arXiv:2302.04104v1 [nlin.SI] 7 Feb 2023

循环弗罗贝尼乌斯代数。

V. M. Buchstaber[$], A. V. Mikhailov[♯]

设 $\mathscr{A}$ 是一个带单位元 1 的结合 $\mathbb{C}$-代数，设 $\mathscr{M}$ 是某个 $\mathbb{C}$-线性空间，维数为 $\dim \mathscr{M} \geqslant 1$。

定义。循环弗罗贝尼乌斯代数（CF-代数） $\mathscr{A}$ 是一个代数 $\mathscr{A}$，带有一个 $\mathbb{C}$-双线性反对称形式 $\Phi(\cdot,\cdot)$: $\mathscr{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{A}\to\mathscr{M}$，满足 $\Phi(A,BC)+\Phi(B,CA)+\Phi(C,AB)=0$，其中 $A,B,C\in\mathscr{A}$。

例：1) $\mathscr{M}=\mathscr{A}$和 $\Phi(A,B)=AB-BA=[A,B]$；2) $\mathscr{A}$是一个带有泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}$, $\mathscr{M}=\mathscr{A}$的交换代数，且 $\Phi(A,B)=\{A,B\}$；3) 当 $\mathscr{M}$是一个域时，由从 [1], [5]构造代数的方法得到的 CF-代数。

引入 $\mathbb{C}$-线性子空间 Span $\subset\mathscr{A}$，它由所有交换子 $[A,B]\in\mathscr{A}$ 张成，以及投影 $\pi\colon \mathscr{A}\to\mathscr{A}/$ Span。若 $A-B\in$ Span，则令 $A\approx B$。

引理 1. 设 $\varphi(\cdot,\cdot)\colon \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 是一个 $\mathbb{C}$-双线性斜对称形式，满足 $\varphi(A,BC)\approx\varphi(A,B)C+B\varphi(A,C)$。则 $\mathscr{A}$ 是一个 CF-代数，其中 $\mathscr{M}=\mathscr{A}/$Span 且 $\Phi=\pi\varphi$。

设 $\mathscr{K}=\{B\in\mathscr{A}\colon \Phi(A,B)=0,\ \text{对所有 } A\in\mathscr{A}\}$ 均成立。由定义可知，$\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的子环，$1\in\mathscr{K}$，并且对所有 A、$C\in\mathscr{A}$ 和 $b\in\mathscr{K}$，均有 $\Phi(A,bC)=\Phi(Ab,C)$。

设 $\mathfrak{A}=\mathbb{C}\langle u_0,u_1,\dots\rangle=\oplus\mathfrak{A}_k$, $k\geqslant 0$ 是一个带有导子 D 的自由结合分次代数，$|u_k|=k+2$, $D(u_k)=u_{k+1}$, $k=0,1,\dots$。引入代数 $\mathfrak{A}^D=\{A=\sum_{i\leqslant m}a_iD^i,\ a_m\neq 0,\ m\in\mathbb{Z},\ a_i\in\mathfrak{A}_{|a_m|+m-i}\}$，其中 $[D,u_k]=u_{k+1}$, $[D^{-1},u_k]=\sum_{i\geqslant 1}(-1)^iu_{k+i}D^{-i-1}$。设 $A_+ + A_- = A\in\mathfrak{A}^D$，其中 $A_+=\sum a_iD^i$, $0\leqslant i\leqslant m$，当 $m\geqslant 0$ 时，以及当 $m<0$ 时 $A_+=0$。我们有 res$[D,A]=D($res$A)$，其中 res$A=a_{-1}$。

我们定义一个齐次的 $\mathbb{C}$-双线性斜对称形式 $\sigma(\cdot,\cdot)\colon \mathfrak{A}^D\otimes\mathfrak{A}^D\to\mathfrak{A}$,$|\sigma(A,B)|=|A|+|B|$，如下：

$$\sigma(aD^n,bD^m)=\begin{cases}\frac{1}{2}\binom{n}{n+m+1}\sum\limits_{s=0}^{n+m}(-1)^s\left(a^{(s)}b^{(n+m-s)}+b^{(n+m-s)}a^{(s)}\right), \text{for } n+m\geqslant 0,\ nm<0,\\ 0,\qquad \text{otherwise.}\end{cases}$$

引理 2. 对任意 $A,B\in\mathfrak{A}^D$，有 $D\big(\sigma(A,B)\big)=$res $[A,B]-\Delta(A,B)$，其中

$$\Delta(aD^n,bD^m)=\begin{cases}\frac{1}{2}\binom{n}{n+m+1}\Big([a,b^{(n+m+1)}]+(-1)^{n+m}[b,a^{(n+m+1)}]\Big),\ \textit{for } n+m\geqslant -1,\\ 0,\qquad \textit{otherwise.}\end{cases}$$

引理 3. 在典范投影 $\pi\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}/$Span $=\mathscr{M}=\oplus\mathscr{M}_k$, k $\geqslant 0$ 下，算子 D 给出单射 $\overline{D}$: $\mathscr{M}_k\to\mathscr{M}_{k+1}$, $k>0$。

定理 1. 代数 $\mathfrak{A}^D$ 是一个具有形式 $\Phi=\pi\sigma$的 CF-代数：$\mathfrak{A}^D\otimes\mathfrak{A}^D\to\mathscr{M}$，满足 $\mathscr{K}=\mathfrak{A}$ 且 $\Phi(D^n,D^{-n})=n$, $n\in\mathbb{Z}$。

AVM 感谢 EPSRC 项目 EP/V050451/1 的支持。

推论1. 在自由左 $\mathfrak{A}$-模 $\mathfrak{A}^D$的生成元 $\{D^n, n \in \mathbb{Z}\}$ 上，形式Φ是非退化的。

设 $L = D^2 - u$和 $\mathscr{L} = D + \sum I_i D^{-i}$, $i \geqslant 1$, $I_i \in \mathfrak{A}_{i+1}$, 其中 $\mathscr{L}^2 = L$。我们得到一列级数 $\mathscr{L}^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$。令

$$\sigma_{2k-1,2n-1} = \sigma(\mathscr{L}_+^{2k-1}, \mathscr{L}^{2n-1}) \in \mathfrak{A}_{2n+2k-2}, \qquad \rho_{2n} = \sigma_{1,2n-1} = \operatorname{res} \mathscr{L}^{2n-1},\ n > 0. \tag{1}$$

Fr根据形式 $\sigma(\cdot,\cdot)$ 的性质，我们得到 $\sigma_{2k-1,\ 2n-1} = \sigma_{2n-1,\ 2k-1}$, $k, n \in \mathbb{N}$。

引入代数 $\mathfrak{A}$ 的导子 D_{2k-1}, $k \in \mathbb{N}$, 使得

$$D_1 = D; \quad [D, D_{2k-1}] = 0; \quad D_{2k-1}(u) = -2D(\rho_{2k}),\ k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

推论2. $[D_{2k-1}, D_{2n-1}] = 0$。

设 $u = u(t_1, t_3, \ldots)$。令 $\partial_{t_{2k-1}}(u) = D_{2k-1}(u)$。

定理2. 方程组 $\partial_{t_{2k-1}}(u) = -2D\big(\rho_{2k}(u)\big)$, $k \in \mathbb{N}$, 其中 $\rho_2(u) = -\frac{1}{2}u$, 与 $\mathfrak{A}$ 上的 KdV层级一致

$$4\partial_{t_3}(u) = D(u_2 - 3u^2); \quad 16\partial_{t_5}(u) = D(u_4 - 5u_2 u - 5uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3); \ldots .$$

证明可由上述构造推出（参见 [2]–[6]）。

按照 [3], 关于 $N \in \mathbb{N}$的做法，令 $F_{2N+2}(u) = \rho_{2N+2} + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{2(N-k+1)}\rho_{2k}$, 其中 $\rho_0 = 1$和 $\alpha_4, \ldots, \alpha_{2N+2}$为自由参数。方程 $F_{2N+2}(u) = 0$称为第 N 个诺维科夫方程。令 $J(F)$ 为 $\mathfrak{A}$ 中由多项式$F_{2N+2}(u)$生成的双边 D-微分理想。由于 $2^{2k+1}\rho_{2k+2} = u_{2k} + f(u_{2k-2}, \ldots, u)$ 和 $u_{k+1} = D^k(u)$, 在商代数 $\mathfrak{A}/J(F) = \mathbb{C}\langle u, \ldots, u_{2N-1}\rangle$ 上，KdV层级（见定理2）约化为第 N 个 Novikov层级，其中第一个方程组表示第 N 个诺维科夫方程，其形式为$D(u_k) = u_{k+1}$, 其中 $0 \leqslant k < 2N-1$, $D(u_{2N-1}) = -f(u_{2k-2}, \ldots, u)$。文献 [3] 已表明，关于形式 Φ（见定理1），这些多项式

$$H_{2n+1,2N+1} = \sigma_{2n+1,2N+1} + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_{2(N-k+1)}\sigma_{2n+1,2k-1},\ n = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

^定义$H_{2n+1,\ 2N+1} = \pi(H_{2n+1,\ 2N+1})$作为 N阶Novikov层级的第一积分:

$$\pi(\partial_{t_{2k-1}}(\widehat{H}_{2n+1,2N+1})) = 0, \qquad k, n \in \{1, \ldots, N\}.$$

定理3。在量子情形下， N阶Novikov层级（见 [3]）写成相容的海森堡方程组的形式。多项式（3）是该层级的量子对易哈密顿量；当变量 u_k 是自伴的且参数 α_4、……、 α_{2N+2} 的取值为实数时，它们也是自伴的。

我们谨向S.P. Novikov和V.N. Rubtsov致谢，感谢他们就本文结果展开的富有启发性的讨论。

References

[1] M. Aguiar, *On the associative analog of Lie bialgebras*, 《代数杂志》244:2 (2001), 492–532. [2] V. M. Buchstaber, A. V. Mikhailov, *Integrable polynomial Hamiltonian systems and symmetric powers of plane algebraic curves.* 76 4 460 2021 587 652 , 《俄罗斯数学评论》, : ( )( ), – 。[3] V. M. Buchstaber, A. V. Mikhailov, *KdV hierarchies and quantum Novikov's equations.*, arXiv:2109.06357 v2 [nlin.SI]. [4] I. M. Gelfand, L. A. Dikii, *Asymptotic behaviour of the resolvent of Sturm-Liouville equations and the algebra of the Korteweg-de Vries equations.* 30 5 1975 77 113 , 《俄罗斯数学评论》, : ( ), – 。

[5] A. V. Odesskii, V. N. Rubtsov, V.V.Sokolov, *Bi-Hamiltonian ordinary differential equations with matrix variables* . 171 1 2012 26 32 , 《理论与数学物理》, : ( ), – 。

[6] V. V. Sokolov, *Algebraic Structures in Integrability.*, 世界科学出版社，哈肯萨克，新泽西州，2020年。

$ Steklov Mathematical Institute, Moscow, Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Russia*Email address*: buchstab@mi-ras.ru

♮ University of Leeds, Leeds, UK
Email address: a.v.mikhailov@leeds.ac.uk