arXiv:2302.04090v1 [quant-ph] 8 Feb 2023

激光辅助法诺共振：阿秒量子控制与动态成像

Meng Han[1, *, †], Hao Liang[2, *, †], Jia-bao Ji[1], Leung Chung Sum[1], Kiyoshi Ueda[1,3], Jan Michael Rost[2], Hans Jakob W¨orner[1]1物理化学实验室，苏黎世联邦理工学院，苏黎世，苏黎世州，8093，瑞士2马克斯·普朗克复杂系统物理研究所，N¨othnitzer Straße 38，01187，德国3东北大学化学系，日本仙台，980-8578

*这些作者对本研究的贡献相同

†电子邮箱：menhan@ethz.ch；liangh@pks.mpg.de

2023年2月9日

法诺共振源于离散态与连续态之间的路径干涉，在物理学、化学和材料科学的许多分支中发挥着基础性作用。本文介绍激光辅助法诺共振这一概念：额外的激光场将两条干涉路径耦合在一起，在它们之间引入可控相位延迟，从而产生一种可在阿秒时间尺度上主动调控的广义法诺线型。基于分辨率前所未有的实验结果，我们在时域中直接动态成像共振电子波包的演化过程，并提取其振幅和相位，从而测量共振光电离时间延迟。采用物理图像清晰的双能级模型进行的从头算计算和模拟与实验结果相符，为将这些概念拓展至复杂系统的阿秒量子控制奠定了基础。

我们生活在一个由共振主宰的世界里，从原子、乐器到医疗设备，无处不有共振。光谱学是揭示光与物质相互作用中共振现象的重要工具。观测到的谱线位置揭示了激发量子态的共振能量，而线形则取决于物质在吸收光并发生共振后如何弛豫。例如，当离散态被光场共振激发时，相应的吸收光谱会呈现对称的洛伦兹线型。如果离散态与连续态耦合，两者之间的路径干涉便会产生非对称的法诺线型（*1,2*）。作为核心范式，法诺共振广泛存在于科学的许多分支（*3–6*），并可作为通向电子动力学量子光学控制的桥梁，例如电磁诱导透明（EIT）（*7*）、Borrmann（*8*）和 Kerker（*9,10*）效应。

阿秒光源*11,12*和阿秒计量学*13–15*的诞生与发展，使人们能够实时观测原子*16–18*、分子*19,20*、固体*21,22*和液体*23,24*内部的超快电子动力学。因此，在阿秒时间尺度上实现对电子动力学的量子控制，已成为超快科学的核心课题*25,26*。虽然基于冷碱金属原子的密集能级*27*或纳米结构可调谐的等离激元共振*5*，人们已经能够在红外（IR）和可见光频段实现量子控制，但由于技术和方法上的局限，要将此类操控拓展至极紫外（XUV）波段仍极具挑战。近期的突破*28,29*已展示了以经典方式控制阿秒动力学的方法，其依赖于光场驱动的电子经典运动。然而，对电子动力学进行阿秒量子控制仍处于起步阶段。

在此，我们展示如何通过光电子能谱实现对法诺线型的量子调控，方法是引入一种新型法诺共振，即激光辅助法诺共振。以往的时间分辨研究仅限于众所周知的氦双激发态所产生的“自然”法诺共振（*16–18*）。在标准法诺共振中，共振态是一个双激发态，其能量高于系统的第一个电离阈值，如图 1A 所示。因此，极紫外脉冲可以将电子直接发射到连续态，也可以将其激发到共振双激发态。后者随后可发生自电离，并与连续态波包耦合；二者的干涉由此产生法诺

线型。

如图1B所示，采用复平面表示时，干涉与不对称线形之间的关系会更加清晰，其中 M_{con}、 M_{res} 和M_{total} 分别表示连续态路径、共振通道及其相干叠加的复振幅。共振跃迁振幅可由 Breit-Wigner 振幅（*18*）$\sim \frac{1}{\varepsilon+\mathrm{i}}$ 描述，其绝对值平方对应于洛伦兹线形；其中， $\varepsilon=(E-E_r)/(\hbar\Gamma/2)$表示约化能量， E_r 和 Γ 分别为共振位置和宽度， $\hbar$ 为约化普朗克常数。共振跃迁振幅（图1B中的橙色圆）最初关于虚轴对称；与实值连续态跃迁振幅相干叠加后，该振幅将发生位移，变为关于虚轴不对称的形态（图1B中的蓝色圆）。跃迁振幅在复平面中的位置决定了其辐角（即相位）以及模（即截面）。图1C描绘了 M_{res} 和 M_{total} 随能量变化的相位分布，其中洛伦兹曲线在共振位置处发生 π 相位跃变，而法诺曲线的相位最小值位置偏离共振位置。该相位能量偏移与其线形的不对称参数 q （实数）有关，该参数定义为通道强度比（*2*），并且会受到强红外场中共振态斯塔克位移的影响，如先前研究所示（*16,30*）。然而，这种线形控制依赖于脉冲包络的作用，因此仅限于飞秒时间尺度。

在此，我们引入激光辅助法诺共振的概念，如图1D所示。我们将法诺共振的两条干涉臂分开，并在复合之前在它们之间引入可控相位延迟。共振路径和连续态路径分别可由阿秒脉冲串中相邻的两个奇次谐波触发，并在基频红外场的辅助下于中间边带（SB）处复合。通过与红外场耦合，这两条路径分别获得相位因子 $e^{i\omega\tau}$ 和 $e^{-i\omega\tau}$，其中 ω 为红外频率， τ 为极紫外-红外时间延迟。以 M_{res} 为参考， M_{con} 将带有相位因子 $e^{2i\omega\tau}$，对应于复平面上的一个同心圆。因此， M_{res} 和 $M_{\mathrm{con}}e^{2i\omega\tau}$ 的相干叠加对应于共振洛伦兹圆在连续态路径的同心圆上旋转，而

旋转的方位角即它们的相位差 $2\omega\tau$，该相位差可在阿秒时间尺度上通过实验进行控制。因此，在我们的情形中， q 参数 $q = |M_{\mathrm{con}}/M_{\mathrm{res}}|e^{2i\omega\tau}$是一个复数，这使跃迁振幅能够在整个复平面内旋转，从而涵盖了“自然”法诺共振的概念。

在图 1E 中，我们展示了总跃迁振幅 M_{total} 在相位延迟为 0、 $\pi/2$、 π 和 $3\pi/2$ 时的复平面表示及线形。对于分别对应对称双峰线形和单峰线形的 $\pi/2$ 和 $3\pi/2$，复平面中的总振幅均关于虚轴对称。在延迟为 0 和 π 时， M_{total} 旋转至距虚轴最远的位置，因此相应线形的不对称性最大，且两个延迟对应的方向相反。需要注意的是，在我们的情形中，决定线形的不仅有强度比 $|M_{\mathrm{con}}|/|M_{\mathrm{res}}|$（即传统的 Fano q 参数），还有两条臂之间的相位延迟。强度比通过复平面中两个圆的相对大小来表示。在图 1F-G 中，我们分别展示了 $|M_{\mathrm{con}}|/|M_{\mathrm{res}}|$ 为 2 和 0.25 时的线形。当 $|M_{\mathrm{res}}|$ 大于 $|M_{\mathrm{con}}|$时，延迟为 $\pi/2$ 时的两个峰可能会合并，因此线形（图 1G 中的红色曲线）会恢复为对称的单峰。此外，延迟为 0 和 π 时的峰位移，以及延迟为 $\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 时的峰振幅对比，都会随着比值$|M_{\mathrm{con}}|/|M_{\mathrm{res}}|$的减小而减弱。在实际中，两条路径之间的强度比可以通过飞秒时间尺度上的共振斯塔克位移诱导的失谐来控制，正如我们稍后在实验中所展示的那样。

实验中，XUV 阿秒脉冲串由氩原子在强红外脉冲驱动下产生的高次谐波生成过程获得；该红外脉冲通过瞬态光栅 FROG 技术进行了精确表征。中心波长为 799 nm，脉冲持续时间（半高全宽）为 31 fs。根据普通边带的互相关信号，测得极紫外脉冲持续时间（半高全宽）为 12 fs。我们选择氦原子的单激发 1s3p 态作为共振态，以展示激光辅助法诺共振的概念。该共振态自然落在带宽为 ∼0.2 eV 的第 15 次谐波覆盖范围内，并在长程 XUV-红外扫描的另一项实验中得到确认 [，见补充材料（SM）]。第 17 次谐波可直接使氦原子电离，充当干涉臂，形成

连续态路径。边带16由两条路径的干涉形成，即激光辅助法诺共振的信号。我们的实验方法基于跨阈值 RABBIT方案（*31–36*），但关键取决于两个方面：(i) 我们使用 COLTRIMS 探测器（*37,38*），将零动能附近的能量分辨率大幅提高至 10 meV；(ii) 我们以阿秒稳定性，在长达 50 fs 的范围内分辨了 XUV-IR 延迟。前者使人们能够直接观测线形在阿秒尺度上的变化，后者则揭示 RABBIT 相位局部依赖于 XUV-IR 延迟，这相较于以往研究（*31–36*）增添了一个全新的基本特征。

在图 2A-B 中，我们分别展示了测量得到的边带16的延迟分辨光电子能谱，以及含时薛定谔方程（TDSE）的第一性原理解。对于 TDSE模拟，我们采用了修正的 Tong-Lin 势（*39*），计算得到的 $1s^2$-1s3p 跃迁共振能量与 NIST 值（0.84843 原子单位）吻合得非常好，精确到第五位有效数字。在模拟中，极紫外和红外脉冲均为无啁啾的高斯形状，其光强和持续时间取自实验值。通过将波函数投影到模型势的连续态本征态上，可在不作任何近似的情况下得到光电子的最终动量或能量（计算细节见补充材料）。TDSE模拟再现了我们测量结果中的大部分特征，包括飞秒和阿秒结构。按照我们的定义，负时间延迟意味着红外脉冲落后于极紫外脉冲。在零延迟附近，光电子能量最低，这是由于红外包络峰值使电离势（I_p）产生了最大的斯塔克位移（由有质动力能 U_p 引起）。随着红外脉冲逐渐移至极紫外脉冲之后，斯塔克位移减小，电子能量随之升高，直至约 -25 飞秒；此时两个脉冲仅有少部分重叠，因此连续态路径变得非常微弱。由于共振通道受到的斯塔克位移影响远小于连续态路径，随着红外脉冲延迟，来自两条路径的电子能量会逐渐错开，最终在较低能量区域留下共振通道的长尾。至于阿秒结构，测量和 TDSE模拟均显示，RABBIT 条纹呈倾斜状，且其斜率随时间延迟局部变化。在图 2C-E 中，我们展示了时间延迟分别约为 -13.5 飞秒、-5.5 飞秒和 6.5 飞秒时的阿秒分辨线切片，这些结果与相应的

图 2F-H 所示 TDSE 结果吻合良好。光电子线形从低振幅的对称形状，先变为向右偏斜的形状，再变为高振幅的对称形状，最后变为向左偏斜的形状。这种行为基本符合 $|M_{\mathrm{res}}|$ 大于 $|M_{\mathrm{con}}|$ 的物理图像（即图 1G）。当时间延迟从 6.5 飞秒减小至 -13.5 飞秒时，左右能量位移和上下产额对比度均增强，表明两条路径的通道强度变得更加接近。这是因为延迟红外脉冲会增大共振通道的失谐，其通道强度因而比连续态路径下降得更快，使两条通道的强度更加相近。因此，线形的阿秒控制对应于复平面中两个圆的旋转，而飞秒控制则依赖于对两个圆相对大小的调节。如图 1 所示，这两种现象都可以用激光辅助法诺共振的物理图像很好地理解。

为捕捉其中发生的物理过程，我们建立了一个直观的双能级模型，其中包含两个离散态（1s 和 3p）以及一个连续态。共振路径的振幅表示为 $M_{\mathrm{res}} = -\mathrm{i}\mu_{3p,\,E}\int e^{iEt}F_{\mathrm{IR}}(t)c_{3p}(t)\,\mathrm{d}t$，连续态路径的振幅则写作 $M_{\mathrm{con}} = -\mathrm{i}\pi\mu_{1s,\,E+\omega}\mu_{E+\omega,\,E}\int e^{iEt}F_{\mathrm{IR}}(t)F_{\mathrm{H17}}(t)c_{1s}(t)\,\mathrm{d}t$，其中 $\mu_{A,\,B}$ 是从状态 A 到状态 B 的跃迁偶极矩（A，B 表示束缚的 1s 和 3p 态，或能量为 E 和 $E+\omega$的连续态），E 是边带能量，F_{IR} 和 F_{H17} 分别是红外场和第17次谐波场。电子被激发至 3p 态的含时概率振幅 $c_{3p}(t)$，或留在 1s 态的含时概率振幅 $c_{1s}(t)$，由包含斯塔克位移和电离损耗的双能级方程描述（更多详情见补充材料）。我们基于双能级模型计算了 M_{res} 和 M_{con} 之间随能量变化的干涉极小值，并用虚线将其绘于图 2B 中。在整个延迟范围内，双能级模型的预测与从头算含时薛定谔方程的结果高度吻合。这一发现得出了一个违反直觉的结论：即使在这一低能量区域，Wigner 相位和连续态-连续态（CC）跃迁相位（*15*）的能量依赖性在此处也可忽略，因为我们的双能级模型并未纳入 Wigner 相位或 CC 相位。在补充材料中，我们说明了 Wigner 相位和 CC 相位在跨阈值 RABBIT 方案中相互抵消。因此，此处测得的 RABBIT 条纹随能量和延迟的变化源于共振动力学。这一发现具有重要意义，因为它定义了一个绝对时间尺度

用于测量光电离延迟。以往的 RABBIT测量只能确定两个同时测量的光电离过程之间的相对 光电离延迟（*19,24, 40,41*），而我们的结果揭示了一种确定 RABBIT测量中时间原点的方法，并有望进一步发展为测量绝对光电离延迟。

为量化能量和延迟的依赖关系，我们用函数 $a + 2b\cos(2\omega\tau + \varphi)$对干涉条纹进行局部拟合。图 3 展示了分别从实验数据和 TDSE模拟中得到的 a、 b 和 φ 的拟合结果。背景项 a 对应于两个波包的平方和，即 $|M_{\mathrm{con}}|^2 + |M_{\mathrm{res}}|^2$；而条纹对比度$b$ 对应于它们的模的乘积，即 $|M_{\mathrm{con}}| \cdot |M_{\mathrm{res}}|$。因此，与对比度项不同，当两个脉冲分离时，背景项会呈现低能尾部。 a 和 b 的抛物线形状均体现了红外场在连续态路径中引起的 U_p位移效应。请注意，此处的红外光强与典型 RABBIT 实验中的一样低。我们的实验数据表明，若能量分辨率足够高，红外脉冲包络的影响不可忽略。最后，RABBIT 相位 φ 对应于两条路径之间的相位差，即 $\arg[M_{\mathrm{res}}] - \arg[M_{\mathrm{con}}]$，主要反映共振通道的特征。随着时间延迟减小，相位跃变（蓝色区域）的能量位置逐渐变得平滑，并向低能区域移动。

根据拟合结果，我们可以提取振幅和相位，从而在时域中对共振波包进行动态成像。减去连续态路径的振幅 $|M_{\mathrm{con}}|$ 和相位 $\arg[M_{\mathrm{con}}]$ 后，我们得到能域中共振路径的复振幅 $M_{\mathrm{res}}(E,\ \tau)$。通过时频变换，最终得到时域中的波包 $M_{\mathrm{res}}(t,\ \tau)$，如图 4B-D 所示（数据分析的详细信息见补充材料）。图 4A-C 展示了与直接通过双能级模型计算所得结果的比较。在这些图中，横轴表示极紫外-红外时间延迟，纵轴表示实际时间。极紫外脉冲以零时刻为中心（蓝色虚线），红外脉冲则位于实际时间等于极紫外-红外时间延迟的位置（红色虚斜线）。我们还将两个脉冲包络乘积（即 $I_{\mathrm{IR}}(t)I_{\mathrm{H17}}(t)$）的峰值位置绘制为绿色实线；该位置对应于连续态路径（即非共振双光子波）中波包的峰值位置

包。绿色实线是参考线，表示吸收极紫外光子和红外光子之间没有任何延迟。实验结果和模型结果（见图 4(A-B) 中的洋红色圆点）均表明，共振波包的峰值位于绿色线与红色线之间，这说明共振波包在吸收红外光子之前会在共振态停留一段时间。共振波包与非共振波包峰值位置之间的时间间隔，即所谓的共振双光子光电离时间延迟（*42*）。由于极紫外脉冲强度太弱，无法触发两个能级之间的拉比振荡，激发态的布居通常会在极紫外脉冲作用期间逐渐积累。这种积累导致共振态发生瞬时电离的时间延迟。我们的发现验证了先前的理论预测（*42*），即共振双光子时间延迟取决于脉冲包络。相位分布显示，随着红外脉冲延迟，电子波包的时间色散逐渐增大，这对应于频域中的能量位移。值得注意的是，我们改变了双能级模型中的脉冲参数，发现上述现象具有普遍性和稳健性。

总之，我们通过量子工程实现了一种新型法诺共振——激光辅助法诺共振，其光电子线形可在阿秒和飞秒时间尺度上进行控制。借助复平面上的简单图像，我们清楚展示了控制线形的多种可能性。前所未有的高分辨率实验结果揭示了跨阈值 RABBIT 技术中极紫外和红外脉冲的包络效应，并表明 RABBIT 相位局部取决于双脉冲时间延迟。借助从头算计算和双能级模型，我们阐明了在这种跨阈值 RABBIT 情形下维格纳延迟和 CC 延迟的作用。我们还对共振电子波包进行了动态成像，并测定了共振光电离时间延迟。在光子着装弗洛凯图像中，略低于阈值的共振态可视为连续谱中的束缚态，因此，基于法诺共振的量子操控，例如电磁诱导透明（*7*），应当能够利用阿秒科学中的单激发态轻易实现。举例来说，如果一个奇次谐波覆盖两个单激发态，这恰好对应于涉及两个法诺共振的典型电磁诱导透明系统（*5,25*）。因此，三通道干涉产生的光电子谱线将在“透明”和“不透明”之间呈现调制，且可在阿秒

时间尺度上进行控制。因此，我们的研究为在更复杂系统中对电子共振现象实施阿秒量子控制铺平了道路。

参考文献

1. U. Fano, Nuovo Cimento 12, 154 (1935)。2. U. Fano,《物理评论》124, 1866 (1961)。3. J. M. Rost, K. Schulz, M. Domke, G. Kaindl,《物理学杂志 B》：原子、分子与光学物理 30, 4663 (1997)。4. J. A. Fan 等，《科学》328, 1135 (2010)。5. M. F. Limonov, M. V. Rybin, A. N. Poddubny, Y. S. Kivshar，《自然·光子学》11, 543 (2017)。6. I. Mazumdar, A. Rau, V. Bhasin，《物理评论快报》97, 062503 (2006)。7. S. E. Harris，《今日物理》50, 36 (1997)。8. V. Novikov, T. Murzina，《光学快报》42, 1389 (2017)。9. M. V. Rybin 等，《物理评论 B》88, 205106 (2013)。10. A. Poshakinskiy, A. Poddubny，《物理评论X》9, 011008 (2019)。11. M. Hentschel 等，《自然》414, 509 (2001)。12. P. M. Paul 等，《科学》292, 1689 (2001)。13. J. Itatani 等，《物理评论快报》88, 173903 (2002)。14. M. Schultze 等，《科学》328, 1658 (2010)。15. J. M. Dahlstr¨om 等，《化学物理》414, 53 (2013)。16. C. Ott 等，《科学》340, 716 (2013)。17. A. Kaldun 等，《科学》354, 738 (2016)。

18. V. Gruson,等。, 《科学》**354**, 734 (2016)。19. M. Huppert, I. Jordan, D. Baykusheva, A. von Conta, H. J. W¨orn 等, 《物理评论快报》**117**, 093001（2016）。20. E. Gagnon，等，《科学》*317*，1374（2007）。21. A. L. Cavalieri，等，《自然》**449**，1029（2007）。22. S. Ghimire，等，《自然·物理》**7**，138（2011）。23. T. T. Luu，等，《自然·通讯》**9**，3723（2018）。24. I. Jordan，等，《科学》（2020）。25. C. Lin，W.-C. Chu，《科学》**340**，694（2013）。26. P. M. Kraus，等，《科学》**350**，790（2015）。27. S. Chu，《自然》**416**，206（2002）。28. E. Goulielmakis，等，《科学》**317**，769（2007）。29. A. D. Bandrauk，N. H. Shon，《物理评论 *A*》**66**，031401（2002）。30. C. Ott，等，《物理评论快报》**123**，163201（2019）。31. M. Swoboda，等，《物理评论快报》**104**，103003（2010）。32. L. Neoriˇci´c，等，《前沿物理》第908页（2022）。33. A. Autuori，等，《科学进展》**8**，eabl7594（2022）。34. L. Drescher，T. Witting，O. Kornilov，M. Vrakking，《物理评论 *A*》**10**

5, L011101（2022）。

35. A. S. Kheifets, A. W. Bray, 《物理评论*A*》**103**, L011101（2021）。
36. D. Villeneuve, P. Hockett, M. Vrakking, H. Niikura, 《科学》**356**, 1150（2017）。

37. R. D¨orner，等，《物理综述》**330**，95（2000）。

38. J. Ullrich，等，《物理学进展报告》**66**，1463（2003）。39. X. M. Tong，C. D. Lin，《物理学杂志 B》**38**，2593（2005）。40. K. Kl¨under，等，《物理评论快报》**106**，143002（2011）。41. M. Isinger，等，《科学》**358**，893（2017）。

42. J. Su, H. Ni, A. Jaro´n-Becker, A. Becker，《物理评论快报》**113**, 263002 (2014).

致谢

我们感谢 A. Schneider 和 M. Seiler 提供技术支持。**资助**M.H. 感谢欧盟通过玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议 No 801459 - FP-RESOMUS，从其地平线2020研究与创新计划中提供资助。本研究得到 ETH 苏黎世和瑞士国家科学基金会通过项目 200021 172946 及 NCCR-MUST 的支持。

作者贡献M.H. 和 K.U. 构思了这项研究。M.H. 在 J.J. 和 L.C.S. 的支持下完成了实验。H.L. 和 M.H. 分析并解读了数据。H.L. 完成了模拟。J.M.R.、K.U. 和 H.J.W. 负责监督研究的实施。M.H.、H.L.、J.M.R、K.U. 和 H.J.W. 在所有合著者的意见基础上撰写了论文。

利益冲突无。

数据和材料可用性 评估本文结论所需的所有数据均已包含在本文或补充材料中。

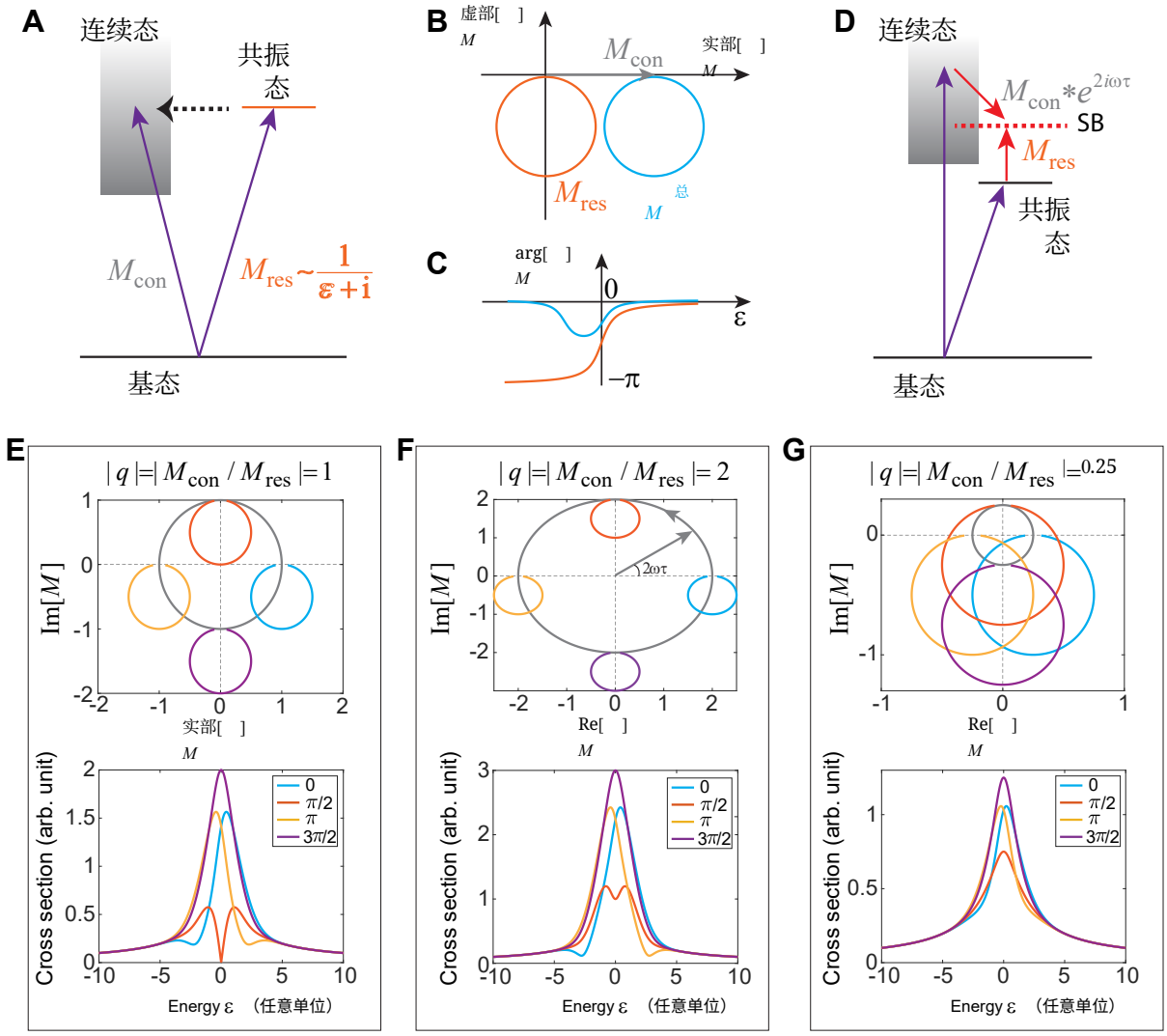

图1：**激光辅助法诺共振原理及其量子控制。(A)** 标准法诺共振示意图，由连续态路径 M_{con} 与共振路径 M_{res}的干涉形成。共振态嵌入在连续态中。**(B)** M_{con}、 M_{res} 及其和 M_{total}的复平面表示。共振跃迁振幅与实数连续态跃迁振幅相干叠加后发生偏移，从而相对于虚轴呈现不对称性。**(C)** M_{res} （橙色曲线）和 M_{total} （蓝色曲线）的相位随约化能量 ε变化的曲线，其中$\varepsilon=0$ 表示共振能量。注意， M_{total} 的相位极值相对于共振位置有所偏移。**(D)** 激光辅助法诺共振示意图，其中共振态位于连续态之下。共振路径和连续态路径分别由两个相邻的奇次谐波激发，其复合过程由红外激光场辅助。以 M_{res} 为参考线， M_{con} 将带有相位因子 $e^{2i\omega\tau}$，对应于以复平面原点为圆心的圆。**(E-G)** 通道振幅比为 1.0（E）、2（F）和 0.25（G）时，激光辅助法诺共振的复平面表示（上图）和线形（下图）。XUV-IR 延迟 τ 决定洛伦兹圆在同心圆上的转动位置，因此控制线形。在计算中，我们取 $M_{\mathrm{res}}=\frac{1}{\varepsilon+\mathrm{i}}$ 和 $M_{\mathrm{con}}=qe^{2i\omega\tau}\cdot e^{-\varepsilon^2/4}$，并假设光谱为高斯形光谱，其中 q 为图版上方所示的通道振幅比。

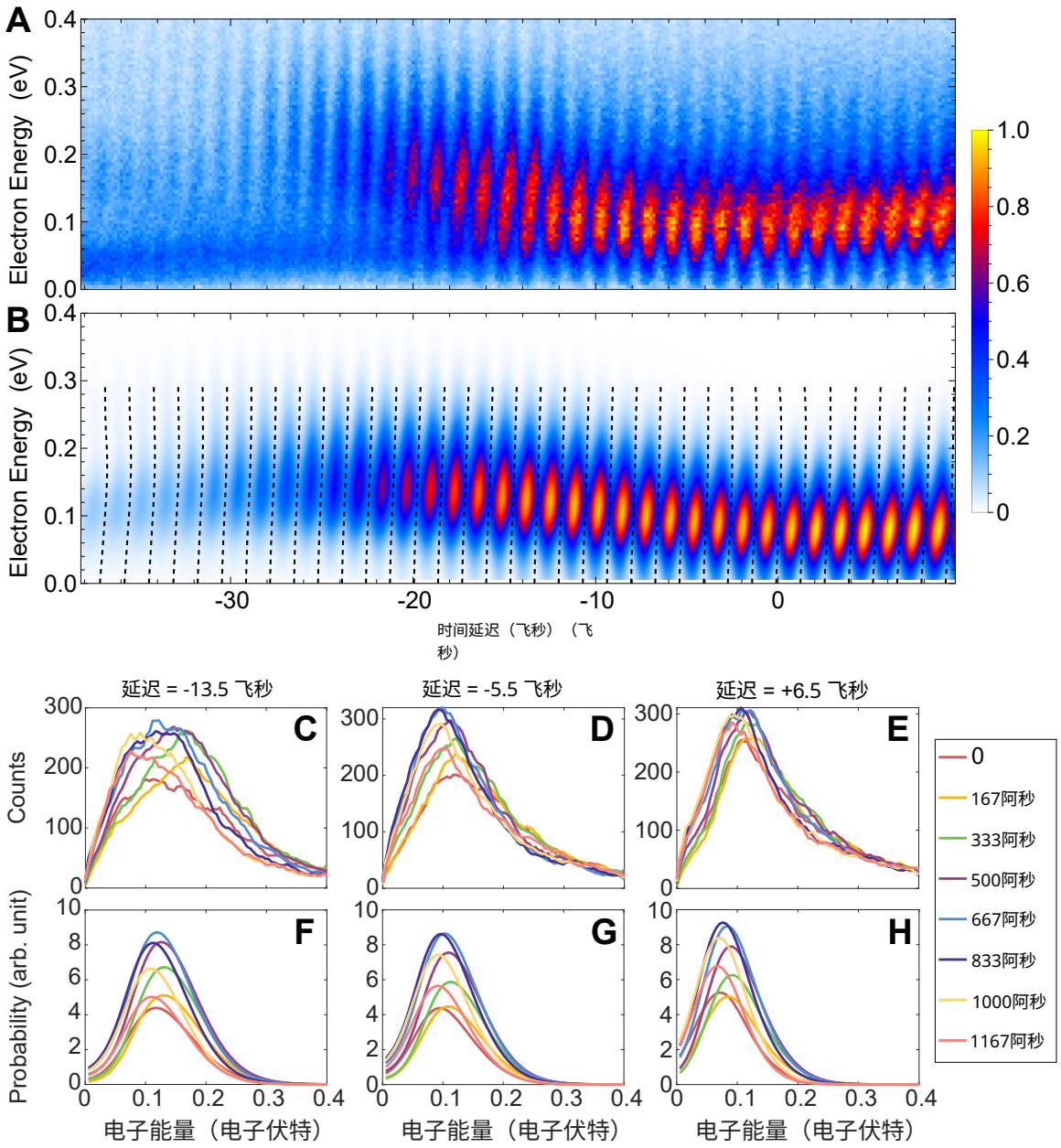

图2：**法诺线型的时间控制**。（**A-B**）测量（A）和含时薛定谔方程计算（B）中边带16的延迟分辨光电子能谱。在（B）中，虚线表示双能级模型预测的干涉极小值，与含时薛定谔方程计算结果高度一致。（**C-H**）实验（C、D、E）和含时薛定谔方程计算（F、G、H）中不同飞秒延迟下的阿秒分辨光电子线型，延迟标注在各面板顶部。

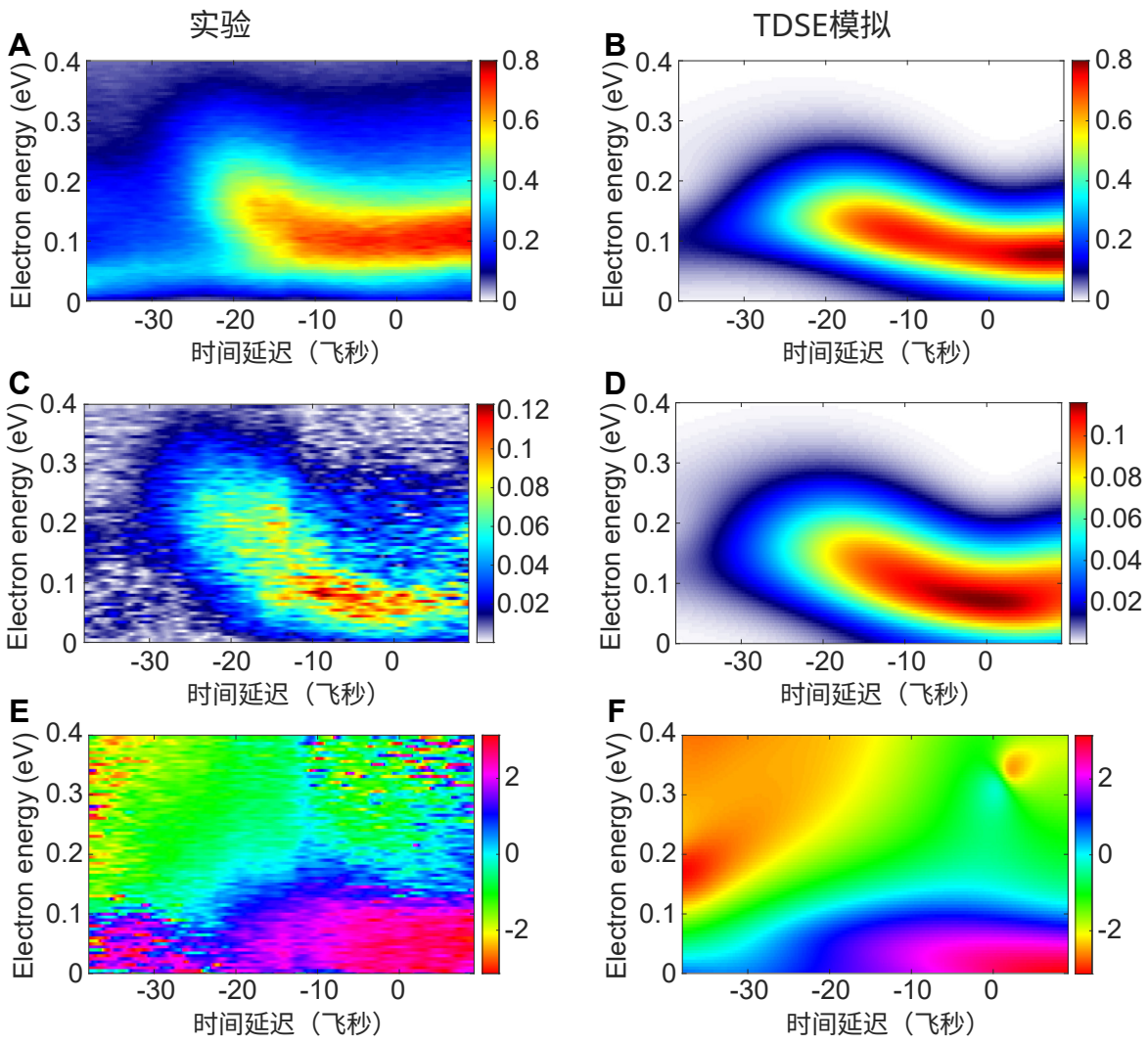

图3：**RABBIT 条纹的局部拟合。** 沿延迟轴，在每个延迟和能量处，使用余弦函数 $a + 2b\cos(2\omega\tau + \varphi)$ 进行局部拟合。从上到下： a， b和 φ。左侧和右侧面板分别对应实验数据和TDSE模拟。

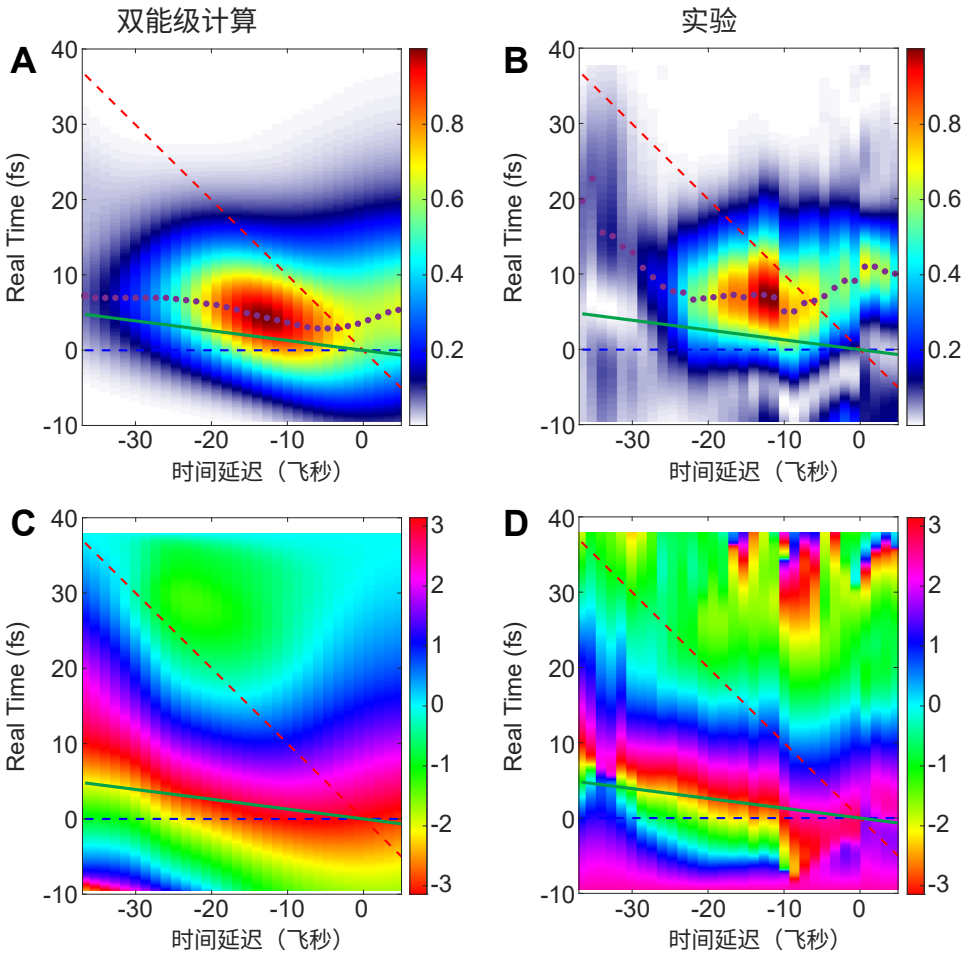

图 4：**共振电子波包的动态成像。(A-B)** 双能级模型 (A) 和测量 (B) 中共振波包随时间和延迟变化的振幅 ($|M_{\mathrm{res}}(t,\ \tau)|$)。洋红色圆点标出各时间延迟下波包的峰值位置。**(C-D)** 双能级模型 (C) 和测量 (D) 中相应的相位 ($\arg[M_{\mathrm{res}}(t,\ \tau)]$) 分布。在所有面板中，蓝色和红色虚线分别表示极紫外脉冲和红外脉冲的峰值位置。绿色实线表示极紫外和红外脉冲乘积函数的峰值位置，对应于连续态路径中波包的中心。

arXiv:2302.04090v1 [quant-ph] 8 Feb 2023

《激光辅助法诺共振：阿秒量子控制与动态成像》补充材料

Meng Han[1, *, †], Hao Liang[2, *, †], Jia-bao Ji[1], Leung Chung Sum[1], Kiyoshi Ueda[1,3], Jan Michael Rost[2], Hans Jakob W¨orner[1]1苏黎世联邦理工学院物理化学实验室，苏黎世，瑞士 8093 2马克斯·普朗克复杂系统物理研究所，N¨othnitzer Straße 38，德国 01187 3东北大学化学系，日本仙台 980-8578

*这些作者对本研究贡献相同

†电子邮箱：menhan@ethz.ch；liangh@pks.mpg.de

2023年2月9日

实验细节

近红外激光脉冲（2 mJ）由再生式 Ti:蓝宝石激光放大器输出，中心波长为 799 nm，重复频率为 5 kHz。使用自制的瞬态光栅 FROG 测得脉冲持续时间为 31 飞秒（半高全宽）。该激光束经 70:30 分束器分束后，能量较高的部分由一面银镜（f = 40 cm）聚焦到一个长 4 mm 的充氩气体池中，通过高次谐波产生（HHG）生成线偏振极紫外阿秒脉冲串。残余驱动红外场由一片厚度为 200nm 的铝滤光片阻挡，透射的 XUV 光束则由一面镀镍环面镜（f = 50cm）聚焦到 COLTRIMS 的主腔室中。XUV 光谱采用自制 XUV 光谱仪进行表征，该光谱仪由一片像差校正平场光栅（Shimadzu 1200 线/mm）和一个与荧光屏耦合的微通道板（MCP）探测器组成。能量占 30% 的光束用作 RABBIT 实验中的修饰场。修饰红外场与 XUV 场的偏振方向平行，其强度由光阑控制在极低水平（约为 10^{12} W/cm^2）；通过比较光电子峰相对于仅有 XUV 数据的 U_p shift 对其进行表征。修饰红外光束由带孔反射镜与 XUV 光束重新合并，随后由带孔透镜（f = 50cm）聚焦。在修饰场光路中设置了两个延迟台，即一台高精度直流电机（PI，分辨率 100 nm）和一台压电电机（PI，分辨率 0.1 nm），分别工作于飞秒和阿秒时间尺度。连续波氦氖激光束经分束器传输，用于监测干涉仪两个臂中红外光路的相对长度。带孔合束反射镜后方的一台高速 CCD相机用于成像氦氖激光的干涉条纹，以便通过 PID反馈锁定 XUV 与红外光之间的相位延迟。在测量中以阿秒精度扫描 XUV-红外相位延迟时，压电延迟台会主动稳定，步长为 167 阿秒，抖动小于 30 阿秒。对于 COLTRIMS 装置，氦原子的超声速气体射流（背压为 3 bar）由一个小喷嘴沿x 方向喷出，喷嘴开口直径为 30 μm；气流随后通过两个锥形撇渣器（Beam Dynamics），二者分别位于下游 10 mm 和 30 mm 处，直径分别为 0.2 mm 和 1 mm。对于 COLTRIMS 光谱仪，一个非常弱的静电

沿着 z 轴施加了电场（~ 0.813 V/cm）和磁场（~ 4.680769 G），以符合事件的方式收集带电碎片，从而提高零能区的能量分辨率。本研究仅分析并呈现单电离事件（一个电子与一个 He^+符合），并对光电子发射角在其4π 范围内进行积分。

长程泵浦-探测实验数据

正文中展示的实验数据，是使用阿秒精度压电台测得的；该压电台以连续波氦氖激光器运行于锁相模式。此处展示的是使用飞秒精度的直流台电机测得的长程泵浦-探测实验数据，以确定共振态。图1A展示了延迟范围为 -350 飞秒至 250 飞秒的光电子能谱测量结果。没有共振动力学的常见边带信号（例如 3.4 电子伏特处的 SB18）仅出现在时间重叠区间。具有共振动力学的 SB16 在零能附近显示出一条延伸至重叠区间之外的长尾，如图1B所示。这直接证明了我们的极紫外脉冲共振激发了电子，随后该电子受到延迟红外场的探测。如图1C所示，预计 1s3p态的信号出现在 0.061 电子伏特处，与我们的测量结果高度吻合。我们没有在 0.716 电子伏特附近观测到任何泵浦-探测信号；1s4p态的信号本应出现在该处，这表明我们的第 15 次谐波仅覆盖一个共振态。图1D还展示了延迟为 -200 飞秒时探测到的低能光电子的角分布，此时两个脉冲完全分离。探测到的光电子呈现 d-波特征，这表明极紫外泵浦的共振态具有我们所预期的 p-波特征。

脉冲持续时间和啁啾的表征

我们通过瞬态门控（TG）频率分辨光学门（FROG）测量对红外脉冲进行了仔细表征；通过模拟 COLTRIMS 光谱仪腔室中的焦点位置，该测量还纳入了空气、腔室窗口和透镜带来的额外色散。在图 2A 中，我们展示了测得的 TG-FROG 迹线原始数据。利用该 FROG 迹线，反演得到的时域电场和相位为

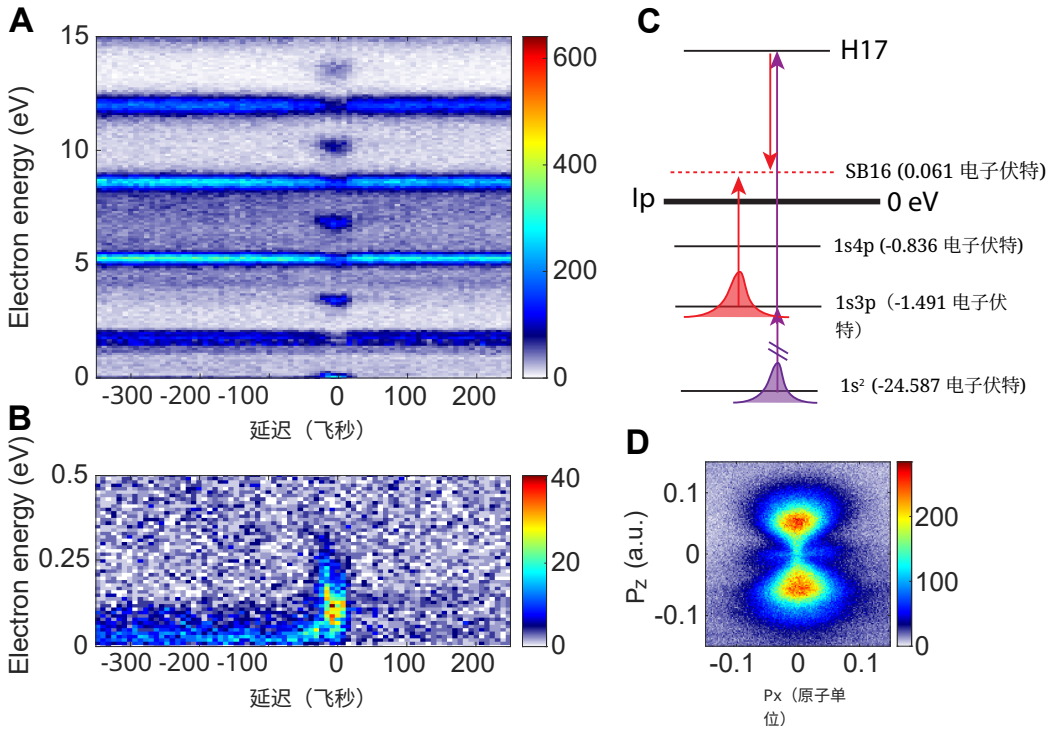

图1：**长程泵浦-探测实验结果**。（**A**）测得的延迟分辨光电子能谱。负延迟表示红外脉冲位于极紫外脉冲之后。（**B**）对（A）中的图进行放大，以观察零能区。（**C**）用于识别共振态的泵浦-探测实验示意图。能级的参考值来自美国国家标准与技术研究院（NIST）数据库。将参考值与我们的实验结果进行比较后，可以得出结论：只有1s3p态受到极紫外脉冲的共振激发。（**D**）在-200 fs延迟时记录的探测低能信号的光电子角分布。探测到的光电子具有 *d*波特征，这表明极紫外泵浦的共振态具有 *p*波特征。

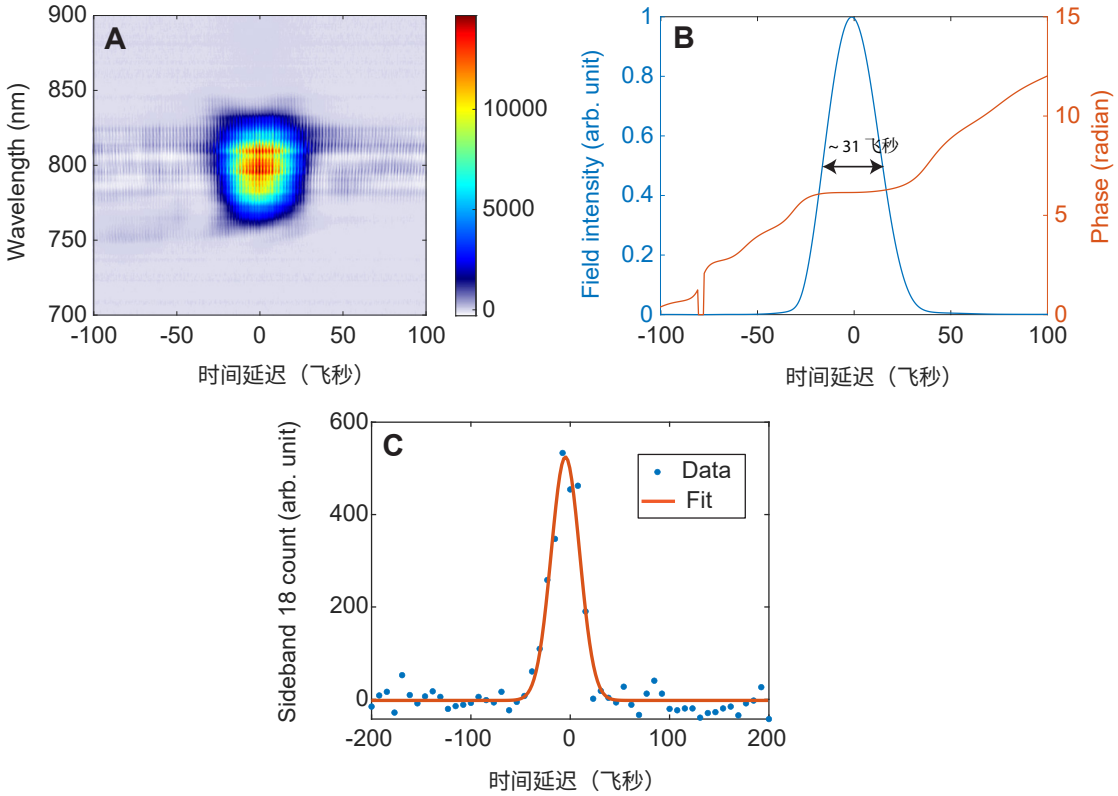

图2：**红外和极紫外脉冲的表征**。（**A**）红外脉冲的实测瞬态光栅频率分辨光学门迹线。（**B**）从（A）的迹线中提取的红外脉冲时间包络（蓝色曲线）和相位（橙色曲线）。（**C**）第18阶边带的光电子信号（蓝色点）及高斯拟合（橙色曲线），其对应于极紫外和红外脉冲的互相关信号。

如图2B所示，其半高全宽（FWHM）约为31飞秒。通过使用COLTRIMS光谱仪测量第18阶边带的互相关信号来表征极紫外场的脉冲持续时间，如图2C所示。通过高斯拟合（图2C中的橙色曲线）确定，互相关信号的半高全宽约为33.3飞秒。因此，在假设两个脉冲均具有高斯形状的情况下，根据反卷积公式估算，极紫外脉冲的半高全宽约为12飞秒。需要注意的是，我们在含时薛定谔方程和双能级模型模拟中准确使用了这些脉冲参数。

关于红外脉冲和极紫外脉冲的二阶色散（啁啾），我们也能很好地对其进行表征。对于红外脉冲，矩形状的瞬态光栅频率分辨光学门迹线表明，啁啾已

通过优化光栅压缩器基本消除。对于极紫外脉冲，阿秒啁啾是相邻谐波之间的光谱相位差，而飞秒啁啾则是各阶谐波光谱相位共有的啁啾，会影响时域中的极紫外脉冲包络。阿秒啁啾不会影响我们的数据分析，因为我们只关注单个阶次边带内分辨到光谱的 RABBIT 相位。飞秒啁啾确实会影响单个阶次边带内分辨到光谱的 RABBIT 相位，也就是说，会使 RABBIT 条纹倾斜。在图 3 中，我们展示了不含共振动力学的普通边带的分辨光谱 RABBIT 迹线。实验数据表明，分辨光谱的 RABBIT 条纹几乎是笔直的，这说明我们的极紫外脉冲的飞秒啁啾非常小。因此，我们在共振边带 16 上观察到的现象以及正文中报告的结果，可以放心地归因于共振动力学。此外，在我们的含时薛定谔方程和双能级模型模拟中，红外脉冲和极紫外脉冲均不含啁啾。尽管如此，模拟结果与测量结果吻合良好，这证实了脉冲啁啾的影响非常小。

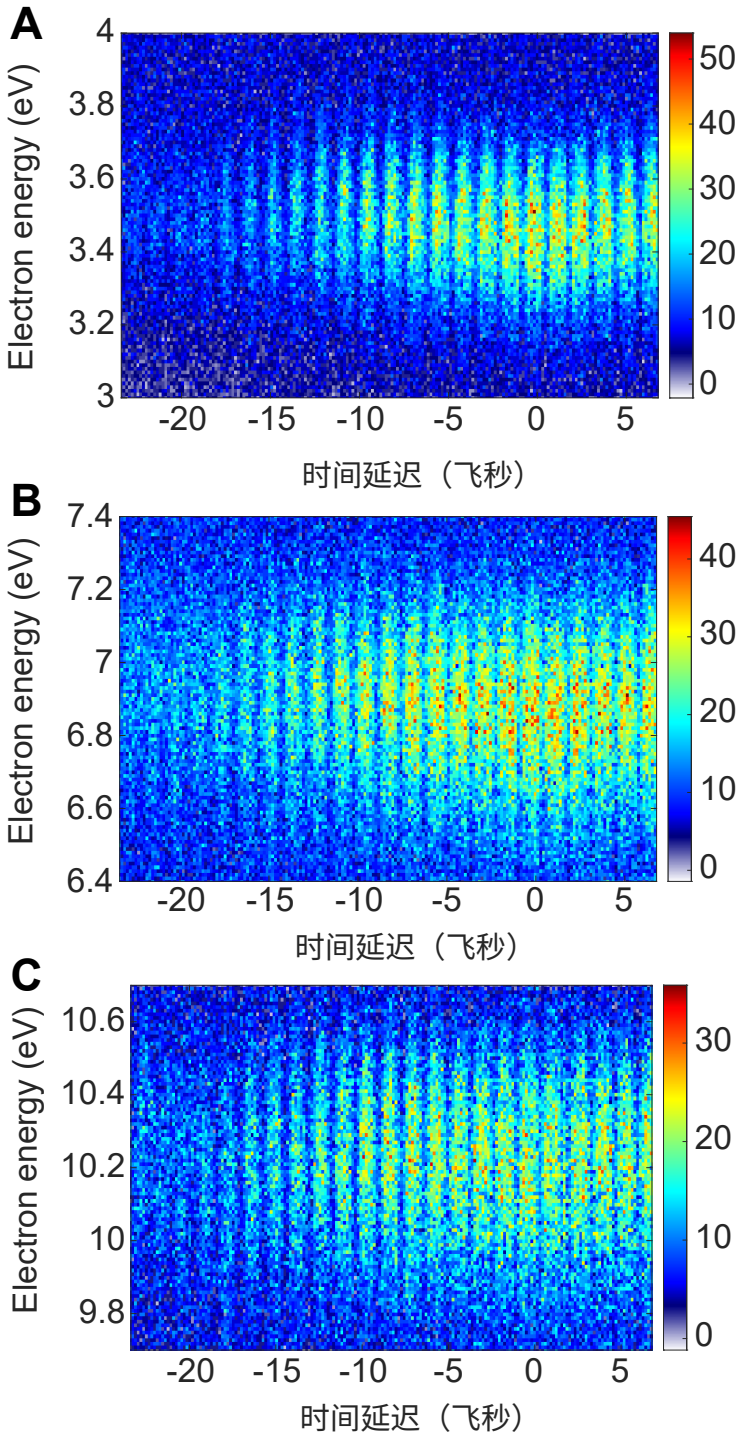

图3：**无共振动力学时高阶边带的光电子 RABBIT 迹线光谱分辨图。。（A-C）**测得的 SB18 （A）、 SB20 （B）和 SB22 （C）的延迟分辨光电子能谱。对于这些共有边带，直线形的 RABBIT 迹线表明可以忽略极紫外场的飞秒啁啾。

含时薛定谔方程模拟

为模拟实验结果，我们在单活性电子和偶极近似下，采用速度规范求解氦原子的含时薛定谔方程，即

$$\mathrm{i}\partial_t\psi = \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2} + V(r) + p_z A(t)\right]\psi\,. \tag{1}$$

单电子波函数的角向部分 ψ 展开为球谐函数Y_{lm}，其中 $l_{\max} = 3$ 和 $m_{\max} = 0$，这足以涵盖所有相关分波。将范围从 0 到 100 原子单位的径向坐标离散为 48 个单元，其中每个单元由基于有限元离散变量表示（*?*）的 8 个基函数表示。模型势的形式为

$$V(r) = -\frac{2 + a_1\mathrm{e}^{-a_2 r} + a_3 r\mathrm{e}^{-a_4 r} + a_5\mathrm{e}^{-a_6 r}}{r}, \tag{2}$$

该模型势改编自 Tong 和 Lin 的工作（*?*）。我们对参数进行了小幅调整，以匹配所有相关束缚态的能量。在表 1 中，我们比较了 NIST 标准值、采用 Tong-Lin 原始参数的计算结果以及采用修改后参数的计算结果 $a_1 = 1.231$，$a_2 = 0.662$，$a_3 = -2.966$，$a_4 = 2.883$，$a_5 = -0.231$，a_6 =0.121。采用当前参数得到的结果与 NIST 数值符合得更好。

能级	NIST 标准	Tong 与 Lin	本研究
$1s^2$	-0.903570	-0.903801	-0.903540
1s2s	-0.145954	-0.160010	-0.145948
1s3p	-0.055138	-0.056783	-0.055135

表 1：NIST 标准中氦原子的能级（原子单位），
采用 Tong 与 Lin 的模型势（？）以及当前势参数进行的计算。

将 $1s^2$ 设为初始态后，我们使用了光脉冲

$$A(t) = \sum_i \frac{\sqrt{I_i}}{\omega_i}\exp\left[-4\ln 2\left(\frac{t-\tau_i}{T_i}\right)^2\right]\cos\omega_i(t-\tau_i)\,, \tag{3}$$

其中，i =IR、H15、H17 分别对应基频激光场、基频场的第 15 阶和第 17 阶谐波。因此，有 $\omega_{\mathrm{IR}} = 0.05703$原子单位、$\omega_{\mathrm{H15}} = 15\omega_{\mathrm{IR}}$ 以及

$\omega_{\mathrm{H17}} = 17\omega_{\mathrm{IR}}$。 T_i 是第 i 个脉冲的半高全宽，具体数值为 $T_{\mathrm{IR}} = 31$ 飞秒和 $T_{\mathrm{H15}} = T_{\mathrm{H17}} = 12$ 飞秒。高斯函数的中心 τ_i 表示 IR 脉冲与 XUV 脉冲之间的时间延迟 τ。为简便起见，我们设定 $\tau_{\mathrm{IR}} = -\tau$ 和 $\tau_{\mathrm{H15}} = \tau_{\mathrm{H17}} = 0$，这与实验中的惯例一致：负时间延迟表示 IR 脉冲相对于 XUV 脉冲有所延迟。每个脉冲的峰值强度 I_i 分别为 $I_{\mathrm{IR}} = 3 \times 10^{12}$ 瓦/厘米^2 和 $I_{\mathrm{H15}} = I_{\mathrm{H17}} = 10^{12}$瓦/厘米^2。

采用幺正Arnoldi传播算符（***?***）在时间上传播波函数。将脉冲结束后的波函数投影到模型势的精确连续态本征态上，即可得到实验可观测量——光电子能量分布。采用波函数分裂技术（***?***）以避免边界反射。在TDSE模拟中，像实验中那样，对光电子发射角在其 4π 范围内进行积分。

双能级模型

我们建立了一个双能级模型，以涵盖共振动力学中最关键的物理机制。根据二阶微扰理论，电子在1s^2 态和1s3p态中的振幅近似为

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\dot{c}_{1s} &= [E_{1s} + \delta_{1s} I_{\mathrm{IR}}(t)] c_{1s}, \\ \mathrm{i}\dot{c}_{3p} &= [E_{3p} + (\delta_{3p} - \mathrm{i}\gamma_{3p}/2) I_{\mathrm{IR}}(t)] c_{3p} + \mu_{1s,3p} A_{\mathrm{H15}}(t) c_{1s}. \end{aligned} \tag{4}$$

在式（4）中，我们忽略了极紫外脉冲引起的耗尽和斯塔克位移效应，这是合理的，因为其强度较低。我们考虑了红外脉冲引起的耗尽 $\gamma_i I_{\mathrm{IR}}$（t）和斯塔克位移 $\delta_i I_{\mathrm{IR}}$（t）；在二阶微扰理论和绝热近似（***?***）下，二者都与瞬时红外强度 I_{IR}（t）成正比。注意，$\delta_{1s} I_{\mathrm{IR}}$（$t$） $\approx -U_p$（t）。在红外脉冲的峰值强度处，有 $\delta_{1s} I_{\mathrm{IR}} = -6.6 \times 10^{-3}$ a.u. $= -0.18$电子伏特，$\delta_{3p} I_{\mathrm{IR}} = 2.2 \times 10^{-3}$ a.u. $= 0.06$ 电子伏特， $\gamma_{3p} I_{\mathrm{IR}} = 4.8 \times 10^{-3}$ a.u. $= 0.20$飞秒$^{-1}$，并且$\mu_{1s,3p} \equiv \langle 1s|p_z|3p\rangle$表示两个态之间的偶极跃迁矩。

代入式（4）中的振幅，电离至边带16（$E \approx E_{1s} + 16\omega_{\mathrm{IR}}$）的电离振幅为

$$M_{\mathrm{res}}(E, s/d) = \langle E, s/d|p_z|3p\rangle \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}Et} A_{\mathrm{IR}}(t) c_{3p}(t)\, \mathrm{d}t, \tag{5}$$

对于共振通道，以及

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{con}}(E, s/d) = & \int \mathrm{d}E' \, \langle E, s/d | p_z | E', p \rangle \langle E', p | p_z | 1s \rangle \times \\
& \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}Et} A_{\mathrm{IR}}(t) \, \mathrm{d}t \int^{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E'(t-t')} A_{\mathrm{H17}}(t') c_{1s}(t') \, \mathrm{d}t' \\
\approx & \pi \langle E, s/d | p_z | E', p \rangle \langle E', p | p_z | 1s \rangle \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}Et} A_{\mathrm{IR}}(t) A_{\mathrm{H17}}(t) c_{1s}(t) \, \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{6}
$$

对于连续跃迁通道。在公式 (6) 的最后一行中，我们假设偶极跃迁矩阵元的乘积是 E' 的缓慢变化函数，因此对 E' 的积分是一个狄拉克 δ 函数。请注意，本节中所有未明确标出积分上下限的时间积分，范围均从负无穷到正无穷。对于正文中给出的双能级模型结果，我们对公式 (4-6) 进行了数值求解。

接下来，我们讨论 Wigner 延迟和 CC 延迟在该方案中的作用。在共振通道（公式 (5) ）中，偶极跃迁矩 $\langle E|p_z|3p\rangle$ 在边带能量 E 处产生 Wigner 相位。在连续态路径（公式 (6)）中，偶极跃迁矩 $\langle E'|p_z|1s\rangle$ 和 $\langle E|p_z|E'\rangle$ 分别对 $E' = E + \omega$ 处的 Wigner 相位，以及连接 E 和 E' 的 CC 相位作出贡献。由于 $\arg \langle E|p_z|E'\rangle\langle E'|p_z|1s\rangle = \arg\langle E|p_z|1s\rangle$ 和 $\arg\langle E|p_z|1s\rangle = \arg\langle E|p_z|3p\rangle$，对于两种角动量的末态 $l = 0$ 和 $l = 2$，两条路径之间的 Wigner 相位和 CC 相位近似相互抵消。这一点通过比较双能级模型和含时薛定谔方程的结果得到了证实。请注意，对于未穿越阈值的普通边带情况，连接两个 Wigner 相位的两个 CC 相位无法相互抵消，因为一个 CC 相位对应吸收，另一个对应发射。

现在我们将式（5）与式（6）相加。在旋波近似下，可以简化时变矢势 $A_i(t) \approx \sqrt{I_i(t)}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega_i (t-\tau_i)}/2\omega_i$。最终，我们得到总电离振幅的闭式表达式

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{total}}(E, s/d) = & \frac{\mu_{1s,3p}\mu_{3p,E}}{4\omega_{\mathrm{IR}}\omega_{\mathrm{H15}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{IR}}\tau} \int \mathrm{d}t \int^{t} \mathrm{d}t' \sqrt{I_{\mathrm{IR}}(t) I_{\mathrm{H15}}(t')} \times \\
& \exp\left\{-\mathrm{i}[\Phi_{3p}(t) + \omega_{\mathrm{IR}} t - Et - \Phi_{3p}(t') + \Phi_{1s}(t') - \omega_{\mathrm{IR}} t']\right\} + \\
& \pi \frac{\mu_{1s,E'}\mu_{E',E}}{4\omega_{\mathrm{IR}}\omega_{\mathrm{H17}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{IR}}\tau} \int \sqrt{I_{\mathrm{IR}}(t) I_{\mathrm{H17}}(t)} \exp\left\{-\mathrm{i}[-\omega_{\mathrm{IR}} t - Et + \omega_2 t + \Phi_{1s}(t)]\right\} \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{7}
$$

其中

$$\Phi_{1s}(t) \equiv \int^{t} [E_{1s} + \delta_{1s} I_{\mathrm{IR}}(t')]\,\mathrm{d}t', \tag{8}$$

$$\Phi_{3p}(t) \equiv \int^{t} [E_{3p} + (\delta_{3p} - \mathrm{i}\gamma_{3p}/2) I_{\mathrm{IR}}(t')]\,\mathrm{d}t'. \tag{9}$$

如前所述，维格纳相位与 CC 相位近似相互抵消， $M_{\mathrm{res}}(E,\ s/d)$ 与 $M_{\mathrm{con}}(E,\ s/d)$ 之间的相位差仅由指数项和积分中的 $-2\omega_{\mathrm{IR}}\tau$ 决定。后者与共振动力学有关，且独立于末态的角动量 s 或 d。通过数值计算式（7）中的积分，可以确定相位差，进而计算干涉极小值（$\Delta\varphi = (2n+1)\pi$），如正文图 2B 所示，其中虚线整体平移了一个较小的延迟常数（0.25 飞秒），以匹配含时薛定谔方程条纹。为获得与实验结果的高度吻合，这是唯一需要进行的调整。

还可以进一步分析这些积分中的相位信息。若忽略 U_p 位移的时间依赖性，连续态路径对应的积分就是脉冲包络 $\sqrt{I_{\mathrm{IR}}(t) I_{\mathrm{H17}}(t)}$ 乘积的傅里叶变换。两个高斯函数的乘积仍然是一个高斯函数，其中心位于 $\tau_* = -\tau/(1 + T^2_{\text{红外}}/T^2_{\mathrm{H15}})$，对应正文图 4 中的绿色实线。$U_p$ 位移只会根据 τ_* 的符号，使高斯波包产生啁啾。

对于共振通道，双重积分展现了记忆效应：在时间t 发生的电离取决于时间 $t' < t$ 的强度 I_{H15}。记忆的寿命由 Φ_{3p}的虚部决定。它会为共振电离通道带来额外的时间延迟，正如我们在正文的图 4 中所见。如果将 $I_{\mathrm{IR}}(t)$视为与时间无关的常数，复双重积分就会变成卷积的傅里叶变换

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{res}}(E) &\sim \int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta_2 t} \int^{t} \mathrm{d}t'\, \sqrt{I_{\mathrm{IR}} I_{\mathrm{H15}}(t')}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta_1 + \mathrm{i}\Gamma/2 - \Delta_2)(t-t')} \\ &\sim \frac{-\mathrm{i}}{\Delta_1 + \mathrm{i}\Gamma/2} \int \sqrt{I_{\mathrm{IR}} I_{\mathrm{H15}}(t)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta_2 t}\, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{10}$$

其中，$\Delta_1 \equiv E - \omega_{\mathrm{IR}} - E_{3p} - \delta_{3p} I_{\mathrm{IR}}$、$\Gamma \equiv \gamma_{3p} I_{\mathrm{IR}}$ 和 $\Delta_2 \equiv E - E_{1s} - \delta_{1s} I_{\mathrm{IR}} - \omega_{\mathrm{IR}} - \omega_{\mathrm{H15}}$ 分别表示 3p 态与末态之间的失谐、3p 态的衰减率以及 1s 态与末态之间的失谐。请注意，此处我们得到了一个双光子共振

跃迁公式，其形式与布赖特–维格纳振幅相同，这表明我们基于法诺共振的物理图像是正确的。对 $\sqrt{I_{\mathrm{H15}}}$ 的剩余傅里叶变换表示共振跃迁失谐导致的抑制。——

数据分析

本节将介绍如何从主文图 2A 所示的原始实验图样 $P(E,\ \tau)$ 中提取依赖于能量和延迟的干涉分量，以及共振电子波包。

为了拟合时间延迟 τ 和光电子能量 E 附近的 a、b 和 φ，我们求解以下最小二乘问题

$$\min_{a,b,\varphi}\sum_{i}\left|a+2b\cos(2\omega\tau_i+\varphi)-P(E,\tau_i)\right|^2\exp\left[-\frac{(\tau-\tau_i)^2}{\tau_w^2}\right], \tag{11}$$

其中求和遍历所有测得的 τ_i。权重函数 τ_w 的时间宽度选为 0.94 飞秒，这是在时间分辨率与信噪比之间权衡的结果。

经过局部余弦拟合后，我们提取两个电离通道 $b=|M_{\mathrm{res}}M^{*}{}_{\mathrm{con}}|$ 的振幅乘积及其相位差 $\varphi=\arg(M_{\mathrm{res}}M^{*}_{\mathrm{con}})$，并将其表示为电子能量 E 和时间延迟 τ 的函数。原则上，可以用双能级模型计算得到的 M^{*}_{con} 去除 $b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，从而确定共振电离振幅 M_{res}。然而，由于 M_{con} 在较大的 E 下呈指数趋近于零，而 b 始终含有一定的噪声，直接相除无法得到合理结果。因此，必须应用滤波器来减小高能部分的贡献，使得在时域重建的共振波包为

$$\tilde{M}^{\mathrm{rec}}_{\mathrm{res}}(t;\tau)=\sum_{E_i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_it}b(E_i;\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(E_i;\tau)}(M^{*}_{\mathrm{con}})^{-1}\mathrm{e}^{-(E_i/E_c)^{\alpha}}, \tag{12}$$

其中 $\alpha=4$ 和 $E_c=0.34$电子伏特。我们已确认，改变滤波器参数不会影响电离波包的物理信号。