak{gl}_n(A))$-双超模。因此，经过基变换后，存在一个超代数同态

$$\zeta^d_{n,\,\mathbb{K}}:U(\mathfrak{gl}_n(A_{\mathbb{K}}))\to S^A(n,d)_{\mathbb{K}}.$$

L引理 11.1.1. 若$\mathbb{K}$ 的特征为零，则同态 $\zeta_{n,\mathbb{K}}^{d}$ 是满射 .

证明。考虑良对（A, $_{\mathbb{K}}\mathbf{1}$）$\{1\}$。首先，注意到 $S_{\mathbb{K}}{}^{1}(n,d)_{\mathbb{K}} = S(n,d)_{\mathbb{K}}$ 是普通舒尔代数。众所周知，相应的映射 $U(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})) \to S(n,d)_{\mathbb{K}}$ 是满射，因此 $\zeta_{n,\mathbb{K}}^{d}$ 在子代数 $U(\mathfrak{gl}_n(_{\mathbb{K}}1)) \subseteq U(\mathfrak{gl}_n(A))$上的限制，

$$\zeta_{n,\mathbb{K}}^{d} : U(\mathfrak{gl}_n(_{\mathbb{K}}1)) \to S_{\mathbb{K}}{}^{1}(n,d)_{\mathbb{K}},$$

是满射。

根据第 7.2 节给出的 $T^{A}{}_{\mathbb{K}}{}^{1}(n,d)$ 的定义，以及 $_{\mathbb{K}}$ 的特征为零这一事实，可知 $S^{A}(n,d)_{\mathbb{K}} = T^{A}{}_{\mathbb{K}}{}^{1}(n,d)_{\mathbb{K}}$。根据 [31, 定理 2], $T^{A}{}_{\mathbb{K}}{}^{1}(n,d)_{\mathbb{K}}$ 由 $\{\zeta_n^d(x) \mid x \in \mathfrak{gl}_n(A_{\mathbb{K}})\}$ 以及子超代数 $S_{\mathbb{K}}{}^{1}(n,d)_{\mathbb{K}}$ 生成。由于这两个集合都在 ζ_n^d的像中，结论得证。□

通过 $\zeta_{n,\mathbb{K}}^{d}$ 的膨胀，我们可以将右 $S^{A}(n,d)_{\mathbb{K}}$-超模范畴视为右 $U(\mathfrak{gl}_n(A_{\mathbb{K}}))$-超模范畴的一个子范畴，并称之为次数为 d 的多项式表示。当 $_{\mathbb{K}}$ 的特征为零时，前述结果意味着这是一个全子范畴。下文中我们将不再另行说明，直接将这两个范畴视为相同。

11.2. 舒尔–韦尔对偶。回忆第 9.3 节，$\rho_{n,d}^{A}$ 的像属于 $S^{A}(n,d)$ 的中心化子的有限部分：

$$\rho_{n,d}^{A} : \mathfrak{S}_d \wr A \to \mathrm{End}_{S^{A}(n,d)}\left(V_n^{\otimes d}\right)^{\mathrm{fin}}. \tag{11.2.1}$$

Let $_{\mathbb{K}}$ 设为一个 特征不等于二的代数闭域，并赋予一个含单位环同态 $_{\mathbb{K}} \to _{\mathbb{K}}$ 基变换至 后，存在一个超代数映射

$$\rho_{n,d}^{A_{\mathbb{K}}} : \mathfrak{S}_d \wr A_{\mathbb{K}} \to \mathrm{End}_{S^{A}(n,d)_{\mathbb{K}}}\left(V_{n,\mathbb{K}}^{\otimes d}\right)^{\mathrm{fin}} = \mathrm{End}_{T_a^{A}(n,d)_{\mathbb{K}}}\left(V_{n,\mathbb{K}}^{\otimes d}\right)^{\mathrm{fin}}. \tag{11.2.2}$$

我们注意到，$_{\mathbb{K}}$ 是一个整环，$V_n^{\otimes d}$是一个自由的$_{\mathbb{K}}$-超模，而 $T_a^{A}(n,d)$是$S^{A}(n,d)$的一个$_{\mathbb{K}}$-格。由此可得，$\mathrm{End}_{S^{A}(n,d)}(V_n^{\otimes d}) = \mathrm{End}_{T_a^{A}(n,d)}(V_n^{\otimes d})$，因此，经过基变换后，(11.2.2) 中给出的自同态代数等式成立。若对所有 $n,d \geq 0$，$\rho^{A_{\mathbb{K}}}{}_{n,d}$ 都是满射，我们就称A 在$_{\mathbb{K}}$ 上满足舒尔–韦尔对偶。根据命题 9.3.1，这等价于对所有 $n \geq 0$，函子 F_n 是满函子的。

注记 11.2.1. [19, 第 5.3] 节的结果表明，只要满足 $n \geq d$ 和 $|I| < \infty$，$\rho^{A_{\mathbb{K}}}{}_{n,d}$ 就是满射。

确定舒尔–韦尔对偶何时成立是一个有趣的问题，但超出了本文的范围。以下结果验证了它在一种涵盖许多重要情形的情况下成立。

定理 11.2.2. 设 $_{\mathbb{K}}$ 是特征为零的代数闭域，并配备含单位环同态 $_{\mathbb{K}} \to _{\mathbb{K}}$。若 $A_{\mathbb{K}}$ 是有限维半单 $_{\mathbb{K}}$-超代数，则关于 $_{\mathbb{K}}$上的 A，舒尔–韦尔对偶成立。

证明. 由于 $A_{\mathbb{K}}$ 是半单的，由备注 11.4.2 可知 $\mathfrak{S}_d \wr A_{\mathbb{K}}$ 也是半单的。由于 $S^{A}(n,d)_{\mathbb{K}} \cong \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d \wr A_{\mathbb{K}}}\left(V_{n,\ \mathbb{K}}^{\otimes d}\right)$，根据 [19, 引理 5.7], ，由有限维半单超代数的双中心化子定理，舒尔–韦尔对偶成立（例如，参见 [12, 命题 3.5]）。□

11.3. 有限维半单超代数的表示。本节余下部分中，我们假设 $_{\mathbb{K}}$ 是特征为零的代数闭域，且 A 是有限维且半单的。提醒读者，我们允许所有超模同态（不只是保奇偶的超模同态），并且按照我们的约定，映射写在作用的另一侧。

我们简要概述有限维超代数的表示论。详情可参见例如 [9, 12, 27]。我们将讨论左超模的情形，读者

可以轻易地将其转换为右超模和双超模的情形。给定一个 A-超模M，记 ΠM为 M的奇偶移位。为简便起见，我们有时写作 $M^{p|q} = M^{\oplus p} \oplus (\Pi M)^{\oplus q}$。若一个简单 A-超模 S 忽略$\mathbb{Z}_2$分次后仍为不可约 A-模，则称其为 M 型。简单超模 S 为 M 型，当且仅当 $\mathrm{End}_A(S)$ 是一维的。否则，$S \cong T \oplus \Pi T$对于某个简单 A-模 T成立。在这种情况下， S称为 Q 型。简单超模S 为 Q 型，当且仅当 $\mathrm{End}_A(S)$ 是二维的；此时 S 具有一个奇反 involution。另一种刻画方式是：若一个简单超模 S 中， S 与 ΠS 可通过偶映射同构，则它是 Q 型；若二者只能通过奇映射同构，则它是 M 型。

相应地，有限维简单超代数有两种类型： $m|n$ 维超空间 V 上的线性自同态所构成的超代数 $M(V)$；以及保持奇反 involution 的 $n|n$ 维超空间 V 上的线性自同态所构成的超代数 $Q(V)$。在这两种情形下， V 都是唯一的简单超模，分别属于 M 型和 Q 型。更一般地，若 A 是半单有限维含幺结合超代数，则超代数的阿廷–韦德伯恩定理指出

$$A \cong \left(\bigoplus_{V \text{ of type M}} M(V) \right) \oplus \left(\bigoplus_{V \text{ of type Q}} Q(V) \right) \tag{11.3.1}$$

作为超代数，其中直和遍历 A 的一组完备且不可约冗余的简单超模集合。若 V 属于 M 型，那么选取 m 个偶向量和 n 个奇向量构成的适当排序的齐次基后，我们可以写成

$$M(V) \cong M_{m|n}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \right\}. \tag{11.3.2}$$

其中 W、 X、 Y 和 Z 是 $\mathbb{K}$ 上的矩阵，且 W 为 $m \times m$， X 为 $m \times n$， Y 为 $n \times m$，Z 为 $n \times n$。于是$V \cong \mathbb{K}^{m|n}$，其中 $M(V)$ 通过左乘作用。若 V 属于 Q 型，那么选取 n 个偶向量和 n 个奇向量构成的适当排序的齐次基，且这些向量在奇反 involution 下相互交换，则有 $Q(V) \cong Q_n(\mathbb{K})$ 为形如 (11.3.2) 的矩阵，另需满足条件 $W = Z$ 和 $X = Y$。同样， $V \cong \mathbb{K}^{n|n}$。

若 A 和 B 是结合超代数，且 S 和 T 分别是简单的 A-超模和 B-超模，则张量积 $S \otimes T$ 是一个 $A \otimes B$-超模。若 S 和 T 都是 M 型，则 $S \otimes T$ 是一个 M 型简单 $A \otimes B$-超模。若 S 和 T 中恰有一个是 Q 型，则 $S \otimes T$ 是一个 Q 型简单 $A \otimes B$-超模。若 S 和 T 都是 Q 型，则对一个 M 型简单 $A \otimes B$-超模 $S \circledast T$，有 $S \otimes T \cong (S \circledast T) \oplus \Pi(S \circledast T)$（我们对记作 $S \circledast T$ 的简单子超模作一个任意但固定的选择）。在其他情况下，我们将 $S \circledast T$ 定义为简单 $A \otimes B$-超模 $S \otimes T$。对所有可能的简单超模 S 和 T 应用这一构造，便得到一组完备且不可约冗余的简单 $A \otimes B$-超模。

对于有限维半单超代数 A，令 Ξ_A 为简单左 A超模的指标集合，并将由 $\alpha \in \Xi_A$ 标记的简单对象记为 S^α 。为便于后续简化记号，有时我们会在 Ξ_A 上固定一个顺序，并按该顺序写作 $\Xi_A = \{1, \dots, \ell\}$。定义函数

$$\delta : \Xi_A \to \{0, 1\}$$

若 S^α 为 M 型，则定义为 $\delta(\alpha) = 0$；若 S^α 为 Q 型，则定义为 $\delta(\alpha) = 1$。

应用上文讨论的张量积规则可得

$$\left\{ S^{\boldsymbol{\alpha}} := S^{\alpha_1} \circledast S^{\alpha_2} \circledast \cdots \circledast S^{\alpha_d} \mid \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \Xi_A^d \right\} \tag{11.3.3}$$

是一个完整的、不可约冗余的简单对象 $A^{\otimes d}$-超模集合。此外，如果我们定义

$$\delta(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} 0, \text{ if } \sum_{k=1}^{d} \delta(\alpha_k) \text{ is even;} \\ 1, \text{ if } \sum_{k=1}^{d} \delta(\alpha_k) \text{ is odd,} \end{cases}$$

那么，如果 $\delta(\boldsymbol{\alpha}) = 0$， $S^{\boldsymbol{\alpha}}$ 就是 M 型；如果 $\delta(\boldsymbol{\alpha}) = 1$，则是 Q 型。

给定一个元素 $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ 和一个 $A^{\otimes d}$-超模 M，令 ${}^{\sigma}M = M$ 为一个带有 $A^{\otimes d}$ 作用的 $\mathbb{K}$-超模，其中该作用由 $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_d).m = ((a_1 \otimes \cdots \otimes a_d)\sigma)m$ 给出，而 σ 通过带符号位置置换作用于 $A^{\otimes d}$。存在一个 $A^{\otimes d}$-超模的偶同构，

$$ {}^{\sigma}\left(S^{\alpha_1} \otimes S^{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes S^{\alpha_d}\right) \cong S^{\alpha_{\sigma(1)}} \otimes S^{\alpha_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes S^{\alpha_{\sigma(d)}}.$$

因此，在将 (11.3.3) 中的某些简单超模替换为其奇偶移位后，存在一个 $A^{\otimes d}$-超模的偶同构，

$$ {}^{\sigma}S^{\boldsymbol{\alpha}} \cong S^{\sigma\cdot\boldsymbol{\alpha}}, \tag{11.3.4}$$

对所有 $\boldsymbol{\alpha} \in \Xi_A^d$ 和所有 $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ 均成立，其中 σ 通过位置置换从左侧作用于 Ξ_A^d .

11.4. 花环积超代数的表示。对于非负整数 n 和 d，令

$$\Lambda_+^0(n,d) \qquad \text{and} \qquad \Lambda_+^1(n,d)$$

分别表示至多有 n 个非零部分的 d 的分拆集合，以及至多有 n 个非零部分的 d 的严格分拆集合。回忆一下，若一个分拆没有重复的非零部分，则称其为严格分拆。对于固定的 $d \geq 0$，令

$$\Lambda_+^0(d) = \bigcup_{n\geq 0} \Lambda_+^0(n,d) \qquad \text{and} \qquad \Lambda_+^1(d) = \bigcup_{n\geq 0} \Lambda_+^1(n,d).$$

对所有 $\lambda \in \Lambda_+^0(d)$定义 $\delta(\lambda) = 0$ 。给定任意分拆 λ，令 $\ell(\lambda)$表示λ中非零部分的数量。对于 $\lambda \in \Lambda_+^1(d)$, 定义

$$\delta(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{if } \ell(\lambda) \text{ is even;} \\ 1, & \text{if } \ell(\lambda) \text{ is odd.} \end{cases}$$

回忆一下，我们在 Ξ_A 上固定了一个全序，并用它将 Ξ_A 与 $\{1,\ldots,\ell\}$等同起来。给定一个由 Ξ_A 索引的非负整数序列$\mathbf{n} = (n_1,\ldots,n_\ell)$以及固定的 $d \geq 0$，令

$$\Lambda_+^A(\mathbf{n},d) = \left\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(\ell)}) \;\middle|\; \lambda^{(\alpha)} \in \Lambda_+^{\delta(\alpha)}(n_\alpha,d_\alpha), \sum_{\alpha=1}^{\ell} d_\alpha = d \right\}$$

表示 Ξ_A索引的 d 的多重分拆集合，其中分拆 $\lambda^{(\alpha)}$ 至多有 n_α 个非零部分，并且当 S^α 为Q型时， $\lambda^{(\alpha)}$ 为严格分拆。令

$$\Lambda_+^A(d) = \bigcup_{\mathbf{n}\in_{\mathbb{N}\geq 0}^{\Xi_A}} \Lambda_+^A(\mathbf{n},d).$$

定义

$$\delta : \Lambda_+^A(d) \to \{0,1\}$$

by

$$\delta(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(\ell)}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \sum_{\alpha=1}^{\ell} \delta(\lambda^{(\alpha)}) \text{ is even;} \\ 1, & \text{if } \sum_{\alpha=1}^{\ell} \delta(\lambda^{(\alpha)}) \text{ is odd.} \end{cases}$$

若 A 是半单的，则对所有 $d \geq 0$， $\mathfrak{S}_d \wr A$ 都是半单的。因此，$\mathfrak{S}_d \wr A$ 的表示论归结为描述这些简单超模。Rosso–Savage 在 [36,命题 4.3] 中给出了这些简单超模，并证明它们由 $\Lambda_+^A(d)$ 编号。由于我们需要一种与他们略有不同的简单超模描述，因此这里给出另一种证明。

我们将不加说明地使用以下观察。设 M 是一个 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模。若将其通过限制视为 $A^{\otimes d}$-超模时， M 含有一个同构于 $S^{\boldsymbol{\alpha}} := S^{\alpha_1} \circledast \cdots \circledast S^{\alpha_d}$ $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \Xi_A^d$ $\sigma S^{\boldsymbol{\alpha}} \cong {}^{\sigma}S^{\boldsymbol{\alpha}} \cong S^{\sigma\cdot\boldsymbol{\alpha}}$ 的子模，其中某个 $(,,)$，则对任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_d$，它也含有相应子模。显然，Young子代数 $\mathfrak{S}_d \wr A$ 的超模也适用类似的结论。

11.4.1. Young子代数的简单超模。设 $S = S^{\alpha}$ 是一个简单对象 A 超模。设 $e \in A$ 是满足 $Ae \cong S$ 的极小偶幂等元。根据第11.3节给出的张量积规则，$S^{\circledast d}$ 是 $A^{\otimes d}$ 的简单超模，并且 $e^{\otimes d}(S^{\beta_1} \circledast \cdots \circledast S^{\beta_d}) \neq 0$ 当且仅当 $\beta_1 = \cdots = \beta_d = \alpha$。

令 e 表示偶幂等元 $1_{\Bbbk \mathfrak{S}_d} \otimes e^{\otimes d} \in \mathfrak{S}_d \wr A$。回顾幂等元截断理论（例如，参见 [23, 第 6 节2] 或 [9, 第 2] 节），存在一个正合函子

$$F_e : \mathbf{smod}\text{-}\mathfrak{S}_d \wr A \to \mathbf{smod}\text{-}e(\mathfrak{S}_d \wr A)e$$

由 $F_e M = \mathsf{e}M$ 给出。此函子在未被 F_e 消去的简单 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模与简单 $\mathsf{e}(\mathfrak{S}_d \wr A)\mathsf{e} \cong \mathfrak{S}_d \wr (eAe)$-超模之间定义了保持类型的双射。由上一段可知，对于简单 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模 T，当且仅当 T 包含一个与 $S^{\circledast d}$ 同构的简单 $A^{\otimes d}$-超模时，$F_e T \neq 0$。

考察第11.3节中给出的 A 的矩阵形式可知，若 S 为 M 型，则 $eAe \cong \Bbbk$ 且 $\mathsf{e}(\mathfrak{S}_d \wr A)\mathsf{e} \cong \mathfrak{S}_d \wr (eAe) \cong {}_{\Bbbk}\mathfrak{S}_d$，其中我们将 ${}_{\Bbbk}\mathfrak{S}_d$ 视为奇偶性为 $\bar{0}$ 的超代数。对于 $\lambda \in \Lambda^0_+(d)$，令 $D^{\lambda^{(\alpha)}}$ 为满足 $F_e D^{\lambda^{(\alpha)}} \cong {}_{\Bbbk}T^{\lambda^{(\alpha)}}$ 与简单 ${}_{\Bbbk}\mathfrak{S}_d$-模 ${}_{\Bbbk}T^{0,\lambda^{(\alpha)}}$ 偶同构的简单 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模；该模由分拆 λ 标记（视为集中于奇偶性 $\bar{0}$ 的超模）。那么集合

$$\left\{ D^{\lambda^{(\alpha)}} \mid \lambda \in \Lambda^0_+(d) \right\}$$

是一个完备的不可约冗余集，其中的简单对象 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模包含一个与 $S^{\circledast d}$ 同构的 $A^{\otimes d}$-子模。此外，当 $\delta(\lambda) = 0$ 时（即总是如此），它们都是 M 型。

另一方面，如果 S 是 Q 型，那么 $eAe \cong \mathsf{Cl}_1$，且 $\mathsf{e}(\mathfrak{S}_d \wr A)\mathsf{e} \cong \mathfrak{S}_d \wr (eAe) \cong \mathsf{Ser}_d$，即谢尔盖耶夫超代数。对于 $\lambda \in \Lambda^1_+(d)$，令 $D^{\lambda^{(\alpha)}}$ 为满足以下条件的简单对象 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模：$F_e D^{\lambda^{(\alpha)}}$ 与由严格分拆 λ 标记的简单对象 Ser_d-超模 $T^{1,\,\lambda^{(\alpha)}}$ 偶同构。那么集合

$$\left\{ D^{\lambda^{(\alpha)}} \mid \lambda \in \Lambda^1_+(d) \right\}$$

是一个完备的不可约冗余集，其中的简单对象 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模在视为 $A^{\otimes d}$-超模时包含一个与 $S^{\circledast d}$ 同构的子模。此外，当 $\delta(\lambda) = 0$ 时，$D^{\lambda^{(\alpha)}}$ 为 M 型；当 $\delta(\lambda) = 1$ 时，$D^{\lambda^{(\alpha)}}$ 为 Q 型。

现在，固定 d 的一个复合，$\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_\ell)$，其各部分由 Ξ_A 标记。令 $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} = \mathfrak{S}_{d_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{d_\ell}$ 为 $\mathfrak{S}_d$ 的相应杨子群，并令 $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A = {}_{\Bbbk}\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \otimes A^{\otimes d}$ 为 $\mathfrak{S}_d \wr A$ 的相应杨子代数。给定 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(\ell)}) \in \Lambda^A_+(d)$，使得 $(\|\lambda^{(1)}\|, \ldots, \|\lambda^{(\ell)}\|) = \mathbf{d}$，我们可以将第 11.3 节中的张量积规则应用于 $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A \cong (\mathfrak{S}_{d_1} \wr A) \otimes \cdots \otimes (\mathfrak{S}_{d_\ell} \wr A)$，从而得到

$$D^{\lambda^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\lambda^{(\ell)}}$$

是一个简单对象 $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A$-超模。此外，当 $\delta(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(\ell)}) = 0$ 时，它是 M 型；当 $\delta(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(\ell)}) = 1$ 时，它是 Q 型。

最后，注意到 $D = D^{\lambda^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\lambda^{(\ell)}}$ 包含一个与 $S^{\mathbf{d}} := (S^1)^{\circledast d_1} \circledast \cdots \circledast (S^\ell)^{\circledast d_\ell}$ 同构的简单 $A^{\otimes d}$-超模。事实上，由于所有与 $S^{\mathbf{d}}$ 同构的子超模之和在 $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A$ 的作用下保持不变，因此 D 的每个简单 $A^{\otimes d}$-子超模都与 $S^{\mathbf{d}}$ 同构。反过来，任何包含一个与 $S^{\mathbf{d}}$ 同构的简单 $A^{\otimes d}$-超模的简单 $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A$-超模，都与某个 $D^{\mu^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\mu^{(\ell)}}$ 同构，其中 $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda^A_+(d)$ 满足 $(\|\mu^{(1)}\|, \ldots, \|\mu^{(\ell)}\|) = (d_1, \ldots, d_\ell)$，

11.4.2. 花环积超代数的简单超模。对于 $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda^A_+(d)$，取 $\mathbf{d} = (\|\mu^{(1)}\|, \ldots, \|\mu^{(\ell)}\|)$，并令 $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}} \wr A = \mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A$。设

$$\left\{ D^{\boldsymbol{\mu}} = \mathfrak{S}_d \wr A \otimes_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}} \wr A} (D^{\mu^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\mu^{(\ell)}}) \mid \boldsymbol{\mu} \in \Lambda^A_+(d) \right\}. \tag{11.4.1}$$

我们断言，这是 $\mathfrak{S}_d \wr A$ 的一组完备且不可约冗余的简单超模。

在证明该断言之前，我们先作一个有助于证明的观察。固定 $\boldsymbol{\mu} = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(\ell)}) \in \Lambda_+^A(d)$，并令 $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_\ell) = (\|\mu^{(1)}\|, \dots, \|\mu^{(\ell)}\|)$。如上一小节所述，将 $D^{\mu^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\mu^{(\ell)}}$ 视为 $A^{\otimes d}$-超模时，它将是若干个 $S^{\mathbf{d}} = (S^1)^{\circledast d_1} \circledast \cdots \circledast (S^\ell)^{\circledast d_\ell}$ 的直和。因此，由于

$$D^{\boldsymbol{\mu}} = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_d / \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}} \sigma \otimes (D^{\mu^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\mu^{(\ell)}}) \cong \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_d / \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}} {}^{\sigma}(D^{\mu^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\mu^{(\ell)}}) \tag{11.4.2}$$

作为 $A^{\otimes d}$-超模的分解，因此可知，$S^{\beta_1} \circledast \cdots \circledast S^{\beta_d}$ 是 $D^{\boldsymbol{\mu}}$ 的一个 $A^{\otimes d}$直和项，当且仅当 $(\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathfrak{S}_d \cdot (1^{\|\mu^{(1)}\|}, \dots, \ell^{\|\mu^{(\ell)}\|})$。

Pro命题 11.4.1. 设 A 是一个有限维半单超代数。那么，该 t

$$\left\{ D^{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+^A(d) \right\}$$

是简单 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模的一个完备不可约冗余集；若 $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 0$，则 $D^{\boldsymbol{\lambda}}$ 为 M 型；若 $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 1$，则 $D^{\boldsymbol{\lambda}}$ 为 Q 型。

证明。首先，令 M 为一个简单对象 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模。我们可以选择一个由 d 索引的复合 Ξ_A，$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_\ell)$，使得 $S^{\mathbf{d}} = (S^1)^{\circledast d_1} \circledast \cdots \circledast (S^\ell)^{\circledast d_\ell}$ 作为 M 的一个 $A^{\otimes d}$- 子超模出现。由于 $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A$ 是半单超代数，第 11.4.1 节末尾的讨论表明，存在一个 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(\ell)}) \in \Lambda_+^A(d)$，其中 $(\|\lambda^{(1)}\|, \dots, \|\lambda^{(\ell)}\|) = \mathbf{d}$，使得 $D^{\lambda^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\lambda^{(\ell)}}$ 作为 M 的一个 $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} \wr A = \mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A$-子超模出现。根据弗罗贝尼乌斯互反律以及 M 的简单性，存在一个齐次满射 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模同态

$$D^{\boldsymbol{\lambda}} \twoheadrightarrow M.$$

简言之，每个简单的 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模都是某个 $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+^A(d)$ 的 $D^{\boldsymbol{\lambda}}$ 的商模。

接下来，我们通过研究 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d \wr A}(D^{\boldsymbol{\lambda}}, D^{\boldsymbol{\mu}})$，证明 (11.4.1) 构成一个简单 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模的不可约冗余集。显然，若要存在非平凡同态，则 $D^{\boldsymbol{\lambda}}$ 和 $D^{\boldsymbol{\mu}}$ 必须有共同的 $A^{\otimes d}$ 组成因子。由 (11.4.2) 可得 $(\|\lambda^{(1)}\|, \dots, \|\lambda^{(\ell)}\|) = (\|\mu^{(1)}\|, \dots, \|\mu^{(\ell)}\|)$。假设此条件成立，并令 $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_\ell)$ 为 d 的这一复合。由弗罗贝尼乌斯互反律可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d \wr A}(D^{\boldsymbol{\lambda}}, D^{\boldsymbol{\mu}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A}(D^{\lambda^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\lambda^{(\ell)}}, D^{\boldsymbol{\mu}}). \tag{11.4.3}$$

考虑 $A^{\otimes d}$ 组成因子并结合 (11.4.2)，可知 $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A$-超模同态 $D^{\lambda^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\lambda^{(\ell)}} \to D^{\boldsymbol{\mu}}$ 的像必包含于子空间 $1_{\mathfrak{S}_d} \otimes_{\mathbb{K}}$ 中。也就是说，$D^{\mu^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\mu^{(\ell)}}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A}(D^{\lambda^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\lambda^{(\ell)}}, D^{\boldsymbol{\mu}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A}(D^{\lambda^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\lambda^{(\ell)}}, D^{\mu^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\mu^{(\ell)}}). \tag{11.4.4}$$

结合 (11.4.3) 和 (11.4.4)，以及第 11.4.1 节中的讨论，可以证明，只要 $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{\mu}$，就有 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d \wr A}(D^{\boldsymbol{\lambda}}, D^{\boldsymbol{\mu}}) = 0$。当 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}$ 时，只要 $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 0$，这个自同态空间的分次维数为$1|0$；而只要 $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 1$，其分次维数为 $1|1$。由舒尔引理可知，集合

$$\left\{ D^{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+^A(d) \right\}$$

是由简单 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模构成的不可约冗余集，其类型正如所断言。第一段表明，这也是简单超模的完备集。由此得证。□

注 11.4.2。虽然我们不会用到这一事实，但值得指出的是，只要 A 是特征为零的代数闭域上的有限维超代数，上述构造就能给出 $\mathfrak{S}_d \wr A$ 的简单超模。记 $J(B)$ 为超代数 B 的雅各布森根。根据 [9,

引理 2.6] 这是一个齐次理想，并且与作为代数的 B 的雅各布森根相同。第 3] 节中 [14, 的论证表明

$$(\mathfrak{S}_d \wr A)/J(\mathfrak{S}_d \wr A) \cong \mathfrak{S}_d \wr (A/J(A)) .$$

由此可知，可以去掉半单性条件。

由于对偶化是左超模与右超模之间保持类型的逆变等价，下面的结论是显而易见的。

推论 11.4.3。集合

$$\left\{D^{\boldsymbol{\lambda},*} := (D^{\boldsymbol{\lambda}})^* \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+^A(d)\right\}$$

是简单右 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模的完备、不可约冗余集。若 $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 0$，则超模 $D^{\boldsymbol{\lambda},*}$ 为 M 型；若 $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 1$, 则为 Q 型。

11.5. Schur–Weyl–Berele–Regev–Sergeev 对偶性。本节回顾一些众所周知的强无重分解。

固定 M、$N \geq 0$ 和 $d \geq 1$。令

$$\Lambda_+(M|N,d)^{\mathrm{hook}} = \left\{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{M+N}) \in \Lambda_+^0(M+N,d) \mid \lambda_{M+1} \leq N\right\}.$$

也就是说，这些是满足 $\lambda_{M+1} \leq N$ 的 d 的分拆 λ，其部分数不超过 $M+N$（这称为钩条件）。

设 $W_{M|N} = \mathbb{K}^{M|N}$。对任意 $d \geq 1$, 令 $\mathfrak{S}_d$通过带符号位置置换在 $W_{M|N}^{\otimes d}$ 上从右作用，并令

$$S(M|N,d) = \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d}\left(W_{M|N}^{\otimes d}\right)$$

为型 A Schur 超代数。对于分拆 $\lambda \in \Lambda_+^0(d)$，回忆一下，我们将 $T^{0,\lambda}$ 记作简单左 $\mathbb{K}\mathfrak{S}_d$ 超模以 λ 为标记；将其视为集中于偶字称的 M 型超模。

应用半单超代数的双中心化子定理（例如，参见 [12, 定理 3.10]），可将其分解为简单的 $(S(M|N,d) \quad \mathfrak{S}_d)$-双超模:

$$W_{M|N}^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_+(M|N,d)^{\mathrm{hook}}} L_{\mathfrak{gl}(M|N)}(\lambda) \circledast (T^{0,\lambda})^*. \tag{11.5.1}$$

集合

$$\left\{L_{\mathfrak{gl}(M|N)}(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_+(M|N,d)^{\mathrm{hook}}\right\}$$

是简单 $S(M|N,d)$-超模的完备不可约冗余集。每个 $L_{\mathfrak{gl}(M|N)}(\lambda)$ 都是 M 型。相应地，对于每个 $\lambda \in \Lambda_+($ $M|N,d)^{\mathrm{hook}}$，我们将 $\delta(\lambda) = 0$ 规定为.....型

接下来，固定 $N \geq 0$ 和 $d \geq 1$。令 $\Lambda_+(N,d)^{\mathrm{strict}}$ 为所有部分数不超过 N 的 d 的严格分拆所构成的集合。令 $W_N = \mathbb{K}^{N|N}$。Ser_d（即谢尔盖耶夫超代数）在 $(W_N)^{\otimes d}$ 上有一个右作用。令

$$Q(N,d) = \mathrm{End}_{\mathrm{Ser}_d}\left(W_N^{\otimes d}\right)$$

是 Q 型 Schur 超代数。对于 d 的严格分拆 λ，回想我们将 $T^{1,\ \lambda}$ 记作由 λ 标记的简单左 Ser_d-超模。对于严格分拆，定义

$$\delta(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{if } \ell(\lambda) \text{ is even;} \\ 1, & \text{if } \ell(\lambda) \text{ is odd.} \end{cases}$$

超模 $T^{1,\ \lambda}$ 当 $\delta(\lambda) = 0$ 时为 M 型；当 $\delta(\lambda) = 1$ 时为 Q 型。

应用半单超代数的双中心化子定理（例如参见 [12, 定理 3.46]），可分解为以下简单的（Q（N, d），Ser_d）-双超模:

$$W_N^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_+(N,d)^{\mathrm{strict}}} L_{\mathfrak{q}(N)}(\lambda) \circledast (T^{1,\lambda})^*. \tag{11.5.2}$$

集合

$$\left\{L_{\mathfrak{q}(N)}(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_+(N,d)^{\mathrm{strict}}\right\}$$

是简单对象 $Q(N,d)$-超模的一个完备、不可约冗余集。超模 $L_{\mathfrak{q}(N)}(\lambda)$ 和 $T^1,\ \lambda$具有相同的类型；具体而言，当 $\delta(\lambda) = 0$ 时，它们为 M 型；当 $\delta(\lambda) = 1$时，它们为 Q 型。

11.6. 多项式表示与广义 Schur–Weyl 对偶。接下来，我们研究当 A 是任意有限维半单超代数时，上一节的结果如何推广。半单超代数的双中心化子定理（见 [12, 命题 3.5]）结合推论 11.4.3 中给出的简单右 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模的分类，得出以下强无重结果。

命题 11.6.1. 若 A 是一个有限维半单超代数，则存在一个子集

$$\mathbb{X}^A(n,d) \subseteq \Lambda_+^A(d)$$

使得存在一个分解

$$V_n^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{X}^A(n,d)} L_n^A(\boldsymbol{\lambda}) \circledast D^{\boldsymbol{\lambda},*}$$

为简单的 $(S^A(n,d),\ \mathfrak{S}_d \wr A)$-双超模。

集合

$$\left\{L(\boldsymbol{\lambda}) := L_n^A(\boldsymbol{\lambda}) \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{X}^A(n,d)\right\}$$

是简单的 $S^A(n,d)$-超模的完备且不可约冗余集。超模 $L(\boldsymbol{\lambda})$ 在$\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ 时为 M 型，在 $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 1$时为 Q 型。

显然的问题是确定集合 $\mathbb{X}^A(n,d)$。下面我们来做这件事。对每个 $\alpha \in \Xi_A$，设 S^α的分次维数为 $m_\alpha|n_\alpha$。对于固定的 $n \geq 1$，令 $M_\alpha = nm_\alpha$ 和 $N_\alpha = nn_\alpha$。对于每个 $\alpha \in \Xi_A$，以及固定的 $n \geq 1$ 和 $d \geq 0$，令

$$\Lambda_+^\alpha(n,d) = \begin{cases} \Lambda_+(M_\alpha|N_\alpha,d)^{\mathrm{hook}}, & \text{if } \delta(\alpha) = 0; \\ \Lambda_+(N_\alpha,d)^{\mathrm{strict}}, & \text{if } \delta(\alpha) = 1. \end{cases}$$

对于每个 $\alpha \in \Xi_A$ 以及固定的 $n \geq 1$，令

$$\Lambda_+^\alpha(n,\bullet) = \bigcup_{d \geq 0} \Lambda_+^\alpha(n,d).$$

换言之，$\Lambda_+^\alpha(n,\bullet)$ 的元素是分拆，其非零部分的个数有限，且上限取决于 S^α 和 n；当 S^α 为 M 型时，这些分拆是钩分拆；当 S^α 为 Q 型时，则是严格分拆。

最后，对于固定的 $n \geq 1$ 和 $d \geq 0$，令

$$\Lambda_+^A(n,d) = \left\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(\ell)}) \in \prod_{\alpha \in \Xi_A} \Lambda_+^\alpha(n,\bullet) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\ell} \|\lambda^{(i)}\| = d \right\}.$$

换言之，$\Lambda_+^A(n,d)$ 是由集合 Ξ_A 索引的 d 的多重分拆集合，其中每个 $\lambda^{(\alpha)}$ 的非零部分个数都有上限，该上限取决于 S^α 和 n；若 S^α 为 M 型，则它是钩分拆；若 S^α 为 Q 型，则它是严格分拆。对于一个固定的 d 的复合，其部分由 Ξ_A 索引，$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_\ell)$，令

$$\Lambda_+^A(n,\mathbf{d}) = \left\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(\ell)}) \in \Lambda_+^A(n,d) \;\middle|\; \|\lambda^{(\alpha)}\| = d_\alpha \text{ for } \alpha \in \Xi_A \right\}.$$

显然， $\Lambda_+^A(n, \mathbf{d}) \subseteq \Lambda_+^A(n,d) \subseteq \Lambda_+^A(d)$ 且

$$\bigcup_{\mathbf{d}} \Lambda_+^A(n,\mathbf{d}) = \Lambda_+^A(n,d),$$

其中，求并的对象是所有由 Ξ_A 标记的 d 分拆。

下一个结果证实 $\Lambda_+^A(n,d)$ 就是我们要找的集合。

定理 11.6 .2. 若 A 是有限维半单超代数，则对所有 $n \geq 1$ 和 $d \geq 0$,

$$\mathbb{X}^A(n,d) = \Lambda_+^A(n,d).$$

也就是说，集合

$$\left\{ L(\boldsymbol{\lambda}) := L_n^A(\boldsymbol{\lambda}) \;\middle|\; \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+^A(n,d) \right\}$$

是简单 $S^A(n,d)$-超模的完备且不可约冗余集。若 $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ ，则超模 $L_n^A(\boldsymbol{\lambda})$ 是 M 型；若 $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 1$，则是 Q 型。

证明。首先，由于 $A \cong A^*$ 是 (A,A)-双超模，我们有

$$\left(V_n^{\otimes d}\right)^* \cong V_n^{\otimes d}$$

作为左 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模。特别地， $D^{\boldsymbol{\lambda},*}$ 作为右 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模出现为 $V_n^{\otimes d}$ 的一个直和项，当且仅当 $D^{\boldsymbol{\lambda}}$ 作为左 $\mathfrak{S}_d \wr A$-超模出现在 $V_n^{\otimes d}$ 中。

现在令 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(\ell)}) \in \Lambda_+^A(d)$，并令 $\mathbf{d} = (\|\lambda^{(1)}\|, \ldots, \|\lambda^{(\ell)}\|) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ 为 d 对应的复合。根据命题 11.6.1 和第一段，只需计算

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d \wr A}\left(D^{\boldsymbol{\lambda}}, V_n^{\otimes d}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} \wr A}\left(D^{\boldsymbol{\lambda}^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\lambda^{(\ell)}}, V_n^{\otimes d}\right),$$

其中，该同构保奇偶，并由弗罗贝尼乌斯互反律得到。

对于 $\alpha \in \Xi_A$，取一个极小偶幂等元 $e_\alpha \in A$ ，使得 $Ae_\alpha \cong S^\alpha$ 作为左 A-超模。令

$$e = 1_{\mathbb{K}\mathfrak{S}_{\mathbf{d}}} \otimes e_1^{\otimes d_1} \otimes \cdots \otimes e_\ell^{\otimes d_\ell} \in \mathfrak{S}_{\mathbf{d}} \wr A.$$

直接计算可验证

$$e(\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} \wr A)e \cong \left(\mathfrak{S}_{d_1} \wr (e_1 A e_1)\right) \otimes \cdots \otimes \left(\mathfrak{S}_{d_\ell} \wr (e_\ell A e_\ell)\right).$$

Conte 根据 (11.3.1) 后对 A 作为矩阵的描述可知，对所有 $\alpha \in \Xi_A$ ，

$$e_\alpha A e_\alpha \cong \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{if } \delta(\alpha) = 0; \\ \mathrm{Cl}_1, & \text{if } \delta(\alpha) = 1. \end{cases}$$

简言之，令 $\mathfrak{S}_d^0 = {}_{\mathbb{K}}\mathfrak{S}_d$ 和 $\mathfrak{S}_d^1 = \mathsf{Ser}_d$。于是，

$$e(\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} \wr A)e \cong \mathfrak{S}_{d_1}^{\delta(1)} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{S}_{d_\ell}^{\delta(\ell)}.$$

对于 $z = 0$、1 和 $\mu \in \Lambda_+^z(d)$，令 $T^{z,\,\mu}$ 为按第 11.4 节给出的标记方式，以 μ 为标记的简单对象 $\mathfrak{S}_d^z$-超模。

根据幂等元截断理论（例如，参见 [23, 第 6.2] 节，或参见 [9, 第 2] 节了解超版本），由于 e $D^{\boldsymbol{\lambda}} \neq 0$，它必定是与 $D^{\boldsymbol{\lambda}}$ 类型相同的简单对象 e$(\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} \wr A)$e-超模；此外，存在一个同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} \wr A}\left(D^{\boldsymbol{\lambda}}, V_n^{\otimes d}\right) \cong \mathrm{Hom}_{e(\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} \wr A)e}\left(eD^{\boldsymbol{\lambda}}, e\left(V_n^{\otimes d}\right)\right).$$

由于 e 是偶的 t 该同构是保奇偶的。由第 11.4 节中的讨论可知

$$eD^{\boldsymbol{\lambda}} = e_1^{\otimes d_1} \otimes \cdots \otimes e_\ell^{\otimes d_\ell}\left(D^{\lambda^{(1)}} \circledast \cdots \circledast D^{\lambda^{\ell}}\right) \cong T^{\delta(1),\lambda^{(1)}} \circledast \cdots \circledast T^{\delta(\ell),\lambda^{(\ell)}}.$$

因此，我们只需确定 $T^{\delta(1),\lambda^{(1)}} \circledast \cdots \circledast T^{\delta(\ell)\,\lambda^{(\ell)}}$ 在 $\mathsf{e}\left(V_n^{\otimes d}\right)$ 中作为 $\mathsf{e}\left(\mathfrak{S}_d \wr A\right)\mathsf{e} \cong \mathfrak{S}_{d_1}^{\delta(1)} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{S}_{d_\ell}^{\delta(\ell)}$-超模的重数。

对于每个 $\alpha \in \Xi_A$，设 S^α 的分次维数为 $m_\alpha|n_\alpha$。那么，

$$e\left(V_n^{\otimes d}\right) = \left(e_1 V_n\right)^{\otimes d_1} \otimes \cdots \otimes \left(e_\ell V_n\right)^{\otimes d_\ell} \tag{11.6.1}$$

$$= \left((e_1 A)^{\oplus n}\right)^{\otimes d_1} \otimes \cdots \otimes \left((e_\ell A)^{\oplus n}\right)^{\otimes d_\ell} \tag{11.6.2}$$

$$= \left(\left(\mathbb{K}^{m_1|n_1}\right)^{\oplus n}\right)^{\otimes d_1} \otimes \cdots \otimes \left(\left(\mathbb{K}^{m_\ell|n_\ell}\right)^{\oplus n}\right)^{\otimes d_\ell}. \tag{11.6.3}$$

我们先研究对应于固定 $\alpha \in \Xi_A$ 的张量因子，以此分析这个超模。

第一种情况是 $\delta(\alpha) = 0$, S^α 是 M 型，且 S^α 的分次维数为 $m_\alpha|n_\alpha$。令 $M_\alpha = nm_\alpha$和 $N_\alpha = nn_\alpha$，则我们有 $\left(\mathbb{K}^{m_\alpha|n_\alpha}\right)^{\oplus n} \cong W_{M_\alpha|N_\alpha}$ 作为超空间，并且 $\mathfrak{S}_{d_\alpha}^0 = \mathbb{K}\mathfrak{S}_{d_\alpha}$ 按照 (11.5.1) 中的方式，通过带符号位置置换作用于 $(W_{M_\alpha|N_\alpha})^{\otimes d_\alpha}$。根据 (11.5.1) 以及证明开头的观察，$T^{0,\lambda^{(\alpha)}}$ 出现在 $(W_{M_\alpha|N_\alpha})^{\otimes d_\alpha}$ 中，当且仅当 $\lambda^{(\alpha)} \in \Lambda_+(M_\alpha|N_\alpha, d_\alpha)^{\mathrm{hook}}$；此外，其重数等于 $2^{-\delta(\lambda^{(\alpha)})}\dim_{\mathbb{K}}(L_{\mathfrak{gl}(M_\alpha|N_\alpha)}(\lambda^{(\alpha)}))$。在本证明余下部分中，当处于这种情况时，我们有时将 $L_{\mathfrak{gl}(M_\alpha|N_\alpha)}(\lambda^{(\alpha)})$ 记作 $L^0_{M_\alpha|N_\alpha}(\lambda^{(\alpha)})$。

第二种情况是：若 $\delta(\alpha) = 1$, S^α 为 Q 型，且 S^α 的分次维数为 $n_\alpha|n_\alpha$。令 $N_\alpha = nn_\alpha$，则作为超空间有 $\left(\mathbb{K}^{n_\alpha|n_\alpha}\right)^{\oplus n} \cong \mathbb{K}^{N_\alpha|N_\alpha} = W_{N_\alpha}$，并且 $\mathfrak{S}_{d_\alpha}^1 = \mathsf{Ser}_{d_\alpha}$ 在 $W_{N_\alpha}^{\otimes d_\alpha}$ 上的作用如 (11.5.2) 所示。由 (11.5.2) 以及证明开头的观察可知，$T^{1,\lambda^{(\alpha)}}$ 出现在 $(W_{N_\alpha})^{d_\alpha}$ 中当且仅当 $\lambda^{(\alpha)} \in \Lambda_+(N_\alpha, d_\alpha)^{\mathrm{strict}}$；此外，其重数等于 $2^{-\delta(\lambda^{(\alpha)})}\dim_{\mathbb{K}}(L_{\mathfrak{q}(N_\alpha)}(\lambda^{(\alpha)}))$。在本证明余下部分中，当处于此情形时，我们记 $M_\alpha = N_\alpha$，有时将 $L^1_{M_\alpha|N_\alpha}(\lambda^{(\alpha)})$ 写作 $L_{\mathfrak{q}(N_\alpha)}(\lambda^{(\alpha)})$。

将这两种情形应用于 (11.6.1)，得到 $\mathsf{e}\left(\mathfrak{S}_d \wr A\right)\mathsf{e} \cong \mathfrak{S}_{d_1}^{\delta(1)} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{S}_{d_\ell}^{\delta(\ell)}$-超模同构态射

$$e\left(V_n^{\otimes d}\right) \cong \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(\ell)}) \in \Lambda_+^A(n,\mathbf{d})} 2^{-h(\boldsymbol{\lambda})} d(\boldsymbol{\lambda}) \left(T^{\delta(1),\lambda^{(1)}} \otimes \cdots \otimes T^{\delta(\ell),\lambda^{(\ell)}}\right), \tag{11.6.4}$$

其中

$$d(\boldsymbol{\lambda}) = \dim_{\mathbb{K}}\left(L^{\delta(1)}_{M_1|N_1}(\lambda^{(1)}) \otimes \cdots \otimes L^{\delta(\ell)}_{M_\ell|N_\ell}(\lambda^{(\ell)})\right)$$

and

$$h(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{\ell} \delta(\lambda^{(i)}).$$

回忆一下，函数 δ 是在第11.5节中为钩形分拆和严格分拆定义的。另外，注意 (11.6.4) 中的同构是保奇偶的。

最后，将第11.3节中的张量积规则应用于 (11.6.4)，得到以下 $\mathsf{e}\left(\mathfrak{S}_d \wr A\right)\mathsf{e} \cong \mathfrak{S}_{d_1}^{\delta(1)} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{S}_{d_\ell}^{\delta(\ell)}$-超模分解：

$$e\left(V_n^{\otimes d}\right) \cong \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(\ell)}) \in \Lambda_+^A(n,\mathbf{d})} 2^{\lfloor h(\boldsymbol{\lambda})/2 \rfloor - h(\boldsymbol{\lambda})} d(\boldsymbol{\lambda}) \left(T^{\delta(1),\lambda^{(1)}} \circledast \cdots \circledast T^{\delta(\ell),\lambda^{(\ell)}}\right).$$

结合前面的化简，我们得出，$V_n^{\otimes d}$ 中 $D^{\boldsymbol{\lambda},*}$ 的重数非零，当且仅当 $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+^A(n,d)$。重数非零时，其值等于 $2^{\lfloor h(\boldsymbol{\lambda})/2 \rfloor - h(\boldsymbol{\lambda})} d(\boldsymbol{\lambda})$。由此以及命题 11.6.1 可得定理中的断言。□

注11.6.3. 给定一个有限维半单超代数 B、一个 B-超模 M 和一个简单对象 B-超模 S，如果 M 的 S-等型分量通过一个保奇偶映射与 $S^{\oplus p} \oplus (\Pi S)^{\oplus q}$ 同构，则将 S 在 M 中的分次重数定义为 $p|q$。如果读者留意到

前一个证明中的分次维数，就会发现 $D^{\boldsymbol{\lambda}}$ 在 $V_n^{\otimes d}$ 中的分次重数等于

$$\begin{aligned}&2^{\lfloor h(\boldsymbol{\lambda})/2\rfloor - h(\boldsymbol{\lambda})}\operatorname{grdim}_{\Bbbk}\left(L^{\delta(1)}_{M_1|N_1}(\lambda^{(1)})\otimes\cdots\otimes L^{\delta(\ell)}_{M_\ell|N_\ell}(\lambda^{(\ell)})\right)\\&=2^{-\delta(\boldsymbol{\lambda})}\operatorname{grdim}_{\Bbbk}\left(L^{\delta(1)}_{M_1|N_1}(\lambda^{(1)})\circledast\cdots\circledast L^{\delta(\ell)}_{M_\ell|N_\ell}(\lambda^{(\ell)})\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\operatorname{grdim}_{\Bbbk} L_n^A(\boldsymbol{\lambda})=\operatorname{grdim}_{\Bbbk}\left(L^{\delta(1)}_{M_1|N_1}(\lambda^{(1)})\circledast\cdots\circledast L^{\delta(\ell)}_{M_\ell|N_\ell}(\lambda^{(\ell)})\right).$$

对于所有 $\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda_+^A(n,d)$。

这是对如下事实的数值预示：$S^A(n,d)$ 同构于 A 型和 Q 型舒尔超代数的张量积的直和。接下来我们证明这一点。对于 $\alpha\in\Xi_A$ 和 $d\geq 0$，设 S^α 的分次维数为 $m_\alpha|n_\alpha$，并令 $M_\alpha=nm_\alpha$ 和 $N_\alpha=nn_\alpha$。定义

$$S^\alpha(n,d)=\begin{cases}S(M_\alpha|N_\alpha,d), & \text{if } \delta(\alpha)=0;\\ Q(N_\alpha,d), & \text{if } \delta(\alpha)=1.\end{cases}$$

命题 11.6.4. 设 $\Bbbk$ 是特征零代数闭域，且 A 是有限维半单$\Bbbk$-超代数。那么，对于所有 $n\geq 1$ 和 $d\geq 0$，存在超代数同构

$$S^A(n,d)\cong\bigoplus_{\substack{\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_\ell)\in\mathbb{N}_{\geq 0}^{\Xi_A}\\ \|\mathbf{d}\|=d}} S^1(n,d_1)\otimes\cdots\otimes S^\ell(n,d_\ell).$$

证明. 设 $A=\oplus_{\alpha\in\Xi_A}A_\alpha$ 为 (11.3.1) 中给出的分解。根据 [31, 引理 4.8]，存在超代数同构

$$S^A(n,d)\cong\bigoplus_{\substack{\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_\ell)\in\mathbb{N}_{\geq 0}^{\Xi_A}\\ \|\mathbf{d}\|=d}} S^{A_1}(n,d_1)\otimes\cdots\otimes S^{A_\ell}(n,d_\ell).\tag{11.6.5}$$

因此，只需描述当 A 是只有一个单模的半单超代数时的 $S^A(n,d)$。设 A 是这样一个超代数。

如果 $\delta(\alpha)=0$，那么单超模 $S=S^\alpha$ 是 M 型。设其分次维数为 $m_\alpha|n_\alpha$，并令 $M_\alpha=m_\alpha n$ 和 $N_\alpha=n_\alpha n$。设 $e\in A$ 为一个极小偶幂等元，并令 $\mathsf{e}=1_{\Bbbk\mathfrak{S}_d}\otimes e^{\otimes d}\in\mathfrak{S}_d\wr A$。利用幂等元截断理论（例如，参见 [23, 第 6.2] 节；超版本见 [9, 第 2] 节），函子 $F_e\colon$ smod-$\mathfrak{S}_d\wr A\to$ smod-e($\mathfrak{S}_d\wr A$)e 由 $M\mapsto Me$ 给出，它定义了一个超代数同构

$$\operatorname{End}_{\mathfrak{S}_d\wr A}\left(V_n^{\otimes d}\right)\to\operatorname{End}_{e(\mathfrak{S}_d\wr A)e}\left((V_n^{\otimes d})e\right).$$

然而，e($\mathfrak{S}_d\wr A$)e 作为超代数 $\cong\mathfrak{S}_{\Bbbk}^{d}\wr eAe\cong\mathfrak{S}_d$，并且

$$(V_n^{\otimes d})e\cong(V_ne)^{\otimes d}\cong((Ae)^{\oplus n})^{\otimes d}\cong(\Bbbk^{m_\alpha|n_\alpha})^{\oplus n})^{\otimes d}\cong(\Bbbk^{M_\alpha|N_\alpha})^{\otimes d}$$

作为右 $\Bbbk\mathfrak{S}_d$-超模。因此

$$S^A(n,d)\cong\operatorname{End}_{\Bbbk\mathfrak{S}_d}\left((k^{M_\alpha|N_\alpha})^{\otimes d}\right)=S^\alpha(M_\alpha|N_\alpha,d).$$

当 $\delta(\alpha)=1$ 且单超模 $S=S^\alpha$ 为 Q 型时，同样的论证也适用。 □

我们以一个稍后会用到的观察结束本节。

注 11.6.5. 对于 $B \in \left\{\mathfrak{S}_d \wr A, S^A(n,d)\ U(\mathfrak{gl}_n(A))\right\}$，$V_n^{\otimes d}$上存在自然的左作用和右作用。正如定理 11.6.2 的证明中所讨论的，当 A 是半单代数时，$A^* \cong A$ 和 $\left(V_n^{\otimes d}\right)^* \cong V_n^{\otimes d}$ 之间存在一个 (A,A)-双模同构。对于每个超代数 B，这个同构将自然的左作用与 B 的自然右作用的对偶相对应，反之亦然。特别地，对命题 11.6.1 取对偶可得

$$V_n^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+^A(n,d)} D^{\boldsymbol{\lambda}} \circledast L_n^A(\boldsymbol{\lambda})^*, \tag{11.6.6}$$

其中，该同构是作为 $(\mathfrak{S}_d \wr A, S^A(n,d))$-双超模的同构。

12. Howe duality

在本节中，我们始终假设 $\mathbb{K}$ 是一个域，并且 $(A,a)_I$ 是一个良对，其中 I 有限。特别地，A 是含幺的，其单位元为 $1 = \sum_{i \in I} i$。

12.1. 对称空间 $\mathsf{S}_{m,\ n}$。固定 $m,n \geq 1$。将 $V_m = A^{\oplus m}$ 和 $V_n = A^{\oplus n}$ 分别视为列向量和行向量。由于 V_m（分别地，V_n）通过乘法构成右（分别地，左）A-超模，我们可以考虑 $\mathbb{K}$-超模 $V_m \otimes_A V_n$。给定 $f \in A$，我们将 v_r^f记作 V_m中的元素，它是一个除第 r个位置为 f外其余位置全为零的列向量。同样地，v_r^f也将用于表示 V_n 中的元素，它是一个除第 r个位置为 f 外其余位置全为零的行向量。为简便起见，我们将 $z_{p,\ q}^f$ 记作 $v_p^{1_A} \otimes v_q^f = v_p^f \otimes v_q^{1_A}$在 $V_m \otimes_A V_n$中的对应对象。

通过矩阵乘法，U（$\mathfrak{gl}_m(A)$）（分别地，U（$\mathfrak{gl}_n(A)$））在 $V_m \otimes_A V_n$上具有显然的左（分别地，右）作用。U（$\mathfrak{gl}_m(A)$)和 U（$\mathfrak{gl}_n(A)$）的作用彼此可交换。通过它们的余乘法，U（$\mathfrak{gl}_m(A)$）和 U（$\mathfrak{gl}_n(A)$）在

$$\mathcal{S}_{m,n} := S^\bullet\left(V_m \otimes_A V_n\right).$$

单项式

$$z_{p_1,q_1}^{f_1} \cdots z_{p_r,q_r}^{f_r} \in \mathcal{S}_{m,n}$$

具有 $\mathfrak{gl}_m(A)$-权

$$d_1' \varepsilon_1 + \cdots + d_m' \varepsilon_m,$$

其中 $d_k' = |\{i \mid p_i = k\}|$。它还具有 $\mathfrak{gl}_n(A)$-权

$$d_1'' \varepsilon_1 + \cdots + d_n'' \varepsilon_n,$$

其中 $d_\ell'' = |\{j \mid q_j = \ell\}|$。对于 $\lambda \in \Lambda_m$和 $\mu \in \Lambda_n$，令 $\mathsf{S}^{\lambda,m}{}^{\mu},n$ 表示 $\mathsf{S}_{m,n}$中同时为 $\mathfrak{gl}_m(A)$ 的权为 λ 且为 $\mathfrak{gl}_{(A)}$的权为 μ 的向量所成的集合。由单项式给出的 $\mathsf{S}_{m,n}$ 的 $\mathbb{K}$-基表明，存在一个 $\mathbb{K}$-超模的直和分解：

$$\mathcal{S}_{m,n} = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \Lambda_m \\ \mu \in \Lambda_n}} \mathcal{S}_{m,n}^{\lambda,\mu}.$$

对于 $\lambda \in \Lambda_m$ 和 $\mu \in \Lambda_n$，令

$$\mathcal{S}_{m,n}^{\bullet,\mu} = \bigoplus_{\nu \in \Lambda_m} \mathcal{S}_{m,n}^{\nu,\mu} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{S}_{m,n}^{\lambda,\bullet} = \bigoplus_{\nu \in \Lambda_n} \mathcal{S}_{m,n}^{\lambda,\nu}. \tag{12.1.1}$$

那么，

$$\mathcal{S}_{m,n} = \bigoplus_{\mu \in \Lambda_n} \mathcal{S}_{m,n}^{\bullet,\mu} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{S}_{m,n} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_m} \mathcal{S}_{m,n}^{\lambda,\bullet}. \tag{12.1.2}$$

由于 $U(\mathfrak{gl}_m(A))$ 和 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 的作用彼此可交换，因此 (12.1.2) 中给出的 $\mathsf{S}_{m,\ n}$ 分解分别是 $U(\mathfrak{gl}_m(A))$-超模和 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$-超模。

引理 12.1.1. 对每个 $\lambda=\sum_{i=}^{m}{}_{1}\lambda_i\varepsilon_i\in\Lambda_m$，存在一个 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$-超模同构，

$$\mathcal{S}_{m,n}^{\lambda,\bullet}\cong S^{\lambda_1}(V_n)\otimes\cdots\otimes S^{\lambda_m}(V_n),$$

对于每个 $\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\varepsilon_i\in\Lambda_n$，存在一个 $U(\mathfrak{gl}_m(A))$-超模的同构，

$$\mathcal{S}_{m,n}^{\bullet,\mu}\cong S^{\mu_1}(V_m)\otimes\cdots\otimes S^{\mu_n}(V_m),$$

证明. 第一个同构是一个 $\mathbb{K}$-线性映射，其在单项式上的定义为

$$z_{1,q_{1,1}}^{f_{1,1}}\cdots z_{1,q_{1,r_1}}^{f_{1,r_1}}z_{2,q_{2,1}}^{f_{2,1}}\cdots z_{2,q_{2,r_2}}^{f_{2,r_2}}\cdots z_{m,q_{m,1}}^{f_{m,1}}\cdots z_{m,q_{m,r_m}}^{f_{m,r_m}}$$
$$\mapsto v_{q_{1,1}}^{f_{1,1}}\cdots v_{q_{1,r_1}}^{f_{1,r_1}}\otimes v_{q_{2,1}}^{f_{2,1}}\cdots v_{q_{2,r_2}}^{f_{2,r_2}}\otimes\cdots\otimes v_{q_{m,1}}^{f_{m,1}}\cdots v_{q_{m,r_m}}^{f_{m,r_m}}.$$

对单项式进行检验可知，这是一个 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$-超模的偶同构。显然的变式给出第二个同构。□

Let

$$\dot{U}(\mathfrak{gl}_n(A))=\bigoplus_{\lambda,\mu\in\Lambda_m}\dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))(\lambda,\mu)$$

是与超范畴 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_n(A))$ 相关联的局部含幺超代数。注意，$U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 是包络超代数 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 的幂等元化形式，其权幂等元属于Λ_n。每当 M 是 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 的一个超模，且有一个权空间的直和分解，其权属于 Λ_n 时，$U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 的作用便有良好定义；反过来，$U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 的任意超模都定义了 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 的一个超模，并带有权空间分解，其权属于 Λ_n。特别地，由 (12.1.1) 可知，$\mathsf{S}_{m,\,n}$是一个 $(U(\mathfrak{gl}_m(A))\ U(\mathfrak{gl}_n(A)))$-双超模。

给定一个左 $U(\mathfrak{gl}_m(A))$-超模同态 $f:\mathsf{S}_{m,n}\to\mathsf{S}_{m,n}$，如果存在一个有限集 $J\subseteq\Lambda_n$，使得对所有 $\mu\notin J$ 都有 $(\mathsf{S}_m^{\bullet\,\mu},{}_n)f=0$，且 f 的像包含于 $\oplus_{\mu\in J}\mathsf{S}_m^{\bullet\,\mu},{}_n$，则称 f 为左有限。类似地，给定一个右 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$- 超模同态 $f:\mathsf{S}_{m,n}\to\mathsf{S}_{m,n}$，如果存在一个有限集 $J\subseteq\Lambda_m$，使得对所有 $\lambda\notin J$ 都有 $f(\mathsf{S}^{\lambda},{}_m{}^{\bullet},{}_n)=0$，且$f$ 的像包含于 $\oplus_{\lambda\in J}\mathsf{S}^{\lambda},{}_m{}^{\bullet},{}_n$，则称$f$ 为右有限。在这两种情况下，我们都用上标 fin 表示有限映射的集合；根据上下文，应能清楚判断它们是左有限还是右有限。

由于 $U(\mathfrak{gl}_m(A))$ 和 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 在 $\mathsf{S}_{m,n}$上的作用彼此交换，一个超代数中的元素的作用便为另一个超代数定义了一个超模同态。此外，$U(\mathfrak{gl}_m(A))$和 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 的作用分别是通过左有限映射和右有限映射给出的。也就是说，存在超代数映射

$$\rho_m^{\ell}:\dot{U}(\mathfrak{gl}_m(A))\to\mathrm{End}_{\dot{U}(\mathfrak{gl}_n(A))}(\mathcal{S}_{m,n})^{\mathrm{fin}}\subseteq\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{S}_{m,n}),\tag{12.1.3}$$

$$\rho_n^{r}:\dot{U}(\mathfrak{gl}_n(A))\to\mathrm{End}_{\dot{U}(\mathfrak{gl}_m(A))}(\mathcal{S}_{m,n})^{\mathrm{fin}}\subseteq\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{S}_{m,n}).\tag{12.1.4}$$

12.2. 杂项。在本节中，我们记录下文将要用到的各种概念。给定 $\mathbb{K}$-线性超范畴 C 和 D，令 $\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{D})$ 表示如下范畴：其对象为偶超函子 $\mathsf{C}\to\mathsf{D}$，其态射为超自然变换。给定一个 $\mathbb{K}$-线性超范畴 C，可定义其反超范畴 $\mathsf{C}^{\mathrm{sop}}$，它与 C 具有相同的对象，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{sop}}}(X,Y):=\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X)$，且复合 $\bullet$由以下规则给出：对于 $\mathsf{C}^{\mathrm{sop}}$中所有可复合的齐次态射，$f\bullet g=(-1)^{\bar{f}\bar{g}}g\circ f$。给定 $\mathbb{K}$-线性超范畴 C 和 D，我们可以构造超范畴 $\mathsf{C}\boxtimes\mathsf{D}$。该范畴的对象定义为

$$\{(x,y)\mid x\text{ is an object of }\mathbf{C}\text{ and }y\text{ is an object of }\mathbf{D}\}$$

态射由下式给出

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\boxtimes\mathbf{D}}((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x_1,y_1)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(x_2,y_2).$$

齐次态射上的复合由下式给出

$$(f_1 \otimes f_2) \circ (g_1 \otimes g_2) = (-1)^{\bar{f}_2 \bar{g}_1} (f_1 \circ g_1) \otimes (f_2 \circ g_2). \tag{12.2.1}$$

关于这些构造在超情形中的详细内容，请参见 [7] 。$\mathbb{K}$-线性超范畴与局部含幺$\mathbb{K}$-超代数之间的对应关系将反范畴映为反范畴，并将张量积映为张量积。

$\mathbb{K}$-线性超范畴 A 的一个右表示是一个$\mathbb{K}$-线性函子 $F\colon \mathsf{A}^{\mathrm{sop}} \to$ $\mathbb{K}$-模，而一对 (A, B) 的双表示是一个$\mathbb{K}$-线性函子 $F\colon \mathsf{A} \boxtimes \mathsf{B}^{\mathrm{sop}} \to$ $\mathbb{K}$-模。我们用 A-Rep、Rep-A 和 A-Rep-B 分别表示 A 的表示、A 的右表示以及 (A, B) 的双表示所构成的超范畴。与局部含幺$\mathbb{K}$-超代数的对应关系给出范畴等价 A-Rep $\cong A$-s模、Rep-A $\cong$ s模-A 和 A-Rep-B $\cong (A, B)$-超模。

下面的引理显然。

引理 12.2.1. 设 A 是一个超代数，且 $(A, a)_I$ 是一个良对。则以下陈述成立。

(1) 在对象上为单位元、并将图表沿水平轴翻转的映射，定义了一个超范畴同构，

$$\left(\mathbf{Web}_I^{A,a}\right)^{sop} \to \mathbf{Web}_I^{A^{sop},a^{sop}}.$$

(2) 在对象上为单位元、并在生成态射上取转置 $E^f_{r,\ s} \mapsto E^f_{s,\ r}$ 的映射，定义了一个超范畴同构，

$$\dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))^{sop} \to \dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_n(A^{sop})).$$

(3) 在生成元上由 $z^f_{p,\ q} \mapsto z^f_{q,\ p}$ 给出的映射，定义了一个保奇偶同构 $\dot{\ }$，它是 ($U(\mathfrak{gl}_n(A^{sop}))$ $U(\mathfrak{gl}_m(A^{sop}))$)-双超模之间的同构，

$$\mathcal{S}^A_{m,n} \cong \mathcal{S}^{A^{sop}}_{n,m}.$$

12.3. 来自 $\mathsf{S}_{m,\ n}$ 的范畴表示。令

$$R^\ell_m : \dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_m(A)) \to \mathbb{K}\text{-}\mathbf{Mod}, \tag{12.3.1}$$

$$R^r_n : \dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))^{\mathrm{sop}} \to \mathbb{K}\text{-}\mathbf{Mod}, \tag{12.3.2}$$

分别是与映射 ρ^ℓ_m 和 ρ^r_n 对应的表示。回顾定理 5.5.1 和 10.2.1 中的函子 G_m 和 W_m

引理 12.3.1. 对所有 $m \geq 0$，函子 R^ℓ_m 和 $G_m \circ W_m$ 自然同构。

证明. 设 $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varepsilon_i \in \Lambda_{m\circ}$ 则 $R^\ell_m(\lambda) = \mathsf{S}^{\lambda,m^\bullet,n}$ 和

$$(G_m \circ W_m)(\lambda) = G_m(1^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes 1^{\lambda_m}) = S^{\lambda_1}(V_n) \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_m}(V_n).$$

它们通过引理 12.1.1 中给出的映射构成同构的$\mathbb{K}$-模。

给定 $1 \leq r$、$s \leq m$ 和 $f \in A$，考虑生成态射 $E^f_{r,s} \in \dot{\mathsf{U}}(\mathfrak{gl}_m(A))(\lambda, \gamma)$。那么

$$R^\ell_m(E^f_{r,s}) : \mathcal{S}^{\lambda,\bullet}_{m,n} \to \mathcal{S}^{\gamma,\bullet}_{m,n}$$

是由元素 $E^f_{r,s} \in \mathfrak{gl}_m(A)$ 的左作用给出的映射。O

n the other hand,

$$(G_m \circ W_m)(E^f_{r,s}) : S^{\lambda_1}(V_n) \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_m}(V_n) \to S^{\gamma_1}(V_n) \otimes \cdots \otimes S^{\gamma_m}(V_n)$$

由 $\mathbb{K}$-模同态 $G_m(e^{f^{\ 1}}_{,[r,s],\lambda})$ 给出。对一个单项式进行检验可确认，该映射通过引理 12.1.1 中给出的同构，与上一段中的映射一致。□

S ince $S_{m,n}$ 是一个 $(U(\mathfrak{gl}_m(A))\ U(\mathfrak{gl}_n(A))$-双超模，以下结果显然成立 .

引理 12.3.2。固定 $m, n \geq 1$。存在一个双表示

$$F_{m,n} : \dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_m(A)) \boxtimes \dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))^{sop} \to {}_{\mathbb{K}}\text{-}\mathbf{Mod}.$$

它在对象 $(\lambda, \mu) \in \Lambda_m \times \Lambda_n$ 上的定义为

$$F_{m.n}(\lambda, \mu) = \mathcal{S}_{m,n}^{\lambda,\mu}.$$

对于齐次态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_m(A))}(\lambda_1, \lambda_2)$，$g \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))^{sop}}(\mu_1, \mu_2)$，映射

$$F_{m.n}(f \otimes g) : \mathcal{S}_{m,n}^{\lambda_1,\mu_1} \to \mathcal{S}_{m,n}^{\lambda_2,\mu_2}$$

定义在齐次 $x \in \mathrm{S}^{\lambda_1,\ m\ n^{\mu_1},}$ 上的方式如下：

$$F_{m,n}(f \otimes g)(x) = (-1)^{\bar{g}\bar{x}} f((x)g) = (-1)^{\bar{g}\bar{x}} (f(x))g.$$

12.4. 范畴化与有限型豪对偶。对于任意超范畴 C 和 D，存在一个函子

$$\iota' : \mathbf{C} \to \mathcal{F}un(\mathbf{D}, \mathbf{C} \boxtimes \mathbf{D})$$

定义如下。首先，对于 C 中的一个对象 x，定义函子 $\iota'(x) = \iota'_x : \mathrm{D} \to \mathrm{C}\boxtimes\mathrm{D}$：对于 D 中的所有对象 y，令 $\iota'_x(y) = (x, y)$；对于所有态射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(y_1, y_2)$，令 $\iota'_x(g) = 1_x \otimes g$。接下来定义函子$\iota'$ 在态射上的作用。给定 C 中任意态射 $f : x_1 \to x_2$，构造一个超自然变换$\iota'(f) : \iota'_{x_1} \Rightarrow \iota'_{x_2}$，方法是：对于 D 中任意对象 $y \in$，令态射 $\iota'(f)_y = f \otimes 1_y : \iota'_{x_1}(y) \to \iota'_{x_2}(y)$。作显然的相应修改，即可得到一个类似的函子

$$\iota'' : \mathbf{D} \to \mathcal{F}un(\mathbf{C}, \mathbf{C} \boxtimes \mathbf{D}).$$

给定一个双表示 $F : \mathrm{C}_1 \boxtimes \mathrm{C}_2^{\mathrm{sop}} \to {}_{\mathbb{K}}$-模，在两种情况下分别有函子 $F_* : \mathrm{F}un(\mathrm{C}_2^{\mathrm{sop}}, \mathrm{C}_1 \boxtimes \mathrm{C}_2^{\mathrm{sop}}) \to$ Rep-C_2和 $F_* : \mathrm{F}un(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_1 \boxtimes \mathrm{C}_2^{\mathrm{sop}}) \to \mathrm{C}_1$-Rep，它们均由 $H \mapsto F \circ H$给出。反过来，还有函子

$$F_1 = F_* \circ \iota' : \mathbf{C}_1 \to \mathrm{Rep}\text{-}\mathbf{C}_2,$$
$$F_2 = F_* \circ \iota'' : \mathbf{C}_2^{\mathrm{sop}} \to \mathbf{C}_1\text{-Rep}.$$

我们称双表示 F 左中心化，如果函子 F_1 是满的；称其右中心化，如果函子F_2 是满的；如果 F_1 和 F_2 均为满函子，则称其具有双中心化子性质。作为合理性检验，读者可以验证，当 C_1 和 C_2 都只有一个对象时，这些定义就特化为两个超代数在一个双超模上具有相互中心化的作用这一概念。

定理 12.4.1. 设 ${}_{\mathbb{K}}$ 为特征零域。以下陈述成立：

(1) 如果对于给定的 $m \geq 0$，定义表示 G_m 对 A 是满的，那么 $F_{m,\ n}$ 对所有 $n \geq 0$ 都左中心化。(2) 如果对于给定的 $n \geq 0$，定义表示 G_n 对 A^{sop} 是满的，那么 $F_{m,\ n}$ 对所有 $m \geq 0$ 都右中心化。

证明。要证明 $F_{m,\ n}$ 左中心化，我们必须证明 $F_{m,\ n,\ 1} = F_{m,\ n,\ *} \circ \iota' : \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_m(A)) \to$ Rep-U$(\mathfrak{gl}_n(A))$ 是满的。回想一下，超范畴 Rep-U$(\mathfrak{gl}_n(A))$ 等价于右 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$-超模的超范畴。在此等价下，对任意对象 $\lambda \in \Lambda_m$，我们有

$$F_{m,n,1}(\lambda) = \mathcal{S}_{m.n}^{\lambda,\bullet}.$$

给定对象 $\lambda, \gamma \in \Lambda_m$，态射 $a \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_m(A))(\lambda, \mu)$ 对应于 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$-超模同态

$$F_{m,n,1}(a) : \mathcal{S}_{m.n}^{\lambda,\bullet} \to \mathcal{S}_{m.n}^{\gamma,\bullet}$$

由超代数元素 $a \in U(\mathfrak{gl}_m(A))$ 在左侧作用给出。也就是说，在等价$F_{m,\ n,\ 1}$ 下，对应于函子 $R^{\ell}_{m^{\circ}}$ 因此，根据引理 12.3.1，只需证明 $G_m \circ W_m$ 是满的。但根据推论 10.2.4，W_m 是满的；根据假设， G_m 也是满的。

为清晰起见，在证明的余下部分中，我们用上标 A 表示底层代数（例如，$F^{A}_{m,\ n}$表示 $F_{m,\ n}$）。要证明 $F^{A}_{m,\ n}$右中心化，我们必须证明

$$F^{A}_{m,n,2} = F^{A}_{m,n,*} \circ \iota^{'',A} : \dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))^{\mathrm{sop}} \to \dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_m(A))\text{-Rep}$$

是满的。回忆一下，超范畴 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_m(A))$-Rep 等价于左 $U(\mathfrak{gl}_m(A))$-超模的超范畴。在此等价下，对于任意对象 $\mu \in \Lambda_n$ ，我们有

$$F^{A}_{m,n,2}(\mu) = \mathcal{S}^{\bullet,\mu}_{m.n}.$$

给定对象 μ、 $\nu \in \Lambda_n$，态射 $b \in \mathbf{U}(\mathfrak{gl}_n(A))^{\mathrm{sop}}(\mu,\nu)$ 对应于 $U(\mathfrak{gl}_m(A))$-超模同态

$$F^{A}_{m,n,2}(b) : \mathcal{S}^{\bullet,\mu}_{m.n} \to \mathcal{S}^{\bullet,\nu}_{m.n}$$

由超代数元素 $b \in U(\mathfrak{gl}_n(A))$ 从右侧作用给出。

也就是说，在等价关系 $F^{A}_{m,n,2}$ 下，2 对应于函子 $R^{r}{}_{,n}{}^{A}$，而充满性意味着要证明，$\mathbf{S}^{A}_{m,n}$ 上任意有限右 $\dot{U}(\mathfrak{gl}_n(A))$-超模自同态，都可以由 $U(\mathfrak{gl}_m(A))$ 的某个元素从左侧作用实现。也就是说，$\mathbf{S}^{A}_{m,n}$ 上任意有限左 $U(\mathfrak{gl}_n(A))^{\mathrm{sop}}$-超模自同态，都可以由 $\dot{U}(\mathfrak{gl}_m(A))^{\mathrm{sop}}$ 的某个元素从右侧作用实现。应用引理 12.2.1 中给出的识别可知，$F^{A}_{m,n,2}$ 的充满性可由 $R^{\ell}{}_{,n}{}^{A^{\mathrm{sop}}}$ 的充满性推出。上一段已经证明了这一点（当然，将 A 换成 A^{sop}）。□

将上述结果与第 9 节的结果结合起来，便立即得到豪双对偶的以下范畴版本。

命题 12.4.2. 设 $\mathbb{K}$ 是一个特征零域。假设舒尔–韦尔对偶对 A 和 A^{sop}成立。那么该双表示

$$F_{m,n} : \dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_m(A)) \boxtimes \dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{gl}_n(A))^{sop} \to \mathbb{K}\text{-}\mathbf{Mod}$$

具有双中心化子性质。

这些结果也可以改述为以下有限 Howe 对偶。

命题 12.4.3. 设 $\mathbb{K}$ 是一个特征零域，且设 A 是一个含幺 $\mathbb{K}$-线性超代数。假设舒尔–韦尔对偶对 A 或 A^{sop} 成立。那么相应地，超代数映射

$$\rho^{\ell}_{m} : \dot{U}(\mathfrak{gl}_m(A)) \to \mathrm{End}_{\dot{U}(\mathfrak{gl}_n(A))}(\mathcal{S}_{m,n})^{fin},$$
$$\rho^{r}_{n} : \dot{U}(\mathfrak{gl}_n(A)) \to \mathrm{End}_{\dot{U}(\mathfrak{gl}_m(A))}(\mathcal{S}_{m,n})^{fin},$$

是满射。

证明. 如定理 12.4.1 的证明中所述，定理的假设说明函子R^{ℓ}_{m} 和 R^{r}_{n} 是满函子，而这又等价于 ρ^{ℓ}_{m} 和 ρ^{r}_{n} 是满射。□

12.5. 强无重数分解。本节假设$\mathbb{K}$ 是特征为零的代数闭域，且 A 是有限维半单的。

对于齐次的 $a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_d \in A$，定义

$$\varepsilon((a_1,\ldots,a_d),(b_1,\ldots,b_d)) = \sum_{1 \le q < p \le d} \bar{a}_p \bar{b}_q.$$

接着，在 $A^{\otimes d}$ 中我们有

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_d)(b_1 \otimes \cdots \otimes b_d) = (-1)^{\varepsilon((a_1,\ldots,a_d),(b_1,\ldots,b_d))}(a_1 b_1) \otimes \cdots (a_d b_d).$$

此外，对于 $\tau \in \mathfrak{S}_d$，回忆一下记号 $\langle \tau;\ (a_1,\dots,a_d)\rangle$，它在第 5.1 节中定义。利用这些公式，经过计算可得，对所有 $\tau \in \mathfrak{S}_d$,

$$[(a_1\otimes\cdots\otimes a_d)(b_1\otimes\cdots\otimes b_d)]\cdot\tau = [(a_1\otimes\cdots\otimes a_d)\cdot\tau]\,[(b_1\otimes\cdots\otimes b_d)\cdot\tau]\,. \tag{12.5.1}$$

定理 12.5.1. 若 m、$n\geq 1$ 和 r 是 m 和 n 的最小值，则对于所有 $d\geq 0$ ，

$$S^d_{m,n} \cong \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda^A_+(r,d)} L^A_m(\boldsymbol{\lambda})\circledast L^A_n(\boldsymbol{\lambda})^*$$

作为 $(U(\mathfrak{gl}_m(A))\ U(\mathfrak{gl}_n(A)))$-超模。

证明. 令 $A^{\otimes d}$ 在左侧对 $V_n^{\otimes d}$ 和右侧对 $V_m^{\otimes d}$ 施以对角乘法。存在一个 $\mathbb{K}$-超模同构

$$V_m^{\otimes d}\otimes_{A^{\otimes d}} V_n^{\otimes d} \xrightarrow{\cong} (V_m\otimes_A V_n)^{\otimes d}$$

在齐次元素上的定义为

$$(v^{a_1}_{i_1}\otimes\cdots\otimes v^{a_d}_{i_d})\otimes(v^{b_1}_{j_1}\otimes\cdots\otimes v^{b_d}_{j_d}) \mapsto (-1)^{\varepsilon((a_1,\dots,a_d),(b_1,\dots,b_d))} z^{a_1b_1}_{i_1,j_1}\otimes\cdots\otimes z^{a_db_d}_{i_d,j_d}.$$

令 $\mathfrak{S}_d$ 通过带符号位置置换在 $(V_m\otimes_A V_n)^{\otimes d}$ 上从右作用。它还通过在 $V_m^{\otimes d}$和 $V_n^{\otimes d}$上施加同步带符号位置置换，以对角方式在 $V_m^{\otimes d}\otimes_{A^{\otimes d}} V_n^{\otimes d}$上从右作用。由 (12.5.1) 可知，上述映射是 $\mathfrak{S}_d$-超模的同构。将此同构限制到 $\mathfrak{S}_d$-不变元上，即得到中间的同构：

$$V_m^{\otimes d}\otimes_{\mathfrak{S}_d\wr A^{\otimes d}} V_n^{\otimes d} \cong \left[V_m^{\otimes d}\otimes_{A^{\otimes d}} V_n^{\otimes d}\right]^{\mathfrak{S}_d} \cong \left[(V_m\otimes_A V_n)^{\otimes d}\right]^{\mathfrak{S}_d} = S^d_{m,n}. \tag{12.5.2}$$

左侧的同构显然成立。也容易验证，(12.5.2) 中的映射是 $(U(\mathfrak{gl}_m(A))\ U(\mathfrak{gl}_n(A)))$-双超模同态。

为了进一步分析 (12.5.2)，我们暂且考虑 $\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda$ $\Lambda(n,d)$ 和 $\boldsymbol{\mu}\in\Lambda$ $\Lambda(m,d)$,

$$(L^A_m(\boldsymbol{\mu})\otimes D^{\boldsymbol{\mu},*})\otimes_{\mathfrak{S}_d\wr A}(D^{\boldsymbol{\lambda}}\otimes L^A_n(\boldsymbol{\lambda})^*).$$

作为一个（$(U(\mathfrak{gl}_m(A))\ U(\mathfrak{gl}_n(A)))$）-双超模，它同构于若干个 $L^A_m(\boldsymbol{\mu})\circledast L^A_n(\boldsymbol{\lambda})^*$ 的直和。要确定直和项的数量，需要知道 $D^{\boldsymbol{\mu},*}\otimes_{\mathfrak{S}_d\wr A} D^{\boldsymbol{\lambda}}$ 的维数。由张量-Hom伴随，存在一个 -超模的保奇偶同构：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(D^{\boldsymbol{\mu},*}\otimes_{\mathfrak{S}_d\wr A} D^{\boldsymbol{\lambda}},{}_{\mathbb{K}}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d\wr A}\left(D^{\boldsymbol{\mu},*},D^{\boldsymbol{\lambda},*}\right) \cong \mathrm{Hom}^{\mathbb{K}}_{\mathfrak{S}_d\wr A}\left(D^{\boldsymbol{\lambda}},D^{\boldsymbol{\mu}}\right).$$

根据舒尔引理，右侧的维数为 $2^{\delta(\boldsymbol{\lambda})}$（如果 $D^{\boldsymbol{\lambda}}\cong D^{\boldsymbol{\mu}}$ 作为 $\mathfrak{S}_d\wr A$-超模同构），否则为零。注意，当存在同构时，$L^A_n(\boldsymbol{\lambda})^*$、$D^{\boldsymbol{\lambda},*}$、$D^{\boldsymbol{\mu},*}$、$D^{\boldsymbol{\mu}}$ 和 $L^A_m(\boldsymbol{\mu})$ 都具有相同的类型。

结合第11.3节中的张量积规则，这一讨论表明

$$(L^A_m(\boldsymbol{\mu})\otimes D^{\boldsymbol{\mu},*})\otimes_{\mathfrak{S}_d\wr A}(D^{\boldsymbol{\lambda}}\otimes L^A_n(\boldsymbol{\lambda})^*) \cong \begin{cases} 2^{\delta(\boldsymbol{\lambda})}L^A_m(\boldsymbol{\mu})\otimes L^A_n(\boldsymbol{\lambda})^* \cong 2^{2\delta(\boldsymbol{\lambda})}L^A_m(\boldsymbol{\mu})\circledast L^A_n(\boldsymbol{\lambda})^*, & \text{if } D^{\boldsymbol{\lambda}}\cong D^{\boldsymbol{\mu}};\\ 0, & else. \end{cases}$$

比较重数可得

$$(L^A_m(\boldsymbol{\mu})\circledast D^{\boldsymbol{\mu},*})\otimes_{\mathfrak{S}_d\wr A}(D^{\boldsymbol{\lambda}}\circledast L^A_n(\boldsymbol{\lambda})^*) \cong \begin{cases} L^A_m(\boldsymbol{\mu})\circledast L^A_n(\boldsymbol{\lambda})^*, & \text{if } D^{\boldsymbol{\lambda}}\cong D^{\boldsymbol{\mu}};\\ 0, & else. \end{cases}$$

现在我们已准备好证明定理的陈述。结合 (11.6.6)、(12.5.2)、命题 11.6.1 以及前面的计算，可得以下 $(U(\mathfrak{gl}_m(A))\ U(\mathfrak{gl}_n(A)))$-双超模的同构：

$$S^d_{m,n}\cong V_m^{\otimes d}\otimes_{\mathfrak{S}_d\wr A^{\otimes d}} V_n^{\otimes d}$$

$$\cong \left(\bigoplus_{\boldsymbol{\mu} \in \Lambda_+^A(m,d)} L_m^A(\boldsymbol{\mu}) \circledast D^{\boldsymbol{\mu},*} \right) \otimes_{\mathfrak{S}_d \wr A} \left(\bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+^A(n,d)} D^{\boldsymbol{\lambda}} \circledast L_n^A(\boldsymbol{\lambda})^* \right)$$

$$\cong \bigoplus_{\boldsymbol{\mu} \in \Lambda_+^A(m,d)} \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+^A(n,d)} \left(L_m^A(\boldsymbol{\mu}) \circledast D^{\boldsymbol{\mu},*} \right) \otimes_{\mathfrak{S}_d \wr A} \left(D^{\boldsymbol{\lambda}} \circledast L_n^A(\boldsymbol{\lambda})^* \right)$$

$$\cong \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+^A(r,d)} L_m^A(\boldsymbol{\lambda}) \circledast L_n^A(\boldsymbol{\lambda})^*.$$

□

前一定理给出的 $\mathsf{S}_{m,\ n}^{d}$ 作为 $(U(\mathfrak{gl}_m(A))\ U(\mathfrak{gl}_n(A)))$-双模的分解，立即表明这些作用彼此中心化。因此得到以下推论。

推论 12.5.2. 假设 $\mathbb{K}$ 是一个特征为零的代数闭域，且 A 是一个有限维半单超代数。那么对于所有 m、$n \geq 1$，$U(\mathfrak{gl}_m(A))$和 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$在$\mathsf{S}_{m,n}^{d}$ 上的作用互为中心化子。

众所周知，Howe 对偶可以用多项式微分算子的语言重新表述。它们在研究 $U(\mathfrak{gl}_n(A))$及其表示论时也有许多有趣的应用，例如当 $A = \mathbb{K}$ 或 $A = \mathsf{Cl}_1$时。参见例如 [12, 26]。我们预计其中大多数都会有 A类比，开发这些类比将很有意思。

13. Examples

最后，我们讨论一些值得关注的例子。

13.1. $\mathfrak{gl}_n$网的范畴。若 $A = a = \mathbb{K}$，则可以证明 $\mathbf{Web}_{\{1\}}^{\mathbb{K},\mathbb{K}}$ 与 $\mathfrak{gl}_n$网的范畴同构；该范畴定义于 [15]，，舒尔范畴定义于 [8]，，网范畴则引入于 [11]。对于 $n, d \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$，$\mathbb{K}$-超代数 $W_{\mathbb{K},n}^{d}$ 与广为研究的经典舒尔代数 $S_{\mathbb{K}}(n,d)$ 同构。

13.2. 分圆舒尔代数。设 C_r 为一个阶为 r 的循环群，并令 $A = \mathbb{K} C_r$。那么 $\mathfrak{S}_d \wr_{\mathbb{K}} C_r$ 是一个复反射群代数。广义舒尔代数 $S^A(n,d)$ 即为分圆舒尔代数。它及相关代数已在例如 [1, 2, 4, 16, 17, 21, 24, 33, 34]中得到研究。

13.3. $\mathfrak{q}_n$-网范畴。令 $A = \mathsf{Cl}_1 = \mathbb{K}[c]/(c^2 - 1)$ 表示由一个生成元生成的克利福德超代数，其中 $\mathbb{Z}/2$-分次由声明 $\bar{c} = \bar{1}$ 给出。于是 $\mathfrak{S}_d \wr \mathsf{Cl}_1^{\otimes d}$ 同构于谢尔盖耶夫超代数 Ser_d，后者又与对称群的自旋表示相关。不难验证，作为李超代数，$\mathfrak{gl}_n(\mathsf{Cl}_1) \cong \mathfrak{q}_n(\mathbb{K})$。若令 $a = 1_A \in \mathbb{K}$ 和 $I = \{1\}$，则存在一个渐近忠实函子

$$G_n : \mathbf{Web}_{\{1\}}^{\mathrm{Cl}_1,\mathbb{K}} \to \mathrm{mod}_S\text{-}\mathfrak{gl}_n(\mathrm{Cl}_1).$$

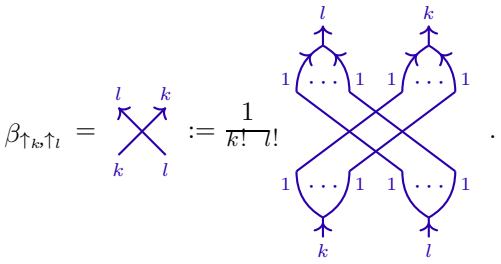
当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 图解超范畴 $\mathfrak{q}$-$\mathbf{Web}_{\uparrow}$ 由 Brown 和第二作者在 [6] 中引入，并且一个类似的函子

$$\mathfrak{q}\text{-}\mathbf{Web}_{\uparrow} \to \mathfrak{q}_n(\mathbb{C})\text{-supermodules}$$

已被定义并研究。正如我们接下来要说明的，$\mathbf{Web}^{\mathrm{Cl}_1,\ \mathbb{K}}_{\{1\},\ 1}$ 和 $\mathfrak{q}$-$\mathbf{Web}_{\uparrow}$ 实际上作为 $\mathbb{K}$-线性幺半超范畴彼此同构，而且这两个函子相同。

范畴 $\mathbf{Web}_{\{1\}}^{\mathrm{Cl}_1\ \mathbb{C}}$，只有单调生成元，并且只需要细股上的单个贴片 c。另一方面，范畴 $\mathfrak{q}$-$\mathbf{Web}_{\uparrow}$ 在 [6] 中被定义为：具有用于 $k \geq 0$ 的生成对象$\uparrow_k$，以及三类（向上定向的）图解生成元：分裂、合并，以及对所有 k 都作用于 $\uparrow_k$ 的点。我们省略关系列表，请读者参阅 [6, 第 4 节。1]在 [6] 中，

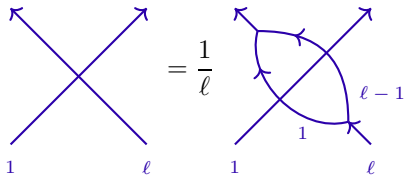
细股的交叉由与 (3.2.2) 中相同的公式定义，而粗股的交叉则通过单股交叉定义如下：



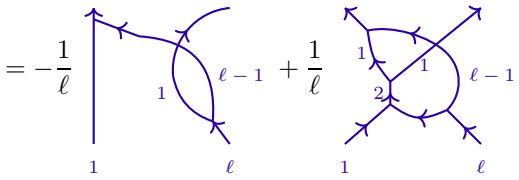
命题 13.3.1。存在一个定义良好的函子 $\mathrm{F}:\mathrm{Web}_{\{1\}}^{\mathrm{Cl}_1\,\mathbb{C}}\to\mathfrak{q}$-Web↑，将 $1^{(k)}$ 映到 $\uparrow_k$ （$k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$）。对于态射，它将合并与分裂映到 $\mathfrak{q}$-Web↑ 中对应的合并与分裂，将 $\mathrm{Hom}(1^{(k)}1^{(\ell)},1^{(\ell)}1^{(k)})$ 中的交叉映到元素 $\beta_{\uparrow k,\uparrow\ell}$；最后，它将细线股上标记为 1 的贴片 c 映到 $\uparrow_1$ 上的点。

证明。这里我们使用第 3.2 节给出的 $\mathrm{Web}_{\{1\}}^{\mathrm{Cl}_1\,\mathbb{C}}$ 的另一种表示。只需证明 $\mathrm{Web}_{\{1\}}^{\mathrm{Cl}_1\,\mathbb{C}}$ 的所有定义关系在 $\mathfrak{q}$-Web↑ 中的像均成立。其中，(3.1.2)、(3.1.5)、(3.1.6)、(3.1.7)、(3.1.10) 以及 (3.1.9) 的第一部分在 $\mathfrak{q}$-Web↑ 中都有显而易见的对应关系。此外，由于我们只允许在线股上放置非平凡贴片，(3.1.9) 的第二部分以及 (3.1.11) 和 (3.1.12) 均为空。

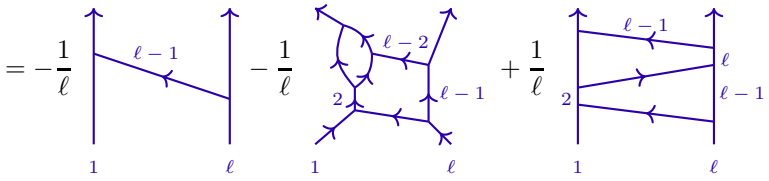
在剩下的两个关系中，我们首先通过对 y进行归纳，证明当 $x=1$ 时，(3.2.2) 成立。$x=y=1$ 时的基础情形显然成立。归纳步骤如下：



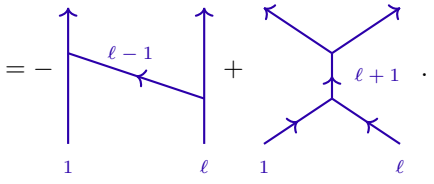
(13.3.1)



(13.3.2)



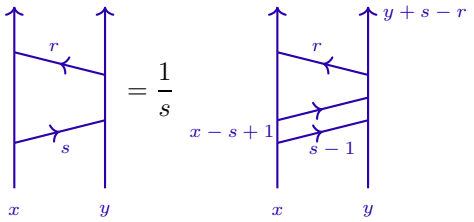
(13.3.3)

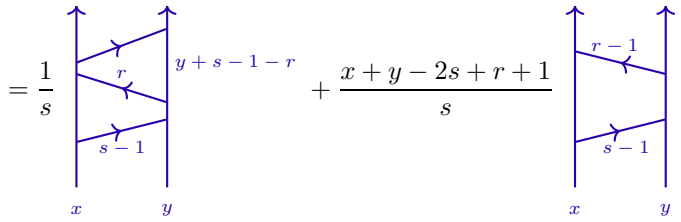


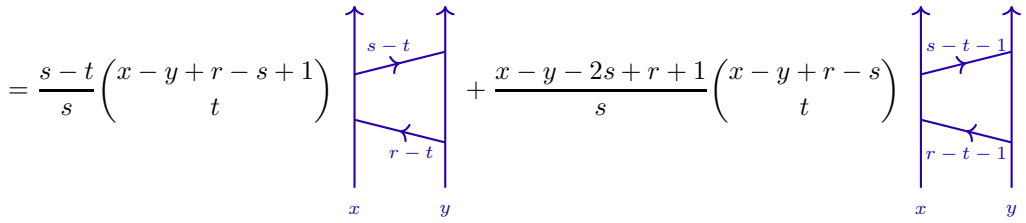
(13.3.4)

注意，当线股标记为 1 时，我们省略厚度标记。这里，第二个等式是通过化简左下交叉得到的；第三个等式是将 [6, (4.21)], 推广到粗线股情形，并对 (13.3.2) 中的最后一项应用归纳假设得到的。在最后一个等式中，(13.3.4) 的第四项在上一步中出现了三次：一次来自对 (13.3.4) 的第二项应用结合规则，另一次来自对 (13.3.4) 的第三项应用横档交换关系[6, (4.6)]。这三项的系数分别为 $-\frac{1}{\ell}$、$-\frac{2(\ell-1)}{\ell}$ 和 $\frac{\ell-1}{\ell}$，相加后得到最后一步中的 -1。一般情形留给读者处理：固定 y 为任意整数，并对 x 作归纳。论证类似，且在归纳步骤中使用上述单位元。

最后，我们通过对 s 使用归纳法证明 (3.2.1) 成立。$s=0$ 的基础情形显然成立。假设 (3.2.1) 对 $s-1$ 和任意 r 都成立。归纳步骤如下。







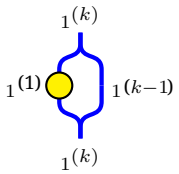
这里，在第二项中进行变量替换 $t \mapsto t-1$ 后，只需验证

$$\frac{s-t}{s}\binom{x-y+r-s+1}{t}+\frac{x-y-2s+r+1}{s}\binom{x-y+r-s}{t-1}=\binom{x-y+r-s}{t},$$

这很容易验证。 □

命题 13.3.2. 存在一个定义良好的函子 $\mathsf{G}\colon \mathfrak{q}\text{-}\mathsf{Web}_{\uparrow} \to \mathsf{Web}^{\mathrm{Cl}_1\ \mathbb{C}}_{\{1\}}$，，将 $\uparrow_k$ 发送到 $1^{(k)}$，对于$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。在态射上，它将合并和分裂发送到 $\mathsf{Web}^{\mathrm{Cl}_1\ \mathbb{C}}_{\{1\}}$，中的对应对象，以及点

在 $\mathrm{End}_{\mathfrak{q}-\mathbf{Web}_\uparrow}(\uparrow_k)$ 中发送到 $\mathrm{Web}^{\mathrm{Cl}_1\ \mathbb{C}}_{\{1\}}$ ：中的以下图：



.

证明。只需检验第 4 节 [6, 中所有关系的像 1] 在 $\mathrm{Web}^{\mathrm{Cl}_1\ \mathbb{C}}_{\{1\}}$,中成立。此处省略具体计算。关系 [6, (4.1)-(4.2)] 与 $\mathrm{Web}^{\mathrm{Cl}_1\ \mathbb{C}}_{\{1\}}$,中的关系相同。关系 [6, (4.3)-(4.4)] 可由对每个图的中间部分应用 (3.1.3) 推得。关系 [6, (4.5)] 可由对中间部分应用 (3.2.2) 推得。关系 [6, (4.6)] 是 (3.2.1) 的一个特例。 [6, (4.7)] 中的第一个等式，是对左侧每个图的中间偏右部分应用 (3.1.3) 的结果；同理，第二个等式也成立。 [5, (4.8)] 由对第三幅图的中间部分应用 (3.1.3) 得出。同理， [6, (4.9)] 也成立。□

通过构造 ，函子 F 和 G 是 $_{\mathbb{K}}$-线性幺半函子，并且互为逆函子 .

定理 13.3.3. 存在一个$\mathbb{K}$-线性幺半超范畴的同构，

$$\mathbf{Web}^{\mathrm{Cl}_1,}_{\{1\}}{}_{\mathbb{K}} \cong \mathfrak{q}\text{-}\mathbf{Web}.$$

在同构 $\mathfrak{gl}_n(\mathrm{Cl}_1) \cong \mathfrak{q}_n(\mathbb{K})$ 下，容易验证 $V_n = \mathrm{Cl}_1^{\oplus n} \cong {}_{\mathbb{K}}{}^{n|n}$ 是 $\mathfrak{q}_n(\ _{\mathbb{K}})$ 的自然表示。鉴于这些对应关系，可以合理地预期函子 G_m 与 [6]中给出的函子一致。事实确实如此。唯一需要注意的是，我们考虑的是右 $\mathfrak{gl}_n(\mathrm{Cl}_1)$-超模，而 [6] 中考虑的是左 $\mathfrak{q}_n(^{\mathbb{K}})$-超模。适当利用反范畴即可解决这一问题。具体而直接的细节留给感兴趣的读者。

在结束这个例子之前，我们还应提及，Sergeev [39] （或参见 [12]）已经为这一对 $(\mathfrak{q}_m(\mathbb{C})\ \mathfrak{q}_n(\mathbb{C}))$ 得到了豪双对偶。

13.4. 之字形超代数与 RoCK块。设 $G = (I, E)$ 是一个无环的简单连通图。对于每对相邻顶点 i—j，固定 $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ji} \in \{\pm 1\}$。那么，与之关联的局部幺之字形超代数 $\overline{Z} = \bigoplus_{i,\ j\in I} j\overline{Z}i$ 具有一组与顶点 I 对应的特殊正交幂等元，其每个子空间都有如下$_{\mathbb{K}}$-基：

$$j\overline{Z}i = \begin{cases} {}_{\mathbb{K}}\{i, c_i\} & \text{if } i = j; \\ {}_{\mathbb{K}}\{a_{ji}\} & \text{if } i\text{—}j; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

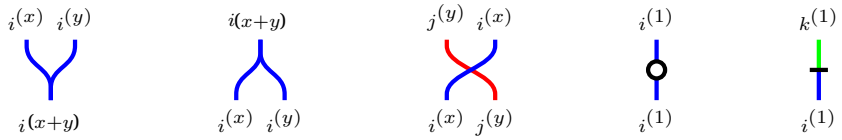
乘法由 各幂等元 I 的正交性定义，并结合以下附加规则 :

$$a_{kj}a_{ji} = \delta_{ik}\varepsilon_{ji}c_i, \qquad c_i a_{ij} = a_{ij}c_j = 0, \qquad c_i^2 = 0.$$

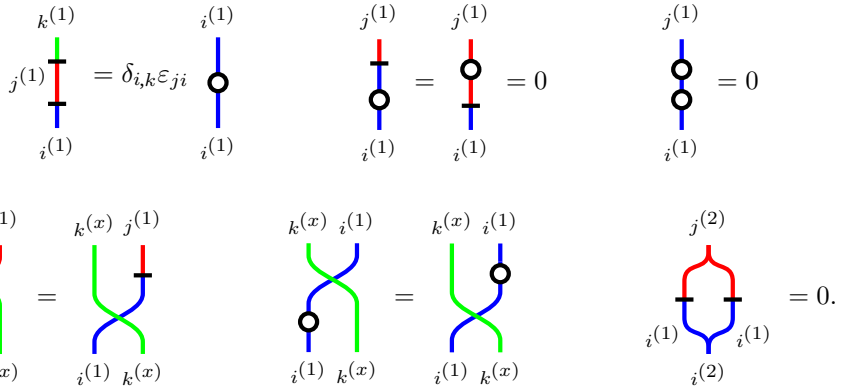
元素的奇偶性由 $\bar{i} = \bar{c}_i = \bar{0}$, $\bar{a}_{ij} = \bar{1}$ 定义。取 $\bar{z} = {}_{\mathbb{K}}I$，我们得到一个良对 $(\overline{Z}, \bar{z})_I$。不难验证，若 G 是一棵树，那么不同的符号选择 ε_{ij} 仍会得到同构的之字形超代数。

13.4.1. 之字形网范畴。根据第 3.1 节，我们可以定义相应的网范畴 $\mathrm{Web}^{\overline{Z}\ \bar{z}}_I$, 。为方便读者，我们介绍 $\mathrm{Web}^{\overline{Z}\ \bar{z}}_I$, 的一种简化表示法，该表示法适用于

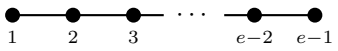
之字形超代数的具体情况。$\mathrm{Web}_I^{\overline{Z},\bar{z}}$，是由对象 $i^{(x)}$ 生成的幺半超范畴，其中 $i \in I$, $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其生成态射为



对于 $i, j, k \in I$，使用 i—k, $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中所有态射都是偶的，最右侧的态射除外，它是奇的。这里我们使用圆点代替 c_i 贴片，并使用颜色变化“标签”代替 a_{ki} 贴片。这些态射满足关系 (3.1.2–3.1.7)，以及以下对关系 (3.1.8–3.1.12) 的简化类比：



13.4.2. 对称群的 RoCK 块。设 $H_N(q)$ 是域 $\mathbb{L}$ 上的对称群 $\mathfrak{S}_N$ 的 Hecke代数，参数为 $q \in \mathbb{L}^\times$，并设 e 为相应的量子特征。设 B 是 $H_N(q)$ 的权为 d 的 RoCK块，见 [20]。设 G 为路径图 A_{e-1}，其顶点为 $I = \{1, 2, \ldots, e-1\}$:



令 $(\overline{Z}, \bar{z})_I$ 为第 13.4 节中定义的相应之字形良对。令 $\mathrm{Web}_I^{\overline{Z},\bar{z}}$，为第 13.4.1 节中定义的相应网范畴，并设:

$$\mathrm{Web}_{I,n,d}^{\overline{Z},\bar{z}} = \bigoplus_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})},\mathbf{j}^{(\mathbf{y})} \in \widehat{\Omega}_I(n,d)} \mathbf{Web}_I^{\overline{Z},\bar{z}}(\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}, \mathbf{j}^{(\mathbf{y})}).$$

换言之，$\mathrm{Web}_{I\,n,,,d}^{\overline{Z}\,\bar{z}}$ 是 $\mathrm{Web}_I^{\overline{Z},\bar{z}}$，的全子范畴，由对象 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} \in \widehat{\Omega}_I(n,d)$ 组成；而 $\mathrm{Web}_{I\,n,,,d}^{\overline{Z}\,\bar{z}}$ 是相应的局部含幺代数，如第 2.1.2 节所述。

命题 13.4.1. 设 $n \geq d$。则 $\mathrm{Web}_{I\,n,,,d}^{\overline{Z}\,\bar{z}}$ 与 B Morita等价。

证明。 [20, 定理 A] 表明，广义舒尔代数 $T_{\bar{z}}^{\overline{Z}}(n,d)$ 与 B Morita等价。对于每个 $\mathbf{i}^{(\mathbf{x})} \in \widehat{\Omega}_I(n,d)$，选取该类在 $\Omega_I(n,d)$ 中的一个代表元 $\mathbf{i}_0^{(\mathbf{x})}$。回顾 (7.4.1) 中定义的幂等元 $\xi_{\mathbf{i}^{(\mathbf{x})}}$，令 $\xi_I = \sum_{\mathbf{i}_0^{(\mathbf{x})} \in \Omega_I(n,d)} \xi_{\mathbf{i}_0^{(\mathbf{x})}} \in T_{\bar{z}}^{\overline{Z}}(n,d)$。

Let $\mathbb{L}$ be 一个域。如 [32, §7.9], 所示，简单对象 $T_{\bar{z}}^{\overline{Z}}(n,d)_{\mathbb{L}}$-模可以按如下方式标记 s:

$$\left\{ L_{\boldsymbol{\lambda},\mathbb{L}} \mid \boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(e-1)}) \text{ an } (e-1)\text{-multipartition of } d \right\},$$

并且存在权幂等元

$$\xi_{\boldsymbol{\lambda}} = \divideontimes_{r=1}^{n} (E_{r,r}^{i})^{\otimes \lambda_r^{(i)}} \in T_{\bar{z}}^{\overline{Z}}(n,d)_{\mathbb{L}},$$

使得 $\xi_{\boldsymbol{\lambda}} L_{\boldsymbol{\lambda},\,\mathbb{L}} \neq 0$。不难验证，对于任意这样的多重分拆 $\boldsymbol{\lambda}$，存在元素 ξ_1、$\xi_2 \in T_{\bar{z}}^{Z}$（$n$、$d$）$_{\mathbb{L}}$使得 $\xi_{\boldsymbol{\lambda}} = \xi_1 \xi_I \xi_2$，因此对于所有多重分拆 $\boldsymbol{\lambda}$，我们也有 $\xi_I L_{\boldsymbol{\lambda},\,\mathbb{L}} \neq 0$。于是根据 [20, 引理 8.26],，我们有

$$\xi_I T_{\bar{z}}^{\overline{Z}}(n,d)\xi_I = \bigoplus_{\mathbf{i}_0^{(\boldsymbol{\varkappa})}, \mathbf{j}_0^{(\boldsymbol{\mathcal{Y}})} \in \Omega_I(n,d)} \xi_{\mathbf{j}_0^{(\boldsymbol{\mathcal{Y}})}} T_{\bar{z}}^{\overline{Z}}(n,d) \xi_{\mathbf{i}_0^{(\boldsymbol{\varkappa})}}$$

与 $T_{\bar{z}}^{\overline{Z}}(n,d)$ Morita等价。根据定理 7.4.2，函子 χ 诱导了代数同构$\xi_I T_{\bar{z}}^{\overline{Z}}(n,d)\xi_I \cong$网$_{I\ n}^{\overline{Z}\ \bar{z}}$、、、$_d$，证明完毕。□

13.4.3. 相关的zigzag/RoCK块猜想。设 $n \geq d$。取 $(Z, z)_I$ 为扩展zigzag代数 [32, §7.9], 的良对，在 [32, 猜想 7.58] 中猜想 $T_z^Z(n,d)$与 d级 q-舒尔代数 $S_q(N,f)$的RoCK块 Morita等价。同样地，取 $(A, a)_I$为 [28, §2.2e], 中Brauer树超代数的良对，在 [28, 猜想 1] 中猜想$T_a^A(n,d)$与 d级谢尔盖耶夫超代数 Ser_n的RoCK块 Morita（超）等价。如果这些猜想被证明成立，那么命题 13.4.1 的类似结果也应在这些情形中成立。若确实如此，这将为这些RoCK块提供图示模型，其形式类似于第 13.4.1 节中的模型。

References

[1] S. Ariki, *Cyclotomic q-Schur algebras as quotients of quantum algebras*, 《纯粹与应用数学杂志》第513卷（1999年），53–69。[2] S. Ariki、T. Terasoma和H. Yamada, *Schur-Weyl reciprocity for the Hecke algebra of*（Z/rZ）≀S_n, 《代数杂志》第178卷（1995年），第2期，374–390。[3] J. D. Axtell, *Cellularity of generalized Schur algebras via Cauchy decomposition*, 《代数杂志》第572卷（2021年），422–460。[4] H. Bao、J. Kujawa、Y. Li和W. Wang, *Geometric Schur duality of classical type*, 《变换群》第23卷（2018年），第2期，329–389。[5] G. C. Brown、N. J. Davidson和J. R. Kujawa, *Quantum webs of type q*，2020年，arXiv:2001.00663。[6] G. C. Brown和J. R. Kujawa, *Webs of type Q*, 《代数与组合》第4卷（2021年），第6期，1027–1072。[7] J. Brundan和A. P. Ellis, *Monoidal supercategories*, 《数学物理通讯》第351卷（2017年），第3期，1045–1089。[8] J. Brundan、I. Entova-Aizenbud、P. Etingof和V. Ostrik, *Semisimplification of the category of tilting modules for* GL$_n$

，

数学进展 375 (2020), 107331. [9] J. Brundan 和 A. Kleshchev,
Projective representations of symmetric groups via Sergeev duality, 数学杂志 239 (2002)，第 1 期，27–68。[10] J. Brundan 和 C. Stroppel, *Highest weight categories arising from Khovanov's diagram algebra I: cellularity*, 莫斯科数学杂志 11 (2011)，第 4 期，685–722，821–822。[11] S. Cautis、J. Kamnitzer 和 S. Morrison,
Webs and quantum skew Howe duality **360** 2014 1 2, , 数
351, 390
学年刊（），第 - 期 – 。[12] S.-J. Cheng 和 W. Wang, *Dualities for Lie superalgebras*，李理论与表示论，现代数学综述，第 2 卷，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2012，页码 1–46。[13] J. Chuang 和 R. Rouquier,
Derived equivalences for symmetric groups and $\mathfrak{sl}_2$*-categorification*，数学年刊（第 2 辑）167 (2008)，第 1 期，245–298。[14] J. Chuang 和 K. M. Tan, *Representations of wreath products of algebras*，剑桥哲学学会数学会刊 135 (2003)，第 3 期，395–411。[15] N. Davidson、J. R. Kujawa 和 R. Muth, *Webs of type p*，2021，arXiv:2109.03410。[16] B. Deng、J. Du 和 G. Yang, *Slim cyclotomic q-Schur algebras*，代数杂志 535 (2019)，365–406。[17] R. Dipper、G. James 和 A. Mathas, *Cyclotomic q-Schur algebras*，数学杂志 229 (1998)，第 3 期，385–416。[18] B. Elias,
Light ladders and clasp conjectures，arXiv预印本（2015），arXiv:1510.06840，arXiv:1510.06840。[19] A. Evseev 和 A. Kleshchev, *Turner doubles and generalized Schur algebras*，数学进展 317 (2017)，665–717。[20]
Blocks of symmetric groups semicuspidal KLR algebras and zigzag Schur-Weyl duality，数学年刊（第 2 辑）188 (2018)，第 2 期，453–512。

[21] M. Geck 和 G. Hiss， *Modular representations of finite groups of Lie type in non-defining characteristic*，《有限约化群》（吕米尼，1994年），数学进展，第 141 卷，Birkh¨auser 波士顿，波士顿，马萨诸塞州，1997年，页码 195–249。[22] H. Gould， *Tables of combinatorial identities*，2010年。[23] J. A. Green， *Polynomial representations of* GL_n，数学讲义，第 830 卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1980年。[24] R. M. Green， *Hyperoctahedral Schur algebras*，代数杂志 192 (1997)，第 1 期，418–438。[25] J. E. Grigsby、A. M. Licata 和 S. M. Wehrli，*Annular Khovanov homology and knotted Schur-Weyl representations*，组合数学 154 (2018)，第 3 期，459–502。[26] R. Howe， *Perspectives on invariant theory: Schur duality， multiplicity-free actions and beyond*，《舒尔讲座》（1992年）（特拉维夫），以色列数学会议论文集，第 8 卷，巴伊兰大学，拉马特甘，1995年，页码 1–182。[27] A. Kleshchev，*Linear and projective representations of symmetric groups*，剑桥数学专著，第 163 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2005年。[28] A. Kleshchev 和 M. Livesey， *RoCK blocks for double covers of symmetric groups and quiver Hecke superalgebras*，arXiv预印本（2022年），arXiv:2201.06870， arXiv:2201.06870。[29] A. Kleshchev 和 R. Muth，*Affine zigzag algebras and imaginary strata for KLR algebras*，美国数学会会刊 371 (2019)，4535–4583。[30] *Based quasi-hereditary algebras*，代数杂志 558 (2020)，504–522。[31] *Generalized Schur algebras*，代数与数论 14 (2020)，第 2 期，501–544。[32] *Schurifying quasi-hereditary algebras*，伦敦数学会会刊 125 (2022)，第 3 期，626–680。[33] C.-J. Lai、D. K. Nakano 和 Z. Xiang， *On q-schur algebras corresponding to hecke algebras of type b*，2019年，arXiv:1902.07682 。[34] V. Mazorchuk 和 C. Stroppel， *G*（*ℓ*， *k*， *d*）*-modules via groupoids*，代数组合杂志 43 (2016)，第 1 期，11–32。[35] H. Queffelec 和 A. Sartori， *Mixed quantum skew Howe duality and link invariants of type A*，纯粹与应用代数杂志 223 (2019)，第 7 期，2733–2779。[36] D. Rosso 和 A. Savage，*A general approach to Heisenberg categorification via wreath product algebras*，数学杂志 286 (2017)，第 1-2 期，603–655。[37] A. Sartori 和 D. Tubbenhauer， *Webs and q-Howe dualities in types BCD*，美国数学会会刊 371 (2019)，7387–7431。[38] A. Savage， *Affine wreath product algebras*，国际数学研究通知 10 (2020)，2977–3041。[39] A. Sergeev，*An analog of the classical invariant theory for Lie superalgebras. I， II*，密歇根数学杂志 49 (2001)，第 1 期，113–146，147–168。[40] D. Tubbenhauer、P. Vaz 和 P. Wedrich， *Super q-Howe duality and web categories*，代数与几何拓扑 17 (2017)，第 6 期，3703–3749。[41] W. Turner， *Rock blocks*，美国数学会回忆录 202 (2009)，第 947 号，viii+102。

Email address: davidsonnj@cofc.eduDepartment of Mathematics, College of Charleston, Charleston, SC, USA*Email address*: kujawa@ou.eduDepartment of Mathematics, University of Oklahoma, Norman, OK, USA*Email address*: muthr@duq.eduDepartment of Mathematics and Computer Science, Duquesne University, Pittsburgh, PA, USA*Email address*: jieruzhu699@gmail.com

Research Institute in Mathematics and Physics, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium