arXiv:2302.04086v2 [math.NA] 8 Feb 2024

四元数循环矩阵的分块对角化及其应用

Junjun Pan Michael K.Ng*

摘要

众所周知，复循环矩阵可以通过带有虚数单位 i 的离散傅里叶矩阵进行对角化。本文的主要目的是证明，四元数循环矩阵无法通过带有三个虚数单位 i、j 和 k 的离散四元数傅里叶矩阵进行对角化。相反，四元数循环矩阵可以通过置换后的离散四元数傅里叶变换矩阵分块对角化为 1×1 块和 2×2 分块矩阵。利用这种分块对角化形式，可以高效地确定四元数循环矩阵的逆，其过程类似于求复循环矩阵的逆。我们利用这种分块对角化形式，研究元素为四元数的四元数张量的四元数张量奇异值分解。通过计算四元数循环矩阵的逆，以及求解由四元数信号线性预测产生的四元数托普利茨系统等应用，验证了本文所提出的分块对角化结果的效率。最后，采用一个以彩色视频为三阶四元数张量的数值例子，验证四元数张量奇异值分解的有效性。

关键词：循环矩阵、四元数、分块对角化、离散傅里叶变换、张量、奇异值分解

AMS学科分类：65F10, 97N30, 94A08

1 引言

首先介绍本文中使用的记号。实数域、复数域和四元数代数分别定义为 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{Q}$。除非另有说明，小写字母表示实数，例如 $a \in \mathbb{R}$。粗体小写字母表示实向量，例如 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$。实矩阵用粗体大写字母表示，例如 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$。四元数域上的数、向量和矩阵分别用对应的带 breve 符号表示，例如 $\breve{a} \in \mathbb{Q}$、$\breve{\mathbf{a}} \in \mathbb{Q}^n$ 和 $\breve{\mathbf{A}} \in \mathbb{Q}^{m\times n}$。

四元数域 $\mathbb{Q}$ 通常表示为以下笛卡尔形式，

$$\breve{q} = q_0 + \mathtt{i}q_1 + \mathtt{j}q_2 + \mathtt{k}q_3,$$

其中 q_0，q_1，q_2，$q_3 \in \mathbb{R}$，且 i，j，k 是虚数单位，满足

$$\mathtt{i}^2 = \mathtt{j}^2 = \mathtt{k}^2 = -1, \quad \mathtt{ij} = -\mathtt{ji} = \mathtt{k}, \quad \mathtt{jk} = -\mathtt{kj} = \mathtt{i}, \quad \mathtt{ki} = -\mathtt{ik} = \mathtt{j}, \quad \mathtt{ijk} = -1.$$

*香港浸会大学数学系。电子邮箱：junjpan@hkbu.edu.hk、michael-ng@hkbu.edu.hk。M. Ng 的研究部分由香港研究资助局 GRF 17201020、17300021、C7004-21GF 项目以及国家自然科学基金委员会—香港研究资助局联合项目 N-HKU76921 资助。

任意四元数 $\breve{q}$ 都可以简洁地写作 $\breve{q}=$ 实部 $\breve{q}+$虚部 $\breve{q}$，其中实部为 实部 $\breve{q}=q_0$，虚部为 虚部 $\breve{q}=\mathbf{i}q_1+\mathbf{j}q_2+\mathbf{k}q_3$。若四元数 $\breve{q}$ 的实部分量 实部 $\breve{q}=0$，则称其为纯四元数。四元数共轭 $\breve{q}$ 和模 $|\breve{q}|$ 定义为

$$\bar{\breve{q}} \doteq Re\,\breve{q}-Im\,\breve{q}=q_0-\mathbf{i}q_1-\mathbf{j}q_2-\mathbf{k}q_3,\quad |\breve{q}| \doteq \sqrt{\breve{q}\bar{\breve{q}}}=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}.$$

若四元数的模等于 1，即 $|\breve{q}|=1$，则称其为单位四元数。两个四元数 $\breve{a}=a_0+a_1\ \mathbf{i}+\ \mathbf{j}+\ \mathbf{k}$ $\quad b=b_0+b_1\ \mathbf{i}+\ \mathbf{j}+\ \mathbf{k}$ $\quad \breve{a}\cdot b=\mathbf{i}\,\mathbf{a}\,\mathbf{j}\,\mathbf{a}\,\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{i}\,\mathbf{b}\,\mathbf{j}\,\mathbf{b}\,\mathbf{k}$ 的点积定义为 $a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$。类似地，对于四元数矩阵 $\mathbf{Q}()$，我们将其转置记为 $\breve{\mathbf{Q}}^T=(\breve{q}_{vu})\in\mathbb{Q}^{n\times m}$，将其共轭转置记为 $\breve{\mathbf{Q}}^*=(\bar{\breve{q}}_{vu})\in\mathbb{Q}^{n\times m}$。

1.1 复循环矩阵

复循环矩阵 $\mathbf{C}_0+\mathbf{C}_1\mathbf{i}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 具有如下形式，

$$\mathbf{C}_0+\mathbf{C}_1\mathbf{i}=\begin{pmatrix} c_0^{(0)}+c_1^{(0)}\mathbf{i} & c_0^{(n-1)}+c_1^{(n-1)}\mathbf{i} & \cdots & c_0^{(2)}+c_1^{(2)}\mathbf{i} & c_0^{(1)}+c_1^{(1)}\mathbf{i} \\ c_0^{(1)}+c_1^{(1)}\mathbf{i} & c_0^{(0)}+c_1^{(0)}\mathbf{i} & \cdots & & c_0^{(2)}+c_1^{(2)}\mathbf{i} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_0^{(n-2)}+c_1^{(n-2)}\mathbf{i} & & \cdots & c_0^{(0)}+c_1^{(0)}\mathbf{i} & c_0^{(n-1)}+c_1^{(n-1)}\mathbf{i} \\ c_0^{(n-1)}+c_1^{(n-1)}\mathbf{i} & c_0^{(n-2)}+c_1^{(n-2)}\mathbf{i} & \cdots & c_0^{(1)}+c_1^{(1)}\mathbf{i} & c_0^{(0)}+c_1^{(0)}\mathbf{i} \end{pmatrix},$$

简记为 $\mathbf{C}_0+\mathbf{C}_1\mathbf{i}=\mathbf{circ}(\mathbf{c}_0+\mathbf{c}_1\mathbf{i})$，其中

$$\mathbf{c}_0+\mathbf{c}_1\mathbf{i}=[c_0^{(0)}+c_1^{(0)}\mathbf{i},c_0^{(1)}+c_1^{(1)}\mathbf{i},\cdots,c_0^{(n-1)}+c_1^{(n-1)}\mathbf{i}].$$

注意，每个行向量相对于前一个行向量都向右循环移位一位。$n\times n$ 复循环矩阵的特征向量是 $\mathbf{F}_\mathbf{i}^*$（或 $\mathbf{F}_\mathbf{i}$）的列，其中 $\mathbf{F}_\mathbf{i}$ 是离散傅里叶变换矩阵，定义如下：

$$[\mathbf{F}_\mathbf{i}]_{uv}=\frac{1}{\sqrt{n}}\exp\left(\frac{-2\pi\mathbf{i}}{n}\right)^{uv},\quad u,v=0,\cdots,n-1,$$

即，

$$(\mathbf{C}_0+\mathbf{C}_1\mathbf{i})\mathbf{F}_\mathbf{i}^*=\mathbf{F}_\mathbf{i}^*(\mathbf{\Lambda}_0+\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{i}),\quad \text{or}\quad \mathbf{C}_0+\mathbf{C}_1\mathbf{i}=\mathbf{F}_\mathbf{i}^*(\mathbf{\Lambda}_0+\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{i})\mathbf{F}_\mathbf{i},$$

其中 $\mathbf{\Lambda}_0$ 和 $\mathbf{\Lambda}_1$ 是对角矩阵。换言之，$(\mathbf{C}_0+\mathbf{C}_1\mathbf{i})$可由带有虚数单位 $\mathbf{i}$ 的离散傅里叶变换矩阵对角化。在以下讨论中，我们将上述离散傅里叶变换矩阵称为$\mathbf{F}_\mathbf{i}$，因为它是用四元数表示的，但在复数域中仅与虚数单位 $\mathbf{i}$ 相关联。

1.2 本文贡献

本文研究具有以下形式的四元数循环矩阵$\breve{\mathbf{C}}\in\mathbb{Q}^{n\times n}$

$$\breve{\mathbf{C}}=\mathrm{circ}(\breve{\mathbf{c}})=\begin{pmatrix} \breve{c}^{(0)} & \breve{c}^{(n-1)} & \cdots & \breve{c}^{(2)} & \breve{c}^{(1)} \\ \breve{c}^{(1)} & \breve{c}^{(0)} & \cdots & & \breve{c}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \breve{c}^{(n-2)} & & \cdots & \breve{c}^{(0)} & \breve{c}^{(n-1)} \\ \breve{c}^{(n-1)} & \breve{c}^{(n-2)} & \cdots & \breve{c}^{(1)} & \breve{c}^{(0)} \end{pmatrix},$$

其中 $\breve{\mathbf{c}} = [\breve{c}^{(0)}, \breve{c}^{(1)}, \cdots, \breve{c}^{(n-1)}]$。我们想知道，四元数循环矩阵 $\breve{\mathbf{C}}$ 能否由$\mathbf{F}_{\mathtt{i}}$ 或其他离散四元数傅里叶变换矩阵$\mathbf{F}^{\breve{\mu}}$ 对角化？这里$\mathbf{F}^{\breve{\mu}}$ 定义如下 [2–4, 21]:

$$[\breve{\mathbf{F}}^{\breve{\mu}}]_{uv} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{-2\pi\breve{\mu}}{n}\right)^{uv}, \quad u, v = 0, \cdots, n-1, \tag{1}$$

其中 $\breve{\mu}$ 是一个纯四元数

$$\breve{\mu} = \mu_1\mathtt{i} + \mu_2\mathtt{j} + \mu_3\mathtt{k}$$

满足 $|\breve{\mu}| = 1$。例如，当 $\breve{\mu} = \mathtt{i}$ 时，$\breve{\mathbf{F}}^{\breve{\mu}}$ 等于 $\breve{\mathbf{F}}_{\mathtt{i}}$。在信号处理中，$\breve{\mu}$ 通常设为 $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathtt{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathtt{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathtt{k}$，参见 [21]。~~一般而言，~~由于~~四~~元数 $\breve{}$ $\breve{}$ $\breve{}$域的非交换性，上述问题的答案是否定的，即 $\mathbf{C}$ 无法由 $\mathbf{F}_{\mathtt{i}}$ 或 $\mathbf{F}^{\breve{\mu}}$对角化。

$\breve{}$ $\breve{}$ $\breve{}$尽管 $\mathbf{C}$ 无法由 $\mathbf{F}_{\mathtt{i}}$ 或 $\mathbf{F}^{\breve{\mu}}$对角化，但仍可将其变换为一种简单的$\breve{}$ $\breve{}$ $\breve{}$结构。更确切地说，$\mathbf{F}^{\breve{\mu}}\mathbf{C}\mathbf{F}^{*}_{\breve{\mu}}$ 的结构如下所示:

$$\begin{pmatrix} \dagger & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \dagger & 0 & \cdots & 0 & \dagger \\ & 0 & \ddots & & \iddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \dagger & & \vdots \\ & 0 & \iddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dagger & 0 & \cdots & 0 & \dagger \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \dagger & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \dagger & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dagger \\ & 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \dagger & \dagger & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \dagger & \dagger & & \vdots \\ & 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dagger & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dagger \end{pmatrix}, \tag{2}$$

当矩阵的大小为偶数或奇数时。注意，在式（2）中由$\breve{}$ $\breve{}$ $\breve{}$“†”表示的非零元素位置，只可能出现在$\mathbf{F}^{\breve{\mu}}\mathbf{C}\mathbf{F}^{*}_{\breve{\mu}}$的主对角线和反下副对角线上。利用这种对角化和反下副对角化结构，我们证明，借助置换离散四元数傅里叶矩阵，可以将四元数循环矩阵分块对角化为 1×1 块和 2×2 块。因此，可以像求可逆$n\times n$ 复循环矩阵的逆矩阵一样，在 $O(n\log\ n)$ 次运算内高效求得可逆 $n\times n$ 四元数循环矩阵的逆矩阵。利用四元数循环矩阵的分块对角化结果，我们可以推导出四元数张量的四元数张量奇异值分解，其中所有元素均为四元数。

本文的结构安排如下。第2节介绍利用离散四元数傅里叶矩阵对四元数循环矩阵进行分块对角化。第3节研究四元数张量的四元数张量奇异值分解的代数结构。第 4 节通过四元数逆矩阵计算和四元数信号线性预测的数值示例，检验分块对角化结果的效率。我们还采用彩色视频（三阶四元数张量）的数值示例，检验四元数张量奇异值分解的有效性。最后，第5节给出一些总结性评述。

1.3 评述

最近， [29]中提出了一种基于八元数代数对角化四元数循环矩阵的策略。八元数$o \in \mathbb{O}$ 通常表示为$o = o_1 + o_2\mathtt{i} + o_3\mathtt{j} + o_4\mathtt{k} + o_5\mathtt{l} + o_6\mathtt{il} + o_7\mathtt{jl} + o_8\mathtt{kl}$，其中 $o_t \in \mathbb{R}$，$(t = 1,\ 2,\ \cdots 8)$。1、i，j，k，l，il，jl，kl称为单位八元数。它们的乘法规则如下表所示。

$\mathbb{O}$	1	i	j	k	l	il	jl	kl
1	1	i	j	k	l	il	jl	kl
i	i	-1	k	−j	il	−l	−kl	jl
j	j	-k	-1	i	jl	kl	−l	−il
k	k	j	-i	-1	kl	-jl	il	−l
l	l	-il	-jl	−kl	-1	i	j	k
il	il	l	-kl	jl	- i	-1	-k	j
jl	jl	kl	l	-il	-j	k	-1	-i
kl	kl	−jl	il	l	-k	-j	i	-1

表1：八元数乘法规则

在 [29], 中，构造了一个基于单位八元数 l（或 jl，或 l 与 jl 的线性组合：(l +jl)/$\sqrt{2}$）的酉八元数矩阵，用于对角化四元数循环矩阵。其对角化结果可通过快速傅里叶变换得到。这项工作似乎前景乐观。然而，八元数不满足结合律，因此会带来一些计算问题。

例1. 给定四元数矩阵$\mathbf{C}$ 和向量$\mathbf{b}$，求以下四元数方程的解 $\breve{\mathbf{x}}$，

$$\breve{\mathbf{C}}\breve{\mathbf{x}} = \breve{\mathbf{b}},$$

where $\breve{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} -2+1\mathtt{i}+1\mathtt{j}+4\mathtt{k} \\ -1+2\mathtt{i}+2\mathtt{j}+3\mathtt{k} \\ 1+3\mathtt{i}+2\mathtt{j}+2\mathtt{k} \\ 2+4\mathtt{i}+1\mathtt{j}+1\mathtt{k} \end{pmatrix}$, $\breve{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -38+12\mathtt{i}+19\mathtt{j}+19\mathtt{k} \\ -40+18\mathtt{i}+17\mathtt{j}+21\mathtt{k} \\ -37+18\mathtt{i}+18\mathtt{j}+25\mathtt{k} \\ -35+12\mathtt{i}+14\mathtt{j}+23\mathtt{k} \end{pmatrix}$. *The true solution is given by*

$$\breve{\mathbf{x}}^* = \begin{pmatrix} 2+2\mathtt{i}+1\mathtt{j}+2\mathtt{k} \\ 2+1\mathtt{i}+1\mathtt{j}+1\mathtt{k} \\ 2+2\mathtt{i}+1\mathtt{j}+1\mathtt{k} \\ 2+2\mathtt{i}+2\mathtt{j}+1\mathtt{k} \end{pmatrix}.$$

根据 *[29],*，存在酉八元数矩阵$\mathbf{O} = \mathbf{F}_i\mathtt{l}$，使得$\mathbf{O}\breve{\mathbf{C}}\mathbf{O}^* = \breve{\mathbf{D}}$。这里，$\breve{\mathbf{D}} \in \mathbb{Q}^{4\times4}$ 是一个对角四元数矩阵。也可以选择$\mathbf{O} = \mathbf{F}_i\mathtt{jl}$，或$\mathbf{O} = \mathbf{F}_i(\mathtt{l}+\mathtt{jl})/2$，这将得到相同的对角四元数矩阵$\mathbf{D}$。这里，$\mathbf{D}$ 及其逆矩阵为

$$\breve{\mathbf{D}} = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} -10\mathtt{i}-6\mathtt{j}-10\mathtt{k} \\ -1+5\mathtt{i}-\mathtt{j}-\mathtt{k} \\ -2+2\mathtt{i}-2\mathtt{k} \\ -5-\mathtt{i}+3\mathtt{j}-3\mathtt{k} \end{pmatrix}, \quad \breve{\mathbf{D}}^{-1} = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} 0.0424\mathtt{i}+0.0254\mathtt{j}+0.0424\mathtt{k} \\ -0.0357-0.1786\mathtt{i}+0.0357\mathtt{j}+0.0357\mathtt{k} \\ -0.1667-0.1667\mathtt{i}+0.1667\mathtt{k} \\ -0.1136+0.0227\mathtt{i}-0.0682\mathtt{j}+0.0682\mathtt{k} \end{pmatrix},$$

其中Diag($\breve{\mathbf{q}}$) 表示以向量 $\breve{\mathbf{q}}$ 的元素为主对角线元素的对角矩阵。由于$\mathbf{O}\mathbf{O}^* = \mathbf{O}^*\mathbf{O} = \mathbf{I}$，我们可以推导出

$$\breve{\mathbf{x}}_o = \breve{\mathbf{C}}^{-1}\breve{\mathbf{b}} = (\mathbf{O}^*\breve{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{O})\breve{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2.2143+1.8571\mathtt{i}+1.1169\mathtt{j}+2.1753\mathtt{k} \\ 1.8571+0.7857\mathtt{i}+1.0390\mathtt{j}+0.9740\mathtt{k} \\ 1.7857+2.1429\mathtt{i}+0.8831\mathtt{j}+0.8247\mathtt{k} \\ 2.1429+2.2143\mathtt{i}+1.9610\mathtt{j}+1.0260\mathtt{k} \end{pmatrix}.$$

通过采用不同的计算顺序，我们得到

$$(\mathbf{O}^*\breve{\mathbf{D}}^{-1})(\mathbf{O}\breve{\mathbf{b}}) = \begin{pmatrix} 2.2143+0.8923\mathtt{i}-0.0218\mathtt{j}+1.9637\mathtt{k} \\ 1.8571+0.9897\mathtt{i}+1.1470\mathtt{j}+1.9572\mathtt{k} \\ 1.7857+1.4637\mathtt{i}+0.8354\mathtt{j}+1.3923\mathtt{k} \\ 2.1429+2.3663\mathtt{i}+0.6665\mathtt{j}+2.3987\mathtt{k} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{O}^*(\breve{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{O}\breve{\mathbf{b}}) = \begin{pmatrix} 2.2695 + 1.0806\mathtt{i} - 0.4146\mathtt{j} + 1.8013\mathtt{k} \\ 1.5617 + 0.8403\mathtt{i} + 0.8516\mathtt{j} + 2.1065\mathtt{k} \\ 1.7305 + 1.2754\mathtt{i} + 1.2282\mathtt{j} + 1.5546\mathtt{k} \\ 2.4383 + 2.5156\mathtt{i} + 0.9620\mathtt{j} + 2.2494\mathtt{k} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{O}^*(\breve{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{O})\breve{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2.2695 + 1.6688\mathtt{i} + 1.3474\mathtt{j} + 1.8382\mathtt{k} \\ 1.5617 + 0.9351\mathtt{i} + 1.3669\mathtt{j} + 0.9286\mathtt{k} \\ 1.7305 + 2.3312\mathtt{i} + 0.6526\mathtt{j} + 1.1818\mathtt{k} \\ 2.4383 + 2.0649\mathtt{i} + 1.6331\mathtt{j} + 1.0714\mathtt{k} \end{pmatrix},$$

and

$$\mathbf{O}^*(\breve{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{O}\breve{\mathbf{b}})) = \begin{pmatrix} 2.2143 + 1.8571\mathtt{i} + 1.5714\mathtt{j} + 1.5000\mathtt{k} \\ 1.8571 + 0.7857\mathtt{i} + 1.5000\mathtt{j} + 1.5714\mathtt{k} \\ 1.7857 + 2.1429\mathtt{i} + 0.4286\mathtt{j} + 1.5000\mathtt{k} \\ 2.1429 + 2.2143\mathtt{i} + 1.5000\mathtt{j} + 0.4286\mathtt{k} \end{pmatrix}.$$

有趣的是，它们并不相同，而且显然不是上述四元数线性系统的解。这是该计算方法的局限性，原因在于八元数不满足结合律。

相比之下，我们提出的方法仍然基于四元数域。具体而言，我们使用第*2.2*节提出的算法*1*，通过四元数傅里叶变换矩阵 $\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}$, $\breve{\mu} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathtt{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathtt{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathtt{k}$ 将循环矩阵对角化。得到的对角矩阵 $\breve{\mathbf{\Lambda}}$ 及其逆矩阵如下所示。

$$\breve{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.4226 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.5774 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3987 & 0 & -2.2440 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 0 \\ 0 & -1.0893 & 0 & -2.0654 \end{pmatrix}\mathtt{i}$$
$$+ \begin{pmatrix} 6.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3987 & 0 & 1.6427 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.9761 & 0 & -2.0654 \end{pmatrix}\mathtt{j} + \begin{pmatrix} 10.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3987 & 0 & 0.6013 \\ 0 & 0 & 2.0000 & 0 \\ 0 & 4.0654 & 0 & -2.0654 \end{pmatrix}\mathtt{k},$$

and

$$\breve{\mathbf{\Lambda}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1118 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0757 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0424 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0645 & 0 & 0.0188 \\ 0 & 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0.1270 & 0 & 0.0437 \end{pmatrix}\mathtt{i}$$
$$+ \begin{pmatrix} -0.0254 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0645 & 0 & 0.0513 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0930 & 0 & 0.0437 \end{pmatrix}\mathtt{j} + \begin{pmatrix} -0.0424 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0645 & 0 & -0.0701 \\ 0 & 0 & -0.1667 & 0 \\ 0 & -0.0340 & 0 & 0.0437 \end{pmatrix}\mathtt{k}.$$

$\breve{\mathbf{C}}\breve{\mathbf{x}} = \breve{\mathbf{b}}$ 的解随后通过 $\breve{\mathbf{F}}^*_{\breve{\mu}}\breve{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\breve{\mathbf{b}}$ 计算，结果为 $\breve{\mathbf{x}}^*$。

2 四元数循环矩阵

2.1 预备知识

在本小节中，我们推导一些有用的结果，用于刻画四元数循环矩阵在 i、j 和 k 下变换为其他三个正交单位的情况。

定义 1. 如果两个纯四元数 $\breve{\mu} = \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}$ 和 $\breve{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ 满足 $\breve{\mu} \cdot \breve{\alpha} = 0$，即 $\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \mu_3\alpha_3 = 0.$，我们称它们正交，记作 $\breve{\mu} \perp \breve{\alpha}$

给定任意单位纯四元数 $\breve{\mu} = \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}$，$|\breve{\mu}| = 1$，以及与其正交的单位纯四元数 $\breve{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}$，$|\breve{\alpha}| = 1$。它们的乘积 $\beta = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$ 定义为 $\beta = \breve{\mu}\breve{\alpha}$，即

$$\begin{aligned}\breve{\beta} &= (\mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k})(\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) \\ &= (\mu_2\alpha_3 - \mu_3\alpha_2)\mathbf{i} + (\mu_3\alpha_1 - \mu_1\alpha_3)\mathbf{j} + (\mu_1\alpha_2 - \mu_2\alpha_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

引理1。 对于任意纯四元数 $\breve{\mu}$ 和 $\breve{\alpha}$，若 $\breve{\mu} \perp \breve{\alpha}$，则它们的乘积 $\beta = \breve{\mu}\breve{\alpha}$ 满足 *es*

$$\breve{\mu} \perp \breve{\beta}; \quad \breve{\alpha} \perp \breve{\beta}.$$

证明。 利用 $\breve{\alpha} \cdot \beta = 0$ 和 $\breve{\mu} \cdot \beta = 0$即可得到这些结果 □

性质1。 给定任意单位纯四元数 $\breve{\mu} = \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}$，以及与其正交的单位纯四元数 $\breve{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$，且它们的乘积为 $\beta = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$，则$(\breve{\mu}, \breve{\alpha}, \beta)$ 满足

$$\breve{\mu}^2 = -1; \quad \breve{\alpha}^2 = -1; \quad \breve{\beta}^2 = -1; \quad \breve{\mu}\breve{\alpha} = -\breve{\alpha}\breve{\mu} = \breve{\beta}; \quad \breve{\alpha}\breve{\beta} = -\breve{\beta}\breve{\alpha} = \breve{\mu}; \quad \breve{\beta}\breve{\mu} = -\breve{\mu}\breve{\beta} = \breve{\alpha};$$

证明。 β 是 $\breve{\mu}$ 和 $\breve{\alpha}$的乘积，即 $\beta = \breve{\mu}\breve{\alpha}$,

$$\breve{\alpha}\breve{\mu} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k})(\mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}) = -\breve{\beta}.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\breve{\mu}^2 &= (\mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k})^2 = -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) = -1; \\ \breve{\alpha}^2 &= (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k})^2 = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = -1. \\ \breve{\beta}^2 &= \breve{\alpha}\breve{\mu}\breve{\alpha}\breve{\mu} = -\breve{\alpha}\breve{\mu}\breve{\mu}\breve{\alpha} = -1; \quad \breve{\alpha}\breve{\beta} = \breve{\alpha}\breve{\alpha}\breve{\mu} = -\breve{\mu},\end{aligned}$$

and

$$\breve{\beta}\breve{\alpha} = \breve{\alpha}\breve{\mu}\breve{\alpha} = -\breve{\alpha}\breve{\alpha}\breve{\mu} = \breve{\mu}.$$

同理，$\beta\breve{\mu} = -\breve{\mu}\beta = \breve{\alpha}$。结论随之得出。 □

由性质1可知，$(\breve{\mu}, \breve{\alpha}, \beta)$具有与$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$相同的性质。因此，$(\breve{\mu}, \breve{\alpha}, \beta)$可视为类似于(i,j,k)的三轴系统。接下来，我们将说明任意四元数矩阵都可以在三轴系统中改写为：$(\breve{\mu}, \breve{\alpha}, \beta)$。

引理2。 给定一个四元数矩阵$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1\mathbf{i} + \mathbf{M}_2\mathbf{j} + \mathbf{M}_3\mathbf{k} \in \mathbb{Q}^{m\times n}$，其中$\mathbf{M}_l \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $l = 0\ 1\ 2\ 3$ $\breve{\alpha}$ ，，，，以及单位纯四元数三轴系统$(\breve{\mu}, , \breve{\beta})$，则

$$\breve{\mathbf{M}} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\breve{\mu} + \mathbf{A}_2\breve{\alpha} + \mathbf{A}_3\breve{\beta},$$

33 3其中 $\mathbf{A}_0 = \mathbf{M}_0$, $\mathbf{A}_1 = \sum_{l=1} \mu_l\mathbf{M}_l$、$\mathbf{A}_2 = \sum_{l=1} \alpha_l\mathbf{M}_l$、$\mathbf{A}_3 = \sum_{l=1} \beta_l\mathbf{M}_l$。

证明。

$$\begin{aligned}\breve{\mathbf{M}} &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\breve{\mu} + \mathbf{A}_2\breve{\alpha} + \mathbf{A}_3\breve{\beta} \\ &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(\mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}) + \mathbf{A}_2(\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) + \mathbf{A}_3(\beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{A}_0 + (\mu_1\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \beta_1\mathbf{A}_3)\mathbf{i} + (\mu_2\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \beta_2\mathbf{A}_3)\mathbf{j} + (\mu_3\mathbf{A}_1 + \alpha_3\mathbf{A}_2 + \beta_3\mathbf{A}_3)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

$\breve{}$由于 $\mathbf{M}=\mathbf{M}_0+\mathbf{M}_1\mathrm{i}+\mathbf{M}_2\mathrm{j}+\mathbf{M}_3\mathrm{k}$，根据引理1，我们推得

$$\begin{pmatrix}\mathbf{M}_1\\ \mathbf{M}_2\\ \mathbf{M}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1 & \alpha_1 & \beta_1\\ \mu_2 & \alpha_2 & \beta_2\\ \mu_3 & \alpha_3 & \beta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2\\ \mathbf{A}_3\end{pmatrix},\quad \text{then}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2\\ \mathbf{A}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1 & \alpha_1 & \beta_1\\ \mu_2 & \alpha_2 & \beta_2\\ \mu_3 & \alpha_3 & \beta_3\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mathbf{M}_1\\ \mathbf{M}_2\\ \mathbf{M}_3\end{pmatrix}.$$

结果得证。 □

$\breve{}$根据引理2，为了获得在单位纯四元数三轴系统中的新表示（$\breve{\mu}$，$\breve{\alpha}$，β），我们可以将原三轴系统（i、j、k）中的矩阵组合起来。以下引理给出了四元数 $\mathbf{X}$ 的一个$\breve{}$性质，该性质可表示为 $\mathbf{X}_0+\mathbf{X}_1\breve{\mu}$.

引理3。给定 单位纯四元数三轴系统（$\breve{\mu}$、$\breve{\alpha}$、$\breve{\beta}$），对于任意 $\breve{}\mathbf{X}=\mathbf{X}_0+\mathbf{X}_1\breve{\mu}\in\mathbb{Q}^{m\times n}$，

$$\breve{\mu}\breve{\mathbf{X}}=\breve{\mathbf{X}}\breve{\mu},\quad \breve{\alpha}\breve{\mathbf{X}}=(\breve{\mathbf{X}}^*)^T\breve{\alpha},\quad \breve{\beta}\breve{\mathbf{X}}=(\breve{\mathbf{X}}^*)^T\breve{\beta},$$

证明。 根据性质1，我们有

$$\breve{\mu}\breve{\mathbf{X}}=\mathbf{X}_0\breve{\mu}+\mathbf{X}_1\breve{\mu}^2=\mathbf{X}_0\breve{\mu}-\mathbf{X}_1=\breve{\mathbf{X}}\breve{\mu};$$

$$\breve{\alpha}\breve{\mathbf{X}}=\mathbf{X}_0\breve{\alpha}+\mathbf{X}_1\breve{\alpha}\breve{\mu}=\mathbf{X}_0\breve{\alpha}-\mathbf{X}_1\breve{\beta}=(\breve{\mathbf{X}}^*)^T\breve{\alpha};$$

$$\breve{\beta}\breve{\mathbf{X}}=\mathbf{X}_0\breve{\beta}+\mathbf{X}_1\breve{\beta}\breve{\mu}=\mathbf{X}_0\breve{\beta}+\mathbf{X}_1\breve{\alpha}=(\breve{\mathbf{X}}^*)^T\breve{\beta}.$$

结果得证。 □

2.2 分块对角化

$\breve{}$给定一个四元数循环矩阵 $\mathbf{C}\in\mathbb{Q}^{n\times n}$,

$$\breve{\mathbf{C}}=\mathbf{C}_0+\mathbf{C}_1\mathrm{i}+\mathbf{C}_2\mathrm{j}+\mathbf{C}_3\mathrm{k}$$

其中 $\mathbf{C}_l$, $l=0$，1，2，3 是实循环矩阵。

$\breve{}$**引理4**。 给定单位纯四元数三轴系统 $(\breve{\mu},\breve{\alpha},\beta)$，任意四元数循环矩阵$\breve{}\mathbf{C}$ 均可表示为 $(\breve{\mu},\breve{\alpha},\breve{\beta})$，即

$$\breve{\mathbf{C}}=\mathbf{S}_0+\mathbf{S}_1\breve{\mu}+\mathbf{S}_2\breve{\alpha}+\mathbf{S}_3\breve{\beta},$$

其中 $\mathbf{S}_l\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $l=0$,1,2,3。则系数矩阵 $\{\mathbf{S}_l\}_{l=0}^3$ 也是循环矩阵。

证明。 该结果可直接由引理2得到。 □

Le引理 5。 令 $\breve{}\mathbf{F}^{\breve{\mu}}$ 为式（*1*）中定义的四元数离散傅里叶矩阵，n

$$\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^*\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}=\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^*=\mathbf{I}_n;\quad \breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^2=(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^*)^2=\mathbf{A};$$

其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{3}$$

证明。令 $\breve{\omega}=\exp\left(\frac{-2\pi\breve{\mu}}{n}\right)$，则

$$(\breve{\mathbf{F}}_{\mu}^{*}\breve{\mathbf{F}}_{\mu})_{st}=\frac{1}{n}\left(1+\breve{\omega}^{t-s}+\breve{\omega}^{2(t-s)}+\cdots+\breve{\omega}^{(n-1)(t-s)}\right),$$

当 $s=t$, $[\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}]_{st}=1$；当 $s\neq t$, $[\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}]_{st}=\frac{1}{n}\cdot\frac{(\breve{\omega}^{t-s})^{n}-1}{\breve{\omega}^{t-s}-1}=0$。也就是说 $\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}=\mathbf{I}_{n}$。类似地，$\mathbf{F}_{\breve{\mu}}\mathbf{F}_{\breve{\mu}}^{*}=\mathbf{I}_{n}$。

$$[\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{2}]_{st}=\frac{1}{N}(1+\breve{\omega}^{t+s-2}+\breve{\omega}^{2(t+s-2)}+\cdots+\breve{\omega}^{(n-1)(t+s-2)}),$$

当 $s=t=1$ 或 $t+s-2=n$, $[\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{2}]_{st}=1$；对于其他元素，$[\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{2}]_{st}=0$。这意味着 $\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{2}=\mathbf{A}$。类似地，$(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*})^{2}=\mathbf{A}$。结论随之成立。 □

引理 6。对于任意实循环矩阵 $\mathbf{C}=circ(\mathbf{c})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，其中 $\mathbf{c}=(c^{(0)},c^{(1)},\cdots,c^{(n-1)})$，给定离散四元数傅里叶变换矩阵 $\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}$，则 $\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\mathbf{C}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}=\mathrm{Diag}(\sqrt{n}\mathbf{F}_{\breve{\mu}}\mathbf{c})$，其中 $Diag(\mathbf{c})$ 返回一个方对角矩阵，其主对角线上的元素为向量 $\mathbf{c}$ 的元素。

证明。众所周知，任意实循环矩阵$\mathbf{C}=\mathrm{circ}(c^{(0)},\ c^{(1)},\ \cdots,\ c^{(n-1)})$都可以表示为

$$\mathbf{C}=c^{(0)}\mathbf{I}_{n}+c^{(1)}\mathbf{J}+c^{(2)}(\mathbf{J})^{2}+\cdots+c^{(n-1)}(\mathbf{J})^{n-1},\tag{4}$$

其中

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}.\tag{5}$$

注意，J 也是一个循环矩阵，其形式为 $\mathrm{circ}(0,1,0,\cdots,0)$。设 λ 为 J 的特征值，则 $c^{(0)}+c^{(1)}\breve{\lambda}+c^{(2)}\breve{\lambda}^{2}+\cdots+c^{(n-1)}\breve{\lambda}^{n-1}$ 也是 C 的特征值。由 $\det(\breve{\lambda}\mathrm{I}_{n}-\mathrm{J})=0$，可得 $\breve{\lambda}^{n}-1=0$。这意味着 $\breve{\lambda}=1$、$\breve{\omega}$、$\breve{\omega}^{2}$、$\cdots$、$\breve{\omega}^{n-1}$，其中 $\breve{\omega}=\exp\left(\frac{-2\pi\breve{\mu}}{n}\right)$，且 $\breve{\mu}$ 是一个单位纯四元数。

我们可以验证，$\mathrm{F}_{\breve{\mu}}^{*}$ 是 C 的特征向量矩阵。容易推得$\breve{\mathrm{F}}_{\breve{\mu}}\breve{\mathrm{C}}\breve{\mathrm{F}}_{\breve{\mu}}^{*}=\mathrm{Diag}(\sqrt{n}\breve{\mathrm{F}}_{\breve{\mu}}\mathrm{c})$。结论得证。 □

众所周知，$\mathbf{F}_{\mathrm{i}}^{*}$ 是$\mathbf{C}$的特征向量矩阵。在引理 6 中，我们确实证明了$\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}$ 在 $\breve{\mu}$ 为单位纯四元数时也是$\mathbf{C}$ 的特征向量矩阵。

定理 1. </style}给定单位纯四元数三轴系统中的一个四元数循环矩阵($\breve{\mu}$, $\breve{\alpha}$, β),

$$\breve{\mathbf{S}}=\mathbf{S}_{0}+\mathbf{S}_{1}\breve{\mu}+\mathbf{S}_{2}\breve{\alpha}+\mathbf{S}_{3}\breve{\beta}.$$

于是 $PF_{\breve{\mu}}$ 可以将 S 对角分块，其中 P 是一个置换矩阵，通过交换第 k 行与第 $(n-k+3)$ 行构成，$k=3$、4、.....、$\frac{n+1}{2}$（当 n 为奇数时）；当 n 为偶数时，则通过交换第 k 行与第 $(n-k+3)$ 行构成，$k=3$、4、.....、$\frac{n}{2}$。更确切地说，当 n 为奇数时，$P\breve{F}_{\breve{\mu}}\breve{S}F_{\breve{\mu}}^{*}P^{*}$ 是一个对角分块矩阵，其中第一个对角块是 *1×1* 矩阵，其余对角块均为 *2×2* 矩阵；当 n 为偶数时，除上述对角块外，$PF_{\breve{\mu}}SF_{\breve{\mu}}^{*}P^{*}$ 还多出一个位于最后一个对角块中的 *1×1* 矩阵。

证明。 注意， $\{\mathbf{S}_l\}_{l=0}^3$ 是实循环矩阵。令 $\mathbf{S}_l = \text{circ}(\mathbf{s}_l)$， $l=0$，1，2，3。由引理3和引理5可得

$$\begin{aligned}
\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\breve{\mathbf{S}}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*} &= \breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}(\mathbf{S}_0+\mathbf{S}_1\breve{\mu}+\mathbf{S}_2\breve{\alpha}+\mathbf{S}_3\breve{\beta})\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*} \\
&= \breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\mathbf{S}_0\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}+\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\mathbf{S}_1\breve{\mu}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}+\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\mathbf{S}_2\breve{\alpha}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}+\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\mathbf{S}_3\breve{\beta}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*} \\
&= \breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\mathbf{S}_0\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}+(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\mathbf{S}_1\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*})\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\breve{\mu}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}+(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\mathbf{S}_2\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*})\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\breve{\alpha}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}+(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\mathbf{S}_3\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*})\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\breve{\beta}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*} \\
&= \breve{\mathbf{\Lambda}}_0+\breve{\mathbf{\Lambda}}_1\breve{\mu}+\breve{\mathbf{\Lambda}}_2\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{2}\breve{\alpha}+\breve{\mathbf{\Lambda}}_3\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{2}\breve{\beta} \\
&= \breve{\mathbf{\Lambda}}_0+\breve{\mathbf{\Lambda}}_1\breve{\mu}+\breve{\mathbf{\Lambda}}_2\mathbf{A}\breve{\alpha}+\breve{\mathbf{\Lambda}}_3\mathbf{A}\breve{\beta} \doteq \breve{\mathbf{\Lambda}},
\end{aligned}$$

其中 $\breve{\mathbf{\Lambda}}_l = \text{Diag}(\sqrt{n}\breve{\text{F}}\breve{\mu}\text{s}_l)$、 $l=0$、1、2、3。显然， $\breve{\mathbf{\Lambda}}_2$A 和 $\breve{\mathbf{\Lambda}}_3A\breve{}$ 的非零模式与 A 相同。注意， $\mathbf{\Lambda}$ 的非零元素只能出现在主对角线和反下副对角线位置。 $\breve{\mathbf{\Lambda}}$ 的结构见（2）。根据这一结构，当 n 为偶数时，我们可以交换 k 行与（ $n-k+3$ ）行以及相应的列，其中 $k=3$=4，...， $\frac{n}{2}$ ；当 n 为奇数时，则交换 k 行与（ $n-k+3$ ）行以及相应的列，其中 $k=3$=4，...， $\frac{n+1}{2}$ 。这样，当 n 为奇数时，我们在第一个主对角位置得到一个 1×1 块，在其他对角位置得到 2×2 块；而对于偶数 n，除上述块外，最后一个对角块中还多出一个 1×1 矩阵。等价地，我们只需分别在 $\mathbf{\Lambda}_0+\mathbf{\Lambda}_1\breve{\mu}+\mathbf{\Lambda}_2\text{A}\breve{\alpha}+\mathbf{\Lambda}_3\text{A}\beta$ 的左侧和右侧施加 P 和 $\breve{}$ $\breve{}$ $\breve{}$ $\breve{}$ $\breve{}$P* 。 □

注1。 我们指出，(i,j,k) 是单位纯四元数三轴系统。对于以(i,j,k)表示的任意四元数循环矩阵 $\breve{}$ $\mathbf{C}$ ，根据定理 *1*，标准离散傅里叶变换矩阵 $\breve{}\mathbf{F}_{\text{i}}\breve{}$可以将$\mathbf{C}$ 分块对角化。

注2。 定理 *1* 告诉我们，沿单位纯四元数轴$(\breve{\mu},\breve{\alpha},\breve{\beta})$ 的四元数循环矩阵可以由 $\breve{}\mathbf{F}\breve{\mu}$分块对角化。然而，给定 $\breve{\mu}$，可以有多种选择$(\breve{\alpha},\breve{\beta})\breve{}$ $\breve{}$ $\breve{}$ $\breve{}$ $\breve{}$ $\breve{}$来构成单位纯四元数三轴系统。请注意，对于以三轴系统(i, j,k)表示的$\mathbf{C}$， $\mathbf{F}\breve{\mu}\mathbf{S}\mathbf{F}_{\breve{\mu}}^{*}=\mathbf{F}\breve{\mu}\mathbf{C}\mathbf{F}_{\breve{\mu}}^{*}$ 是成立的。容易推得，当 $\breve{\mu}$ 固定时， $(\breve{\alpha},\breve{\beta})$ 的不同选择不会改变 $\breve{\mathbf{\Lambda}}$的块对角化结构，尽管$(\breve{\mathbf{\Lambda}}_2,\breve{\mathbf{\Lambda}}_3)$的取值会有所不同。

注记 3。 *t* 乐彩 $\breve{}$ $\breve{}$对于不含$\mathbf{C}$ 中j 和k 项的情形，可以通过$\mathbf{F}$进行对角化。i .

四元数循环矩阵的分块对角化过程见算法1。对一个 n维向量计算离散四元数傅里叶矩阵的代价为 $O(n\log\ n)$次运算，见 [21],；而对一个 n×n 四元数循环矩阵进行完整分块对角化的计算复杂度为 $O(n\log\ n)$次运算。当 $\breve{}\mathbf{C}$ 可逆时，计算 $\breve{}\mathbf{C}^{-1}\breve{}\mathbf{x}$ 的代价也为 $O(n\log\ n)$次运算。我们只需注意到

$$\breve{\mathbf{C}}^{-1}\breve{\mathbf{x}}=\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}\mathbf{P}^{*}\breve{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\mathbf{P}\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\breve{\mathbf{x}},$$

$\breve{}$因此，计算涉及$\mathbf{C}$的分块对角化、四元数快速傅里叶变换以及2×2 矩阵的逆矩阵。

我们注意到，算法1中的步骤3可以使用 MATLAB 工具箱 QTFM [1]简单实现。具体而言，

$$\breve{\boldsymbol{\lambda}}_l=\text{qfft}(\mathbf{s}_l,\breve{\mu},\text{'L'}),\quad l=0,1,2,3,$$

$\breve{}$ $\breve{}$其中 $\boldsymbol{\lambda}_l$ 是 $\mathbf{\Lambda}_l$的主对角线。

在下一节中，我们将利用这些结果研究四元数张量奇异值分解及其代数结构。在第 4 节中，我们将展示所提出的分块对角化结果在四元数信号处理的线性预测中具有高效性。

[1]https://qtfm.sourceforge.io/

算法1 四元数循环矩阵的分块对角化

输入： 给定四元数循环矩阵 $\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1\mathbf{i} + \mathbf{C}_2\mathbf{j} + \mathbf{C}_3\mathbf{k} \in \mathbb{Q}^{n\times n}$；四元数傅里叶变换矩阵 $\mathbf{F}_\mu$,

输出： 四元数循环矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 的分块对角化。

1：生成单位纯四元数三轴系统（μ, α, β）。2：将四元数循环矩阵 $\mathbf{C}$ 改写为以（μ, α, β）为轴。$S_0 = C_0$；$S_1 = \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + \mu_3 C_3$；$S_2 = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3$；$S_3 = \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3$；3：对 $S = S_0 + S_1\mu + S_2\alpha + S_3\beta$ 进行 QFFT。$\breve{\mathbf{\Lambda}}_0 = \mathrm{Diag}(\sqrt{n}\,\mathbf{F}_\mu S_0)$；$\breve{\mathbf{\Lambda}}_1 = \mathrm{Diag}(\sqrt{n}\,\mathbf{F}_\mu S_1)$；$\breve{\mathbf{\Lambda}}_2 = \mathrm{Diag}(\sqrt{n}\,\mathbf{F}_\mu S_2)$；$\breve{\mathbf{\Lambda}}_3 = \mathrm{Diag}(\sqrt{n}\,\mathbf{F}_\mu S_3)$。4：$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_0 + \mathbf{\Lambda}_1\mu + \mathbf{\Lambda}_2\alpha + \mathbf{\Lambda}_3\beta$。

3 四元数张量奇异值分解

本节将应用四元数循环矩阵的分块对角化结果来研究四元数张量奇异值分解，从而能够将该分解用于表示为三阶四元数张量的彩色视频。

3.1 张量奇异值分解

首先，我们将简要回顾相关背景，并介绍张量分解中使用的运算。为了利用张量的内在结构，Kilmer等人首先研究了一种名为张量-张量积（t-积）的算子 [12]。该算子基于复傅里叶变换构造，为复三阶张量在定向矩阵空间中的表示提供了新的解释。随后，基于 t-积提出了张量奇异值分解（T-SVD）及其相关的秩——管秩。这种新的分解能够很好地刻画复三阶张量的内在低秩结构。对于实张量/复张量，研究人员 [10, 15, 23]基于余弦变换研究了T-SVD，并提出了其他基于可逆变换的变体。正如预期，由于其自身特性，T-SVD在捕获现实数据中的空间平移相关性方面展现出显著优势，尤其是在图像去模糊和补全问题中 [9, 11, 15, 23, 26–28, 31]。

接下来，我们将回顾复数 T-SVD 的一些基本定义，来自 [11, 12]。

定义 2 ([11, 12]**).** 给定一个 $n_1 \times n_2 \times m$ 的复张量 $\mathcal{T}$，则 bcirc($\mathcal{T}$) 和 unfold($\mathcal{T}$) 分别定义如下:

$$\mathrm{bcirc}(\mathcal{T}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_m & \cdots & \mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_1 & \cdots & & \mathbf{T}_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{T}_{m-1} & & \cdots & \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_m \\ \mathbf{T}_m & \mathbf{T}_{m-1} & \cdots & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{unfold}(\mathcal{T}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_m \end{pmatrix};$$

其中 $\{\mathbf{T}_t\}_{t=1}^m$ 是张量的正面切片，即 $\mathbf{T}_t = \mathcal{T}(:,:,t)$，其中 $t = 1, 2, \cdots, m$。我们使用“fold”将正面切片 $\{\mathbf{T}_t\}_{t=1}^m$ 还原为张量 $\mathcal{T}$，具体而言，fold(unfold($\mathcal{T}$)) $= \mathcal{T}$。“Bdiag”返回一个

块- 对角矩阵，其对角线上是张量 $\mathcal{T}$ 的正面切片，具体如下 ，

$$\mathrm{Bdiag}(\mathcal{T}) \doteq \mathrm{Diag}(\mathbf{T}_1, \cdots, \mathbf{T}_m) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & & & 0 \\ & \mathbf{T}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{T}_m \end{pmatrix}.$$

定义 3（T-乘积 [11,12]）。设 $\mathcal{T}$是一个维度为 $n_1 \times n_2 \times m$ 的复张量， $\mathcal{B}$ 是一个维度为 $n_2 \times n_3 \times m$的复张量，则 t-乘积 $\mathcal{T} \star \mathcal{B}$ 是一个维度为 $n_1 \times n_3 \times m$的复张量，即

$$\mathcal{T} \star \mathcal{B} = \mathrm{fold}(\mathrm{bcirc}(\mathcal{T})\,\mathrm{unfold}(\mathcal{B})). \tag{6}$$

注意，在实数或复数情形下， t-乘积可描述为分块循环矩阵与分块矩阵列的乘法。本节关注四元数的情形。利用所提出的分块对角化结果，可以将 t-乘积描述为分块四元数循环矩阵与分块四元数矩阵列的乘法。这等价于对四元数张量第三模的管应用四元数傅里叶变换。

定义 4（单位张量 [11,12]）。若张量 $\mathcal{I}$的第一个正面切片是 $n \times n \times m$ 单位矩阵，且其他正面切片均为零，则称其为单位张量。

定义 5（共轭转置 [11,12]）。给定一个 $n_1 \times n_2 \times m$的复张量 $\mathcal{B}$，其共轭转置 $\mathcal{B}^*$ 是一个 $n_2 \times n_1 \times m$ 的张量，通过对每个正面切片进行共轭转置，然后将转置后的第 2 个至 m个正面切片的顺序反转而得到。

定义 6（正交张量 [11,12]）。如果一个 $n \times n \times m$ 的张量 $\mathcal{Q}$ 满足 $\mathcal{Q}^* \star \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \star \mathcal{Q}^* = \mathcal{I}$，则称其为酉张量。

定理 2（ 张量奇异值分解 [11,12]）。给定一个张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times m}$，则 $\mathcal{T}$可以分解为 s

$$\mathcal{T} = \mathcal{U} \star \mathcal{S} \star \mathcal{V}^*, \tag{7}$$

其中 $\mathcal{U} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1 \times m}$、 $\mathcal{V} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2 \times m}$ 是酉张量， $\mathcal{S} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times m}$ 是一个对角张量 r.

注意，对角张量是指其每个正面切片都是对角矩阵。张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times m}$ 的张量管秩记为 rank($\mathcal{T}$)，定义为张量 $\mathcal{T} = \mathcal{U} \star \mathcal{S} \star \mathcal{V}^*$ 的张量奇异值分解所得 $\mathcal{S}$ 中非零奇异管的数量。

3.2 主要结果

我们首先阐明将离散四元数傅里叶变换矩阵作用于实三阶张量的每个管时所形成的结构。

引理 7. 给定 $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times m}$ 和离散四元数傅里叶变换矩阵 $\mathbf{F}_{\breve{\mu}}$,

$$(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1})\,\mathrm{bcirc}(\mathcal{T})(\breve{\mathbf{F}}^*_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) = \mathrm{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}), \tag{8}$$

其中张量 $\breve{\mathcal{D}}$ 是通过将 $\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}$ 作用于 $\mathcal{T}$ 的每个管而计算得到的，即 $\mathcal{T}(s, p, :)$，其中 $s = 1$、$\cdots n_1$ 和 $p = 1$、 $\cdots n_2$。

证明。由 bcirc($\mathcal{T}$)，可得

$$\mathrm{bcirc}(\mathcal{T}) = (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{T}_1) + (\mathbf{J} \otimes \mathbf{T}_2) + \cdots + \left((\mathbf{J})^{m-1} \otimes \mathbf{T}_m\right),$$

其中，$\mathbf{J}$ 定义见式 (5)。令 $\breve{\mathbf{\Lambda}}$ 为$\mathbf{J}$的特征值矩阵。根据引理 6 的推导可知，$\breve{\mathbf{\Lambda}} = \text{Diag}\left(1, \breve{\omega}, \cdots, (\breve{\omega})^{m-1}\right)$ with $\breve{\omega} = \exp\begin{pmatrix} -2\pi\breve{\mu} \\ m \end{pmatrix}$，且 $\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*}$是$\mathbf{J}$的特征向量矩阵。注意

$$(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1})(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{T}_1)(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{T}_1,$$

$$(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1})\big((\mathbf{J})^t \otimes \mathbf{T}_{t+1}\big)(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) = (\breve{\mathbf{\Lambda}})^t \otimes \mathbf{T}_{t+1}, \quad \text{for} \quad t = 1, 2, \cdots, m-1.$$

因此，我们得到

$$(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{T}) \cdot (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{T}_1 + \sum_{t=1}^{m-1} \left((\breve{\mathbf{\Lambda}})^t \otimes \mathbf{T}_{t+1}\right) = \text{Diag}\left(\breve{\mathbf{D}}_1, \breve{\mathbf{D}}_2, \ldots, \breve{\mathbf{D}}_m\right), \quad (9)$$

其中 $\breve{\mathbf{D}}_{t_1} = \mathbf{T}_1 + \sum_{t=1}^{m-1} (\breve{\omega}^{t_1-1})^t \mathbf{T}_{t+1}$, $t_1 = 1, 2, \cdots, m$.

另一方面，我们将$\mathbf{F}_{\breve{\mu}}$ 沿着 $\mathcal{T}$的第三模作用，并将所得张量记为 $\mathcal{D}$。于是有

$$\breve{\mathcal{D}} = \text{fold}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \cdots + \mathbf{T}_m \\ \mathbf{T}_1 + \breve{\omega}\mathbf{T}_2 + \cdots + \breve{\omega}^{m-1}\mathbf{T}_m \\ \vdots \\ \mathbf{T}_1 + (\breve{\omega})^{m-1}\mathbf{T}_2 + \cdots + (\breve{\omega}^{m-1})^{m-1}\mathbf{T}_m \end{pmatrix}\right).$$

容易验证，$\breve{\mathbf{D}}_{t_1}(t_1 = 1, 2, \cdots, m)$是张量 $\breve{\mathcal{D}}$的第 t_1个前向切片。结论得证。

□

与引理 6 类似，对实张量应用离散四元数傅里叶矩阵后，其主对角线结构保持不变。

另一方面，与引理2类似，三轴系统 (i,j,k) 中的任意四元数张量 $\breve{\mathcal{T}}$都可以表示为三轴系统 ($\breve{\mu}$, $\breve{\alpha}, \breve{\beta}$) 中的形式。因此，下面我们将重点讨论三轴系统 ($\breve{\mu}, \breve{\alpha}, \beta$) 中的四元数张量。

定理 3. 给定离散四元数傅里叶变换矩阵 $\mathbf{F}_{\breve{\mu}}$，对于三轴系统 $(\breve{\mu}, \breve{\alpha}, \breve{\beta})$ 中的任意四元数张量 $\breve{\mathcal{T}} \in \mathbb{Q}^{n_1 \times n_2 \times m}$，即，

$$\breve{\mathcal{T}} = \mathcal{T}^{(0)} + \mathcal{T}^{(1)}\breve{\mu} + \mathcal{T}^{(2)}\breve{\alpha} + \mathcal{T}^{(3)}\breve{\beta},$$

其中 $\mathcal{T}^{(l)} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times m}$, $l = 0,1,2,3$。则

$$(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1})\,\text{bcirc}(\breve{\mathcal{T}})(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^{*} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) = \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(0)}) + \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(1)})\breve{\mu} + \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(2)})\mathbf{Z}\breve{\alpha} + \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(3)})\mathbf{Z}\breve{\beta}, \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_{n_2}, \quad \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(l)}) = \text{Diag}(\breve{\mathbf{D}}_1^{(l)}, \ldots, \breve{\mathbf{D}}_m^{(l)}), \quad l = 0, 1, 2, 3.$$

$\mathbf{A}$ 定义于(3)中，且 $\breve{\mathbf{D}}_t^{(l)}(t = 1, 2, \cdots, m)$是张量 $\breve{\mathcal{D}}^{(l)}$ 的正面切片，通过沿 $\breve{\mathcal{T}}_{(l)}$ 的每个管应用 $\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}$ 计算得到，其中 $l = 0$、1、2、3。

证明。令 $\text{bcirc}(\breve{\mathcal{T}}) = \mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{X}^{(1)}\breve{\mu} + \mathbf{X}^{(2)}\breve{\alpha} + \mathbf{X}^{(3)}\breve{\beta}$，其中$\mathbf{X}^{(0)}$、$\mathbf{X}^{(1)}$、$\mathbf{X}^{(2)}$、$\mathbf{X}^{(3)} \in \mathbb{R}^{n_1 m \times n_2 m}$。我们有，

$$
\begin{aligned}
& (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \,\text{bcirc}(\breve{\mathcal{T}})(\breve{\mathbf{F}}^*_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \\
= \;& (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1})(\mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{X}^{(1)}\breve{\mu} + \mathbf{X}^{(2)}\breve{\alpha} + \mathbf{X}^{(3)}\breve{\beta})(\breve{\mathbf{F}}^*_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \\
= \;& (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1})\mathbf{X}^{(0)}(\breve{\mathbf{F}}^*_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) + (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1})\mathbf{X}^{(1)}(\breve{\mathbf{F}}^*_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_2})\breve{\mu} \\
+ \;& (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1})\mathbf{X}^{(2)}(\breve{\mathbf{F}}^*_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_2})(\breve{\mathbf{F}}^2_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_2})\breve{\alpha} + (\breve{\mathbf{F}}_{\mu} \otimes \mathbf{I}_{n_1})\mathbf{X}^{(3)}(\breve{\mathbf{F}}^*_{\mu} \otimes \mathbf{I}_{n_2})(\breve{\mathbf{F}}^2_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_2})\breve{\beta} \\
= \;& \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(0)}) + \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(1)})\breve{\mu} + \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(2)})\mathbf{Z}\breve{\alpha} + \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(3)})\mathbf{Z}\breve{\beta}.
\end{aligned}
$$

第二个等式根据引理3成立，最后一个等式则是因为引理 7。这里，$\mathbf{Z} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_{n_2}$，其中 $\mathbf{A}$ 在（3）中定义。此外，$\text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(l)}) = \text{Diag}(\breve{\mathbf{D}}_1^{(l)}, \breve{\mathbf{D}}_2^{(l)}, \ldots, \breve{\mathbf{D}}_m^{(l)})$，以及 $\breve{\mathbf{D}}_t^{(l)}\,(t = 1, 2, \cdots, m)$ 是通过沿着 $\breve{\mathcal{T}}(l)$ 的每个管对 $\breve{\mathcal{T}}(l)$ 应用 $\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}$ 计算得到的张量 $\breve{\mathcal{D}}^{(l)}$ 的正面切片，其中 $l = 0$ 为 1、2、3。结论得证。 □

为了开始讨论四元数张量奇异值分解，我们首先在下面的引理中介绍四元数奇异值分解。

引理 8。 *[四元数奇异值分解（**QSVD**）] [8, 25] 给定任意四元数矩阵 $\mathbf{M} \in \mathbb{Q}^{n_1 \times n_2}$，则存在两个酉四元数矩阵 $\mathbf{U} \in \mathbb{Q}^{n_1 \times n_1}$ 和 $\breve{\mathbf{V}} \in \mathbb{Q}^{n_2 \times n_2}$，即 $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}_{n_1}$，$\mathbf{V}^*\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{I}_{n_2}$，使得*

$$
\breve{\mathbf{U}}^* \breve{\mathbf{M}} \breve{\mathbf{V}} = \mathbf{\Sigma}, \tag{11}
$$

其中 $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$，当 $s \neq p$ 时，$\mathbf{\Sigma}_{sp} = 0$；并且对于 $s = 1, \mathbf{\Sigma}_{ss} \geq 0$，2，$\cdots$，$\min(m, n)$。

现在，我们正式给出四元数张量奇异值分解。

定理 4。 *[四元数张量奇异值分解（**QT-SVD**）] 给定任意四元数张量 $\breve{\mathcal{T}} \in \mathbb{Q}^{n_1 \times n_2 \times m}$，则存在酉四元数张量 $\mathcal{U} \in \mathbb{Q}^{n_1 \times n_1 \times m}$ 和 $\mathcal{V} \in \mathbb{Q}^{n_2 \times n_2 \times m}$，以及一个对角张量 $\mathcal{S} \in \mathbb{Q}^{n_1 \times n_2 \times m}$，使得*

$$
\breve{\mathcal{T}} = \breve{\mathcal{U}} \star \breve{\mathcal{S}} \star \breve{\mathcal{V}}^*. \tag{12}
$$

分解 (12) 称为 $\breve{\mathcal{T}}$ 的四元数张量奇异值分解。

证明。我们使用 $\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}$ 将 $\text{bcirc}(\breve{\mathcal{T}})$ 变换到傅里叶域，

$$
(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \,\text{bcirc}(\breve{\mathcal{T}})(\breve{\mathbf{F}}^*_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) = \breve{\mathbf{D}}. \tag{13}
$$

根据定理 3，我们有

$$
\breve{\mathbf{D}} = \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(0)}) + \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(1)})\breve{\mu} + \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(2)})\mathbf{Z}\breve{\alpha} + \text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(3)})\mathbf{Z}\breve{\beta},
$$

其中，$\text{Bdiag}(\breve{\mathcal{D}}^{(l)}) = \text{Diag}(\breve{\mathbf{D}}_1^{(l)}, \cdots, \breve{\mathbf{D}}_m^{(l)})$ $l = 0$，1，2，3。更确切地说，$\breve{\mathbf{D}}$ 的结构如下所示。

$$
\text{If m is even:} \quad \breve{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix}
\breve{\mathbf{D}}_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \breve{\mathbf{D}}_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & \breve{\mathbf{D}}_{2,2} \\
 & 0 & \ddots & & \iddots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \breve{\mathbf{D}}_{m/2+1} & & \vdots \\
 & 0 & \iddots & & \ddots & 0 \\
0 & \breve{\mathbf{D}}_{1,m} & 0 & \cdots & 0 & \breve{\mathbf{D}}_{2,m}
\end{pmatrix}, \tag{14}
$$

其中

$$t=1,\ \frac{m}{2}+1: \qquad \breve{\mathbf{D}}_t=\breve{\mathbf{D}}_t^{(0)}+\breve{\mathbf{D}}_t^{(1)}\breve{\mu}+\breve{\mathbf{D}}_t^{(2)}\breve{\alpha}+\breve{\mathbf{D}}_t^{(3)}\breve{\beta},$$

$$t=2,\ldots,\frac{m}{2},\frac{m}{2}+2,\ldots,m: \qquad \breve{\mathbf{D}}_{1,t}=\breve{\mathbf{D}}_t^{(0)}+\breve{\mathbf{D}}_t^{(1)}\breve{\mu},\quad \breve{\mathbf{D}}_{2,t}=\breve{\mathbf{D}}_t^{(2)}\breve{\alpha}+\breve{\mathbf{D}}_t^{(3)}\breve{\beta}.$$

类似地，

$$\text{if } n \text{ is odd:}\quad \breve{\mathbf{D}}=\begin{pmatrix} \breve{\mathbf{D}}_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \breve{\mathbf{D}}_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \breve{\mathbf{D}}_{2,2} \\ & 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \breve{\mathbf{D}}_{1,(m+1)/2} & \breve{\mathbf{D}}_{2,(m+1)/2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \breve{\mathbf{D}}_{1,(m+1)/2+1} & \breve{\mathbf{D}}_{2,(m+1)/2+1} & & \vdots \\ & 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \breve{\mathbf{D}}_{1,m} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \breve{\mathbf{D}}_{2,m} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

其中

$$t=1: \qquad \breve{\mathbf{D}}_t=\breve{\mathbf{D}}_t^{(0)}+\breve{\mathbf{D}}_t^{(1)}\breve{\mu}+\breve{\mathbf{D}}_t^{(2)}\breve{\alpha}+\breve{\mathbf{D}}_t^{(3)}\breve{\beta},$$

$$t=2,\ldots,m: \qquad \breve{\mathbf{D}}_{1,t}=\breve{\mathbf{D}}_t^{(0)}+\breve{\mathbf{D}}_t^{(1)}\breve{\mu},\quad \breve{\mathbf{D}}_{2,t}=\breve{\mathbf{D}}_t^{(2)}\breve{\alpha}+\breve{\mathbf{D}}_t^{(3)}\breve{\beta}.$$

我们注意到，在（14）和（15）中，$\breve{\mathbf{D}}_{1,\,t}$ 和 $\breve{\mathbf{D}}_{2,\,t}$ 的大小为 $n_1\times n_2$。

根据定理 1，通过置换一组块行和块列，我们可以对 $\mathbf{D}$ 进行分块对角化。更确切地说，

- 如果 m 为偶数：我们通过交换其在（$k-1$）n_1+1 处的 n_1 行：kn_1 与在（$m-k+2$）n_1+1 处的行（$m-k+3$）n_1，以及交换在（$k-1$）n_2+1 处的 n_2 列：kn_2 与在（$m-k+2$）n_2+1 处的列（$m-k+3$）n_2，对 $\breve{\mathbf{D}}$ 进行置换，其中 $k=3,\ 4,\ \ldots\ldots,\ \frac{m}{2}$。
- 如果 m 为奇数：我们通过交换其在（$k-1$）n_1+1 处的 n_1 行：kn_1 与在（$m-k+2$）n_1+1 处的行（$m-k+3$）n_1，并交换在（$k-1$）n_2+1 处的 n_2 列：kn_2与在（$m-k+2$）n_2+1 处的列（$m-k+3$）n_2，对 $\breve{\mathbf{D}}$ 进行置换，其中 $k=3,\ 4,\ \ldots\ldots,\ \frac{m+1}{2}$。

然后，我们可以按以下方式构造 1×1 和 2×2 分块矩阵。如果 m 为偶数，

$$\text{t=1:} \qquad \breve{\mathbf{G}}_t=\breve{\mathbf{D}}_1, \tag{16}$$

$$t=2,\ldots,\frac{m}{2}: \qquad \breve{\mathbf{G}}_t=\begin{pmatrix} \breve{\mathbf{D}}_{1,t} & \breve{\mathbf{D}}_{2,t} \\ \breve{\mathbf{D}}_{1,m+2-t} & \breve{\mathbf{D}}_{2,m+2-t} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$t=\frac{m}{2}+1: \qquad \breve{\mathbf{G}}_t=\breve{\mathbf{D}}_{m/2+1}. \tag{18}$$

如果 m 为奇数，

$$t=1: \qquad \breve{\mathbf{G}}_t=\breve{\mathbf{D}}_1, \tag{19}$$

$$t=2,\ldots,\frac{m+1}{2}: \qquad \breve{\mathbf{G}}_t=\begin{pmatrix} \breve{\mathbf{D}}_{1,t} & \breve{\mathbf{D}}_{2,t} \\ \breve{\mathbf{D}}_{1,m+2-t} & \breve{\mathbf{D}}_{2,m+2-t} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

我们指出，偶数情形与奇数情形类似。为简便起见，以下讨论中我们只考虑奇数情形。

W我们对所有块 $\breve{\mathbf{G}}_t$（$t=1,\ldots\ldots,\ \frac{m+1}{2}$）进行四元数奇异值分解。具体而言，

$$
\begin{aligned}
t=1: &\qquad \breve{\mathbf{G}}_t=\breve{\mathbf{U}}_1\breve{\mathbf{\Sigma}}_1\breve{\mathbf{V}}_1^*,\\
t=2,\cdots,\frac{m+1}{2}: &\qquad \breve{\mathbf{G}}_t=\breve{\mathbf{U}}_t\breve{\mathbf{\Lambda}}_t\breve{\mathbf{V}}_t^*, \qquad \text{where}
\end{aligned}
$$

$$
\breve{\mathbf{U}}_t=\begin{pmatrix}\breve{\mathbf{U}}_{1,t} & \breve{\mathbf{U}}_{2,t}\\ \breve{\mathbf{U}}_{1,m+2-t} & \breve{\mathbf{U}}_{2,m+2-t}\end{pmatrix},\quad \breve{\mathbf{\Lambda}}_t=\begin{pmatrix}\breve{\mathbf{\Sigma}}_t & 0\\ 0 & \breve{\mathbf{\Sigma}}_{m+2-t}\end{pmatrix},\quad \breve{\mathbf{V}}_t=\begin{pmatrix}\breve{\mathbf{V}}_{1,t} & \breve{\mathbf{V}}_{2,t}\\ \breve{\mathbf{V}}_{1,m+2-t} & \breve{\mathbf{V}}_{2,m+2-t}\end{pmatrix}. \tag{21}
$$

这意味着$\mathbf{D}$ 具有如下分解:

$$
\breve{\mathbf{D}}=\breve{\mathbf{U}}\breve{\mathbf{\Sigma}}\breve{\mathbf{V}}^*,
$$

其中

$$
\breve{\mathbf{\Sigma}}=\mathrm{Diag}(\breve{\mathbf{\Sigma}}_1,\breve{\mathbf{\Sigma}}_2,\cdots,\breve{\mathbf{\Sigma}}_m),
$$

$$
\breve{\mathbf{U}}=\begin{pmatrix}\breve{\mathbf{U}}_1 & & & & \\ & \breve{\mathbf{U}}_{1,2} & & & \breve{\mathbf{U}}_{2,2}\\ & & \ddots & \iddots & \\ & & \iddots & \ddots & \\ & \breve{\mathbf{U}}_{1,m} & & & \breve{\mathbf{U}}_{2,m}\end{pmatrix};\quad \breve{\mathbf{V}}=\begin{pmatrix}\breve{\mathbf{V}}_1 & & & & \\ & \breve{\mathbf{V}}_{1,2} & & & \breve{\mathbf{V}}_{2,2}\\ & & \ddots & \iddots & \\ & & \iddots & \ddots & \\ & \breve{\mathbf{V}}_{1,m} & & & \breve{\mathbf{V}}_{2,m}\end{pmatrix}. \tag{22}
$$

于是,

$$
(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^*\otimes\mathbf{I}_{n_1})\breve{\mathbf{D}}(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\otimes\mathbf{I}_{n_2})=(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^*\otimes\mathbf{I}_{n_1})\breve{\mathbf{U}}(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\otimes\mathbf{I}_{n_1})(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^*\otimes\mathbf{I}_{n_1})\breve{\mathbf{\Sigma}}(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\otimes\mathbf{I}_{n_2})(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^*\otimes\mathbf{I}_{n_2})\breve{\mathbf{V}}(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\otimes\mathbf{I}_{n_2}). \tag{23}
$$

该等式成立，因为 $(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\otimes\mathbf{I})(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^*\otimes\mathbf{I})=\mathbf{I}$，其中$\mathbf{I}$是适当大小的单位矩阵。由引理 7 和定理 3 可知，等式 (23) 得到三个块循环矩阵的乘积，即

$$
\mathrm{bcirc}(\breve{\mathcal{T}})=\mathrm{bcirc}(\breve{\mathcal{U}})\,\mathrm{bcirc}(\breve{\mathcal{S}})\,\mathrm{bcirc}(\breve{\mathcal{V}}^*), \tag{24}
$$

这意味着

$$
\breve{\mathcal{T}}=\breve{\mathcal{U}}\star\breve{\mathcal{S}}\star\breve{\mathcal{V}}^*.
$$

现在剩下的问题是证明 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是酉矩阵。这等价于等式 $\mathrm{bcirc}(\breve{\mathcal{U}}^*)\,\mathrm{bcirc}(\breve{\mathcal{U}})=\mathbf{I}$。根据定理 3，我们有

$$
\mathrm{bcirc}(\breve{\mathcal{U}}^*)\,\mathrm{bcirc}(\breve{\mathcal{U}})=(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^*\otimes\mathbf{I}_{n_1})\breve{\mathbf{U}}^*(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\otimes\mathbf{I}_{n_1})(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^*\otimes\mathbf{I}_{n_1})\breve{\mathbf{U}}(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\otimes\mathbf{I}_{n_1})=(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^*\otimes\mathbf{I}_{n_1})\breve{\mathbf{U}}^*\breve{\mathbf{U}}(\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}\otimes\mathbf{I}_{n_1}).
$$

注意到 $\breve{\mathbf{U}}^*\breve{\mathbf{U}}=\mathbf{I}$，我们可推得 $\mathrm{bcirc}(\breve{\mathcal{U}}^*)\,\mathrm{bcirc}(\breve{\mathcal{U}})=\mathbf{I}$，这意味着 $\breve{\mathcal{U}}^*\star\breve{\mathcal{U}}=\mathcal{I}$。类似地，$\mathcal{U}\star\mathcal{U}^*=\mathcal{I}$，因此 $\mathcal{U}$ 是酉的。通过类似的论证，我们可以证明 $\mathcal{V}$ 是酉的。□

给定

$$
\breve{\mathcal{L}}=\mathrm{fold}\left(\begin{pmatrix}\breve{\mathbf{U}}_1\\ \breve{\mathbf{U}}_{1,2}+\breve{\mathbf{U}}_{2,2}\\ \vdots\\ \breve{\mathbf{U}}_{1,m}+\breve{\mathbf{U}}_{2,m}\end{pmatrix}\right);\quad \mathcal{W}=\mathrm{fold}\left(\begin{pmatrix}\breve{\mathbf{\Sigma}}_1\\ \breve{\mathbf{\Sigma}}_2\\ \vdots\\ \breve{\mathbf{\Sigma}}_m\end{pmatrix}\right);\quad \breve{\mathcal{R}}=\mathrm{fold}\left(\begin{pmatrix}\breve{\mathbf{V}}_1\\ \breve{\mathbf{V}}_{1,2}+\breve{\mathbf{V}}_{2,2}\\ \vdots\\ \breve{\mathbf{V}}_{1,m}+\breve{\mathbf{V}}_{2,m}\end{pmatrix}\right); \tag{25}
$$

我们注意到，张量 $\mathcal{L}$、$\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{R}$ 的正面切片分别通过沿着 $\mathcal{U}$、$\mathcal{S}$和 $\mathcal{V}$ 的每个管应用 QFFT 计算得到；这意味着，$\mathcal{L}$、$\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{R}$ 分别通过沿着 $\mathcal{S}$、$\mathcal{V}$ 和的每个 $\mathcal{U}$管应用 QFFT 逆矩阵得到。

注4。给定四元数张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{Q}^{n_1 \times n_2 \times m}$，对于任意正交四元数张量 $\mathcal{Q} \in \mathbb{Q}^{n_1 \times n_1 \times m}$，即 $\mathcal{Q}^* \star \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \star \mathcal{Q}^* = \mathbf{I}$，我们注意到

$$\|\breve{\mathcal{Q}} \star \breve{\mathcal{T}}\|_F^2 = \|\operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{Q}}) \operatorname{unfold}(\breve{\mathcal{T}})\|_F^2 = \|\breve{\mathcal{T}}\|_F^2. \tag{26}$$

众所周知，标准奇异值分解能为任意矩阵提供最佳低秩近似。下面将给出四元数张量奇异值分解的类似结果。为了求得 $\mathcal{T}$ 的最佳秩-r 近似，即找到一个 $\mathcal{Z} \in \Omega$，使得

$$\min_{\breve{\mathcal{Z}} \in \Omega} \|\breve{\mathcal{T}} - \breve{\mathcal{Z}}\|_F^2,$$

其中

$$\Omega = \{\breve{\mathcal{Z}} | \breve{\mathcal{Z}} = \breve{\mathcal{X}} \star \breve{\mathcal{Y}},\ \breve{\mathcal{X}} \in \mathbb{Q}^{n_1 \times r \times m},\ \breve{\mathcal{Y}} \in \mathbb{Q}^{r \times n_2 \times m}\}.$$

让我们重新考察定理 4 中的分析。在定理 4 的证明中，利用四元数奇异值分解得到四元数张量 $\breve{\mathcal{T}}$ 的四元数张量奇异值分解：$(\breve{\mathcal{U}},\ \mathcal{S},\ \breve{\mathcal{V}})$。下面，我们考虑其截断版本，并在相应项中保留 r 个分量：

$$\breve{\mathbf{D}}^{[r]} = \breve{\mathbf{U}}^{[r]} \mathbf{\Sigma}^{[r]} (\breve{\mathbf{V}}^{[r]})^*, \tag{27}$$

其中

$$\mathbf{\Sigma}^{[r]} := \operatorname{Diag}(\mathbf{\Sigma}_1^{[r]}, \mathbf{\Sigma}_2^{[r]}, \cdots, \mathbf{\Sigma}_m^{[r]}),$$

$$\breve{\mathbf{U}}^{[r]} := \begin{pmatrix} \breve{\mathbf{U}}_1^{[r]} & & & \\ & \breve{\mathbf{U}}_{1,2}^{[r]} & & \breve{\mathbf{U}}_{2,2}^{[r]} \\ & & \ddots \quad \iddots & \\ & & \iddots \quad \ddots & \\ & \breve{\mathbf{U}}_{1,m}^{[r]} & & \breve{\mathbf{U}}_{2,m}^{[r]} \end{pmatrix}, \quad \breve{\mathbf{V}}^{[r]} := \begin{pmatrix} \breve{\mathbf{V}}_1^{[r]} & & & \\ & \breve{\mathbf{V}}_{1,2}^{[r]} & & \breve{\mathbf{V}}_{2,2}^{[r]} \\ & & \ddots \quad \iddots & \\ & & \iddots \quad \ddots & \\ & \breve{\mathbf{V}}_{1,m}^{[r]} & & \breve{\mathbf{V}}_{2,m}^{[r]} \end{pmatrix},$$

$\breve{\mathbf{U}}^{[r]}$、$\mathbf{\Sigma}^{[r]}$ 和 $\breve{\mathbf{V}}^{[r]}$ 的分量如下所示。

当 m 为奇数时，

$$\begin{aligned} t = 1: \quad & \breve{\mathbf{U}}_t^{[r]} \doteq \breve{\mathbf{U}}_t(:, 1:r), \quad \mathbf{\Sigma}_t^{[r]} \doteq \mathbf{\Sigma}_t(1:r, 1:r), \quad \breve{\mathbf{V}}_t^{[r]} \doteq \breve{\mathbf{V}}_t(:, 1:r); \\ t = 2, \cdots, \frac{m+1}{2}: \quad & \begin{pmatrix} \breve{\mathbf{U}}_{1,t}^{[r]} & \breve{\mathbf{U}}_{2,t}^{[r]} \\ \breve{\mathbf{U}}_{1,m+2-t}^{[r]} & \breve{\mathbf{U}}_{2,m+2-t}^{[r]} \end{pmatrix} \doteq \breve{\mathbf{U}}_t(:, 1:2r); \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_t^{[r]} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_{m+2-t}^{[r]} \end{pmatrix} \doteq \mathbf{\Lambda}_t(:, 1:2r); \\ & \begin{pmatrix} \breve{\mathbf{V}}_{1,t}^{[r]} & \breve{\mathbf{V}}_{2,t}^{[r]} \\ \breve{\mathbf{V}}_{1,m+2-t}^{[r]} & \breve{\mathbf{V}}_{2,m+2-t}^{[r]} \end{pmatrix} \doteq \breve{\mathbf{V}}_t(:, 1:2r). \end{aligned}$$

当 m 为偶数时，除上述块之外，还有一个如下所示的块：

$$\breve{\mathbf{U}}_{\frac{m+2}{2}}^{[r]} = \breve{\mathbf{U}}_{\frac{m+2}{2}}(:, 1:r), \quad \mathbf{\Sigma}_{\frac{m+2}{2}}^{[r]} = \mathbf{\Sigma}_{\frac{m+2}{2}}(:, 1:r); \quad \breve{\mathbf{V}}_{\frac{m+2}{2}}^{[r]} = \breve{\mathbf{V}}_{\frac{m+2}{2}}(:, 1:r).$$

定义 $(\breve{\mathcal{U}}^{[r]}, \breve{\mathcal{S}}^{[r]}, \breve{\mathcal{V}}^{[r]})$，使得

$$\operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{S}}^{[r]}) = (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^* \otimes \mathbf{I}_r) \mathbf{\Sigma}^{[r]} (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_r); \tag{28}$$

$$\operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{U}}^{[r]}) = (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^* \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \breve{\mathbf{U}}^{[r]} (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_r); \tag{29}$$

$$\operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{V}}^{[r]}) = (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^* \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \breve{\mathbf{V}}^{[r]} (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_r). \tag{30}$$

现在，我们可以通过以下定理推导四元数张量 $\mathcal{T}$ 的最佳秩-r 近似。

定理5 (最佳低秩近似**)。** 给定一个四元数张量 $\breve{\mathcal{T}} \in \mathbb{Q}^{n_1 \times n_2 \times m}$，其四元数张量奇异值分解为 $\breve{\mathcal{T}} = \breve{\mathcal{U}} \star \breve{\mathcal{S}} \star \breve{\mathcal{V}}^*$。对于 $r < \min(n_1, n_2)$，定义

$$\breve{\mathcal{T}}^{[r]} = \breve{\mathcal{U}}^{[r]} \star \breve{\mathcal{S}}^{[r]} \star (\breve{\mathcal{V}}^{[r]})^*,$$

则 $\breve{\mathcal{T}}^{[r]} = \arg\min \|\breve{\mathcal{T}} - \breve{\mathcal{Z}}\|_F^2$，其中 $\Omega = \{\breve{\mathcal{Z}} | \breve{\mathcal{Z}} = \breve{\mathcal{X}} \star \breve{\mathcal{Y}};\ \ \breve{\mathcal{X}} \in \mathbb{Q}^{n_1 \times r \times m}, \breve{\mathcal{Y}} \in \mathbb{Q}^{r \times n_2 \times m}\}_{\breve{\mathcal{Z}} \in \Omega}$

证明。由于 $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \star \mathcal{Y}$，我们有

$$\operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{Z}}) = \operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{X}}) \operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{Y}}).$$

Then

$$\begin{aligned}
\|\breve{\mathcal{T}} - \breve{\mathcal{Z}}\|_F^2 &= \frac{1}{m} \| \operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{T}}) - \operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{Z}}) \|_F \\
&= \frac{1}{m} \| (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \big(\operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{T}}) - \operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{Z}}) \big) (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^* \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \|_F^2 \\
&= \frac{1}{m} \| \breve{\mathbf{D}} - (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{Z}}) (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^* \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \|_F^2 \\
&= \frac{1}{m} \| \breve{\mathbf{D}} - \breve{\mathbf{D}}_\Omega \|_F^2,
\end{aligned}$$

其中 $\breve{\mathbf{D}}_\Omega = (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{Z}}) (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^* \otimes \mathbf{I}_{n_2})$.

因此，我们不再寻找满足 $\min \|\breve{\mathcal{T}} - \breve{\mathcal{Z}}\|_F^2$ 的 $\breve{\mathcal{Z}}$，而是转而寻找满足 $_{\mathcal{Z} \in \Omega}$ 的 $\breve{\mathbf{D}}_\Omega$

$$\min_{\breve{\mathbf{D}}_\Omega \in \Omega_{\mathbf{D}}} \|\breve{\mathbf{D}} - \breve{\mathbf{D}}_\Omega\|_F^2,$$

其中 $\Omega_{\mathbf{D}} = \{ \breve{\mathbf{D}}_\Omega | \breve{\mathbf{D}}_\Omega = (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \operatorname{bcirc}(\breve{\mathcal{Z}}) (\breve{\mathbf{F}}_{\breve{\mu}}^* \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \ \breve{\mathcal{Z}} \in \Omega \}$。

根据公式 (27) 构造 $\breve{\mathbf{D}}^{[r]}$。众所周知，四元数奇异值分解能给出最佳的秩-r近似，因此我们有

$$\breve{\mathbf{D}}^{[r]} = \arg\min_{\breve{\mathbf{D}}_\Omega \in \Omega_{\mathbf{D}}} \|\breve{\mathbf{D}} - \breve{\mathbf{D}}_\Omega\|.$$

这意味着 $(\breve{\mathcal{U}}^{[r]}, \breve{\mathcal{S}}^{[r]}, \breve{\mathcal{V}}^{[r]})$ 分别由 (28)–(30) 给出。由此即可得到结论。 □

根据定理 3，四元数T-SVD 可通过四元数快速傅里叶变换实现，具体算法见下文的算法 2。为简化记号，这里直接使用 MATLAB 中的命令符号 "qsvd"、"qfft" 和 "iqfft"，分别表示四元数奇异值分解、四元数快速傅里叶变换和逆四元数快速傅里叶变换。

注 5. 在算法 *2* 的第 *2–3* 行中，$\lceil \frac{m+1}{2} \rceil$ 表示舍入算子，它将 $\frac{m+1}{2}$ 向上舍入到最接近的整数。注意，算法 *2* 对张量 $\mathcal{T}$ 执行一次*"qfft"*运算，对张量 $\mathcal{L}$、$\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{R}$ 分别执行一次*"iqfft"*运算，并对四元数矩阵 $\{\breve{\mathbf{G}}_t\}$ 执行 $\lceil \frac{m+1}{2} \rceil$ 次*"qsvd"*运算。我们指出，算法 *2* 的计算成本主要取决于*"qsvd"*的计算成本。为了加速算法 *2*，可以考虑用于计算四元数奇异值分解的快速方法（例如参见 *[14]*），或者设计并行四元数奇异值分解（对 $\{\breve{\mathbf{G}}_t\}$ 执行的*"qsvd"*可以并行计算）。

注释 6. 为了得到四元数张量 $\mathcal{T}$ 的最佳管秩-r 近似，只需将算法 *2* 第 *4* 步中的四元数奇异值分解替换为截断四元数奇异值分解。

算法2：快速四元数张量奇异值分解 输入：给定四元数张量 $\breve{\mathcal{T}} = \mathcal{T}(0) + \mathcal{T}(1)\breve{\mu} + \mathcal{T}(2)\breve{\alpha} + \mathcal{T}(3)\breve{\beta} \in \mathbb{Q}^{n_1\times n_2\times m}$；四元数傅里叶变换矩阵 F_μ。输出：$(\breve{\mathcal{U}}, \breve{\mathcal{S}}, \breve{\mathcal{V}})$，使得 $\breve{\mathcal{T}} = \breve{\mathcal{U}} \star \breve{\mathcal{S}} \star \breve{\mathcal{V}}^*$。1：分块对角化。$\breve{\mathcal{D}}^{(l)} = \text{qfft}(\mathcal{T}(l), [\,], 3)$，$l = 0,\ 1,\ 2,\ 3$。2：根据 (16)-(20) 构造 $\{\breve{G}_t, t = 1,\ 2,\ \cdots, \lceil \frac{m+1}{2} \rceil\}$。3：对于 $t = 1$： $\lceil \frac{m+1}{2} \rceil$ 执行 4：$[\breve{U}_t, \mathbf{\Lambda}_t, \breve{V}_t] = \text{qsvd}(\breve{G}_t)$。5：结束循环 6：根据 (22) 构造 $(\breve{U}\ \mathbf{\Sigma}, \breve{V})$。7：根据 (25) 构造张量 $(\breve{\mathcal{L}}, \mathcal{W}, \breve{\mathcal{R}})$。8： $\breve{\mathcal{U}} = \text{iqfft}(\breve{\mathcal{L}}, [\,], 3)$；$\breve{\mathcal{S}} = \text{iqfft}(\mathcal{W}, [\,], 3)$；$\breve{\mathcal{V}} = \text{iqfft}(\breve{\mathcal{R}}, [\,], 3)$。 ——

——

4 数值示例

本节中，我们通过进行四元数循环矩阵求逆和求解四元数托普利茨系统的实验，来检验分块对角化结果的性能。我们还展示了彩色视频的数值示例，以验证四元数张量奇异值分解的有效性。所有实验均使用 MATLAB、工具箱 QTFM 和 Tensorlab [2]，在配备 16GB 随机存取存储器的 Intel(R) Core(TM) i7-10700 CPU @2.90GHZ 上运行。代码可从 https://github.com/Panjun009/BlkDiagCir_quaternion.git 获取。

4.1 四元数循环矩阵求逆的应用

在第一个应用中，我们利用四元数循环矩阵的分块对角化结果，计算四元数循环矩阵的逆矩阵。为进行比较，我们使用 MATLAB 工具箱 QTFM 中的四元数矩阵求逆函数“inv”。如果不了解本文推导出的块结构，就需要先构造四元数循环矩阵，再计算其逆矩阵。而基于定理 1，我们能够设计一种快速计算四元数循环矩阵逆矩阵的方法。

在坐标系 $(\breve{\mu}, \breve{\alpha}, \breve{\beta})$ 中，给定四元数循环矩阵 $\breve{S} = \text{circ}(\breve{s})$，其中 $\breve{s}$ 是 $\breve{S}$ 的第一列。我们将其逆矩阵 $\breve{S}^{-1}$ 记为 $\breve{Z}$。由于四元数循环矩阵的逆矩阵仍是四元数循环矩阵，因此我们只需计算其第一列。令 $\breve{z}$ 为 $\breve{Z}$ 的第一列，$\breve{\boldsymbol{\sigma}}$ 为对 $\breve{z}$ 应用四元数傅里叶变换得到的向量，即 $\breve{\boldsymbol{\sigma}} = \text{qfft}(\breve{z}\ \breve{\mu},\ \text{'L'})$。逆矩阵 $\breve{Z}$ 可表示为 $\breve{Z} = \text{circ}(\breve{z})$。由定理 1，$\breve{F}_{\breve{\mu}} \breve{S} \breve{F}^*_{\breve{\mu}} = \breve{\mathbf{\Lambda}}$，其中 $\breve{\mathbf{\Lambda}}$ 具有式 (2) 所示的块结构。由此可得 $\breve{F}_{\breve{\mu}} \breve{Z} \breve{F}^*_{\breve{\mu}} = \breve{\mathbf{\Lambda}}^{-1}$，且 $\breve{\mathbf{\Lambda}}^{-1}$ 具有与 $\breve{\mathbf{\Lambda}}$ 相同的块结构。下面介绍一种快速求得 $\breve{z}$ 的方法。

1. 对 $\breve{\mathbf{S}}$ 的第一列 $\breve{s}$ 应用四元数傅里叶变换，即 $\breve{\boldsymbol{\lambda}} = \text{qfft}(\breve{s}\ \breve{\mu}, \text{'L'})$。

2. 根据块结构 (2)，我们从 $\mathbf{\Lambda}$ 的主对角线和反下副对角线构造 1×1 块和 2×2 块，其元素由 $\boldsymbol{\lambda}$ 给出。换言之，这些块由 $\boldsymbol{\lambda}$ 中的元素构成。

3. 我们通过闭式计算 1×1 块和 2×2 块的逆矩阵。

[2] https://www.tensorlab.net/

4. 与步骤 2 相反，我们根据第 3 步得到的逆矩阵，基于 $\mathbf{Z}$ 的$\breve{}$块结构以及定理 1 中的结果，构造 $\breve{\sigma}$。然后，通过对 $\breve{\sigma}$应用四元数逆傅里叶变换得到 $\breve{}\mathbf{z}$，即 $\breve{}\mathbf{z}$ =四元数逆快速傅里叶变换($\breve{\sigma}$, $\breve{\mu}$, 'L')。

为验证快速方法的有效性，我们生成一个四元数循环矩阵并计算其逆矩阵。四元数循环矩阵第一列的元素由 MATLAB 工具箱 QTFM 中的"randq"函数均匀随机生成。对于每种维度，我们生成 25 个四元数循环矩阵，并在图 1 中报告平均时间。单位矩阵与四元数循环矩阵及其逆矩阵的乘积之间的距离计算如下:

$$\text{distance} = \max\{\mathbf{I} - \breve{\mathbf{S}}\breve{\mathbf{Z}}, \mathbf{I} - \breve{\mathbf{Z}}\breve{\mathbf{S}}\}.$$

$\breve{}$这里，$\mathbf{Z}$ 是通过计算方法求得的逆矩阵。为简便起见，我们将提出的快速方法称为快速循环矩阵求逆，将使用求逆函数的方法称为图 1 中的"inv"。

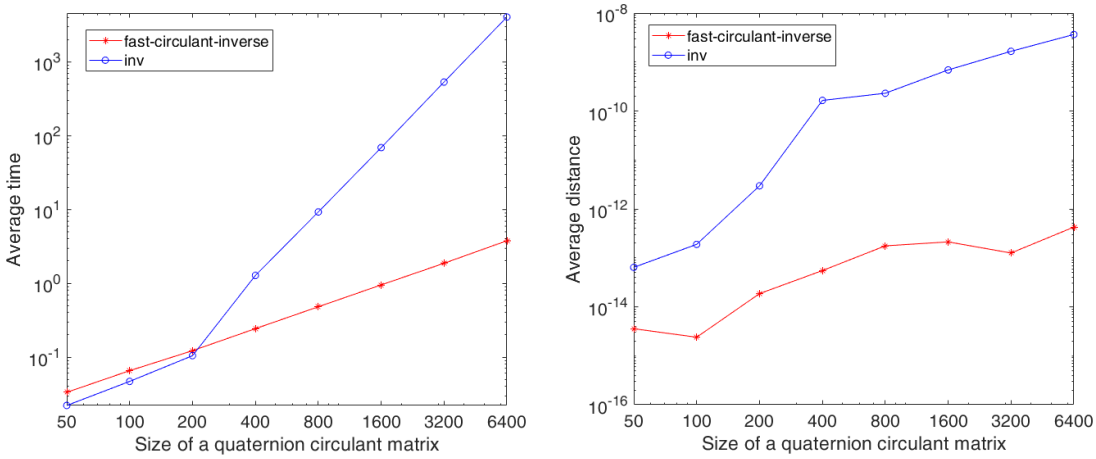


图 1：四元数循环矩阵求逆的结果。

根据图 1，我们观察到，所提出的快速方法能够以 $O(n\log\ n)$ 次运算高效地计算四元数循环矩阵的逆矩阵，其速度远快于直接使用 MATLAB 求逆函数"inv"的方法。从距离度量来看，快速方法求得的逆矩阵比"inv"函数求得的结果更准确。此外，我们指出，所提出的快速方法基于四元数向量实现。因此，我们无需存储整个循环矩阵，只需存储相应的向量，从而节省大量存储空间。

4.2 四元数 Toeplitz 系统求解中的应用 s

本节将采用基于四元数循环预条件子的预条件共轭梯度法，研究四元数托普利茨矩阵系统。在四元数信号处理中， [16, 24], 我们常常需要根据一系列接收四元数信号样本估计发射四元数信号，或使用线性系统模型对未知系统建模。设 $\breve{x}_t$ 为一个离散时间宽平稳零均值四元数值过程。一个

阶数为 n 的线性预测器可表示为

$$\breve{y}_t = \sum_{s=1}^{n} \breve{x}_{t-s}\breve{a}_s,$$

其中， $\breve{y}_t$ 是基于四元数数据$\{\breve{x}_s\}_{s=t}^{t-n}$得到的预测值， $\{\breve{a}_s\}_{s=1}^{n}$ 是四元数预测系数。 n 阶预测误差定义为实际值 $\breve{x}_t$ 与预测值 $\breve{y}_t$之差。因此，预测系数 $\{\breve{a}_s\}_{s=1}^{n}$ 应选择为使预测误差尽可能小。与复数域中的线性方程组 [7], 类似，通过最小二乘意义下最小化预测误差，最优最小二乘预测系数由以下线性方程组的解给出:

$$\breve{\mathbf{R}}\breve{\mathbf{a}} = \breve{\mathbf{r}}, \tag{31}$$

其中

$$\breve{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \breve{r}_0 & \breve{r}_1 & \cdots & \breve{r}_{n-2} & \breve{r}_{n-1} \\ \breve{r}_1^* & \breve{r}_0 & \cdots & & \breve{r}_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \breve{r}_{n-2}^* & & \cdots & \breve{r}_0 & \breve{r}_1 \\ \breve{r}_{n-1}^* & \breve{r}_{n-2}^* & \cdots & \breve{r}_1^* & \breve{r}_0 \end{pmatrix}, \quad \breve{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \breve{r}_1^* \\ \breve{r}_2^* \\ \ddots \\ \breve{r}_{n-1}^* \\ \breve{r}_n^* \end{pmatrix},$$

并且 $\breve{r}_{s-\ell} = \mathcal{E}[\breve{x}_{t-\ell}^*\breve{x}_{t-s}]$，这里 $\mathcal{E}(\cdot)$是期望算子。容易推得 $\breve{r}_0$ 是一个实数$\breve{}$，且 $\breve{r}_{s-\ell}^* = \breve{r}_{\ell-s}$。我们注意到$\mathbf{R}$ 是一个厄米四元数托普利茨矩阵。与求解复数托普利茨矩阵系统类似，我们可以采用预条件共轭梯度法（PCG）高效求解方程（31）。更具体地说，我们使用四元数循环矩阵$\breve{}\mathbf{S}$ 对四元数托普利茨系统（31）进行预条件处理，转而求解以下预条件系统:

$$\breve{\mathbf{S}}^{-1}\breve{\mathbf{R}}\breve{\mathbf{a}} = \breve{\mathbf{S}}^{-1}\breve{\mathbf{r}}. \tag{32}$$

对于复 Toeplitz 矩阵系统，循环预条件子有许多不同的选择。本文考虑四元数域中的 T. Chan循环预条件子 [1] ，即生成循环矩阵 $\breve{}\mathbf{S}$ =circ($\breve{}$s) 的 $\breve{}\mathbf{s}$ 的第 t 个元素为

$$\breve{\mathbf{s}}_t = \begin{cases} \frac{(n-t)\breve{\mathbf{r}}^* + t\breve{\mathbf{r}}_{n-t}}{n} & 0 \le t < n, \\ \breve{\mathbf{s}}_{n+t} & 0 < -t < n. \end{cases} \tag{33}$$

然而，在实际应用中，通常并未提供关于该过程自协方差的先验知识。换言之， $\breve{}\mathbf{R}$ 未知。尽管如此，若采集 M 个数据样本 $\{\breve{x}_k\}_{k=1}^{k=M}$，我们仍可根据这些数据样本 $\{\breve{x}_k\}_{k=1}^{k=M}$ 估计自协方差矩阵 $\breve{}\mathbf{R}$ ，以构建最小二乘预测$\breve{}$问题。估计自协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 的窗函数方法有多种，例如相关法、协方差法、前置窗函数法和后置窗函数法，参见 [17, 18]。

令 $\{\breve{x}_1, \cdots, \breve{x}_M\}$ 为数据样本集合。为简单起见，我们假设 $k = 0$ 之前和 $k = M$ 之后的数据均为零，并采用相关窗函数法根据数据样本构造数据矩阵 $\breve{}\mathbf{T}$。现在可以通过求解以下问题得到最小二乘估计 $\breve{}\mathbf{a}$

$$\min \|\breve{\mathbf{T}}_w\breve{\mathbf{a}} - \breve{\mathbf{y}}\|_2, \tag{34}$$

其中 $\breve{\mathbf{T}}_w \in \mathbb{H}^{(M+n-1)\times n}$ 是一个矩形托普利茨矩阵，定义如下

$$\breve{\mathbf{T}}_w = \begin{pmatrix} \breve{x}_1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ \breve{x}_n & \cdots & \breve{x}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \breve{x}_M & \cdots & \breve{x}_{M-n+1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \breve{x}_M \end{pmatrix}.$$

因此，通过求解以下方程，可以得到式（34）的最小二乘解：

$$\frac{1}{M}(\breve{\mathbf{T}}_w^* \breve{\mathbf{T}}_w)\breve{\mathbf{a}} = \frac{1}{M}\breve{\mathbf{T}}_w^* \breve{\mathbf{y}}. \tag{35}$$

我们注意到，$\frac{1}{M-|t|}(\breve{\mathbf{T}}_w^* \breve{\mathbf{T}}_w)$ 是一个厄米四元数托普利茨矩阵，可视为 $\breve{\mathbf{R}}$ 的近似，更准确地说，是 $\breve{r}_t = \frac{1}{M}\sum \breve{x}_l^* \breve{x}_{l+|t|}$。现在，可以通过预条件共轭梯度法求解解 $\breve{\mathbf{a}}_{l=1}$，其中使用式（33）给出的四元数循环预条件子。众所周知，PCG 需要计算四元数循环预条件子的逆矩阵与四元数向量的乘积。由于四元数循环矩阵的逆矩阵可以通过第4.1节介绍的快速方法计算，因此无需将整个逆矩阵与四元数向量相乘，即可高效地求出四元数循环预条件子的逆矩阵与四元数向量的乘积。

接下来，为了检验采用四元数循环预条件子求解 Toeplitz 系统 (35) 时预条件共轭梯度法（PCG）的有效性，我们考虑一阶和二阶自回归过程，即

$$\begin{aligned} \mathrm{AR}(1) \quad &: \quad \breve{x}_t = \rho \breve{x}_{t-1} + \breve{v}_t, \\ \mathrm{AR}(2) \quad &: \quad \breve{x}_t + \tau_1 \breve{x}_{t-1} + \tau_2 \breve{x}_{t-2} = \breve{v}_t, \end{aligned}$$

其中，$\{\breve{v}_t\}$ 是方差为 η^2 的白噪声过程，number ρ 和 (τ_1, τ_2) 分别是 AR(1) 和 AR(2) 的参数。

在这个数值示例中，我们分别从 AR(1)（参数为 $\rho = 0.3$，0.9，0.99）和 AR(2)（参数 (τ_1, τ_2) =(0.1，0.5)，(0.9，0.5)，(0.99，0.99)）中生成 $M = m * n$ 个样本 $\{\breve{x}_t\}_{t=1}^M$。AR(1) 和 AR(2) 的输入由 MATLAB 工具箱 QTFM 中的“randq”函数随机均匀生成。白噪声过程 $\{\breve{v}_t\}$ 的方差 η^2 设为 1。我们采用校正窗函数法构造最小二乘预测系统 (35)。对于每组参数，我们生成 25 个这样的系统。预条件共轭梯度法的停止准则设为 $\|\breve{\mathbf{e}}_k\|_2/\|\breve{\mathbf{e}}_0\|_2 < 10^{-7}$，其中 $\breve{\mathbf{e}}_k$ 是经过 k 次迭代后的残差向量。我们对预条件系统采用循环预条件子 (33)，并在表2和表3中报告平均迭代次数和计算时间。作为比较，我们使用共轭梯度法（CG）求解原始系统；该方法可视为以单位矩阵 $\mathbf{I}_n$ 为预条件子的 PCG。从表2和表3可以看出：

- 就迭代次数而言，求解预条件系统所需的迭代次数远少于求解原始系统。随着 n 的增加，求解原始系统的迭代次数增长速度远快于求解预条件系统的迭代次数。当 AR(1) 中的参数集 ρ 或 AR(2) 中的（τ_1，τ_2）越来越接近 1 时，这一现象尤为明显。

- 就计算时间而言，求解预条件系统比求解原始系统更快。当 AR(1) 中的参数集 ρ 或 AR(2) 中的（τ_1，τ_2）越来越接近 1 时，预条件系统的优势尤为明显。

总之，四元数循环预条件子在求解四元数托普利茨系统时效果显著。我们的理论结果表明，一个 $n\times n$ 四元数矩阵的逆矩阵可通过 $O(n\log\ n)$ 次运算计算得到，因此，预条件共轭梯度法在求解由四元数信号预测产生的四元数托普利茨系统时效率很高。

		$\rho=0.3$							
n		100		200		400		800	
m		$\mathbf{I}_n$	$\breve{\mathbf{S}}_n$	$\mathbf{I}_n$	$\breve{\mathbf{S}}_n$	$\mathbf{I}_n$	$\breve{\mathbf{S}}_n$	$\mathbf{I}_n$	$\breve{\mathbf{S}}_n$
2	迭代	50	25	69	27	74	30	86	33
	计算时间	0.28	0.17	0.42	0.23	0.56	0.36	0.85	0.60
4	迭代	39	20	46	22	52	23	58	24
	计算时间	0.24	0.15	0.33	0.22	0.46	0.33	0.74	0.56
8	迭代	30	16	36	17	40	18	44	19
	计算时间	0.20	0.13	0.28	0.19	0.41	0.31	0.66	0.54
m		$\rho=0.9$							
2	迭代	134	29	222	31	356	36	503	39
	计算时间	0.64	0.18	1.05	0.25	1.77	0.38	2.92	0.65
4	迭代	115	23	188	26	278	27	377	29
	计算时间	0.55	0.16	0.91	0.22	1.43	0.35	2.20	0.58
8	iter	102	19	158	20	233	22	313	23
	计算时间	0.51	0.14	0.79	0.20	1.25	0.33	1.88	0.56
m		$\rho=0.99$							
2	迭代	165	31	344	37	657	40	1282	44
	计算时间	0.75	0.19	1.56	0.27	3.03	0.40	6.26	0.64
4	迭代	149	26	286	28	547	31	1022	33
	计算时间	0.69	0.17	1.31	0.23	2.56	0.36	5.05	0.59
8	迭代	137	22	257	23	474	25	861	27
	计算时间	0.64	0.15	1.19	0.21	2.28	0.33	4.33	0.57

表2：AR(1)过程的平均迭代次数和计算时间（秒）

4.3 彩色图像重建中的应用

四元数已广泛应用于图像处理领域。例如，它可以很好地表示彩色图像 [13,20–22], 光谱偏振图像和偏振图像 [5,6,19]。本节中，我们对彩色视频进行实验，以测试所提出的四元数T-SVD的性能。

给定一个四元数张量 $\breve{\mathcal{T}}\in\mathbb{Q}^{n_1\times n_2\times m}$,

$$\breve{\mathcal{T}}=\mathcal{T}_0+\mathcal{T}_1\mathtt{i}+\mathcal{T}_2\mathtt{j}+\mathcal{T}_3\mathtt{k},$$

其中 $\mathcal{T}_l\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2\times m}$, $l=0,1,2,3$。我们将四元数T-SVD（QT-SVD）与以下三种方法进行比较。

- 我们沿着 $\mathcal{T}$ 的每个管应用标准傅里叶变换，得到张量 $\mathcal{D}$。然后对 $\mathcal{D}$的每个前向切片进行四元数奇异值分解。也就是说，$t=1,2,\cdots,m$,

$$\breve{\mathcal{D}}(:,:,t)=\breve{\mathbf{U}}_t\mathbf{\Sigma}_t\breve{\mathbf{V}}_t^*.$$

		$\tau_1 = 0.1, \quad \tau_2 = 0.5$							
n		100		200		400		800	
m		$\mathbf{I}_n$	$\breve{\mathbf{S}}_n$	$\mathbf{I}_n$	$\breve{\mathbf{S}}_n$	$\mathbf{I}_n$	$\breve{\mathbf{S}}_n$	$\mathbf{I}_n$	$\breve{\mathbf{S}}_n$
2	迭代	66	26	86	29	107	32	129	34
	计算时间	0.35	0.17	0.50	0.24	0.69	0.36	1.04	0.60
4	迭代	52	21	67	22	80	24	92	25
	计算时间	0.29	0.15	0.43	0.22	0.58	0.33	0.87	0.55
8	迭代	46	17	56	18	65	19	71	20
	计算时间	0.27	0.14	0.37	0.20	0.52	0.31	0.78	0.54
m		$\tau_1 = 0.9, \quad \tau_2 = 0.5$							
2	迭代	112	27	163	30	203	33	248	36
	计算时间	0.55	0.18	0.80	0.24	1.10	0.36	1.56	0.60
4	迭代	95	22	124	24	152	26	174	27
	time	0.47	0.15	0.64	0.22	0.88	0.33	1.24	0.57
8	迭代	84	19	106	20	121	21	137	22
	计算时间	0.42	0.14	0.56	0.20	0.75	0.32	1.08	0.55
m		$\tau_1 = 0.99, \quad \tau_2 = 0.99$							
2	迭代	221	40	458	47	1002	52	1924	55
	计算时间	0.99	0.22	2.05	0.31	4.46	0.44	8.99	0.69
4	迭代	218	38	436	41	864	42	1602	43
	计算时间	0.98	0.22	1.94	0.29	3.89	0.40	7.57	0.63
8	迭代	212	34	412	37	763	34	1410	35
	计算时间	0.94	0.20	1.91	0.28	3.45	0.37	6.77	0.67

表3：平均值　　AR(2)过程的迭代次数和计算时间（秒）

秩-r 近似 $\breve{\mathcal{D}}^{[r]}$ 的每个前切片表示为

$$\breve{\mathcal{D}}^{[r]}(:,:,t) \doteq \sum_{p=1}^{r} \breve{\mathbf{U}}_t(:,p)\boldsymbol{\Sigma}_t(p,p)\big(\breve{\mathbf{V}}_t(:,p)\big)^*.$$

张量 $\breve{\mathcal{T}}$的秩-r 近似 $\breve{\mathcal{T}}^{[r]}$ 是通过沿着 $\breve{\mathcal{D}}^{[r]}$的每个管应用逆傅里叶变换得到的。我们将此方法称为基于傅里叶变换的四元数张量分解（FT-QTF）。

- t-QSVD [30]。t-QSVD 方法旨在基于 [29]中给出的三阶四元数张量的 T-乘积，求得三阶四元数张量的近似。与 FT-QTF 类似，t-QSVD 方法仅涉及傅里叶变换和四元数奇异值分解。

- 标准 T-SVD [11, 12]。我们对四元数张量的每个分量应用标准 T-SVD，即

$$\mathcal{T}_l = \mathcal{U}_l \star \mathcal{S}_l \star \mathcal{V}_l, \quad l = 0, 1, 2, 3.$$

其秩-r 近似 $\mathcal{T}_l^{[r]} = \sum^{r} \mathcal{U}_l(:\ p,\ :) \star \mathcal{S}_l(p,\ p,\ :) \star \mathcal{V}_l(:\ p,\ :)^T$。 $\breve{\mathcal{T}}$的秩-r 近似$_{p=1}$记为 $\breve{\mathcal{T}}^{[r]}$，其定义为 $\breve{\mathcal{T}}^{[r]} = \mathcal{T}_0^{[r]} + \mathcal{T}_1^{[r]}\,\mathrm{i} + \mathcal{T}_2^{[r]}\,\mathrm{j} + \mathcal{T}_3^{[r]}\,\mathrm{k}$。

下面，我们在包含 300 帧的视频“Mobile”YUV 序列 [3] 上测试所有方法。视频的每一帧都是一幅 144×176 RGB 图像。每个像素的颜色值编码为

[3]YUV 序列视频数据集可从 http://trace.eas.asu.edu/yuv/index.html 下载

一个纯四元数，即位置（s， p）处的像素值表示为 $\breve{m}_{sp} = R_{sp}\mathbf{i} + G_{sp}\mathbf{j} + B_{sp}\mathbf{k}$，其中 R， G， B 分别表示每个像素的红色、绿色和蓝色分量。RGB 图像的四元数表示法由 Pei [21] 和 Sangwine [22]提出。因此，视频数据可以表示为一个纯四元数张量 $\breve{\mathcal{T}} \in \mathbb{Q}^{144\times176\times300}$。

为展示这些方法的表示能力，我们报告重建视频各帧与原始视频各帧之间的平均峰值信噪比（psnr），记为

$$\mathrm{PSNR} = \frac{\sum_{t=1}^{m} \mathrm{psnr}\big(\breve{\mathbf{T}}_t^{[r]}, \breve{\mathbf{T}}_t\big)}{m}, \tag{36}$$

其中 $\breve{\mathbf{T}}_t = \breve{\mathcal{T}}(:,:,t)$、 $\breve{\mathbf{T}}_t^{[r]} = \breve{\mathcal{T}}^{[r]}(:,:,t)$，而“psnr”是使用 MATLAB 中的“psnr”函数计算得到的峰值信噪比。

我们还给出了重建视频各帧与原始视频各帧之间的平均结构相似性指数，即

$$\mathrm{SSIM} = \frac{\sum_{t=1}^{m} \mathrm{ssim}\big(\breve{\mathbf{T}}_t^{[r]}, \breve{\mathbf{T}}_t\big)}{m}, \tag{37}$$

此处的“ssim”是使用 MATLAB 中的“ssim”函数计算得到的结构相似性指数值。我们没有直接对 $\breve{\mathcal{T}}$ 应用这些方法，而是先对视频集进行“图像均值减法”预处理。具体而言，我们先计算所有帧的均值，再从每一帧中减去该均值图像。所有方法均应用于处理后的数据。表 4 报告了平均峰值信噪比和结构相似性指数（以百分比表示）。表中还列出了平均计算时间（以秒为单位）。

	$r=10$		$r=20$		$r=40$		$r=80$		time
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	
QT-SVD	**19.53**	**74.42**	**22.83**	**85.62**	**27.89**	**94.56**	**37.46**	**99.24**	518.03
FT-QTF	19.01	72.67	22.36	84.63	27.53	94.19	37.29	99.21	305.77
t-QSVD	19.01	72.67	22.36	84.63	27.53	94.19	37.29	99.21	191.49
T-SVD	19.43	74.03	22.70	85.30	27.77	94.41	37.25	99.20	**39.41**

表 4：“Mobile”视频的重建结果

根据实验结果，我们得出以下观察结论。

- 从峰值信噪比来看，可以看出，随着 r值的增加，该值也随之增加。当 $r \le 40$时，FT-QTF 和 t-QSVD 的峰值信噪比低于另外两种方法。值得注意的是，当 $r = 80$时，所有基于四元数的方法所得的峰值信噪比均优于 T-SVD。我们的 QT-SVD 在所有 r中取得了最高值。这表明我们的方法表现最佳。

- 从结构相似性指数来看，我们得到了与峰值信噪比类似的观察结果。当 r 变大时，结构相似性指数值也会增加。QT-SVD 的值均高于其他方法。

- 关于平均计算时间，所提出的 QT-SVD 比其他方法耗时更多，其次是 FT-QTF 和 t-QSVD。由于其他三种方法使用的四元数奇异值分解比奇异值分解慢得多，因此 T-SVD 的计算时间最短并不令人意外。

- 我们还注意到，t-QSVD 和 FT-QTF 的结果相同。这是因为这两种方法背后的计算原理相同，即沿输入四元数张量的管应用标准傅里叶变换。

为了直观展示图像重建效果，我们选取视频的第 141 至第 147 帧，并在图 2 中展示了各方法对 $r = 20$ 的重建结果。为了更清楚地观察结果，每个重建帧下方都给出了“psnr”值。在所有重建帧中，我们的 QT-SVD 重建效果最好，其“psnr”值也高于其他方法。我们还观察到，t-QSVD 和 FT-QTF 的重建结果相同，这是因为它们采用了相同的计算原理。图 3 还展示了第 147 帧不同区域的细节。与其他方法相比，我们的 QT-SVD 能够捕捉到更丰富的细节，且重建图像的颜色更接近真实图像，例如图 3 中绵羊的面部和那些橙色花朵。

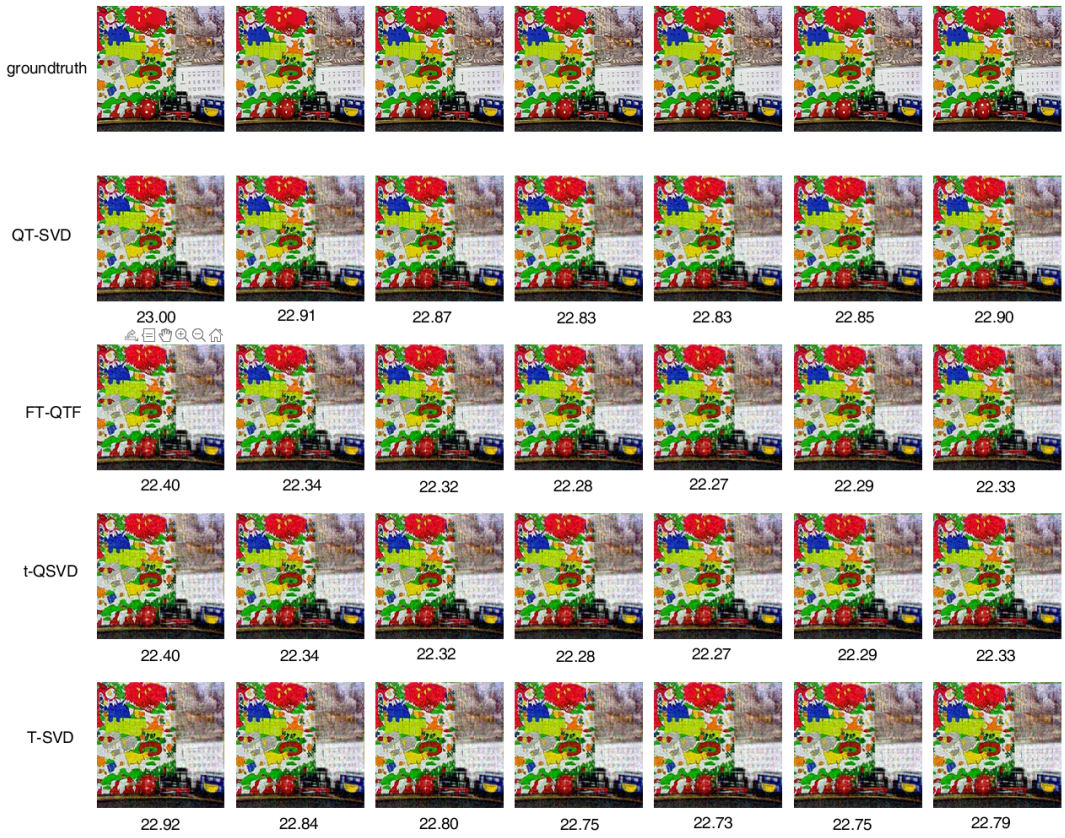


图 2：各方法对$r = 20$时第 141 至 147 帧“Mobile”的重建结果。第一行展示原始视频中的帧。每个重建帧下方标注了其“峰值信噪比”值。

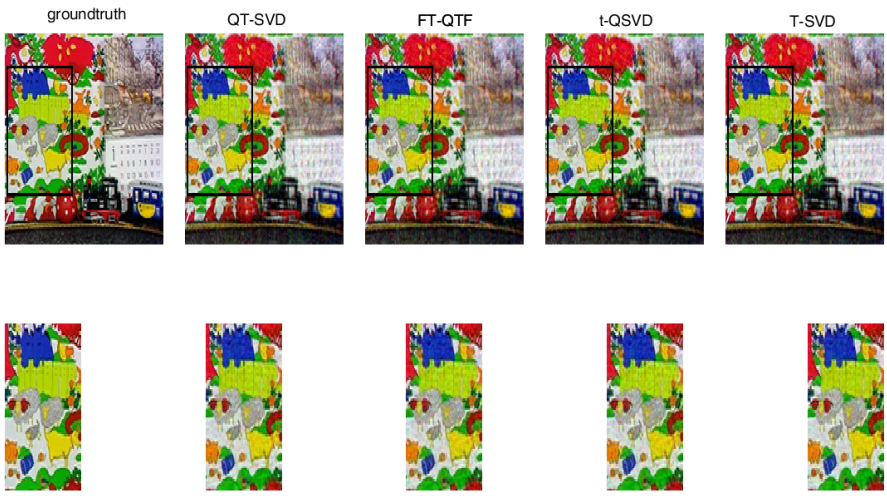


图 3：顶行展示了在$r = 20$时“Mobile”第 147 帧的重建图像。底行展示了顶行图像中以黑框标出的特定区域的细节。

5 结论

本文研究了四元数循环矩阵，并证明任意循环矩阵都可以通过离散四元数傅里叶变换矩阵分块对角化为 1×1 块和 2×2 块。换言之，离散四元数傅里叶变换矩阵并非四元数循环矩阵的通用特征向量。事实上，四元数循环矩阵的特征值及其对应的特征向量，可以通过结合离散四元数傅里叶变换矩阵与能够对角化四元数变换后循环矩阵的 2×2 块结构的四元数矩阵来获得。基于这一结果，本文进一步研究了基于著名 T-SVD 形式的四元数张量奇异值分解。我们通过测试，展示了所提出的循环矩阵分块对角化结果在计算四元数循环矩阵的逆以及求解四元数信号处理中的线性预测问题方面的应用。我们还通过一个彩色视频示例，展示了四元数张量奇异值分解的有效性。

参考文献

[1] T.F. Chan，托普利茨系统的最优循环预条件子。SIAM 科学与统计计算杂志，9(4)，第766–771页，1988年。[2] T. A. Ell、N. Le Bihan 和 S. J. Sangwine。用于信号与图像处理的四元数傅里叶变换。John Wiley & Sons，2014年。[3] J. Flamant、N. Le Bihan 和 P. Chainais。平稳随机双变量信号的谱分析。IEEE信号处理汇刊，65(23)：6135–6145，2017年。[4] J. Flamant、N. Le Bihan 和 P. Chainais。双变量信号的时频分析。应用与计算谐波分析，46(2)：351–383，2019年。

[5] J. 弗拉芒 , S. 米龙 , 和 D . Brie. 四元数非负矩阵分解：定义、唯一性和算法。IEEE信号处理汇刊, 68, 第1870–1883页, 2020年。[6] J. J. Gil 和 R. Ossikovski。《偏振光和穆勒矩阵方法》。CRC 出版社，[7] A. Giordano 和 F. Hsu，《用于数字信号处理的最小二乘估计》。John Wiley & Sons, Inc. 纽约，1985年。[8] Z. Jia、M. K. Ng 和 G. J. Song。《大规模四元数奇异值分解的兰索斯方法》。Numerical Algorithms, 82(2):699–717, 2019年。[9] Q. Jiang 和 M. Ng。《通过凸优化实现鲁棒低管秩张量补全》。载于 IJCAI，第2649–2655页，2019年。[10] E. Kernfeld、M. Kilmer 和 S. Aeron。《具有可逆线性变换的张量-张量乘积》。Linear Algebra and its Applications, 485:545–570, 2015年。[11] M. E. Kilmer、K. Braman、N. Hao 和 R. C. Hoover。《三阶张量作为矩阵上的算子：一个理论与计算框架及其在成像中的应用》。SIAM 矩阵分析与应用杂志, 34(1):148–172, 2013年。[12] M. E. Kilmer 和 C. D. Martin。《三阶张量的分解策略》。Linear Algebra and its Applications, 435(3):641–658, 2011年。[13] N. Le Bihan 和 S. J. Sangwine。《彩色图像的四元数主成分分析》。载于2003年国际图像处理会议论文集（目录号：03CH37429），第1卷，IEEE，第1-809页，2003年。[14] Q. Liu、S. Ling 和 Z. Jia。《用于低秩矩阵近似的随机化四元数奇异值分解》。SIAM 科学计算杂志, 44(2)，第A870–A900页，2022年。[15] C. D. Martin、R. Shafer 和 B. LaRue。《p 阶张量分解及其在成像中的应用》。SIAM 科学计算杂志, 35(1):A474–A490, 2013年。[16] J. Navarro-Moreno、R.M. Fernandez-Alcala、C.C. Took 和 D.P. Mandic，《宽义平稳四元数随机信号的预测》。Signal processing, 93(9)，第2573-2580页，2013年。[17] M.K. Ng 和 R.H. Chan，《最小二乘估计的快速迭代方法》。Numerical Algorithms, 6(2)，第353-378页，1994年。[18] M.K. Ng，《托普利茨系统的迭代方法》。Numerical Mathematics and Scie, 2004年。[19] J. Pan 和 M. K. Ng。《偏振图像的可分四元数矩阵分解》。arXiv 预印本 arXiv:2207.14039, 2022年。[20] S. C. Pei 和 C. M. Cheng。《使用二值四元数矩保持阈值技术进行彩色图像处理》。IEEE 图像处理汇刊, 8(5)，第614-628页，1999年。[21] S. Pei、J. Ding；和 J. Chang。《通过二维复数快速傅里叶变换高效实现四元数傅里叶变换、卷积和相关》。IEEE信号处理汇刊, 49(11):2783–2797, 2001年。[22] S. J. Sangwine《使用四元数或超复数对彩色图像进行傅里叶变换》。Electronics Letters, 32(21):1979-1980, 1996年。

[23] G. Song、M. K. Ng 和 X. Zhang。《使用变换张量奇异值分解的鲁棒张量补全》。arXiv 预印本 arXiv:1907.01113, 2019年。[24] C.C. Took 和 D.P. Mandic，《四元数广义线性自适应滤波器》。IEEE信号处理汇刊, 58(8)，第4427-4431页，2010年。[25] F. Zhang。《四元数和四元数矩阵》。Linear algebra and its applications, 251:21–57, 1997年。[26] X. Zhang 和 M. K. Ng。《具有泊松观测的低秩张量补全》。IEEE模式分析与机器智能汇刊, 44(8):4239–4251, 2021年。[27] Z. Zhang 和 S. Aeron。《使用张量奇异值分解的精确张量补全》。IEEE信号处理汇刊, 65(6):1511–1526, 2016年。[28] Z. Zhang、G. Ely、S. Aeron、N. Hao 和 M. Kilmer。《基于张量奇异值分解的多线性数据补全与去噪新方法》。载于 IEEE计算机视觉与模式识别会议论文集，第3842–3849页，2014年。[29] M. Zheng、G. Ni。《块循环四元数矩阵的分块对角化及四元数张量 T-乘积的快速计算》。arXiv 预印本 arXiv:2212.14318, 2022年12月29日。[30] M. Zheng、G. Ni。《基于 T-乘积的三阶四元数张量近似策略及其在彩色视频压缩中的应用》。Applied Mathematics Letters, 2023年1月12日。[31] P. Zhou、C. Lu、Z. Lin 和 C. Zhang。《用于低秩张量补全的张量分解》。IEEE 图像处理汇刊, 27(3):1152–1163, 2017年。