arXiv:2302.04117v2 [math.OC] 9 Feb 2023

用于计算临界点的多面体同伦算法：多项式规划

JULIA LINDBERG、LEONID MONIN 和 KEMAL ROSE

Abstract. 本文提出一种利用拉格朗日乘子和数值代数几何来寻找所有临界点，进而求解多项式优化问题全局最优解的方法。我们设计了一种多面体同伦算法，可显式构造最优起始系统，从而绕过多面体同伦算法通常面临的瓶颈。该算法的正确性基于对多项式规划问题代数次数的交叉理论计算，并依赖于显式求解相应拉格朗日系统的热带化。我们通过实验表明，该算法优于传统的同伦延拓算法。

1. Introduction

多项式规划是一类数学规划，其目标是在满足多项式约束的条件下使多项式目标函数最小化。这类优化问题的形式如下：

$$\text{(Opt)} \qquad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \; f_0(x) \quad \text{subject to} \quad F(x)=0,$$

其中 $F(x) = \{f_1(x)\dots, f_m(x)\}$ 和 $f_i(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 均为多项式。本文中我们始终使用多项式的标准多重指标记号。具体而言，我们记为

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} c_\alpha x^\alpha$$

其中 $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$ 是 f 的单项式支撑，且对于 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$。

多项式规划具有广泛的建模能力，因此自然地应用于许多领域，包括信号处理、组合优化、电力系统工程等 [43, 36, 31]。一般而言，求解这些问题是 NP难的 [44]，但存在许多求解技术和启发式方法来处理（优化）。一些常用方法包括矩/SOS层级 [35, 23, 45, 27],局部方法 [7, 37] 以及拉格朗日乘子法 [6]。本文提出结合数值代数几何中的技术，使用拉格朗日乘子法求解（优化）。

拉格朗日乘子法通过将约束优化问题提升到高维空间，再考虑一个无约束优化问题来发挥作用。给定形式为（优化）的问题，我们定义其

拉格朗日函数为

$$L(x,\lambda) = f_0(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x).$$

相应的 拉格朗日系统 定义为 $\mathcal{L}_{f_0,\ F} = \{\ell_1, \ldots, \ell_n, f_1, \ldots, f_m\}$其中

$$\ell_i = \frac{\partial}{\partial x_i} L = \frac{\partial}{\partial x_i}(f_0 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j).$$

使用拉格朗日乘子的主要思路是，(Opt) 的光滑临界点是 $\mathcal{L}_{f_0}$ 的零点，$_F$。因此，若我们找到所有满足$\mathcal{L}_{f_0,\ F}(x,\ \lambda) = 0$的 $(x,\ \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$，就能找到所有光滑局部临界点，进而（只要 $F(x) = 0$ 的簇是光滑的）得到全局最优解。

对于固定的 f_0，F 复数解的数量 $\mathcal{L}_{f_0,\ F} = 0$ 称为 代数次数 (Opt) 的代数次数。对于一般的 f_0，F 代数次数的公式见 [32,定理 2。2] ，其形式为

$$d_1 \cdots d_m S_{n-m}(d_0 - 1, d_1 - 1, \ldots, d_m - 1) \tag{1.1}$$

其中 d_i =deg(f_i) 且

$$S_r(n_1, \ldots, n_k) = \sum_{i_1+\ldots+i_k=r} n_1^{i_1} \cdots n_k^{i_k}.$$

对于其他类别的凸优化问题，代数次数也已被定义并加以研究，见 [15] 和 [34]。当 f_0 是欧几里得距离函数，即 $f_0 = \|x - u\|_2^2$ 对于某个 $u \in \mathbb{R}^n$时，问题（Opt）的复临界点个数称为 欧几里得距离次数 （ F）。欧几里得距离次数最早在 [11]中定义。此后，其他研究对簇的欧几里得距离次数给出了界 [12], ，并研究了实代数组 [3], 、费马超曲面 [24], 、正交不变矩阵 [13], 、光滑复射影簇 [1], 和多视图簇的欧几里得距离次数 [29] ，以及 F 由单个多项式构成时的情形 [8]。

类似地，当 f_0 是似然函数时，问题（Opt）的复临界点个数称为 *ML* 次数。ML 次数最早在 [9, 17]中定义，此后，人们广泛研究了 ML 次数与欧拉示性数、[19],欧拉阻碍函数 [38] 及环面几何 [2, 10, 26]之间的关系。此外，各种统计模型的 ML 次数也得到了研究 [16, 28, 30, 42]。

近来，人们研究了当 $f_0, \ldots, f_m$由稀疏多项式定义时，(Opt) 的代数次数。在这种情况下，代数次数可能小于（1.1）中给出的上界。 [25] 中的作者证明，在某些情况下，代数次数等于相应拉格朗日系统的混合体积。这一结果的一个推论，以及 [25, 26, 8], 中关于 ML 次数和欧几里得距离次数的类似结果表明，若 f_0, F 具有一般系数，则多面体同伦 算法对于求解相应拉格朗日系统是最优的，因为对于$\mathcal{L}_{f_0,\ F} = 0$的每个复数解，恰好只需跟踪一条路径。多面体同伦算法的一个缺点是存在一个瓶颈

，即起始系统的计算。本文的工作在这方面取得了进展：通过明确设计一个用于 (Opt) 的多面体同伦算法，其中$m = 1$，从而绕过了常规瓶颈。我们将本文视为一个起点，并希望它能为一条令人振奋的新研究方向带来启发，即针对特定的参数化多项式方程组，明确构造最优同伦算法。

本文的结果安排如下。在第2节，我们回顾多面体同伦背后的主要思想。在第3节，我们针对仅存在一个约束的情形，明确构造一种多面体同伦算法。在第4节，我们将这一结果推广到该约束为稀疏约束的情形。在第5 节，我们给出数值结果，表明我们的算法优于现有的多面体同伦求解器；并在第6节明确计算某个多仿射多项式规划的代数次数。

2. Polyhedral homotopy continuation

同伦延拓算法是一大类数值算法，用于求解方形多项式方程组的所有孤立解。具体而言，假设有一个方形多项式方程组

$$F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} = 0$$

其中 $f_i \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$，且 $F(x) = 0$ 的复数解数量有限。同伦延拓通过从一个“容易求解”的多项式方程组（称为起始系统）追踪解到所需的方程组（称为目标系统）来实现。具体做法是构造一个同伦，

$$H(t; x) : [0, 1] \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

使得

(1) $H(0; x) = G(x)$，且 $H(1; x) = F(x)$；(2) $G(x) = 0$ 的解是孤立的，且易于求得；(3) H 沿路径 $t \in [0, 1)$ 上没有奇点；(4) H 对于 F 是充分的。

这里，如果通过求解初值为 $\{x : G(x) = 0\}$ 的常微分方程初值问题 $\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} = 0$，能够得到 $F(x) = 0$ 的所有孤立解，我们就称同伦 H 是充分的，适用于 $F = H(1; x)$。

一种同伦的例子称为直线同伦，定义为起始系统与目标系统的凸组合：

$$H(t; x) = \gamma(1 - t)G(x) + tF(x)$$

其中 $\gamma \in \mathbb{C}$ 是一个一般常数。选择一般的 γ 可确保 $H(x; t)$ 对于 $t \in [0, 1)$ 是非奇异的。路径跟踪通常采用标准预测校正法。更多信息请参见 [4, 41]。

采用同伦延拓技术时，主要问题是如何选择这样一个“容易”的起始系统。如果目标系统大致达到贝祖界，那么总次数 起始系统就很合适。例如：

$$G(x) = \{x_1^{d_1} - 1, \ldots, x_n^{d_n} - 1\}$$

其中 $\deg(f_i) = d_i$。

在实际应用中，目标系统通常由稀疏多项式方程定义。在这种情况下，贝祖界可能严格大于复数解的总数，因此使用总次数起始系统会造成计算浪费。一项著名结果称为*BKK*界，它给出了环面内稀疏多项式系统的复数解个数上界。要陈述 BKK 界，我们需要先介绍几个定义；不过，更多细节请参见 [14]。

给定 多项式 $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 的牛顿多胞体为 f

$$\mathrm{Newt}(f) = \mathrm{Conv}\{\alpha \ : \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

给定凸多胞体 $P_1, \ldots, P_n \subset \mathbb{R}^n$，考虑闵可夫斯基和 $\mu_1 P_1 + \cdots + \mu_n P_n$. 一个经典结果表明

$$Q(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \mathrm{Vol}(\mu_1 P_1 + \cdots + \mu_n P_n)$$

是关于 $\mu_1, \ldots, \mu_n$的齐次 n次多项式。 $P_1, \ldots, P_n$的混合体积是 Q的 $\mu_1 \cdots \mu_n$ 项的系数。我们将其记为 $\mathrm{MVol}(P_1, \ldots, P_n)$。

定理 2.1 (BKK 界 [5, 21, 22])。设 $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ 是 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 中的一个稀疏多项式系统， P_1、……、 P_n 是它们各自的牛顿多胞体。 $F = 0$ 的孤立 $\mathbb{C}^*$-解的数量至多为 $\mathrm{MVol}(P_1$、……、 $P_n)$。此外，若 F 的系数是一般的，则该界可取到，等号成立。

如果 BKK 界远小于贝祖界，那么多面体起始系统是更好的选择，因为使用总次数起始系统会导致计算资源浪费在跟踪那些发散到无穷远的同伦路径上。多面体同伦的缺点是起始系统更难构造。这并不奇怪，因为计算混合体积是 #P 困难 [20]。即便如此，仍有一种算法可以计算这个起始系统 [18]。我们在此简要概述多面体同伦的基本思路，并将 [18] 作为更全面的参考资料。

回忆一下， $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$，其中 $f_i = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i} c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$。对于每个单项式 $\alpha \in \mathcal{A}_i$，我们考虑一个提升， $w(\alpha)$，以及相应的提升系统$F^w(x, \ t) = (f_1^w(x, \ t)$……， $f_n^w(x, \ t))$，其中

$$f_i(x,t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i} c_\alpha x^\alpha t^{w(\alpha)}. \tag{2.1}$$

$F^w(x, \ t) = 0$ 的解是参数 t 的代数函数。此类解可以写成

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

在 $t = 0$ 的一个邻域内，每个解都可以写成 $x(t) = (x_1(t)$……， $x_n(t))$，其中

$$x_i(t) = y_i t^{u_i} \ + \ \text{higher order terms in } t$$

w这里 $y_i \neq 0$ 是一个常数，且 $u_i \in \mathbb{Q}$。将其代入（2.1），可得

$$f_i(x,t) = c_\alpha y^\alpha t^{u^T \alpha + w(\alpha)} \ + \ \text{higher order terms in } t.$$

根据 [18, 引理 3。1] 我们希望找到 u 使得

$$\min_{u\in\mathbb{R}^n} \{u^T\alpha + w(\alpha)\}$$

该过程实现了两次。对于每个解 u，向量 $(u, 1)$ 是 F 的 Cayley多胞体 的某个下侧面的内法向量。此外，每个这样的解 u 都会进一步导出一个二项式多项式系统 $\mathcal{B}_u$，该系统既可以使用 Smith标准形求解，也可以通过同伦从 $\mathcal{B}_u(x) = 0$ 跟踪解到 $F(x) = 0$。对于每个解 u，$B_u(x) = 0$ 的解的数量之和等于 $F(x)$ 的 BKK 界。因此，如果 F 的系数相对于其单项式支撑是一般的，那么多面体同伦将为 $F(x) = 0$ 的每个解跟踪一条同伦路径。我们通过一个小例子对此进行说明。

例2.2。 考虑一个含一个未知数的单个多项式方程组

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0.$$

我们希望使用同伦延拓和多面体起始系统来求解这个多项式系统。为此，我们考虑一个由 f 构成的提升系统，该系统通过将 f 的每个单项式乘以 t 的某个幂得到：

$$f_t = t^{\omega_3}x^3 - t^{\omega_2}x^2 + 2t^{\omega_1}x - t^{\omega_0}.$$

现在，假设我们选择权重 $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0, 3, 1, 2)$，那么

$$f_t = t^2x^3 - tx^2 + 2xt^3 - t^0.$$

图 2 展示了这种提升。 $f_t = 0$ 的解属于 t 的 Puiseux级数域，且形式如下

$$x(t) = \hat{x}t^a + \text{ higher order terms in } t$$

其中 $a \in \mathbb{Q}$ 且 $\hat{x} \in \mathbb{C}^*$。若 $x(t)$ 是 f_t 的一个根，则 t 中的最低次项必须相互抵消。将 $x(t) = \hat{x}t^a$ 代入 f_t，得到

$$f_t(x(t)) = \hat{x}^3t^{3a+2} - \hat{x}^2t^{2a+1} + 2\hat{x}t^{a+3} - t^0. \tag{2.2}$$

要使最低次项相互抵消，t 中的最小指数必须至少出现两次。换言之，

$$\min_a\{3a + 2, 2a + 1, a + 3, 0\}. \tag{2.3}$$

必须至少出现两次。共有六种可能：

(1) $3a + 2 = 2a + 1 < a + 3$, 0 (2)
$3a + 2 = a + 3 < 2a + 1$, 0 (3)
$3a + 2 = 0 < 2a + 1$, $a + 3$(4)
$2a + 1 = a + 3 < 3a + 2$, 0 (5)
$2a + 1 = 0 < 3a + 2$, $a + 3$(6)
$a + 3 = 0 < 3a + 2$, $2a + 1$

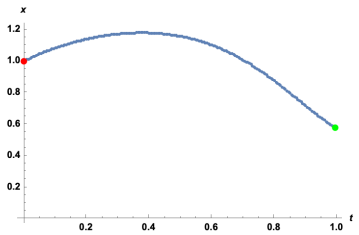

FIGURE 1. 来自示例的同伦 $h_1(\hat{}x, t)$ 2.2。红色点是由二项式系统 $\hat{}x^3 - \hat{}x^2 = 0$ 所确定的起点，绿色点则是目标解，即 $f(x) = 0$ 的一个零点。

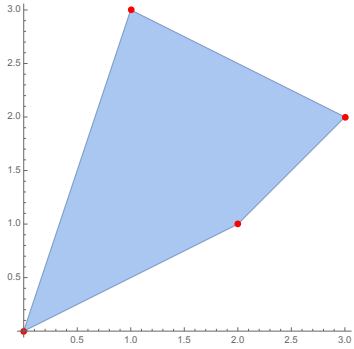

FIGURE 2. 来自示例的多面体提升 2.2

仅有的可行解是第一种和第五种，其中 $a = -1$和 $a = -\frac{1}{2}$分别成立。对于第一种情况，我们将 $a = -1$ 代入（2.2），得到

$$\hat{x}^3 t^{-1} - \hat{x}^2 t^{-1} + 2\hat{x}t^2 - 1$$

两边乘以 t，得到

$$h_1(\hat{x}, t) = \hat{x}^3 - \hat{x}^2 + 2\hat{x}t^3 - t.$$

When $t = 0$ 我们有 $h_1(\hat{}x,0) = \hat{}x^3 - \hat{}x^2$，它有唯一的 $\mathbb{C}^*$ 解，$\hat{}x =$ 1.

类似地，当 $a = -\frac{1}{2}$ 时，我们考虑并将此值的 a 代入 (2.2) 得到

$$h_2(\hat{x}, t) = \hat{x}^3 t^{\frac{1}{2}} - \hat{x}^2 + 2\hat{x}^{\frac{7}{2}} - 1.$$

当 $t = 0$ 我们有 $h_2(\hat{}x, 0) = -\hat{}x^2 - 1$，它有两个 $\mathbb{C}^*$ 解，$\hat{}x = \pm\sqrt{-1}$。因此，要找到 $f(x) = 0$的所有三个解，我们从 $t = 0$ 追踪解 $\hat{}x = 1$，沿着同伦 $h_1(\hat{}x, t)$ 到 $t = 1$；并从 $t = 0$ 追踪解 $\hat{}x = \pm\sqrt{-1}$，沿着同伦 $h_2(\hat{}x, t)$ 到 $t = 1$。同伦 h_1 的图示见图1。

最后，我们可以从图2中看到，Newt(f)的抬升多面体有两个下侧面：$\mathcal{F}_1 =$ 凸包{(0, 0), (2,1)} 和 $\mathcal{F}_2 =$凸包{(2, 1), (3,2)}。$\mathcal{F}_1$ 的内法向量为$(-\frac{1}{2}, 1)$，而 $\mathcal{F}_2$ 的内法向量为$(-1, 1)$。这些恰好是方程(2.3)的解。

采用多面体同伦算法时，主要的瓶颈在于寻找二项式起始系统及其对应的同伦。例2.2 表明，对于固定的抬升，寻找这些起始系统等价于求解一个热带系统。本文的主要贡献是为那些作为多项式优化问题的拉格朗日系统而产生的多项式系统寻找这些二项式起始系统。

3. General hypersurface

我们考虑（优化），其中 $m = 1$ 且 $\deg(f_0) = 1$。具体而言，我们考虑如下形式的多项式优化问题：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} u^T x \quad \text{s.t.} \quad f(x) = 0 \tag{3.1}$$

其中 $u \in \mathbb{R}^n$ 且 $f(x)$ 是一般的 $d \geq 2$ 次多项式。我们希望设计一种同伦算法，以求出（3.1）的所有临界点。我们首先考虑（$\mathcal{L}_{u,f} = \{\ell_1, \ldots, \ell_n, f\}$）的拉格朗日系统，其中（3.1）中

$$\ell_i = u_i - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} f(x). \tag{3.2}$$

若 f 是一般的 d 次多项式，且 $u \in \mathbb{R}^n$ 是一般的，则根据 [25], ，（3.1）的临界点数与以下问题的临界点数相同：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} u^T x \quad \text{s.t.} \quad \hat{f}(x) = 0 \tag{3.3}$$

其中 $\hat{f} = \sum_{i=1}^n c_i x_i^d$ and c_i 对 $i \in [n]$ 是一般的。（3.3）的拉格朗日系统为 $\mathcal{L}_{u,\hat{f}} = \{\ell_1, \ldots, \ell_n, f\}$ 其中 $i \in [n]$

$$\hat{\ell}_i = u_i - d\lambda c_i x_i^{d-1} \tag{3.4}$$

注意，由于 [25], ，不仅 (u, f) 和 (u, f) 的代数次数相同，而且 $\mathcal{L}_{u,\hat{f}}$ 的 BKK 界也与 $\mathcal{L}_{u,f}$ 的相同。

拉格朗日系统 $\mathcal{L}_{u,\hat{f}}$ 比 $\mathcal{L}_{u,f}$ 更稀疏；事实上，可以高效地为 $\mathcal{L}_{u,\hat{f}}$ 构造二项式起始系统 G。下面的引理表明这是可取的，因为 $\mathcal{L}_{u,\hat{f}}$ 的起始系统同时也是 $\mathcal{L}_{u,f}$ 的起始系统。我们首先需要观察直线同伦的存在性。

命题 3.1. 设 $F(x; p) \colon \mathbb{C}^n \times C^k \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 表示一个多项式系统族 $F(x; p)$，它关于参数 $p \in \mathbb{C}^k$ 多项式地依赖；设 $F(x; p_1)$ 是该族的一个固定成员。那么存在一个非空集合 $U \subseteq \mathbb{C}^k$，它在欧几里得拓扑下是开且稠密的，使得对于 U 中的每个参数 p_0，直线同伦

$$H(t; x) = (1 - t)F(x; p_1) + tF(x; p_0)$$

对于 $F(x; p_1)$ 已足够。

证明。根据 Morgan 和 Sommese 的参数延拓定理 [40]，存在一个真代数子簇 $\Sigma \subset \mathbb{C}^k$，具有以下性质：设 ρ ：

$[0,1] \to \mathbb{C}^k$ 是任意一条光滑路径，且 $H(t,x) = F(x,\rho(t))$ 是相应的同伦。如果

$$\rho([0,1)) \cap \Sigma = \emptyset,$$

那么，如 $t \to 1$，满足 $H(x(t)\ t) = 0$ 的解路径 $x(t)$ 的极限包含 $F(x;\ \rho(1)) = 0$ 的所有孤立解。特别地，$H(t,\ x)$ 是一个充分的同伦。

从现在起，我们将复仿射空间 $\mathbb{C}^k$ 与实仿射空间 $\mathbb{R}^{2k}$ 等同，并将 Σ 在实射影空间 $\mathbb{P}^{2k+1}_{\mathbb{R}}$ 中的闭包记作 Σ。考虑从点 p_1 出发的投影 $\pi : \mathbb{P}^{2k+1}_{\mathbb{R}} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2k}_{\mathbb{R}}$。由于将 Σ 视为流形时，其余维至少为二，因此像 $\pi(\Sigma)$ 在 $\mathbb{P}^{2k}_{\mathbb{R}}$ 中的余维至少为一。特别地，泛元 p_0 的像 $\pi(p_0)$ 不包含于 $\pi(\Sigma)$。由于直线路径的像 $\rho([0,1))$

$$\rho(t) = (1-t)p_1 + tp_0$$

介于 p_0 和 p_1 之间的部分包含在纤维 $\pi^{-1}(\pi(p_0))$中，且不与 Σ相交。因此，与 ρ 相关联的直线同伦就足够了。□

引理 3.2。设 G 是一个零维二次多项式方程组，恰有 $BKK(\mathcal{L}_{u,\ f})$ 个解。存在一个连接 G 和$\mathcal{L}_{u,\ f}$的充分同伦。

证明。设 $F(x;\ c)$表示一族多项式，其单项式支撑包含于$\mathcal{L}_{u,\ f}$的支撑中。特别地，系数向量 c 对$\mathcal{L}_{u,\ f}$中每个多项式的每个单项式各有一个分量。我们用 $F(x;\ c_0)$表示该族中的一个一般成员。

所需的同伦将通过复合显式构造。我们先用直线同伦将 $F(x;\ c_0)$分别连接到$\mathcal{L}_u$、f和 G；根据命题 3.1，这两种情况下的同伦都充分。我们将从 $F(x;\ c_0)$到 G 的直线同伦记为 H。现在只需证明 H 不会合并 $F(x;\ c_0)$的任何解，从而可以通过对(0, 1)中的 t 设定 $H^*(t,x) = H(1-t,x)$且 $H^*(0,x) = G(x)$，定义反向同伦 H^*。由于沿充分同伦 H 跟踪$F(x;\ c_0)$的根到 G 的根定义了一个满射，因此只需证明 $F(x;\ c_0)$与 G 的解的数量相同。

根据伯恩斯坦和库什尼连科的结果，[5, 22], $F(x;\ c_0)$的解的数量F等于$\mathcal{L}_{u,f}$的 BKK 界。在 [25] 中，作者证明多项式系统$\mathcal{L}_{u,f}$ 达到了这一界。此外，正如我们在第3节开头所指出的，$\mathcal{L}_{u,f}$ 和$\mathcal{L}_{u,\hat{f}}$ 的解的数量相同：

$$\#\{\mathcal{L}_{u,\hat{f}}\} = \#\{\mathcal{L}_{u,f} = 0\} = BKK(\mathcal{L}_{u,\hat{f}}). \tag{3.5}$$

与此同时，G的解的数量等于$\mathcal{L}_{u,\ f}$的 BKK 界；根据牛顿多面体的包含关系，该界不超过$\mathcal{L}_{u,f}$ 的 BKK 界：

$$\#\{\mathcal{L}_{u,\hat{f}}\} \le \#\{G = 0\} \le BKK(\mathcal{L}_{u,\hat{f}}). \tag{3.6}$$

综合不等式（3.5）和（3.6）可知，$\mathcal{L}_{u,\hat{f}}$ 和 G 的根数相同。□

现在给出本节的主要结果。

定理 3.3。 对于任意 $d \geq 2$ ，考虑 (3.1) 的拉格朗日系统。当 u和 f为一般情形时，相应的拉格朗日系统有 $d(d-1)^{n-1}$个复数解。此外，所有这些解都可以通过同伦找到

$$H(x, \lambda; t) = (1-t)B(x, \lambda) + t\gamma \mathcal{L}_{u,f}(x, \lambda)$$

其中

$$B(x,\lambda) = \begin{cases} u_1 - d\lambda c_1 x_1^{d-1} = 0 \\ \vdots \\ u_n - d\lambda c_n x_n^{d-1} = 0 \\ c_0 + c_1 x_1^d = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

$\gamma \in \mathbb{C}$ 是一般常数，且$\mathcal{L}_{u,\ f}(x,\ \lambda)$ 是（(3.1)）的拉格朗日系统。

证明。为了设计如 [18], 中所述的多面体同伦算法，下面我们通过求解一个热带系统，构造$\mathcal{L}_{u,\ \hat{f}}$ 的二项式起始系统 B 。根据引理3.2 的证明，我们随后得到一个从 B 到$\mathcal{L}_{u,\ f}$的同伦。注意，由于 f的一般性，该同伦可以选为直线同伦。

根据引理3.2 ，只需为$\mathcal{L}_{u,\ \hat{f}}$设计如 [18] 中所述的多面体同伦算法。为了定义该算法，我们首先需要找到$\mathcal{L}_{u,\ \hat{f}}$ 的二项式起始系统，这可以通过求解一个热带系统来完成。

令 a_i 为与 x_i 对应的热带变量，并令 b 为与 λ 对应的热带变量。那么，对于给定的提升 $\omega \in \mathbb{R}^{3n+1}$，我们要解的相应热带系统为

$$\begin{aligned} &\min_{a\in\mathbb{Q}^n, b\in\mathbb{Q}} \{\omega_{1,1}, (d-1)a_1 + b + \omega_{1,2}\} \\ &\vdots \\ &\min_{a\in\mathbb{Q}^n, b\in\mathbb{Q}} \{\omega_{n,1}, (d-1)a_n + b + \omega_{n,2}\} \\ &\min_{a\in\mathbb{Q}^n, b\in\mathbb{Q}} \{\omega_{n+1,1}, da_1 + \omega_{n+1,2}, \ldots, da_n + \omega_{n+1,n+1}\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

我们考虑一种特定的提升，它为（3.8）导出唯一解，从而构造出从一个二项式起始系统到所需目标系统（3.4）的同伦。对于这一特定的提升

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 1 \leq i \leq n+1,\ j = 1 \\ 1-d & \text{if} \quad 1 \leq i \leq n,\ j = 2 \\ -d & \text{if} \quad (i,j) = (n+1, 2) \\ 1-d & \text{else} \end{cases} \tag{3.9}$$

这给出如下热带系统：

$$
\begin{aligned}
&\min_{a\in\mathbb{Q}^n,b\in\mathbb{Q}} \{0,(d-1)a_1+b+1-d\}\\
&\qquad\vdots\\
&\min_{a\in\mathbb{Q}^n,b\in\mathbb{Q}} \{0,(d-1)a_n+b+1-d\}\\
&\min_{a\in\mathbb{Q}^n,b\in\mathbb{Q}} \{0,da_1-d,da_2+1-d,\ldots,da_n+1-d\}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

我们断言，方程（3.10）有一个唯一解，给定为 $a_i=1$ 其中 $i\in[n]$ 且 $b=0$。

首先，注意到（ n 3.10）中的前个方程迫使（$d-1$）$a_i+b+1-d=0$对于 $i\in[n]$成立。这给出$a_i=\frac{d-1=b}{d-1}$。将其代入最后一个方程并化简，可得

$$\min_{a\in\mathbb{Q}^n,b\in\mathbb{Q}} \{0,\frac{bd}{1-d},\frac{bd}{1-d}+1,\ldots,\frac{bd}{1-d}+1\}$$

必须至少有两个最小值同时取得。由此可知，唯一解为 $b=0$，其中最小值由前两项取得。反向代入可得 $a_i=\frac{d-1}{d-1}=1$ 对于 $i\in[n]$成立。二项式起始系统 $\mathcal{B}(x,\ \lambda)$，定义于（3.7）中，可由该热带系统的解直接得到。□

注意，贝祖定理给出的上界表明，（3.4）至多有 d^{n+1}个解；但我们看到，二项式系统（3.7）有 $d(d-1)^{n-1}$ 个解。这为 [33] 中关于超曲面的界提供了另一种证明，并凸显出使用多面体起始系统而非总次数起始系统的优势。

最后，我们想指出，定理3.3 中定义的同伦可用于求出在任意超曲面上优化线性函数时的所有光滑临界点，f，只要 Newt(f) 包含于凸包$\{0,de_1,\ldots,de_n\}$中。当 Newt(f) 是凸包$\{0,de_1,\ldots,de_n\}$的真子集时，f的代数次数可能小于 $d(d-1)^{n-1}$ 这意味着，在追踪发散路径时，这种同伦可能导致不必要的计算。

4. Refined hypersurface

我们现在希望对上一节讨论的超曲面情形作进一步细化。我们不再假设 f(x) 是一般的次数为 d 的超曲面，而是假设 Newt(f) =凸包$\{0,d_1e_1,\ldots,d_ne_n\}$。与前文一样，为了设计最优的二项式起始系统，我们首先只考虑对应于 Newt(f) 顶点的单项式。在这种情况下，我们考虑 $f=c_0+\sum_{i=1}^n c_ix_i^{d_i}$，其中 c_i 为一般常数。在这种情况下，对应于（3.1）的拉格朗日系统为 $\mathcal{L}_{u,\ f}=\{\ell_1,\ldots,\ell_n,f\}$ 其中 $i\in[n]$

$$\ell_i=u_i-d_ic_i\lambda x_i^{d_i-1}.$$

定理 4.1。考虑（3.1），其中 u 是一般的，并且

$$\mathrm{Newt}(f)=\mathrm{Conv}\{0,d_1e_1,\ldots,d_ne_n\}$$

其中 $1 \le d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$ 以及 f 的非零系数是一般的。式 （3.1）的代数次数为

$$d_1 \cdot (d_2 - 1) \cdots (d_n - 1).$$

此外，$\mathcal{L}_{u,\ f}(x) = 0$ 的所有解都可以通过同伦 $H(x, \lambda;\ t) = (1-t)B(x, \lambda) + \gamma t \mathcal{L}_{u,\ f}(x, \lambda)$ 求得，其中

$$B(x,\lambda) = \begin{cases} u_1 - d_1 \lambda c_1 x_1^{d_1 - 1} = 0 \\ \vdots \\ u_n - d_n \lambda c_n x_n^{d_n - 1} = 0 \\ c_0 + c_1 x_1^{d_1} = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

$\gamma \in \mathbb{C}$ 是一般的。

证明。与之前一样，我们按照 [18]中针对$\mathcal{L}_{u,\ f}$所述，设计一种多面体同伦算法。

设 a_i 为对应于 x_i 的热带变量， b 为对应于 λ的热带变量。给定提升 $\omega \in \mathbb{R}^{3n+1}$后，我们要解的相应热带系统为

$$\begin{aligned} &\min_{a \in \mathbb{Q}^n, b \in \mathbb{Q}} \{\omega_{1,1}, (d_1 - 1)a_1 + b + \omega_{1,2}\} \\ &\quad \vdots \\ &\min_{a \in \mathbb{Q}^n, b \in \mathbb{Q}} \{\omega_{n,1}, (d_n - 1)a_n + b + \omega_{n,2}\} \\ &\min_{a \in \mathbb{Q}^n, b \in \mathbb{Q}} \{\omega_{n+1,1}, d_1 a_1 + \omega_{n+1,2}, \ldots, d_n a_n + \omega_{n+1,n+1}\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

我们考虑一种特定的提升，它使（4.2）有唯一解，从而得到一个从二项式起始系统到所需目标系统的同伦。考虑这个特定的提升

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 1 \le i \le n+1,\ j = 1 \\ 1 - d_i & \text{if} \quad 1 \le i \le n,\ j = 2 \\ -d_1 & \text{if} \quad (i,j) = (n+1, 2) \\ 1 - d_i & \text{if} \quad i = n+1,\ 3 \le j \le n+1 \end{cases} \tag{4.3}$$

由此得到以下热带系统:

$$\begin{aligned} &\min_{a \in \mathbb{Q}^n, b \in \mathbb{Q}} \{0, (d_1 - 1)a_1 + b + 1 - d_1\} \\ &\quad \vdots \\ &\min_{a \in \mathbb{Q}^n, b \in \mathbb{Q}} \{0, (d_n - 1)a_n + b + 1 - d_n\} \\ &\min_{a \in \mathbb{Q}^n, b \in \mathbb{Q}} \{0, d_1 a_1 - d_1, d_2 a_2 + 1 - d_2, \ldots, d_n a_n + 1 - d_n\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

我们断言，方程组（4.4）存在唯一解，即 $a_i = 1$ 其中 $i \in [n]$ 且 $b = 0$。

首先，注意到（4.4）中的前 n 个方程4.4）迫使 $d_i - 1$）$a_i + b + 1 - d_i = 0$ 对于 $i \in [n]$。由此得到 $a_i = \frac{d_i - 1 - b}{d_i - 1}$。将其代入最后一个方程并化简，可得

$$\min_{a \in \mathbb{Q}^n, b \in \mathbb{Q}} \{0, \frac{bd_1}{1-d_1}, \frac{bd_2}{1-d_2} + 1, \ldots, \frac{bd_n}{1-d_n} + 1\} \tag{4.5}$$

最小值必须至少取得两次。显然，当 $b = 0$ 时存在一个解，此时最小值由前两项取得。回代可得 $a_i = \frac{d-1}{d-1} = 1$ 对于 $i \in [n]$。由该热带系统的解可立即得到在 ($B(x, \lambda)$ 中定义的二项式起始系统 3.7。

接下来还需证明 (4.5) 不存在其他解。需要排除以下三种情况：

(1) (4.5) 的最小值不在 0 和 $\frac{bd_i}{1-d_i} + 1$ 处取得，其中 $2 \leq i \leq n$；(2) (4.5) 的最小值不在 $\frac{bd_i}{1-d_i} + 1$ 和 $\frac{bd_1}{1-d_1}$ 处取得，其中 $2 \leq i \leq n$；以及 (3) (4.5) 的最小值不在 $\frac{bd_i}{1-d_i} + 1$ 和 $\frac{bd_j}{1-d_j} + 1$ 处取得，其中 $i \neq j$、$2 \leq i$、$j \leq n$

对于第一种情况，注意到如果对于某个 $2 \leq i \leq n$，有 $0 = \frac{bd_i}{1-d_i} + 1$，那么 $b = \frac{d_i - 1}{d_i}$。这意味着 $\frac{bd_1}{1-d_1} = \frac{d_1}{1-d_1} \cdot \frac{d_i - 1}{d_i} < 0$，因此最小值不会在 0 处取得。为排除情况 (2)，考虑 $\frac{bd_i}{1-d_i} + 1 = \frac{bd_1}{1-d_1}$ 的情形。如果 $d_i = d_1$，那么就没有解，因此不妨设 $d_i > d_1$。在这种情况下，$b = \frac{(d_1 - 1)(d_i - 1)}{d_1 - d_i} < 0$，并且 $\frac{d_1 b}{1-d_1} = \frac{d_1 (d_i - 1)}{d_i - d_1} > 0$，因此最小值反而会在 0 处取得。最后，如果 $\frac{bd_i}{1-d_i} + 1 = \frac{bd_j}{1-d_j} + 1$，这意味着 $b = 0$；此时最小值在 0 处取得，并且 $\frac{bd_1}{1-d_1}$。□

由此可推得，我们现在得到了一族代数次数为一和零的超曲面。

推论 4.2。考虑 (3.1) 中的拉格朗日系统，其中 u 和 f 均为一般的，且 $\mathrm{Newt}(f) =$凸包$\{0, e_1, 2e_2, \ldots, 2e_n\}$。那么 (u, f) 的代数次数为一。

据作者所知，这是首次对代数次数为一的多项式规划作出部分分类。相比之下，对于 ML 次数，[19] 对 ML 次数为一的极仿射簇进行了分类。对代数次数为一的多项式规划给出完整分类，是一个值得研究的开放问题。

例 4.3。考虑以下优化问题

$$\min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} u_1 x_1 + u_2 x_2 \quad \text{s.t.} \quad c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_2^2 = 0 \tag{4.6}$$

其中 u_1、u_2、c_0、c_1、c_2、$c_3 \in \mathbb{R}$ 均为实值参数。根据推论 4.2，(4.6) 的代数次数为一，这意味着拉格朗日系统

$$\begin{aligned} u_1 - \lambda c_1 &= 0 \\ u_2 - \lambda(c_2 + 2c_3 x_2) &= 0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

n	20	30	40	50	60	70	80	90
Polyhedral	0.14	0.51	1.01	2.30	4.49	NA	NA	NA
H	0.07	0.20	0.35	0.87	1.65	2.54	3.78	6.45

TABLE 1. 求出所有关于 (Opt) 的临界点的平均耗时（秒），其中$d = 2$使用标准多面体同伦与该同伦算法进行比较， H，如定理 3.3 所述。

n	6	7	8	9	10	11	12
Polyhedral	0.29	0.93	3.06	9.79	27.42	88.37	556.92
H	0.21	0.68	2.29	7.35	20.35	70.02	395.64

TABLE 2. 求出所有关于 (Opt) 的临界点的平均耗时（秒），其中$d = 3$使用标准多面体同伦与该同伦算法进行比较， H，如定理 3.3 所述。

n	3	4	5	6	7	8	9
多面体	0.03	0.17	1.16	7.04	40.11	228.48	1225.78
H	0.03	0.15	0.83	5.15	34.79	181.11	1027.64

TABLE 3. 求出所有关于 (Opt) 的临界点的平均耗时（秒），其中$d = 4$使用标准多面体同伦与该同伦算法进行比较， H，如定理 3.3 所述。

有一个解。该解可以表示为问题数据 u_1、u_2、c_0、c_1、c_2、c_3 的有理函数。在这种情况下，唯一解为

$$x_1 = \frac{c_2^2u_1^2 - 4c_0c_3u_1^2 - c_1^2u_2^2}{4c_1c_3u_1^2}, \quad x_2 = \frac{c_1u_2 - c_2u_1}{2c_3u_1}, \quad \lambda = \frac{u_1}{c_1}.$$

同样，定理 4.1 还给出了一族代数次数为零的多项式规划。

推论 4.4. 考虑以下拉格朗日系统 (3.1) 其中 u 和 f 是一般的，且 $\mathrm{Newt}(f)$ = 凸包$\{0, e_1, \ldots, e_k, 2e_{k+1}, \ldots, 2e_n\}$ 对于某个 $2 \le k \le n$。则 (u, f) 的代数次数为零。

5. NUMERICAL RESULTS

我们使用3.3 定理中的同伦，并采用起始系统（3.7），通过 `HomotopyContinuation.jl` 中的路径跟踪函数来实现。我们将定理3.3 中概述的同伦实现与 `HomotopyContinuation.jl` 中的多面体同伦进行比较，并在表1、表2和表3中给出运行各同伦算法所需的时间。所有计算均在一台配备 2.3 GHz 四核 Intel Core i5 的 2018 款 MacBook Pro 上完成。

在所有情况下，我们的同伦算法都比标准现成软件快得多。当超曲面的次数为二时，只有两个复临界点。尽管如此，标准多面体同伦仍无法在 $n \geq 70$时计算出起始系统。相比之下，我们的专用算法只用几秒钟就找到了两个临界点。值得注意的是，在这种情况下，相应多项式系统的贝祖界为 2^{n+1} ，其中 n 是变量的数量。当$n = 70$时，贝祖界为 $\approx 2.36 \times 10^{21}$，因此不应指望全次数同伦在这种情况下能够奏效。

同样，在表2 和表3 中我们看到，当超曲面的次数为三或四时，随着变量数量的增加，我们的算法越来越优于当前最先进的多面体同伦软件。

6. Multiaffine optimization

在最后一节中，我们计算以下优化问题的代数次数：

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \; g(x) \quad \text{subject to} \quad f(x) = 0, \tag{6.1}$$

其中， g和 f都是多仿射的，即 Newt(f) $=$Newt(g) $=$凸包($\{0,1\}^n$)。

定理6.1。 （6.1）的代数次数为！($n+1$)，即 的错排数 $\{0,1,\ldots,n\}$。

证明。 根据 [25, 39] ，与优化问题（6.1）对应的拉格朗日系统是 BKK 精确的。因此，（6.1）的代数次数等于拉格朗日系统 $\mathcal{L}_{g,f} = \{\ell_1,\ldots,\ell_n,f\}$ 的牛顿多胞体的归一化混合体积。我们将此值记为 MVol($\mathcal{L}_{g,f}$)。

记 I_j 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中沿第 j 个坐标方向的单位区间 Conv($0, e_j$)，则 ℓ_i 的牛顿多胞体 Newt(ℓ_i) 由以下闵可夫斯基和给出

$$\mathrm{Newt}(\ell_i) = I_0 + I_1 + \ldots + \hat{I}_i + \ldots + I_n = -I_i + \sum_{j=0}^{n} I_j.$$

根据定义，拉格朗日系统 $\mathcal{L}_{g,f} = \{\ell_1,\ldots,\ell_n,f\}$ 的牛顿多胞体的混合体积，是多项式展开中单项式 $\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n$ 前面的系数

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vol}(\lambda_0\mathrm{Newt}(f) + \lambda_1\mathrm{Newt}(\ell_1) + \ldots + \mathrm{Newt}(\ell_n)) = \\ &\mathrm{Vol}\left((\Lambda-\lambda_0)\cdot I_0 + (\Lambda-\lambda_1)\cdot I_1 + \ldots + (\Lambda-\lambda_n)\cdot I_n\right),\end{aligned}$$

其中 $\Lambda = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i$。 利用混合体积的多线性直接计算可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vol}\left((\Lambda-\lambda_0)\cdot I_0 + (\Lambda-\lambda_1)\cdot I_1 + \ldots + (\Lambda-\lambda_n)\cdot I_n\right) = \\ &\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_n \sum_{K\subset\{0,\ldots,n\}} (-1)^{|K|}\cdot(n+1-|K|)! + \text{ other terms.}\end{aligned}$$

综上，我们得到拉格朗日系统的混合体积表达式，进而得到（6.1）的代数次数：

$$\begin{aligned}\mathrm{MVol}(\mathcal{L}_{g,f}) &= \sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)!\cdot(-1)^k\cdot\binom{n+1}{k}\\ &= \sum_{t=0}^{n+1}(t)!\cdot(-1)^{n+1-t}\cdot\binom{n+1}{t} = !(n+1).\end{aligned}$$

□

7. 结论

本文提出了一种同伦延拓算法，用于求解一类多项式优化问题的所有复临界点。对于一般的问题参数，我们的算法是最优的，因为它针对每个复临界点只跟踪一条路径。我们工作的主要优势在于显式构造了一个起始系统，从而避开了多面体同伦算法通常面临的瓶颈。数值结果显示，我们的算法始终比现成的同伦延拓方法更快，而且在其他方法失败时，它仍能找到所有复临界点。最后，我们给出了多仿射多项式优化问题代数次数的显式公式。

References

[1] Paolo Aluffi 和 Corey Harris。《光滑复射影簇的欧几里得距离次数》。《代数与数论》，12(8):2005–2032，2018年。2[2] Carlos Am´endola、Nathan Bliss、Isaac Burke、Courtney R. Gibbons、Martin Helmer、Serkan Ho¸sten、Evan D. Nash、Jose Israel Rodriguez 和 Daniel Smolkin。《环面簇的极大似然次数》。《符号计算杂志》，92:222–242，2019年。2[3] Jasmijn A. Baaijens 和 Jan Draisma。《实代数组的欧几里得距离次数》。《线性代数及其应用》，467:174–187，2015。2[4] Daniel J. Bates、Jonathan D. Hauenstein、Andrew J. Sommese 和 Charles W. Wampler。《使用 Bertini 数值求解多项式系统》，《软件、环境与工具》第25卷。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，2013年。3[5] David N. Bernstein。《方程组的根的数量》。《Funkcional. Anal. i Prilo˘zen.》，9(3):1–4，1975。4, 8[6]Dimitri P Bertsekas。《约束优化与拉格朗日乘子法》。学术出版社，2014年。1[7] Stephen Boyd 和 Lieven Vandenberghe。《凸优化》。剑桥大学出版社，剑桥，2004。1[8] P. Breiding、Frank Sottile 和 J. Woodcock。《欧几里得距离次数与混合体积》。《计算数学基础》，2021年9月。2[9] FabrizioCatanese、Serkan Ho¸sten、Amit Khetan 和 Bernd Sturmfels。《极大似然次数》。《美国数学杂志》，128(3):671–697，2006。2[10] Patrick Clarke 和 David A. Cox。《矩映射、严格线性精确性与极大似然次数为一》。《数学进展》，370:107233，51，2020。2

[11] Jan Draisma、Emil Horobet、Giorgio Ottaviani、Bernd Sturmfels 和 Rekha Thomas。《欧几里得距离次数》。载于《SNC 2014——2014年符号与数值计算研讨会论文集》，第9–16页。ACM，纽约，2014年。2[12] Jan Draisma、Emil Horobet、Giorgio Ottaviani、Bernd Sturmfels 和 Rekha R. Thomas。《代数簇的欧几里得距离次数》。《计算数学基础》，16(1):99–149，2016年。2[13] Dmitriy Drusvyatskiy、Hon-Leung Lee、Giorgio Ottaviani 和 Rekha R. Thomas。《正交不变矩阵簇的欧几里得距离次数》。《Israel J. Math.》，221(1):291–316，2017年。2[14] G¨unter Ewald。《组合凸性与代数几何》，《数学研究生教材》第168卷。施普林格出版社，纽约，1996年。4[15] Hans-Christian Graf von Bothmer 和 Kristian Ranestad。《半定规划代数次数的一般公式》。《Bull. Lond. Math. Soc.》，41(2):193–197，2009年。2[16] Elizabeth Gross、Mathias Drton 和 Sonja Petrovi´c。《方差分量模型的极大似然次数》。《Electron. J. Stat.》，6:993–1016，2012年。2[17] Serkan Ho¸sten、Amit Khetan 和 Bernd Sturmfels。《求解似然方程》。《计算数学基础》，5(4):389–407，2005年。2[18] Birkett Huberand Bernd Sturmfels。《求解稀疏多项式系统的多面体方法》。《Math. Comp.》，64(212):1541–1555，1995年。4, 5, 9, 11[19] June Huh。《极仿射簇的极大似然次数》。《Compos. Math.》，149(8):1245–1266，2013年。2, 12[20] Leonid Khachiyan。《多胞体体积计算的复杂性》，第91–101页。施普林格·柏林·海德堡，柏林，海德堡，1993年。4[21] Askold G. Khovanskii。《牛顿多面体与完全交的亏格》。《Funktsional. Anal. i Prilozhen.》，12(1):51–61，1978年。4[22] Anatoli G. Kouchnirenko。《牛顿多面体与米尔诺数》。《Invent. Math.》，32(1):1–31，1976年。4, 8[23] Jean B. Lasserre。《多项式全局优化与矩问题》。《工业与应用数学学会优化杂志》，11(3):796–817，2000/01年。1[24] Hwangrae Lee。《费马超曲面的欧几里得距离次数》。《符号计算杂志》，80（第2部分）:502–510，2017年。2[25] Julia Lindberg、Leonid Monin 和 Kemal Rose。《稀疏多项式优化的代数次数》。预印本，2022年。2, 7, 8, 14[26] Julia Lindberg、Nathan Nicholson、Jose Israel Rodriguez 和 Zinan Wang。《稀疏多项式系统的极大似然次数》，2021年。2[27] Julia Lindberg 和 Jose Rodriguez。《二次规划中半定规划精确性的不变量》，2022年。1[28] Laurent Manivel、Mateusz Michalek、Leonid Monin、Tim Seynnaeve 和 Martin Vodiˇcka。《完全二次曲面：高斯模型与半定规划的舒伯特演算》。arXiv 预印本 arXiv:2011.08791，2020年。2[29] Laurentiu G. Maxim、Jose I. Rodriguez 和 Botong Wang。《多视图簇的欧几里得距离次数》。《SIAM J. Appl. Algebra Geom.》，4(1):28–48，2020年。2[30] Mateusz Micha-lek、Leonid Monin 和 Jaroslaw A. Wi´sniewski。《极大似然次数、完全二次曲面与 $\mathbb{C}^*$-作用》。《SIAM J. Appl. Algebra Geom.》，5(1):60–85，2021年。2[31] Daniel K. Molzahn 和 Ian A. Hiskens。《潮流方程松弛与近似综述》。《电能系统基础与趋势》，4(1-2):1–221，2019年。1[32] Jiawang Nie 和 Kristian Ranestad。《多项式优化的代数次数》。《工业与应用数学学会优化杂志》，20(1):485–502，2009年。2[33] Jiawang Nie 和 Kristian Ranestad。《多项式优化的代数次数》。《工业与应用数学学会优化杂志》，20(1):485–502，2009年。10

[34] Jiawang Nie、Kristian Ranestad 和 Bernd Sturmfels。《半定规划的代数次数》。Math. Program., 122(2, Ser. A):379–405，2010年。2[35] Pablo A. Parrilo。《半代数问题的半定规划松弛》。第96卷，第293–320页。2003年。《离散优化中的代数与几何方法》。1[36] S. Poljak、F. Rendl 和 H. Wolkowicz。《(0,1)二次规划的半定松弛方法》。J. Global Optim., 7(1):51–73，1995年。1[37] Florian A. Potra 和 Stephen J. Wright。《内点法》。第124卷，第281–302页。2000年。《2000年数值分析，第IV卷：优化与非线性方程》。1[38] Jose Israel Rodriguez 和 Botong Wang。《独立模型混合的极大似然次数》。SIAM J. Appl. Algebra Geom., 1(1):484–506，2017年。2[39] Kemal Rose。《多项式优化中的多重次数》。arXiv预印本 arXiv:2209.10670，2022年。14[40] A.J. Sommese 和 C.W. Wampler。《源于工程学与科学的多项式方程组的数值解》。世界科技出版公司，2005年。7[41] Bernd Sturmfels。《求解多项式方程组》，数学领域 CBMS 区域会议系列第97卷。由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学会发行，罗得岛州普罗维登斯，2002年。3[42] Bernd Sturmfels、Sascha Timme 和 Piotr Zwiernik。《用数值非线性代数估计线性协方差模型》。Algebr. Stat., 11(1):31–52，2020年。2[43] Peng Hui Tan 和 L.K. Rasmussen。《半定规划在码分多址检测中的应用》。IEEE J ournal on Selected Areas in Communications, 19(8):1442–1449，2001年。1[44] Stephen A. Vavasis。《二次规划属于 NP》。Inform. Process. Lett., 36(2):73–77，1990年。1[45] Jie Wang、Victor Magron 和 Jean-Bernard Lasserre。《TSSOS：利用项稀疏性的矩-SOS层级》。SIAM J. Optim., 31(1):30–58，2021年。1

Julia Lindberg, University of Texas-Austin, USA电子邮箱: julia.lindberg@math.utexas.edu网址: https://sites.google.com/view/julialindberg/home
Leonid Monin, EPFL, Switzerland电子邮箱: leonid.monin@epfl.ch网址: http://www.math.toronto.edu/lmonin/
Kemal Rose, MPI-MIS, Germany
电子邮箱: krose@mis.mpg.de网址: https://kemalrose.github.io/