arXiv:2302.04121v1 [math.CA] 8 Feb 2023

一般亏格超椭圆 $\wp$ 函数的微分方程

重本和泰*日本奈良 631-8501 帝塚山大学

摘要

我们回顾了利用 Baker 方法求得一般亏格超椭圆 $\wp$函数微分方程的方法。此外，我们展示了如何求得四属超椭圆微分方程，这与我们先前的结果一致。

1 引言

超椭圆 $\wp$ 微分方程被视为 KdV 方程的高维推广，即可积微分方程。因此，存在如下形式的势函数——σ 函数：$\wp_{ij}(u_1,u_2,\cdots,u_g)=-\dfrac{\partial}{\partial u_i}\dfrac{\partial}{\partial u_i}\log\ \sigma(u_1,u_2,\cdots,u_g)$。σ 函数对应于 KdV 方程中的 τ 函数。

推导双曲$\wp_{ij}$ 函数微分方程的方法有三种。第一种方法是使用广义基本关系，即 Baker [1]的 Bolza公式（II）。这种方法是系统推导微分方程的方法，有助于理解微分方程的结构。第二种方法是使用适用于一般亏格 g 情形的一系列微分方程$\wp_{gggi}=6\wp_{gg}\wp_{gi}+6\wp_{g,\ i-1}-2\wp_{g-1,\ i}+\lambda_{2g}\wp_{gi}+\delta_{g,\ i}\lambda_{2g-1}/2$ 以及 Buchstaber- Enolskii-Leykin [2, 3]提出的 Kummer曲面型关系。Kummer曲面型关系是得到完整微分方程所必需的，因为一系列微分方程仅包含 λ_{2g} 和 λ_{2g-1}，却不包含 λ_i $(i=0、\cdots、2g-2)$。在二阶亏格的情形下，我们直接使用 Kummer曲面恒等式。这种方法相当优雅，但如何系统地得到完整的微分方程尚不清楚。第三种方法是使用我们给出的 ζ_i函数的定义关系 [4]。这种方法相当直接，但难以理解微分方程的结构。

因此，我们认为 Baker的论文相当重要，但很难理解。因此，我们回顾 Baker 方法，并详细推导各种公式。正如 Baker 在三属情形中展示了他的方法，我们将在四属情形中展示他的方法，并得出与我们上一篇论文相同的结果 [4]。

2 Baker 公式的回顾

我们首先回顾基本工具、Jacobi 反演问题、$\wp_{ij}$的各种公式以及 ζ_i 函数的各种公式。接下来，我们回顾基本关系，它是Baker的论文 [1]的出发点。我们还回顾如何将基本关系改写为Balza的

*shigemot@tezukayama-u.ac.jp

公式（I）和Bolza公式（II） [5, 7, 8]。事实上，Baker从Bolza公式（II）的形式出发讨论基本关系。

2.1 基本工具

我们引入 $F(x)$，定义为

$$F(x) = F(x; x_1, \cdots, x_g) = \prod_{i=1}^{g}(x - x_i) = x^g + \sum_{j=1}^{g}(-1)^j h_j(x_1, x_2, \cdots, x_g)x^{g-j}. \tag{2.1}$$

其中 $h_j(x_1, \cdots, x_g)$ 是 $\{x_1, \cdots, x_g\}$ 的第 j 个基本对称多项式基。代入 $x = x_j$ 后，得到关系式

$$x_i^g - h_1(x_1, x_2, \cdots, x_g)x_i^{g-1} + h_2(x_1, x_2, \cdots, x_g)x_i^{g-2} + \cdots + (-1)^g h_g(x_1, x_2, \cdots, x_g) = 0. \tag{2.2}$$

根据部分分式定理，我们可以将 $x^k/F(x)$ $(0 \leqslant k \leqslant g-1)$ 表示为

$$\frac{x^k}{F(x)} = \sum_{i=1}^{g} \frac{a_i}{(x - x_i)}, \ (0 \leqslant k \leqslant g-1), \tag{2.3}$$

其中 a_i 为常数。为了确定这些常数值，我们将方程 (2.3) 中的 $(x - x_j)$ 相乘，并取极限 $x \to x_j$。于是得到

$$\frac{x_j^k}{F'(x_j)} = \sum_{i=1}^{g} a_i \delta_{i,j} = a_j, \tag{2.4}$$

其中我们将 $F'(x_j)$ 记作 $F'(x_j) = \mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}x \Big|_{x=x_j}$。因此得到

$$\frac{x^k}{F(x)} = \sum_{i=1}^{g} \frac{x_i^k}{F'(x_i)} \frac{1}{(x - x_i)}, \ (0 \leqslant k \leqslant g-1). \tag{2.5}$$

进一步，我们将其相乘并取方程(2.5)中 $x \to \infty$ 的极限，可得如下有用公式

$$\sum_{i=1}^{g} \frac{x_i^k}{F'(x_i)} = \delta_{k,g-1}, \ (0 \leqslant k \leqslant g-1). \tag{2.6}$$

接下来，我们引入 $\chi_{g-j}(x_i;\ x_1、\ x_2、\ \cdots、\ x_g)$，形式如下

$$\begin{aligned}\chi_{g-j}(x; x_1, \cdots, x_g) = {} & x^{g-j} - h_1(x_1, \cdots, x_g)x^{g-j-1} \\ & + h_2(x_1, x_2, \cdots, x_g)x^{g-j-2} + \cdots + (-1)^{g-j} h_{g-j}(x_1, \cdots, x_g),\end{aligned} \tag{2.7}$$

作为特例，$\chi_g(x;\ x_1、\ \cdots、\ x_g) = F(x)$ 以及 $\chi_0(x;\ x_1、\ \cdots、\ x_g) = 1$。根据$\chi_{g-i}$的定义，我们可以证明

$$\sum_{k=1}^{g}(x^k - x^{k-1}x_r)\chi_{g-k}(x_r; x_1, x_2, \cdots, x_g) = F(x). \tag{2.8}$$

于是我们得到

$$\frac{F(x)}{x - x_r} = \sum_{k=1}^{g} x^{k-1}\chi_{g-k}(x_r; x_1, x_2, \cdots, x_g), \tag{2.9}$$

这将在公式（3.8）中使用。

进一步可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi_{g-i}(x_1;x,x_2,x_3,\cdots,x_g)=-\chi_{g-i-1}(x_1;x_2,x_3,\cdots,x_g), \tag{2.10}$$

利用 $\frac{\partial}{\partial x}h_i(x,x_2,x_3,\cdots,x_g)=h_{i-1}(x_2,x_3,\cdots,x_g)$。这将在公式（2.60）中用到。

接下来,我们证明以下关系，这在 Jacobi 反演问题中很有用

$$\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^{g-j}\chi_n(x_i;x_1,x_2,\cdots,x_g)}{F'(x_i)}=\delta_{n,j-1},\ (1\leqslant j\leqslant g,\ 0\leqslant n\leqslant g). \tag{2.11}$$

[证明]
我们将 j 固定在区域 $1\leqslant j\leqslant g$ 内。
i) $0\leqslant n\leqslant j-1$ 情形:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^{g-j}\chi_n(x_i;x_1,x_2,\cdots,x_g)}{F'(x_i)}=\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^{g-j}(x_i^n-h_1x_i^{n-1}+\cdots+(-1)^nh_n)}{F'(x_i)}\\&=\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^{g-(j-n)}-h_1x_i^{g-(j-n+1)}+\cdots+(-1)^nh_nx_i^{g-j})}{F'(x_i)}=\delta_{n,j-1},\ (1\leqslant j\leqslant g),\end{aligned} \tag{2.12}$$

这里用到了公式（2.6）。
ii) $g\geqslant n\geqslant j\geqslant 1$ 情形:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^{g-j}\chi_n(x_i;x_1,x_2,\cdots,x_g)}{F'(x_i)}=\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^{g-(j-n)}-h_1x_i^{g-(j-n+1)}+\cdots+(-1)^nh_nx_i^{g-j})}{F'(x_i)}\\&=\sum_{i=1}^{g}\frac{-(-h_1x_i^{g-(j-n+1)}+\cdots+(-1)^gh_gx_i^{n-j})-h_1x_i^{g-(j-n+1)}+\cdots+(-1)^nh_nx_i^{g-j})}{F'(x_i)}\\&=\begin{cases}0, & (\text{if } n=g),\\ -\sum_{i=1}^{g}\frac{(-1)^{n+1}h_{n+1}x_i^{g-(j+1)}+\cdots+(-1)^gh_gx_i^{n-j})}{F'(x_i)}=0, & (\text{ if } n\leqslant g-1),\end{cases}\end{aligned} \tag{2.13}$$

这里用到了公式（2.2）和公式（2.6）。这就完成了公式（2.11）的证明。

此外，我们给出一个有用的关系，以求得形式为 $\wp_{gj}(1\leqslant j\leqslant g)$ 的

$$\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^{g}\chi_n(x_i;x_1,x_2,\cdots,x_g)}{F'(x_i)}=(-1)^nh_{n+1}(x_1,x_2,\ldots,x_g),\ (0\leqslant n\leqslant g-1). \tag{2.14}$$

[证明]
利用公式（2.2），我们有

$$x_i^n-h_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^nh_n+(-1)^{n+1}\frac{h_{n+1}}{x_i}+\cdots+(-1)^g\frac{h_g}{x_i^{g-n}}=0. \tag{2.15}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}&\chi_n(x_i;x_1,x_2,\cdots,x_g)=x_i^n-h_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^nh_n\\&=-\Big(\frac{(-1)^{n+1}h_{n+1}}{x_i}+\cdots+(-1)^g\frac{h_g}{x_i^{g-n}}\Big).\end{aligned} \tag{2.16}$$

因此，我们得到

$$\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^g\chi_n(x_i;x_1,x_2,\cdots,x_g)}{F'(x_i)}=-\sum_{i=1}^{g}\frac{(-1)^{n+1}h_{n+1}x_i^{g-1}+\cdots+(-1)^g h_g x_i^{g-(g-n)}}{F'(x_i)}$$
$$=(-1)^n h_{n+1},\quad(0\leqslant n\leqslant g-1),\tag{2.17}$$

这里用到了公式（2.6）。至此，公式（2.14）的证明完成。

2.2 Jacobi 反演问题，$(-\zeta_j)$ 函数和 $\wp_{ij}$ 函数

我们根据 Baker 的工作 [1,5,6]总结超椭圆$\wp_{ij}$函数的表述。考虑亏格为 g 的超椭圆曲线

$$C:\quad y_i^2=\sum_{k=0}^{2g+1}\lambda_k x_i^k,\quad(i=0,1,2,\cdots,g).\tag{2.18}$$

Jacobi 反演问题 consiste of solving following equations

$$\mathrm{d}u_1=\sum_{i=1}^{g}\frac{\mathrm{d}x_i}{y_i},\quad \mathrm{d}u_2=\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i\mathrm{d}x_i}{y_i},\quad\cdots,\quad \mathrm{d}u_{g-1}=\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^{g-2}\mathrm{d}x_i}{y_i},\quad \mathrm{d}u_g=\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^{g-1}\mathrm{d}x_i}{y_i}.\tag{2.19}$$

由这些方程可得

$$\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^{k-1}}{y_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}=\frac{\partial u_k}{\partial u_j}=\delta_{k,j}.\tag{2.20}$$

若将由公式（2.11）通过以 $j\to g-k+1$和 $n\to g-j$ 代替的方式得到的表达式写成如下形式，并将其与之比较

$$\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^{k-1}\chi_{g-j}(x_i;x_1,x_2,\cdots,x_g)}{F'(x_i)}=\delta_{k,j}\quad(1\leqslant j\leqslant g),\tag{2.21}$$

我们得到有用的表达式

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j}=\frac{y_i\chi_{g-j}\left(x_i;x_1,x_2,\cdots,x_g\right)}{F'(x_i)}.\tag{2.22}$$

这些 ζ_j 函数由超椭圆曲线以下述方式给出 [5]

$$\mathrm{d}(-\zeta_j)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{g}\frac{\mathrm{d}x_i}{y_i}\sum_{k=j}^{2g+1-j}(k+1-j)\lambda_{k+1+j}x_i^k-\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{g}\frac{y_i\chi_{g-j-1}(x_i;x_1,\cdots,\breve{x}_i,\cdots,x_g)}{F'(x_i)}\right),\tag{2.23}$$

其中，$\breve{x}_j$表示缺少x_j变量。这些 $\zeta_j(u_1、\ u_2、\ \cdots、\ u_g)$ 满足可积性条件

$$\frac{\partial\left(-\zeta_j(u_1,u_2,\cdots,u_g)\right)}{\partial u_k}=\frac{\partial\left(-\zeta_k(u_1,u_2,\cdots,u_g)\right)}{\partial u_j}.\tag{2.24}$$

在 Baker 的教科书中，[5], 方程（2.23）右端的第二项表达式有误导性。$\wp_{jk}(u_1,u_2,\cdots,u_g)$ 函数由上述 $\zeta_j(u_1,u_2,\cdots,u_g)$ 函数以如下形式给出

$$\wp_{jk}(u_1,u_2,\cdots,u_g)=\wp_{kj}(u_1,u_2,\cdots,u_g)=\frac{\partial\left(-\zeta_j(u_1,u_2,\cdots,u_g)\right)}{\partial u_k}.\tag{2.25}$$

这些 ζ_j, $\wp_{jk}$ 和$\wp_{jklm}$ 由超椭圆 σ 函数以如下形式给出

$$(-\zeta_j)=\frac{\partial(-\log\sigma)}{\partial u_j},\quad \wp_{jk}=\frac{\partial^2(-\log\sigma)}{\partial u_j\partial u_k},\quad \text{and}\quad \wp_{jklm}=\frac{\partial^4(-\log\sigma)}{\partial u_j\partial u_k\partial u_l\partial u_m},\qquad \text{etc..}$$

对于 Weierstrass 型，即 $\lambda_{2g+2}=0$，我们有 $\mathrm{d}(-\zeta_g)=\frac{\lambda_{2g+1}}{4}\sum_{i=1}^{g}x_i^g\mathrm{d}\frac{x_i}{y_i}$，由此得到

$$\wp_g(u_1,u_2,\cdots,u_g)=\frac{\lambda_{2g+1}}{4}h_1(x_1,x_2,\cdots,x_g), \tag{2.26}$$

$$\wp_{g,g-1}(u_1,u_2,\cdots,u_g)=-\frac{\lambda_{2g+1}}{4}h_2(x_1,x_2,\cdots,x_g), \tag{2.27}$$

$$\vdots$$

$$\wp_{g1}(u_1,u_2,\cdots,u_g)=(-1)^{g-1}\frac{\lambda_{2g+1}}{4}h_g(x_1,x_2,\cdots,x_g), \tag{2.28}$$

将公式（2.22）和公式（2.14）代入下式

$$\sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^g\chi_{g-j}(x_i;x_1,x_2,\cdots,x_g)}{F'(x_i)}=(-1)^{g-j}h_{g-j+1}(x_1,x_2,\cdots,x_g). \tag{2.29}$$

然后，利用公式（2.2），得到

$$\frac{\lambda_{2g+1}}{4}x_i^g=\sum_{j=1}^{g}\wp_{gj}x_i^{j-1}=\wp_{gg}x_i^{g-1}+\wp_{g,g-1}x_i^{g-2}+\cdots+\wp_{g2}x_i+\wp_{g1}. \tag{2.30}$$

由此，我们有 $\mathrm{d}(-\zeta_g)=\sum\wp_{gj}\mathrm{d}u_j$。对于其他 $\wp_{ij}$，必须使用满足可积条件方程（2.24）的 ζ_j。

2.3 基本关系的推导

双曲函数 $\wp$ 微分方程被视为 KdV 方程的高维推广，也就是可积微分方程。因此，存在如下形式的势，即 σ 函数：$\wp_{ij}(u_1,u_2,\cdots,u_g)=-\frac{\partial}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\log\sigma(u_1,u_2,\cdots,u_g)$。σ 函数对应于 KdV 方程中的 τ 函数。

为了获得这个 σ 函数，使用第三类微分形式会很有帮助。$y^2=f(x)=\sum_{i=0}^{2g+1}\lambda_ix^i$ 和 $s^2=f(z)=\sum_{i=0}^{2g+1}\lambda_iz^i$。使用我们引入双曲函数

$$[(x,z)]=\frac{y+s}{x-z}\frac{1}{2y}, \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[(x,z)]=\frac{2ys+2f(z)+f'(z)(x-z)}{4(x-z)^2ys}\sim\frac{1}{(x-z)^2}, \tag{2.32}$$

我们从第三类微分形式 [5,6] 开始

$$\int_a^x\mathrm{d}x\int_c^z\mathrm{d}z\,\frac{\partial}{\partial z}[x,z]=\int_a^x([(x,z)]-[(x,c)])\mathrm{d}x. \tag{2.33}$$

在奇点附近，我们得到

$$\int_a^x \mathrm{d}x \int_c^z \mathrm{d}z \ \frac{\partial}{\partial z}[x,z] \sim \int_a^x \mathrm{d}x \int_c^z \mathrm{d}z \frac{1}{(x-z)^2} = \log\left(\frac{(x-z)(a-c)}{(x-c)(a-z)}\right). \tag{2.34}$$

为了得到第三类标准微分形式，我们按如下形式加上第一类与第二类微分形式的乘积之和

$$\sum_{i=1}^{g} u_i^{x,a}\eta_i^{z,c}, \tag{2.35}$$

where

$$u_i^{x,a} = \int_a^x \frac{x^{i-1}\mathrm{d}x}{y}, \tag{2.36}$$

$$\eta_i^{z,c} = \int_c^z \frac{\mathrm{d}z}{4s} \sum_{k=i}^{2g+1-i} \lambda_{k+1+i}(k+1-i)z^k. \tag{2.37}$$

因此，第三类标准微分形式可表示为

$$\int_a^x ([(x,z)] - [(x,c)])\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{g} u_i^{x,a}\eta_i^{z,c}. \tag{2.38}$$

利用函数 $f_1(x、\ z)$（其定义将在下文给出），我们可将该第三类标准微分形式表示为

$$\int_a^x ([(x,z)] - [(x,c)])\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{g} u_i^{x,a}\eta_i^{z,c} = \int_a^x \frac{\mathrm{d}x}{y}\int_c^z \frac{\mathrm{d}z}{s}\frac{f_1(x,z)+2ys}{4(x-z)^2}. \tag{2.39}$$

于是我们有

$$\frac{\partial}{\partial z}[(x,z)] + \frac{1}{4ys}\sum_{i=1}^{g} x^{i-1} \sum_{k=i}^{2g+1-i} \lambda_{k+1+i}(k+1-i)z^k = \frac{f_1(x,z)+2ys}{4(x-z)^2ys}, \tag{2.40}$$

由此可得

$$\frac{2sy + 2f(z) + f'(z)(x-z)}{4(x-z)^2} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{g} x^{i-1} \sum_{k=i}^{2g+1-i} \lambda_{k+1+i}(k+1-i)z^k = \frac{f_1(x,z)+2ys}{4(x-z)^2}. \tag{2.41}$$

利用 $y^2 = f(x) = \sum_{i=0}^{2g+1} \lambda_i x^i$，我们得到

$$f_1(x,z) = \sum_{i=0}^{g} x^i z^i [2\lambda_{2i} + \lambda_{2i+1}(x+z)], \tag{2.42}$$

其中 $f_1(x,x) = 2f(x)$。通过将形式为 $\sum_i u^{x,}{}_{z}\eta^{t,}{}_{i}{}^{c}$ 的第一类与第二类微分的特殊组合相加，我们得到 $f_1(x,z)$ 的特殊形式。若 $f_1(x,z)$ 满足以下条件，

$$\text{i) } f_1(x,z) = f_1(z,x), \tag{2.43}$$

$$\text{ii) } f_1(x,x) = 2f(x), \tag{2.44}$$

$$\text{iii)}\ \frac{\partial}{\partial x}f_1(x,z)\Big|_{x=z}=\frac{\partial}{\partial z}f(z), \tag{2.45}$$

我们得到一般的 $f_1(x,z)$。接着，通过替换 $x\to x_j$, $a\to a_j$ ，构造具有 g 个零点的双曲函数，并对 j 求和。进一步，我们将形式中的 $z\to x$, $c\to a$ 替换为

$$\sum_{j=1}^{g}\int_{a_j}^{x_j}([(x_j,x)]-[(x_j,a)])\mathrm{d}x_j+\sum_{i=1}^{g}u_i\eta_i^{x,a}=\sum_{j=1}^{g}\int_{a_j}^{x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{y_j}\int_a^x\frac{\mathrm{d}x}{y}\frac{(f_1(x_j,x)+2y_jy)}{4(x_j-x)^2}$$
$$\sim\log\vartheta(\mathbf{u}^{x,a}-\sum_{k=1}^{g}\mathbf{u}^{x_k,a_k})=\log\vartheta(\mathbf{u}^{x,a}-\mathbf{u}), \tag{2.46}$$

其中

$$(\mathbf{u})_i=u_i=\sum_{j=1}^{g}u_i^{x_j,a_j}=\sum_{j=1}^{g}\int_{a_j}^{x_j}\frac{x_j^{i-1}\mathrm{d}x_j}{y_j}. \tag{2.47}$$

黎曼常数被吸收到参数 $a,a_1,a_2,\cdots,a_g$ 中，即 $\mathbf{u}^{x,a}$、$\mathbf{u}^{x_1,a_1},\cdots$、$\mathbf{u}^{x_g,a_g}$ 的常数平移。为了使 $\mathbf{u}^{x,a}$ 和 $\mathbf{u}^{x_j,a_j}$ 对称，我们替换 $y_i\to -y_i$，得到

$$-\log\vartheta(\mathbf{u}^{x,a}+\sum_{k=1}^{g}\mathbf{u}^{x_k,a_k})=-\log\vartheta(\mathbf{u}^{x,a}+\mathbf{u})=-\log\vartheta(\hat{\mathbf{u}})=-\log\vartheta(\hat{u}_1,\cdots,\hat{u}_g)$$
$$\sim\sum_{j=1}^{g}\int_{a_j}^{x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{y_j}\int_a^x\frac{\mathrm{d}x}{y}\frac{(f_1(x_j,x)-2y_jy)}{4(x_j-x)^2}, \tag{2.48}$$

其中 $\hat{}u_i=u^{x}{}_{,i}{}^{a}+u_i$。为了构造 $\sigma(\hat{}u_1、\hat{}u_2,\cdots、\hat{}u_g)$ 函数（它是 $\wp_{ij}(\hat{}u_1、\hat{}u_2,\cdots、\hat{}u_g)$ 函数的势），我们将前因子 $\exp(-\sum c_{ij}\hat{}u_i\hat{}u_j)$ 乘到 $\wp_{ij}(\hat{}u_1、\hat{}u_2,\cdots、\hat{}u_g)$ 函数上；该函数起到 $\wp_{ij}(\hat{}u_1、\hat{}u_2,\cdots、\hat{}u_g)$ 函数常数平移的作用。因此，我们有

$$-\log\sigma(\hat{u}_1,\cdots,\hat{u}_g)=\sum_{j=1}^{g}\int_{z_j}^{x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{y_j}\int_a^x\frac{\mathrm{d}x}{y}\frac{(f_1(x_j,x)-2y_jy)}{4(x_j-x)^2}. \tag{2.49}$$

利用该关系，

$$\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum_{\ell=1}^{g}\frac{\partial\hat{u}_\ell}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_\ell}=\sum_{\ell=1}^{g}\frac{\partial u_\ell^{x_j,a_j}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_\ell}=\sum_{\ell=1}^{g}\frac{x_j^{\ell-1}}{y_j}\frac{\partial}{\partial u_\ell}, \tag{2.50}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}=\sum_{m=1}^{g}\frac{\partial\hat{u}_m}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_m}=\sum_{m=1}^{g}\frac{\partial u_m^{x,a}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_m}=\sum_{m=1}^{g}\frac{x^{m-1}}{y}\frac{\partial}{\partial u_m}, \tag{2.51}$$

并将 $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial x_j}$ 应用于方程(2.49)，我们得到

$$\sum_{\ell,m=1}^{g}x_j^{\ell-1}x^{m-1}\wp_{\ell m}(\hat{u}_1,\cdots,\hat{u}_g)=\frac{f_1(x_j,x)-2y_jy}{4(x_j-x)^2},\ (1\leqslant j\leqslant g), \tag{2.52}$$

其中

$$\wp_{\ell m}(\hat{u}_1,\cdots,\hat{u}_g)=-\frac{\partial^2}{\partial\hat{u}_m\partial\hat{u}_\ell}\log\sigma(\hat{u}_1,\cdots,\hat{u}_g). \tag{2.53}$$

由于$\hat{}u^{x,\ a}$和$\hat{}u^{x_k,\ a_k}$是对称的，将 x、 $y \to x_k$、 y_k代入后，上述方程等价于如下形式的基本关系

$$\sum_{\ell,m=1}^{g} x_j^{\ell-1} x_k^{m-1} \wp_{\ell m}(\hat{u}_1, \cdots, \hat{u}_g) = \frac{f_1(x_j, x_k) - 2y_j y_k}{4(x_j - x_k)^2}, \ (1 \leqslant j, k \leqslant g). \tag{2.54}$$

然后，我们对 $x \to \infty$ 取极限，得到 $u^{x,\ _i\ a} \to (\text{const.})$，即 $\hat{}u_i \to u_i + (\text{const})$。这个常数被吸收到黎曼常数中。因此，我们得到如下形式的基本关系

$$\sum_{\ell,m=1}^{g} x_j^{\ell-1} x_k^{m-1} \wp_{\ell m}(u_1, \cdots, u_g) = \frac{f_1(x_j, x_k) - 2y_j y_k}{4(x_j - x_k)^2}, \ (1 \leqslant j, k \leqslant g), \tag{2.55}$$

where

$$u_i = \sum_{j=1}^{g} \int_{a_j}^{x_j} \frac{x_j^{i-1} \mathrm{d}x_j}{y_j}.$$

2.4 $(-\zeta_j)$ 函数公式的推导

接下来，我们推导 ζ 函数的公式。将 $c \to z$ 代入方程 (2.46)，从关系式开始

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{g} \int_{a_j}^{x_j} ([(x_j, x)] - [(x_j, z)]) \mathrm{d}x_j + \sum_{i=1}^{g} u_i \eta_i^{x,z} = \sum_{j=1}^{g} \int_{a_j}^{x_j} \frac{\mathrm{d}x_j}{y_j} \int_z^x \frac{\mathrm{d}x}{y} \frac{(f_1(x_j, x) - 2y_j y)}{4(x_j - x)^2} \\ &= \log \left(\frac{\sigma(\mathbf{u}^{x,a} - \sum_{k=1}^{g} \mathbf{u}^{x_k, a_k})}{\sigma(\mathbf{u}^{z,a} - \sum_{k=1}^{g} \mathbf{u}^{x_k, a_k})} \right). \end{aligned} \tag{2.56}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{g} \frac{\partial x_j}{\partial u_\ell} ([(x_j, x)] - [(x_j, z)]) + \eta_\ell^{x,z} = \frac{\partial}{\partial u_\ell} \log \frac{\sigma(\mathbf{u}^{x,a} - \sum_{k=1}^{g} \mathbf{u}^{x_k, a_k})}{\sigma(\mathbf{u}^{z,a} - \sum_{k=1}^{g} \mathbf{u}^{x_k, a_k})} \\ &= -\zeta_\ell(\mathbf{u}^{x,a} - \sum_{k=1}^{g} \mathbf{u}^{x_k, a_k}) + \zeta_\ell(\mathbf{u}^{z,a} - \sum_{k=1}^{g} \mathbf{u}^{x_k, a_k}), \end{aligned} \tag{2.57}$$

由此得到

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{g} \frac{y_j \chi_{g-\ell}(x_j; x_1, x_2, \cdots, x_g)}{F'(x_j)} \Big(\frac{y_j + y}{x_j - x} \frac{1}{2y_j} - \frac{y_j + s}{x_j - z} \frac{1}{2y_j} \Big) + \eta_\ell^{x,z} \\ &= -\zeta_\ell(\mathbf{u}^{x,a} - \sum_{k=1}^{g} \mathbf{u}^{x_k, a_k}) + \zeta_\ell(\mathbf{u}^{z,a} - \sum_{k=1}^{g} \mathbf{u}^{x_k, a_k}). \end{aligned} \tag{2.58}$$

然后，代入 $y_j \to -y_j$，这会导致 $u^{x_j,\ a_j} \to -u^{x_j,\ a_j}$，我们得到

$$\begin{aligned} &\zeta_\ell(\mathbf{u}^{x,a} + \sum_{k=1}^{g} \mathbf{u}^{x_k, a_k}) + \eta_\ell^{x,a} + \sum_{k=1}^{g} \eta_\ell^{x_k, a_k} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{g} \frac{\chi_{g-\ell}(x_j; x_1, x_2, \cdots, x_g)}{F'(x_j)} \Big(\frac{y - y_j}{x - x_i} \Big) \\ &= \zeta_\ell(\mathbf{u}^{z,a} + \sum_{k=1}^{g} \mathbf{u}^{x_k, a_k}) + \eta_\ell^{z,a} + \sum_{k=1}^{g} \eta_\ell^{x_k, a_k} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{g} \frac{\chi_{g-\ell}(x_j; x_1, x_2, \cdots, x_g)}{F'(x_j)} \Big(\frac{s - y_j}{z - x_i} \Big), \end{aligned} \tag{2.59}$$

其中，我们在方程 (2.59) 两边都加上 $\sum_{k=1}^{g} \eta^{x_k,\ a_k}_{\ell}$，使 $\eta^{z,\ a}_{\ell}$ 和 $\eta^{x_k,\ a_k}_{\ell}$ 对称。因此，方程 (2.59) 的左侧与 x 无关。接下来，我们引入

$$R(t) = (t - x)(t - x_1) \cdots (t - x_g) = (t - x) F(t),$$

并定义

$$g_{g-i}(x,x_1,\cdots,x_g)=\frac{y\chi_{g-i}(x;x_1,\cdots,x_g)}{R'(x)}+\frac{y_1\chi_{g-i}(x_1;x,x_2,\cdots,x_g)}{R'(x_1)}+\cdots$$
$$+\frac{y_g\chi_{g-i}(x_g;x_1,\cdots,x_{g-1},x)}{R'(x_g)},$$
$$g_{g-i-1}(x_1,\cdots,x_g)=\frac{y_1\chi_{g-i-1}(x_1;x_2,\cdots,x_g)}{F'(x_1)}+\frac{y_2\chi_{g-i-1}(x_2;x_1,\cdots,x_g)}{F'(x_2)}+\cdots$$
$$+\frac{y_g\chi_{g-i-1}(x_g;x_1,\cdots,x_{g-1})}{R'(x_g)}.$$

于是我们可以证明

$$\sum_{j=1}^{g}\frac{\chi_{g-\ell}(x_j;x_1,x_2,\cdots,x_g)}{F'(x_j)}\Big(\frac{y-y_j}{x-x_i}\Big)=g_{g-i}(x,x_1,\cdots,x_g)-g_{g-i-1}(x_1,\cdots,x_g).\qquad(2.60)$$

首先，我们考虑 $I(x)=\chi_{g-i}(x_1;\ x,x_2,\cdots,x_g)-\chi_{g-i}(x_1;\ x_1,x_2,\cdots,x_g)$，它是关于 x 的线性函数。利用方程（2.10）中的 $I(x_1)=0$ 和 $\dfrac{\partial\chi_{g-i}(x_1;\ x,\ x_2\ \cdots\ x_g)}{\partial x}=-\chi_{g-i-1}(x_1,,;\ x_2,\cdots,x_g)$，我们得到

$$\chi_{g-i}(x_1;x,x_2,\cdots,x_g)-\chi_{g-i}(x_1;x_1,x_2,\cdots,x_g)=(x_1-x)\chi_{g-i-1}(x_1;x_2,\cdots,x_g).$$

于是我们得到

$$\frac{\chi_{g-i}(x_1;x,x_2,\cdots,x_g)}{R'(x_1)}=\frac{\chi_{g-i}(x_1;x_1,x_2,\cdots,x_g)+(x_1-x)\chi_{g-i-1}(x_1;x_2,\cdots,x_g)}{(x_1-x)F'(x_1)}$$
$$=-\frac{\chi_{g-i}(x_1;x_1,x_2,\cdots,x_g)}{F'(x_1)}\frac{1}{x-x_1}+\frac{\chi_{g-i-1}(x_1;x_2,\cdots,x_g)}{F'(x_1)}.$$

利用关于 $\dfrac{\chi_{g-i}(x_k;\ x\ x_2\ \cdots\ x_g)}{R'(x_k)},,,,$ 的类似结果，我们得到

$$g_{g-i}(x,x_1,\cdots,x_g)-g_{g-i-1}(x_1,\cdots,x_g)=\frac{y\chi_{g-i}(x;x_1,\cdots,x_g)}{R'(x)}-\sum_{k=1}^{g}\frac{\chi_{g-i}(x_k;x_1,\cdots,x_g)}{F(x_k)}\frac{y_k}{x-x_k}$$
$$=\sum_{k=1}^{g}\frac{\chi_{g-i}(x_k;x_1,\cdots,x_g)}{F'(x_k)}\frac{y-y_k}{x-x_k},$$

其中我们使用了方程（2.5）和 $R'(x)=F(x)$。这就完成了公式（2.60）的证明。将此关系代入方程（2.59），我们得到

$$\zeta_\ell(\mathbf{u}^{x,a}+\sum_{k=1}^{g}\mathbf{u}^{x_k,a_k})+\eta_\ell^{x,a}+\sum_{k=1}^{g}\eta_\ell^{x_k,a_k}-\frac{1}{2}g_{g-i}(x,x_1,\cdots,x_g)=(x\text{ independent}),\qquad(2.61)$$

由此得出

$$-\zeta_\ell(\mathbf{u}^{x,a}+\sum_{k=1}^{g}\mathbf{u}^{x_k,a_k})=\Big(\eta_\ell^{x,a}-\frac{y\chi_{g-\ell}(x;x_1,\cdots,x_g)}{2R'(x)}\Big)$$
$$+\sum_{k=1}^{g}\eta_\ell^{x_k,a_k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{g}\frac{y_k\chi_{g-\ell}(x_k;x_1,\cdots,x_{k-1},x,x_{k+1},\cdots,x_g)}{2(x_k-x)F'(x_k)}+C.\qquad(2.62)$$

然后我们取 $x\to\infty$ 的极限。因此，我们有 $u^{x,\ a}\to$（常数），这个常数并入黎曼常数。公式（2.62）右端的第一项给出

$\left(\eta^{x,\ \ a}_{\ell} - \frac{y\chi_{g-\ell}(x;\ \ x_1\ \cdots\ x_g)}{2R'(x)}\right) \to$，，（常数）。因此，利用方程（2.37），我们得到形式如下的公式（2.23）

$$-\zeta_\ell(\sum_{k=1}^{g}\mathbf{u}^{x_k,a_k}) = \sum_{k=1}^{g}\eta_\ell^{x_k,a_k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{g}\frac{y_k\chi_{g-\ell-1}(x_k;x_1,\cdots,\check{x}_k,\cdots,x_g)}{F'(x_i)} + C. \tag{2.63}$$

2.5 Bolza 公式（I）

生成所有微分方程的基本关系由 Baker [5] 给出。我们将 $x \to x_0$, $a \to a_0$ 替换为……，并记 $\hat{\mathrm{u}} = \mathrm{u}^{x,\ a} + \sum_{k=1}^{g}\mathrm{u}^{x_k,\ a_k} \to \hat{\mathrm{u}} = \sum_{r=0}^{g}\mathrm{u}^{x_r,\ a_r}$。然后，我们从方程 (2.52) 和方程 (2.54) 出发，写成

$$\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(\hat{\mathbf{u}})x_0^{i-1}x_r^{j-1} = \frac{f_1(x_0,x_r)-2y_0y_s}{4(x_0-x_r)^2}, \quad (1\leqslant r\leqslant g), \tag{2.64}$$

$$\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(\hat{\mathbf{u}})x_r^{i-1}x_s^{j-1} = \frac{f_1(x_r,x_s)-2y_ry_s}{4(x_r-x_s)^2}, \quad (1\leqslant r< s\leqslant g). \tag{2.65}$$

接着，对于任意变量 e_1, e_2，我们构造如下量

$$\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(\hat{\mathbf{u}})e_1^{i-1}e_2^{j-1}. \tag{2.66}$$

方程 (2.66) 的右端必须满足
i）它关于 e_1, e_2 分别是 $(g-1)$ 阶多项式函数，
ii）当 $e_1 \to x_p$, $e_2 \to x_q$ 取极限时，它必须变为 $f_1(x_p, \frac{x_q)-2y(x_p)y(x_q)}{4(x_p-x_q)^2}$。

那么，方程(2.66)的右端形式为

$$(\text{R.H.S.}) = \sum_{\substack{r,s=0\\ r<s}}^{g}\frac{R(e_1;\check{x}_r,\check{x}_s)R(e_2;\check{x}_r,\check{x}_s)}{R(x_r;\check{x}_r,\check{x}_s)R(x_s;\check{x}_r,\check{x}_s)}\frac{f_1(x_r,x_s)-2y(x_r)y(x_s)}{4(x_r-x_s)^2}, \tag{2.67}$$

其中

$$R(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_g). \tag{2.68}$$

当 $e_1 \to x_p$, $e_2 \to x_q$ 取极限时，只有 $x_r = x_p$, $x_s = x_q$ 或 $x_r = x_q$, $x_s = x_p$ 会产生非零贡献。因此，我们得到

$$\begin{aligned}(\text{R.H.S.}) &= \sum_{\substack{r,s=0\\ r<s}}^{g}\frac{R(e_1)R(e_2)}{(e_1-x_r)(e_1-x_s)(e_2-x_r)(e_2-x_s)}\\ &\times\frac{(x_r-x_s)}{R(x_r;\check{x}_r)}\frac{(x_s-x_r)}{R(x_s;\check{x}_s)}\frac{f_1(x_r,x_s)-2y(x_r)y(x_s)}{4(x_r-x_s)^2}\\ &= R(e_1)R(e_2)\sum_{\substack{r,s=0\\ r<s}}^{g}\frac{2y(x_r)y(x_s)-f_1(x_r,x_s)}{4(e_1-x_r)(e_1-x_s)(e_2-x_r)(e_2-x_s)R'(x_r)R'(x_s)}.\end{aligned} \tag{2.69}$$

因此，我们得到

$$\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(\hat{\mathbf{u}})e_1^{i-1}e_2^{j-1} = R(e_1)R(e_2)\sum_{\substack{r,s=0\\ r<s}}^{g}\frac{2y(x_r)y(x_s)-f_1(x_r,x_s)}{4(e_1-x_r)(e_1-x_s)(e_2-x_r)(e_2-x_s)R'(x_r)R'(x_s)}. \tag{2.70}$$

然后取极限 $x_0 \to \infty$，得到 $\hat{\mathbf{u}} \to \mathbf{u}+$(常数)，并将此常数吸收到黎曼常数中。因此，我们得到 Bolza公式（I） [5,7,8]

$$\sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(\mathbf{u}) e_1^{i-1} e_2^{j-1} = \lim_{x_0\to\infty} R(e_1)R(e_2) \sum_{\substack{r,s=0 \\ r<s}}^{g} \frac{2y(x_r)y(x_s) - f_1(x_r,x_s)}{4(e_1-x_r)(e_1-x_s)(e_2-x_r)(e_2-x_s)R'(x_r)R'(x_s)}$$

$$= \lim_{x_0\to\infty} R(e_1)R(e_2) \sum_{\substack{r,s=0 \\ r<s}}^{g} \frac{2y(x_r)y(x_s) - f_1(x_r,x_s)}{4G'(x_r)G'(x_s)}, \tag{2.71}$$

其中

$$G(x) = (x-e_1)(x-e_2)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_g). \tag{2.72}$$

下面利用 Bolza公式（I），明确给出二阶亏格和三阶亏格情形下 $\wp_{ij}$ functions 的显式形式。

二阶亏格情形:

在二阶亏格情形下，我们得到

$$f_1(x_r,x_s) = \lambda_5 x_r^2 x_s^2 (x_r+x_s) + 2\lambda_4 x_r^2 x_s^2 + \lambda_3 x_r x_s (x_r+x_s) + 2\lambda_2 x_r x_s + \lambda_1(x_r+x_s) + 2\lambda_0, \tag{2.73}$$

$$G(x) = (x-e_1)(x-e_2)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \tag{2.74}$$

$$R(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2). \tag{2.75}$$

在此情形下，Bolza公式（I）给出

$$\wp_{11}(u) + (e_1+e_2)\wp_{21} + e_1e_2\wp_{22} = -\frac{(x_0-e_1)(x_0-e_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \frac{[2y_1y_2 - f_1(x_1,x_2)]}{4(x_1-x_2)^2}$$
$$- \frac{(x_1-e_1)(x_1-e_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \frac{[2y_0y_2 - f_1(x_0,x_2)]}{4(x_0-x_2)^2} - \frac{(x_2-e_1)(x_2-e_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \frac{[2y_0y_1 - f_1(x_0,x_1)]}{4(x_0-x_1)^2}. \tag{2.76}$$

由此可得

$$\wp_{22}(u) = \frac{[f_1(x_1,x_2) - 2y_1y_2]}{4(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)^2} + \frac{[f_1(x_0,x_2) - 2y_0y_2]}{4(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_0-x_2)^2}$$
$$+ \frac{[f_1(x_0,x_1) - 2y_0y_1]}{4(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_0-x_1)^2}, \tag{2.77}$$

$$\wp_{21}(u) = -\frac{x_0[f_1(x_1,x_2) - 2y_1y_2]}{4(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)^2} - \frac{x_1[f_1(x_0,x_2) - 2y_0y_2]}{4(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_0-x_2)^2}$$
$$- \frac{x_2[f_1(x_0,x_1) - 2y_0y_1]}{4(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_0-x_1)^2}, \tag{2.78}$$

$$\wp_{11}(u) = \frac{x_0^2[f_1(x_1,x_2) - 2y_1y_2]}{4(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)^2} + \frac{x_1^2[f_1(x_0,x_2) - 2y_0y_2]}{4(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_0-x_2)^2}$$
$$+ \frac{x_2^2[f_1(x_0,x_1) - 2y_0y_1]}{4(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_0-x_1)^2}. \tag{2.79}$$

这样，利用 x_0，我们可以用对称形式写出 $\wp_{22}(u), \wp_{21}(u), \wp_{11}(u)$ 。最后，我们必须取 $x_0 \to \infty$ 的极限。接着，我们在 x_0 很大时估算 $y_0 \sim \sqrt{\lambda_5} x_0^{5/2}$, $f_1(x_0,x_1) \sim \lambda_5(x_0+x_1)x_0^2x_1^2 \sim \lambda_5 x_0^3 x_1^2$，使得 $2y_0y_2 - f_1(x_0,x_2) \sim -\lambda_5 x_0^3 x_1^2$，$\frac{2y_0y_2 - f_1(x_0,x_2)}{4(x_0-x_2)^2} \sim \frac{-\lambda_5 x_0^3 x_1^2}{4x_0^2} \sim -\frac{\lambda_5}{4} x_0 x_1^2$，从而得到

$$\wp_{11}(u) + (e_1+e_2)\wp_{21} + e_1e_2\wp_{22}$$

$$= -\frac{2y_1y_2 - f_1(x_1,x_2)}{4(x_1-x_2)^2} - \frac{\lambda_5}{4}\frac{(x_1-e_1)(x_1-e_2)x_2^2}{(x_1-x_2)} - \frac{\lambda_5}{4}\frac{(x_2-e_1)(x_2-e_2)x_1^2}{(x_2-x_1)}$$
$$= \frac{f_1(x_1,x_2) - 2y_1y_2}{4(x_1-x_2)^2} - \frac{\lambda_5}{4}(e_1+e_2)x_1x_2 + \frac{\lambda_5}{4}e_1e_2(x_1+x_2). \tag{2.80}$$

因此，我们得到 [1]

$$\wp_{22}(u) = \frac{\lambda_5}{4}(x_1+x_2), \quad \wp_{21}(u) = -\frac{\lambda_5}{4}x_1x_2, \quad \wp_{11}(u) = \frac{f_1(x_1,x_2)-2y_1y_2}{4(x_1-x_2)^2}. \tag{2.81}$$

亏格三情形:

在亏格三情形下，我们得到

$$f_1(x_r,x_s) = \lambda_7 x_r^3x_s^3(x_r+x_s) + 2\lambda_6 x_r^3x_s^3 + \lambda_5 x_r^2x_s^2(x_r+x_s) + 2\lambda_4 x_r^2x_s^2 + \lambda_3 x_rx_s(x_r+x_s)$$
$$+ 2\lambda_2 x_rx_s + \lambda_1(x_r+x_s) + 2\lambda_0, \tag{2.82}$$
$$G(x) = (x-e_1)(x-e_2)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \tag{2.83}$$
$$R(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \tag{2.84}$$

在这种情形下，取极限 $x_0 \to \infty$ 后，我们得到

$$\wp_{11}(u) + (e_1+e_2)\wp_{21} + e_1e_2\wp_{22} + (e_1^2+e_2^2)\wp_{31} + e_1e_2(e_1+e_2)\wp_{32} + e_1^2e_2^2\wp_{33}$$
$$= -\frac{(x_3-e_1)(x_3-e_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\frac{[2y_1y_2 - f_1(x_1,x_2)]}{4(x_1-x_2)^2} - \frac{(x_1-e_1)(x_1-e_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\frac{[2y_2y_3 - f_1(x_2,x_3)]}{4(x_2-x_3)^2}$$
$$- \frac{(x_2-e_1)(x_2-e_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\frac{[2y_3y_1 - f_1(x_3,x_1)]}{4(x_3-x_1)^2} + \frac{\lambda_7}{4}\frac{(x_2-e_1)(x_2-e_2)(x_3-e_1)(x_3-e_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}x_1^3$$
$$+ \frac{\lambda_7}{4}\frac{(x_3-e_1)(x_3-e_2)(x_1-e_1)(x_1-e_2)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}x_2^3 + \frac{\lambda_7}{4}\frac{(x_1-e_1)(x_1-e_2)(x_2-e_1)(x_2-e_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}x_3^3. \tag{2.85}$$

比较 e_1 和 e_2 的幂的系数，我们得到

$$\wp_{33}(u) = \frac{\lambda_7}{4}(x_1+x_2+x_3), \tag{2.86}$$
$$\wp_{32}(u) = -\frac{\lambda_7}{4}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1), \tag{2.87}$$
$$\wp_{31}(u) = \frac{\lambda_7}{4}x_1x_2x_3, \tag{2.88}$$
$$\wp_{22} = \frac{\lambda_7}{4}x_1x_2x_3 + \frac{f_1(x_1,x_2)-2y_1y_2}{4(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_2)^2} + \frac{f_1(x_2,x_3)-2y_2y_3}{4(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)^2}$$
$$+ \frac{f_1(x_3,x_1)-2y_3y_1}{4(x_2-x_3)(x_2-x_1)(x_3-x_1)^2}, \tag{2.89}$$
$$\wp_{21} = -\frac{x_3(f_1(x_1,x_2)-2y_1y_2)}{4(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_2)^2} - \frac{x_1(f_1(x_2,x_3)-2y_2y_3)}{4(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)^2}$$
$$- \frac{x_2(f_1(x_3,x_1)-2y_3y_1)}{4(x_2-x_3)(x_2-x_1)(x_3-x_1)^2}, \tag{2.90}$$

[1]对于形式为 $f(x) = x\prod_{i=1}^4(1-\mu_i x)$ 的亏格二超椭圆曲线，Rosenhain [9, 10] 构造了 15 个双曲函数，x_1x_2, $(1-\mu_i x_1)(1-\mu_i x_2), (i=1,\cdots,4)$, $f_{\rho\sigma}(x_1, x_2) - 2y(x_1)y(x_2)$ $4(x_1-x_2)^2$ $,(\rho < \sigma = 0,1,\cdots,4)$其中 $f_{\rho\sigma}(x_1, x_2) = \frac{g_{\rho\sigma}(x_2)f(x_1)}{g_{\rho\sigma}(x_1)} + \frac{g_{\rho\sigma}(x_1)f(x_2)}{g_{\rho\sigma}(x_2)}$, $g_{0i}(x) = x(1-\mu_i x)$, $g_{ij}(x) = (1-\mu_i x)(1-\mu_j x)$。此 $f_{\rho\sigma}(x_1,x_2)$满足公式（2.44）和公式（2.45）的 $f_{\rho\sigma}(x_1,x_1) = 2f(x_1)$, $\frac{\partial}{\partial x_1}f_{\rho\sigma}(x_1,x_2)|_{x_2=x_1} = f'(x_2)$。

$$\wp_{11} = \frac{x_3^2(f_1(x_1,x_2)-2y_1y_2)}{4(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_2)^2} + \frac{x_1^2(f_1(x_2,x_3)-2y_2y_3)}{4(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)^2}$$
$$+ \frac{x_2^2(f_1(x_3,x_1)-2y_3y_1)}{4(x_2-x_3)(x_2-x_1)(x_3-x_1)^2}. \tag{2.91}$$

我们已验证，在亏格至四的情形下，$\wp_{ij}(u) = -\dfrac{\partial \zeta_j}{\partial u_i}$使用公式（2.23）的 $\mathrm{d}(-\zeta_j)$ 以及$\wp_{ij}(u)$使用公式（2.71）的 Bolza公式（I），得到的 $\wp_{ij}(u)$ 表达式相同。

2.6 Bolza公式（II）

我们将 Bolza公式（I）改写为更实用的形式，这也是 Baker的论文 [1]的出发点。利用方程(2.5)，可得

$$\frac{x^k}{R(x)} = \sum_{i=0}^{g} \frac{x_i^k}{(x-x_i)R'(x_i)}, \quad (k = 0, 1, \cdots, g). \tag{2.92}$$

对方程(2.92)两边取 $k = g$ 并乘以 x，可得

$$\frac{x^{g+1}}{R(x)} = \sum_{i=0}^{g} \frac{x_i^g}{R'(x_i)} \frac{(x-x_i+x_i)}{(x-x_i)} = \sum_{i=0}^{g} \frac{x_i^g}{R'(x_i)} + \sum_{i=0}^{g} \frac{x_i^{g+1}}{(x-x_i)R'(x_i)} = 1 + \sum_{i=0}^{g} \frac{x_i^{g+1}}{(x-x_i)R'(x_i)}.$$

于是，对于形式为 $f(x) = a_{g+1}x^{g+1} + a_g x^g + \cdots + a_1 x + a_0$的 $(g+1)$ 多项式函数，可得

$$\frac{f(x)}{R(x)} = a_{g+1} + \sum_{i=0}^{g} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)R'(x_i)}. \tag{2.93}$$

稍后我们将在方程(2.98)中使用此公式。接着，我们从方程(2.71)出发，不对$x_0 \to \infty$ 取极限，得到以下形式

$$I = R(e_1)R(e_2) \sum_{\substack{r,s=0 \\ r<s}}^{g} \frac{[2y_ry_s - f_1(x_r,x_s)]}{4G'(x_r)G'(x_s)} \quad = I_1 + I_2, \tag{2.94}$$

其中

$$I_1 = R(e_1)R(e_2) \sum_{\substack{r,s=0 \\ r<s}}^{g} \frac{2y_ry_s}{4G'(x_r)G'(x_s)}, \tag{2.95}$$

$$I_2 = -R(e_1)R(e_2) \sum_{\substack{r,s=0 \\ r<s}}^{g} \frac{f_1(x_r,x_s)}{4G'(x_r)G'(x_s)}. \tag{2.96}$$

首先，我们将 I_1 改写为以下形式

$$I_1 = R(e_1)R(e_2) \sum_{\substack{r,s=0 \\ r<s}}^{g} \frac{2y_ry_s}{4G'(x_r)G'(x_s)}$$
$$= R(e_1)R(e_2) \sum_{\substack{r,s=0 \\ r<s}}^{g} \frac{2y_ry_s}{4(x_r-e_1)(x_r-e_2)(x_s-e_1)(x_s-e_2)R'(x_r)R'(x_s)}$$
$$= \frac{R(e_1)R(e_2)}{4} \left[\left(\sum_{r=0}^{g} \frac{y_r}{(x_r-e_1)(x_r-e_2)R'(x_r)} \right) \left(\sum_{s=0}^{g} \frac{y_s}{(x_s-e_1)(x_s-e_2)R'(x_s)} \right) \right.$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{r=0}^{g} \left(\frac{y_r}{(x_r - e_1)(x_r - e_2)R'(x_r)} \right)^2 \Bigg] \\
&= \frac{R(e_1)R(e_2)}{4} \left(\sum_{r=0}^{g} \frac{y_r}{(x_r - e_1)(x_r - e_2)R'(x_r)} \right)^2 - \frac{R(e_1)R(e_2)}{4} \sum_{r=0}^{g} \frac{f(x_r)}{(G'(x_r))^2} \\
&= I_{11} + I_{12}. \qquad (2.97)
\end{aligned}
$$

接下来，我们将 I_2 改写为以下形式

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{R(e_1)R(e_2)}{4(e_1 - e_2)^2} \sum_{\substack{r,s=0 \\ r<s}}^{g} \frac{f_1(x_r, x_s)}{R'(x_r)R'(x_s)} \left(\frac{1}{e_1 - x_r} - \frac{1}{e_2 - x_r} \right) \left(\frac{1}{e_1 - x_s} - \frac{1}{e_2 - x_s} \right) \\
&= -\frac{R(e_1)R(e_2)}{8(e_1 - e_2)^2} \Bigg[\sum_{s=0}^{g} \frac{1}{R'(x_s)} \left(\frac{1}{e_1 - x_s} - \frac{1}{e_2 - x_s} \right) \sum_{r=0}^{g} \frac{1}{R'(x_r)} \left(\frac{1}{e_1 - x_r} - \frac{1}{e_2 - x_r} \right) f_1(x_r, x_s) \\
&- \sum_{r=0}^{g} \frac{2f(x_r)}{(R'(x_r))^2} \left(\frac{1}{e_1 - x_r} - \frac{1}{e_2 - x_r} \right)^2 \Bigg] \\
&= -\frac{R(e_1)R(e_2)}{8(e_1 - e_2)^2} \Bigg[\sum_{s=0}^{g} \frac{1}{R'(x_s)} \left(\frac{1}{e_1 - x_s} - \frac{1}{e_2 - x_s} \right) \left(\frac{f_1(e_1, x_s)}{R(e_1)} - \frac{f_1(e_2, x_s)}{R(e_2)} \right) \\
&- \sum_{r=0}^{g} \frac{2f(x_r)}{(R'(x_r))^2} \frac{(e_1 - e_2)^2}{(e_1 - x_r)^2(e_2 - x_r)^2} \Bigg] \\
&= -\frac{R(e_1)R(e_2)}{8(e_1 - e_2)^2} \left[\frac{1}{R(e_1)} \left(\frac{f_1(e_1, e_1)}{R(e_1} - \frac{f_1(e_2, e_1)}{R(e_2} \right) - \frac{1}{R(e_2)} \left(\frac{f_1(e_1, e_2)}{R(e_1} - \frac{f_1(e_2, e_2)}{R(e_2} \right) \right] \\
&+ \frac{R(e_1)R(e_2)}{4} \sum_{r=0}^{g} \frac{f(x_r)}{(G'(x_r))^2} \\
&= -\frac{R(e_1)R(e_2)}{8(e_1 - e_2)^2} \left(\frac{2f(e_1)}{R(e_1)^2} + \frac{2f(e_2)}{R(e_2)^2} - \frac{2f_1(e_1.e_2)}{R(e_1)R(e_2)} \right) + \frac{R(e_1)R(e_2)}{4} \sum_{r=0}^{g} \frac{f(x_r)}{(G'(x_r))^2} \\
&= I_{21} + I_{22}, \qquad (2.98)
\end{aligned}
$$

其中我们使用了公式（2.44）、公式（2.93），以及以下事实： $f_1(x_r$和$x_s)$ 分别是关于 x_r 和 x_s 的 $(g+1)$次多项式。由于 I_{12} 和 I_{22} 相互抵消，取 $x_0 \to \infty$极限后，我们最终得到形式为 [5,7,8] 的 Bolza公式（II）

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) e_1^{i-1} e_2^{j-1} &= \lim_{x_0 \to \infty} \Bigg[\frac{1}{4} R(e_1)R(e_2) \left(\sum_{r=0}^{g} \frac{y_r}{(e_1 - x_r)(e_2 - x_r)R'(x_r)} \right)^2 \\
&- \frac{f(e_1)R(e_2)}{4(e_1 - e_2)^2 R(e_1)} - \frac{f(e_2)R(e_1)}{4(e_1 - e_2)^2 R(e_2)} + \frac{f_1(e_1, e_2)}{4(e_1 - e_2)^2} \Bigg]. \qquad (2.99)
\end{aligned}
$$

3 超椭圆 $\wp_{ij}$ 函数微分方程的公式

我们从如下形式的 Bolza公式（II）方程(2.99) 开始

$$
4(e_1 - e_2)^2 \sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) e_1^{i-1} e_2^{j-1} - f_1(e_1, e_2) = \lim_{x_0 \to \infty} R(e_1)R(e_2)\Omega_{12}, \qquad (3.1)
$$

where

$$\Omega_{12}=(e_1-e_2)^2\left(\sum_{r=0}^{g}\frac{y_r}{(e_1-x_r)(e_2-x_r)R'(x_r)}\right)^2-\frac{f(e_1)}{R(e_1)^2}-\frac{f(e_2)}{R(e_2)^2}\tag{3.2}$$

我们引入如下形式的 Δ_i $(i=1、2)$、 Δ_{12} 和 φ_i $(i=1、2)$

$$\Delta_i=\sum_{r=0}^{g}\frac{y_r}{(e_i-x_r)R'(x_r)},\tag{3.3}$$

$$\Delta_{12}=-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{e_1-e_2}=\sum_{r=0}^{g}\frac{y_r}{(e_1-x_r)(e_2-x_r)R'(x_r)}=\sum_{r=0}^{g}\frac{y_r}{G'(x_r)},\tag{3.4}$$

$$\varphi_i=\frac{f(e_i)}{(R(e_i))^2},\tag{3.5}$$

于是我们得到 $\Omega_{12}=(e_1-e_2)^2\Delta_{12}^2-\varphi_1-\varphi_2$。首先，我们得到极限$x_0\to\infty$中的表达式

$$R(e_i)\to -x_0F(e_i),\ R'(x_r)\to -x_0F'(x_r),(1\leqslant r\leqslant g),\ \Delta_i\to-\frac{1}{x_0}\widehat{\Delta}_i+C_1,$$

$$\Delta_{12}\to-\frac{1}{x_0}\widehat{\Delta}_{12},\ \varphi_i\to\frac{1}{x_0^2}\widehat{\varphi}_i,$$

其中

$$\widehat{\Delta}_i=\sum_{r=1}^{g}\frac{y_r}{(e_i-x_r)F'(x_r)},\ \widehat{\Delta}_{12}=\sum_{r=1}^{g}\frac{y_r}{(e_1-x_r)(e_2-x_r)F'(x_r)},\ \widehat{\varphi}_i=\frac{f(e_i)}{(F(e_i))^2}.$$

因此，Baker的论文 [1] 中的起始关系为

$$4(e_1-e_2)^2\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(u)e_1^{i-1}e_2^{j-1}-f_1(e_1,e_2)=F(e_1)F(e_2)\left[(e_1-e_2)^2\widehat{\Delta}_{12}^2-\widehat{\varphi}_1-\widehat{\varphi}_2\right].\tag{3.6}$$

应用算子

$$\delta_3=\sum_{k=1}^{g}e_3^{k-1}\frac{\partial}{\partial u_k},\quad \delta_4=\sum_{k=1}^{g}e_4^{k-1}\frac{\partial}{\partial u_k}\tag{3.7}$$

对方程(3.6)进行运算，我们得到各种微分方程。为此，利用方程(2.22)和方程(2.9)，我们得到 δ_3 的有用公式，其形式为

$$\begin{aligned}\delta_3&=\sum_{k=1}^{g}e_3^{k-1}\frac{\partial}{\partial u_k}=\sum_{k=1}^{g}\sum_{r=1}^{g}e_3^{k-1}\frac{\partial x_r}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial x_r}=\sum_{k=1}^{g}\sum_{r=1}^{g}e_3^{k-1}\frac{y_r\chi_{g-k}(x_r;x_1,\cdots,x_g)}{F'(x_r)}\frac{\partial}{\partial x_r}\\&=\sum_{k=1}^{g}\left(\sum_{r=1}^{g}e_3^{k-1}\chi_{g-k}(x_r;x_1,\cdots,x_g)\right)\frac{y_r}{F'(x_r)}\frac{\partial}{\partial x_r}=F(e_3)\sum_{k=1}^{g}\frac{y_r}{(e_3-x_r)F'(x_r)}\frac{\partial}{\partial x_r}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

3.1 步骤 1： $\wp_{ijk}(u)$的微分方程

首先，我们将 δ_3 应用于公式（3.6），得到

$$4(e_1-e_2)^2\sum_{i,j,k=1}^{g}\wp_{ijk}(u)e_1^{i-1}e_2^{j-1}e_3^{k-1}=\delta_3\left(F(e_1)F(e_2)\left((e_1-e_2)^2\widehat{\Delta}_{12}^2-\widehat{\varphi}_1-\widehat{\varphi}_2\right)\right).\tag{3.9}$$

^为了计算公式（3.9）的右端，我们必须计算 $\delta_3(F(e_i))$、 $\delta_3(\Delta_i)$、$\delta_3(\widehat{\varphi}_i)$，得到

$$\text{a)}\ \frac{1}{F(e_3)}\delta_3(F(e_1)) = \frac{1}{F(e_3)} \times F(e_3) \sum_{r=1}^{g} \frac{y_r}{(e_3 - x_r)F'(x_r)} \frac{\partial F(e_1)}{\partial x_r}$$

$$= -F(e_1) \sum_{r=1}^{g} \frac{y_r}{(e_3 - x_r)(e_1 - x_r)F'(x_r)} = -F(e_1)\widehat{\Delta}_{13}, \tag{3.10}$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{F(e_3)}\delta_3(\widehat{\varphi}_1) = \frac{1}{F(e_3)} \times F(e_3) \sum_{r=1}^{g} \frac{y_r}{(e_3 - x_r)F'(x_r)} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{f(e_1)}{F(e_1)^2} \right)$$

$$= 2\frac{f(e_1)}{F(e_1)^2} \sum_{r=1}^{g} \frac{y_r}{(e_3 - x_r)(e_1 - x_r)F'(x_r)} = 2\widehat{\varphi}_1\widehat{\Delta}_{12}, \tag{3.11}$$

$$\text{c)}\ \frac{1}{F(e_3)}\delta_3(\widehat{\Delta}_1) = \frac{1}{F(e_3)}\delta_3 \left(\sum_{r=1}^{g} \frac{y_r}{(e_1 - x_r)F'(x_r)} \right) = J. \tag{3.12}$$

我们按以下步骤计算此 J。

$$J = \frac{1}{F(e_3)} \sum_{r=1}^{g} \delta_3 \left(\frac{1}{e_1 - x_r} \right) \frac{y_r}{F'(x_r)} + \frac{1}{F(e_3)} \sum_{r=1}^{g} \frac{1}{e_1 - x_r}\delta_3 \left(\frac{y_r}{F'(x_r)} \right) = J_1 + J_2, \tag{3.13}$$

$$J_1 = \frac{1}{F(e_3)} \sum_{r=1}^{g} \delta_3 \left(\frac{1}{e_1 - x_r} \right) \frac{y_r}{F'(x_r)} = \sum_{r=1}^{g} \frac{f(x_r)}{(e_1 - x_r)^2(e_3 - x_r)(F'(x_r))^2}, \tag{3.14}$$

$$J_2 = \frac{1}{F(e_3)} \sum_{r=1}^{g} \frac{1}{e_1 - x_r}\delta_3 \left(\frac{y_r}{F'(x_r)} \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{g} \frac{1}{e_1 - x_r} \left(\frac{y_r y_r'}{(e_3 - x_r)(F'(x_r))^2} - \frac{y_r^2 F''(x_r)}{(e_3 - x_r)(F'(x_r))^3} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{g} \frac{y_r y_s}{(e_3 - x_s)F'(x_r)F'(x_s)(x_r - x_s)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{g} \frac{f'(x_r)}{(e_1 - x_r)(e_3 - x_r)(F'(x_r))^2} - \sum_{r=1}^{g} \frac{f(x_r)F''(x_r)}{(e_1 - x_r)(e_3 - x_r)(F'(x_r))^3}$$

$$+ \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{g} \frac{y_r y_s}{(e_1 - x_r)(e_3 - x_s)F'(x_r)F'(x_s)(x_r - x_s)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{g} \frac{1}{(e_1 - x_r)(e_3 - x_r)} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{f(x_r)}{(F'(x_r))^2} \right)$$

$$+ \frac{(e_3 - e_1)}{2} \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{g} \frac{y_r}{(e_1 - x_r)(e_3 - x_r)F'(x_r)} \frac{y_s}{(e_1 - x_s)(e_3 - x_s)F'(x_s)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{g} \frac{1}{(e_1 - x_r)(e_3 - x_r)} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{f(x_r)}{(F'(x_r))^2} \right) + \frac{(e_3 - e_1)}{2} \left[\left(\sum_{r=1}^{g} \frac{y_r}{(e_1 - x_r)(e_3 - x_r)F'(x_r)} \right)^2 \right.$$

$$\left. - \sum_{r=1)}^{g} \frac{f(x_r)}{(e_1 - x_r)^2(e_3 - x_r)^2(F'(x_r))^2} \right] = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{g} \frac{1}{(e_1 - x_r)(e_3 - x_r)} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{f(x_r)}{(F'(x_r))^2} \right)$$

$$- \frac{(e_3 - e_1)}{2} \sum_{r=1}^{g} \frac{f(x_r)}{(e_1 - x_r)^2(e_3 - x_r)^2(F'(x_r))^2} + \frac{(e_3 - e_1)}{2}\widehat{\Delta}_{13}^2. \tag{3.15}$$

然后得到

$$
\begin{aligned}
J = J_1 + J_2 &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{1}{(e_1-x_r)(e_3-x_r)}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{f(x_r)}{(F'(x_r))^2}\right) + \frac{(e_3-e_1)}{2}\widehat{\Delta}_{13}^2 \\
&+ \sum_{r=1}^{g}\frac{f(x_r)}{(e_1-x_r)^2(e_3-x_r)(F'(x_r))^2} - \frac{(e_3-e_1)}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{f(x_r)}{(e_1-x_r)^2(e_3-x_r)^2(F'(x_r))^2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{1}{(e_1-x_r)(e_3-x_r)}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{f(x_r)}{(F'(x_r))^2}\right) + \frac{(e_3-e_1)}{2}\widehat{\Delta}_{13}^2 \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{f(x_r)}{(e_1-x_r)^2(e_3-x_r)^2(F'(x_r))^2}(2e_3-2x_r-e_3+e_1) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{1}{(e_1-x_r)(e_3-x_r)}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{f(x_r)}{(F'(x_r))^2}\right) + \frac{(e_3-e_1)}{2}\widehat{\Delta}_{13}^2 \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{f(x_r)}{(e_1-x_r)^2(e_3-x_r)^2(F'(x_r))^2}((e_1-x_r)+(e_3-x_r)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{1}{(e_1-x_r)(e_3-x_r)}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{f(x_r)}{(F'(x_r))^2}\right) + \frac{(e_3-e_1)}{2}\widehat{\Delta}_{13}^2 \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{f(x_r)}{(F'(x_r))^2}\left(\frac{1}{(e_1-x_r)(e_3-x_r)^2} + \frac{1}{(e_1-x_r)^2(e_3-x_r)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{1}{(e_1-x_r)(e_3-x_r)}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{f(x_r)}{(F'(x_r))^2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{f(x_r)}{(F'(x_r))^2}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{1}{(e_1-x_r)(e_3-x_r)}\right) \\
&+ \frac{(e_3-e_1)}{2}\widehat{\Delta}_{13}^2 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{f(x_r)}{(e_1-x_r)(e_3-x_r)(F'(x_r))^2}\right) + \frac{(e_3-e_1)}{2}\widehat{\Delta}_{13}^2. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
\text{c)}\ \frac{1}{F(e_3)}\delta_3(\widehat{\Delta}_1) &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{f(x_r)}{(e_1-x_r)(e_3-x_r)(F'(x_r))^2}\right) + \frac{(e_3-e_1)}{2}\widehat{\Delta}_{13}^2 \\
&= -\frac{(e_1-e_3)}{2}\widehat{\Delta}_{13}^2 - \frac{1}{2(e_1-e_3)}(\widehat{\varphi}_1-\widehat{\varphi}_3) + \frac{1}{2}\lambda_{2g+1}. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

这里我们使用公式

$$
\sum_{r=1}^{g}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{f(x_r)}{(e_1-x_r)(e_3-x_r)(F'(x_r))^2}\right) = -\frac{1}{(e_1-e_3)}(\widehat{\varphi}_1-\widehat{\varphi}_3) + \lambda_{2g+1}. \qquad (3.18)
$$

我们已检验亏格为二、三和四的情形。接下来，我们用两种方法计算 $\dfrac{1}{F(e_3)}\delta_3(\widehat{\Delta}_{12})$: 一种是使用公式（3.18），另一种是不使用公式（3.18），其形式为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{F(e_3)}\delta_3(\widehat{\Delta}_{12}) = \frac{1}{2(e_1-e_2)}\left((e_1-e_3)\widehat{\Delta}_{13}^2 - (e_2-e_3)\widehat{\Delta}_{12}^2\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{f(x_r)}{(e_1-x_r)(e_2-x_r)(e_3-x_r)(F'(x_r))^2}\right) \qquad (3.19) \\
&= \frac{1}{2(e_1-e_2)}\left((e_1-e_3)\widehat{\Delta}_{13}^2 - (e_2-e_3)\widehat{\Delta}_{12}^2\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{\varphi}_1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)} + \frac{\widehat{\varphi}_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)} + \frac{\widehat{\varphi}_3}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}\right). \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

然后，我们从公式（3.18）得到以下关系

$$\sum_{r=1}^{g}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{f(x_r)}{(e_1-x_r)(e_2-x_r)(e_3-x_r)(F'(x_r))^2}\right)$$
$$=\frac{\widehat{\varphi}_1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}+\frac{\widehat{\varphi}_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}+\frac{\widehat{\varphi}_3}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}. \tag{3.21}$$

我们已在二阶亏格、三阶亏格和四阶亏格的情形下检验了这一关系。[2] 因此，我们得到

$$\frac{1}{F(e_3)}\delta_3(\widehat{\Delta}_{12})=\frac{1}{2(e_1-e_2)}\left((e_1-e_3)\widehat{\Delta}_{13}^2-(e_2-e_3)\widehat{\Delta}_{12}^2\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{\varphi}_1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}+\frac{\widehat{\varphi}_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}+\frac{\widehat{\varphi}_3}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}\right). \tag{3.22}$$

因此，利用公式（3.10）和公式（3.21），我们得到

$$\frac{1}{F(e_1)F(e_2)F(e_3)}\delta_3\left(F(e_1)F(e_2)(e_1-e_2)^2\widehat{\Delta}_{12}^2\right)$$
$$=(e_1-e_2)\widehat{\Delta}_{12}\left((e_1-e_3)\widehat{\Delta}_{13}^2-(e_2-e_3)\widehat{\Delta}_{23}^2\right)-(e_1-e_2)^2\widehat{\Delta}_{12}^2(\widehat{\Delta}_{12}+\widehat{\Delta}_{23})$$
$$+(e_1-e_2)^2\widehat{\Delta}_{12}\left(\frac{\widehat{\varphi}_1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}+\frac{\widehat{\varphi}_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}+\frac{\widehat{\varphi}_3}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}\right)$$
$$=(e_1-e_2)\widehat{\Delta}_{12}\left((e_1-e_3)\widehat{\Delta}_{13}^2-(e_2-e_3)\widehat{\Delta}_{23}^2-(e_1-e_2)\widehat{\Delta}_{12}(\widehat{\Delta}_{13}+\widehat{\Delta}_{23})\right)$$
$$+(e_1-e_2)^2\widehat{\Delta}_{12}\left(\frac{\widehat{\varphi}_1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}+\frac{\widehat{\varphi}_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}+\frac{\widehat{\varphi}_3}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}\right)$$
$$=-(e_1-e_2)^2\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\Delta}_{31}-(e_1-e_2)^2\frac{(e_1-e_2)\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\varphi}_3}{(e_1-e_2)(e_2-e_3)(e_3-e_1)}$$
$$+(\ \widehat{\varphi}_1,\ \widehat{\varphi}_2\text{ linear terms}). \tag{3.23}$$

这里我们使用恒等式

$$\left((e_1-e_3)\widehat{\Delta}_{13}^2-(e_2-e_3)\widehat{\Delta}_{23}^2-(e_1-e_2)\widehat{\Delta}_{12}(\widehat{\Delta}_{13}+\widehat{\Delta}_{23})\right)=-(e_1-e_2)\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\Delta}_{31},$$

利用 $\widehat{\Delta}_{ij}=-\dfrac{\widehat{\Delta}_i-\widehat{\Delta}_j}{e_i-e_j}$。

因此，方程（3.9）的右端为

$$\frac{1}{F(e_1)F(e_2)F(e_3)}\delta_3\left(F(e_1)F(e_2)\left((e_1-e_2)^2\widehat{\Delta}_{12}^2-\widehat{\varphi}_1-\widehat{\varphi}_2\right)\right)$$
$$=-(e_1-e_2)^2\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\Delta}_{31}-(e_1-e_2)^2\frac{(e_1-e_2)\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\varphi}_3}{(e_1-e_2)(e_2-e_3)(e_3-e_1)}$$
$$+(\widehat{\varphi}_1,\ \widehat{\varphi}_2\text{ linear terms}) \tag{3.24}$$

其中我们利用了 $\delta_3\left(F(e_1)F(e_2)(\widehat{\varphi}_1+\widehat{\varphi}_2)\right)$ 与 $\widehat{\varphi}_1$ 或 $\widehat{\varphi}_2$ 成比例这一事实，这来自方程（3.11）。不过，由于 $\delta_3\delta_2\delta_1(\log\sigma(u))$ 是对称的，这一项关于指标是对称的。于是最终得到方程（3.24）右端的形式

$$\frac{1}{F(e_1)F(e_2)F(e_3)}\delta_3\left(F(e_1)F(e_2)\left((e_1-e_2)^2\widehat{\Delta}_{12}^2-\widehat{\varphi}_1-\widehat{\varphi}_2\right)\right)$$

[2] 在Baker的论文中，方程(3.21)左侧的表达式形式错误，应为 $\sum_{r=1}^{g}\frac{1}{F'(x_r)}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{f(x_r)}{(e_1-x_r)(e_2-x_r)(e_3-x_r)F'(x_r)}\right)$。

$$= -(e_1-e_2)^2\left[\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\Delta}_{31}+\frac{1}{\omega_{123}}\left((e_1-e_2)\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\varphi}_3+(e_2-e_3)\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\varphi}_1+(e_3-e_1)\widehat{\Delta}_{31}\widehat{\varphi}_2\right)\right]. \quad (3.25)$$

其中 $\omega_{123}=(e_1-e_2)(e_2-e_3)(e_3-e_1)$。因此，我们最终得到$\wp_{ijk}(u)$ 的微分关系，其形式为

$$-\frac{4}{F(e_1)F(e_2)F(e_3)}\sum_{i,j,k=1}^{g}\wp_{ijk}(u)e_1^{i-1}e_2^{j-1}e_3^{k-1}$$
$$=\left[\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\Delta}_{31}+\frac{1}{\omega_{123}}\left((e_1-e_2)\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\varphi}_3+(e_2-e_3)\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\varphi}_1+(e_3-e_1)\widehat{\Delta}_{31}\widehat{\varphi}_2\right)\right]. \quad (3.26)$$

3.2 第 2 步： $\wp_{ijk\ell}(u)$的微分方程

我们将 δ_4 应用于方程 (3.26)，以得到微分方程。利用方程 (3.10)、方程 (3.11) 和方程 (3.20) 中的公式，我们可以准确地得到微分方程，但会出现许多不同的项。随后，我们采用简化方法，忽略 $\widehat{\varphi}_i(i=1$、2、3、$4)$项。由于 $\delta_i(\widehat{\varphi}_j)$与 $\widehat{\varphi}_j$成正比，因此我们可以一致地忽略与 $\widehat{\varphi}_j$成正比的项。接下来，我们从以下形式开始

$$-4\sum_{i,j,k=1}^{g}\wp_{ijk}(u)e_1^{i-1}e_2^{j-1}e_3^{k-1}=F(e_1)F(e_2)F(e_3)\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\Delta}_{31}+(\widehat{\varphi}_i \text{ linear terms}). \quad (3.27)$$

我们将 δ_4 应用于方程 (3.27)，得到

$$-4\sum_{i,j,k=1}^{g}\wp_{ijk\ell}(u)e_1^{i-1}e_2^{j-1}e_3^{k-1}e_4^{\ell-1}=\delta_4(F(e_1)F(e_2)F(e_3)\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\Delta}_{31})+(\widehat{\varphi}_i \text{ linear terms})$$
$$=F(e_1)F(e_2)F(e_3)F(e_4)\Big[-(\widehat{\Delta}_{14}+\widehat{\Delta}_{24}+\widehat{\Delta}_{34})\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\Delta}_{31}$$
$$+\frac{1}{2(e_1-e_2)}\left((e_1-e_4)\widehat{\Delta}_{14}^2-(e_2-e_4)\widehat{\Delta}_{24}^2\right)\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\Delta}_{31}+\frac{1}{2(e_2-e_3)}\left((e_2-e_4)\widehat{\Delta}_{24}^2-(e_3-e_4)\widehat{\Delta}_{34}^2\right)\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{31}$$
$$+\frac{1}{2(e_3-e_1)}\left((e_3-e_4)\widehat{\Delta}_{34}^2-(e_1-e_4)\widehat{\Delta}_{14}^2\right)\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{23}\Big]+(\widehat{\varphi}_i \text{ linear terms})$$
$$=-\frac{F(e_1)F(e_2)F(e_3)F(e_4)}{2(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)(e_4-e_1)(e_4-e_2)(e_4-e_3)}\Big((e_2-e_3)^3(e_4-e_1)^3\widehat{\Delta}_{23}^2\widehat{\Delta}_{41}^2$$
$$+(e_3-e_1)^3(e_4-e_2)^3\widehat{\Delta}_{31}^2\widehat{\Delta}_{42}^2+(e_1-e_2)^3(e_4-e_3)^3\widehat{\Delta}_{12}^2\widehat{\Delta}_{43}^2\Big)+(\widehat{\varphi}_i \text{ linear terms}), \quad (3.28)$$

这里用到了方程 (3.10)、方程 (3.20) 以及以下恒等式

$$(e_2-e_3)^3(e_4-e_1)^3\widehat{\Delta}_{23}^2\widehat{\Delta}_{41}^2+(e_3-e_1)^3(e_4-e_2)^3\widehat{\Delta}_{31}^2\widehat{\Delta}_{42}^2+(e_1-e_2)^3(e_4-e_3)^3\widehat{\Delta}_{12}^2\widehat{\Delta}_{43}^2$$
$$=M\Bigg[2(\widehat{\Delta}_{14}+\widehat{\Delta}_{24}+\widehat{\Delta}_{34})\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\Delta}_{31}-\widehat{\Delta}_{23}\widehat{\Delta}_{31}\frac{(e_1-e_4)\widehat{\Delta}_{14}^2-(e_2-e_4)\widehat{\Delta}_{24}^2}{(e_1-e_2)}$$
$$-\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{31}\frac{((e_2-e_4)\widehat{\Delta}_{24}^2-(e_3-e_4)\widehat{\Delta}_{34}^2}{(e_2-e_3)}-\widehat{\Delta}_{12}\widehat{\Delta}_{23}\frac{(e_3-e_4)\widehat{\Delta}_{34}^2-(e_1-e_4)\widehat{\Delta}_{14}^2}{(e_3-e_1)}\Bigg], \quad (3.29)$$

其中
$$M=(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)(e_4-e_1)(e_4-e_2)(e_4-e_3). \quad (3.30)$$

因此我们得到

$$8M\sum_{i,j,k,\ell=1}^{g}\wp_{ijk\ell}(u)e_1^{i-1}e_2^{j-1}e_3^{k-1}e_4^{\ell-1}$$

$$= F(e_1)F(e_2)F(e_3)F(e_4)\Big((e_2-e_3)^3(e_4-e_1)^3\widehat{\Delta}_{23}^2\widehat{\Delta}_{41}^2$$
$$+(e_3-e_1)^3(e_4-e_2)^3\widehat{\Delta}_{31}^2\widehat{\Delta}_{42}^2+(e_1-e_2)^3(e_4-e_3)^3\widehat{\Delta}_{12}^2\widehat{\Delta}_{43}^2\Big)+(\widehat{\varphi}_i \text{ linear terms}). \quad (3.31)$$

$\widehat{\ }$然后利用 $\Delta_{k\ell}$ 消去

$$F(e_k)F(e_\ell)(e_k-e_\ell)^2\widehat{\Delta}_{k\ell}^2=4(e_k-e_\ell)^2\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(u)e_k^{i-1}e_\ell^{j-1}-f_1(e_k,e_\ell)+(\widehat{\varphi}_i \text{ linear terms}). \quad (3.32)$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&8M\sum_{i,j,k,\ell=1}^{g}\wp_{ijk\ell}(u)e_1^{i-1}e_2^{j-1}e_3^{k-1}e_4^{\ell-1}\\
&=(e_2-e_3)(e_4-e_1)\left[f_1(e_2,e_3)-4(e_2-e_3)^2\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(u)e_2^{i-1}e_3^{j-1}\right]\left[f_1(e_4,e_1)-4(e_4-e_1)^2\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(u)e_4^{i-1}e_1^{j-1}\right]\\
&+(e_3-e_1)(e_4-e_2)\left[f_1(e_3,e_1)-4(e_3-e_1)^2\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(u)e_3^{i-1}e_1^{j-1}\right]\left[f_1(e_4,e_2)-4(e_4-e_2)^2\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(u)e_4^{i-1}e_2^{j-1}\right]\\
&+(e_1-e_2)(e_4-e_3)\left[f_1(e_1,e_2)-4(e_1-e_2)^2\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(u)e_1^{i-1}e_2^{j-1}\right]\left[f_1(e_4,e_3)-4(e_4-e_3)^2\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(u)e_4^{i-1}e_3^{j-1}\right].
\end{aligned} \quad (3.33)$$

将方程（3.33）两边减去以下项

$$16M\sum_{i,j,k,\ell=1}^{g}(\wp_{i\ell}(u)\wp_{jk}(u)+\wp_{ik}(u)\wp_{j\ell}(u)+\wp_{ij}(u)\wp_{k\ell}(u))e_1^{i-1}e_2^{j-1}e_3^{k-1}e_4^{\ell-1}, \quad (3.34)$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&8M\sum_{i,j,k,\ell=1}^{g}\Big(\wp_{ijk\ell}(u)-2(\wp_{i\ell}(u)\wp_{jk}(u)+\wp_{ik}(u)\wp_{j\ell}(u)+\wp_{ij}(u)\wp_{k\ell}(u))\Big)e_1^{i-1}e_2^{j-1}e_3^{k-1}e_4^{\ell-1}\\
&=16\sum_{i,j,k,\ell=1}^{g}\Big[\left\{(e_2-e_3)^3(e_4-e_1)^3-M\right\}\wp_{i\ell}(u)\wp_{jk}(u)+\left\{(e_3-e_1)^3(e_4-e_2)^3-M\right\}\wp_{ik}(u)\wp_{j\ell}(u)\\
&+\left\{(e_1-e_2)^3(e_4-e_3)^3-M\right\}\wp_{ij}(u)\wp_{k\ell}(u)\Big]e_1^{i-1}e_2^{j-1}e_3^{k-1}e_4^{\ell-1}\\
&+\Big[(e_2-e_3)(e_4-e_1)f_1(e_2,e_3)f_1(e_4,e_1)+(e_3-e_1)(e_4-e_2)f_1(e_3,e_1)f_1(e_4,e_2)\\
&+(e_1-e_2)(e_4-e_3)f_1(e_1,e_2)f_1(e_4,e_3)\Big]\\
&+\Big[-4(e_2-e_3)(e_4-e_1)^3f_1(e_2,e_3)\sum_{i,\ell=1}^{g}\wp_{i\ell}(u)e_1^{i-1}e_4^{\ell-1}-4(e_2-e_3)^3(e_4-e_1)f_1(e_4,e_1)\sum_{j,k=1}^{g}\wp_{jk}(u)e_2^{j-1}e_3^{k-1}\\
&-4(e_3-e_1)(e_4-e_2)^3f_1(e_3,e_1)\sum_{j,\ell=1}^{g}\wp_{j\ell}(u)e_2^{j-1}e_4^{\ell-1}-4(e_3-e_1)^3(e_4-e_2)f_1(e_4,e_2)\sum_{i,k=1}^{g}\wp_{ik}(u)e_1^{i-1}e_3^{k-1}\\
&-4(e_1-e_2)(e_4-e_3)^3f_1(e_1,e_2)\sum_{k,\ell=1}^{g}\wp_{k\ell}(u)e_3^{k-1}e_4^{\ell-1}-4(e_1-e_2)^3(e_4-e_3)f_1(e_4,e_3)\sum_{i,j=1}^{g}\wp_{ij}(u)e_1^{i-1}e_2^{j-1}\Big]\\
&=K_1+K_2+K_3.
\end{aligned} \quad (3.35)$$

从这里开始，我们将记号改写为 $e_1, e_2, e_3, e_4 \to x, y, z, t$。此外，我们记$f_1(x,y) = f_{12} = f_{21}$, $f_1(y, z) = f_{23} = f_{32}$, $f_1(z,x) = f_{31} = f_{13}$, $f_1(x,t) = f_{14} = f_{41}$,$f_1(y,t) = f_{24} = f_{42}$, $f_1(z,t) = f_{34} = f_{43}$, 并记

$$\sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) e_1^{i-1} e_2^{j-1} = \sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) x^{i-1} y^{j-1} = P_{12} = P_{21}, \tag{3.36}$$

$$\sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) e_1^{i-1} e_3^{j-1} = \sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) x^{i-1} z^{j-1} = P_{13} = P_{31}, \tag{3.37}$$

$$\sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) e_1^{i-1} e_4^{j-1} = \sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) x^{i-1} t^{j-1} = P_{14} = P_{41}, \tag{3.38}$$

$$\sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) e_2^{i-1} e_3^{j-1} = \sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) y^{i-1} z^{j-1} = P_{23} = P_{32}, \tag{3.39}$$

$$\sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) e_2^{i-1} e_4^{j-1} = \sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) y^{i-1} t^{j-1} = P_{24} = P_{42}, \tag{3.40}$$

$$\sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) e_3^{i-1} e_4^{j-1} = \sum_{i,j=1}^{g} \wp_{ij}(u) z^{i-1} t^{j-1} = P_{34} = P_{43}, \tag{3.41}$$

其中

$$M = (x-y)(y-z)(z-x)(t-x)(t-y)(t-z) = \begin{vmatrix} x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x & y & z & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.42}$$

我们记 表示相对于 x、 y、 z、 t 的 $x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta$ 的全对称组合， s

$$S(x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta) = (\alpha\beta\gamma\delta).$$

例如， $S(x^2) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (2000)$、 $S(xy) = xy + yz + zx + xt + yt + zt = (1100)$ 等。式（3.35）右端的第一项 K_1 给出

$$\begin{aligned} K_1 &= 16(x-y)(t-z)\left\{(x-y)^2(t-z)^2 - (y-z)(z-x)(t-x)(t-y)\right\} P_{12}P_{34} \\ &+ 16(y-z)(t-x)\left\{(y-z)^2(t-x)^2 - (z-x)(x-y)(t-y)(t-z)\right\} P_{23}P_{14} \\ &+ 16(z-x)(t-y)\left\{(z-x)^2(t-y)^2 - (x-y)(y-z)(t-z)(t-x)\right\} P_{31}P_{24} \\ &= 16H\Big((x-y)(t-z)P_{12}P_{34} + (y-z)(t-x)P_{23}P_{14} + (z-x)(t-y)P_{31}P_{24}\Big) \\ &= 16HS((x-y)(t-z)P_{12}P_{34}), \end{aligned} \tag{3.43}$$

其中

$$\begin{aligned} H &= (x-y)^2(t-z)^2 - (y-z)(z-x)(t-x)(t-y) \\ &= (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + t^2x^2 + t^2y^2 + t^2z^2) - (x^2yz + x^2yt + x^2zt + y^2xz + y^2xt + y^2zt \\ &+ z^2xy + z^2xt + z^2yt + t^2xy + t^2yz + t^2zx) + 6xyzt \\ &= (2200) - (2110) + 6(1111). \end{aligned} \tag{3.44}$$

式（3.35）右端的第二项 K_2 给出

$$\begin{aligned} K_2 &= (x-y)(t-z)f_{12}f_{34} + (y-z)(t-x)f_{23}f_{14} + (z-x)(t-y)f_{31}f_{24} \\ &= S((x-y)(t-z)f_{12}f_{34}). \end{aligned} \tag{3.45}$$

式（3.35）右端的第三项 K_3 给出

$$\begin{aligned}
K_3 &= -4(x-y)(t-z)\left\{(t-z)^2 f_{12}P_{34} + (x-y)^2 f_{34}P_{12}\right\} \\
&- 4(y-z)(t-x)\left\{(t-x)^2 f_{23}P_{14} + (y-z)^2 f_{14}P_{23}\right\} \\
&- 4(z-x)(t-y)\left\{(t-y)^2 f_{31}P_{24} + (z-x)^2 f_{24}P_{31}\right\} \\
&= -4S((x-y)(t-z)\left\{(x-y)^2 P_{12}f_{34}\right\}).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

到此为止，我们得到

$$\begin{aligned}
&8M \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{g} (\alpha-1,\beta-1,\gamma-1,\delta-1)[\alpha\beta\gamma\delta] \\
&= 16HS((x-y)P_{12}(t-z)P_{34}) + S((x-y)f_{12}(t-z)f_{34}) \\
&- 4S((x-y)(t-z)\left\{(x-y)^2 P_{12}f_{34}\right\}),
\end{aligned} \tag{3.47}$$

其中

$$[\alpha\beta\gamma\delta] = [\wp_{\alpha\beta\gamma\delta}] = \wp_{\alpha\beta\gamma\delta}(u) - 2(\wp_{\alpha\beta}(u)\wp_{\gamma\delta}(u) + \wp_{\alpha\gamma}(u)\wp_{\beta\delta}(u) + \wp_{\alpha\delta}(u)\wp_{\beta\gamma}(u)), \tag{3.48}$$

$$(\alpha-1,\beta-1,\gamma-1,\delta-1) = S(x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}t^{\delta-1}), \tag{3.49}$$

$$H = (2200) - (2110) + 6(1111). \tag{3.50}$$

我们进一步化简公式（3.47）右端的各项。令

$$P_{12} = P_{21} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{g} \wp_{\alpha+1,\beta+1}(u)x^\alpha y^\beta = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \tag{3.51}$$

其中

$$a_{\alpha\beta} = \wp_{\alpha+1,\beta+1}. \tag{3.52}$$

于是得到

$$\begin{aligned}
&(x-y)P_{12} = -(y-x)P_{21} = \sum_{\alpha,\beta}(x-y)\wp_{\alpha+1,\beta+1}x^\alpha y^\beta = \sum_{\alpha,\beta}(\wp_{\alpha,\beta+1} - \wp_{\alpha+1,\beta})x^\alpha y^\beta \\
&= -\sum_{\alpha,\beta}\langle\alpha\beta\rangle x^\alpha y^\beta,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

其中

$$\langle\alpha\beta\rangle = -\langle\beta\alpha\rangle = \wp_{\alpha+1,\beta}(u) - \wp_{\alpha,\beta+1}(u). \tag{3.54}$$

同理，我们得到

$$(t-z)P_{34} = -\sum_{\gamma,\delta}(z-t)\wp_{\gamma+1,\delta+1}z^\gamma t^\delta = \sum_{\gamma,\delta}\langle\gamma\delta\rangle z^\gamma t^\delta, \tag{3.55}$$

其中

$$\langle\gamma\delta\rangle = -\langle\delta\gamma\rangle = \wp_{\gamma+1,\delta}(u) - \wp_{\gamma,\delta+1}(u). \tag{3.56}$$

那么，公式（3.47）右端的第一项为

$$\begin{aligned}
&16HS((x-y)P_{12}(t-z)P_{34}) = -16H\sum S(\langle\alpha\beta\rangle\langle\gamma\delta\rangle x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta) \\
&= -16H\sum S\left((\langle\alpha\beta\rangle\langle\gamma\delta\rangle - \langle\alpha\gamma\rangle\langle\beta\delta\rangle + \langle\alpha\delta\rangle\langle\beta\gamma\rangle)x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta\right) \\
&= -16MH\sum\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle|\alpha\beta\gamma\delta|,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

其中

$$\begin{aligned}&\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle=\langle\alpha\beta\rangle\langle\gamma\delta\rangle-\langle\alpha\gamma\rangle\langle\beta\delta\rangle+\langle\alpha\delta\rangle\langle\beta\gamma\rangle\\&=(\wp_{\alpha+1,\beta}(u)-\wp_{\alpha,\beta+1}(u))(\wp_{\gamma+1,\delta}(u)-\wp_{\gamma,\delta+1}(u))\\&-(\wp_{\alpha+1,\gamma}(u)-\wp_{\alpha,\gamma+1}(u))(\wp_{\beta+1,\delta}(u)-\wp_{\beta,\delta+1}(u))\\&+(\wp_{\alpha+1,\delta}(u)-\wp_{\alpha,\delta+1}(u))(\wp_{\beta+1,\gamma}(u)-\wp_{\beta,\gamma+1}(u)),\end{aligned}\tag{3.58}$$

关于 α、β、γ、δ 完全反对称，并且

$$|\alpha\beta\gamma\delta|=\frac{1}{M}\begin{vmatrix}x^\alpha&y^\alpha&z^\alpha&t^\alpha\\x^\beta&y^\beta&z^\beta&t^\beta\\x^\gamma&y^\gamma&z^\gamma&t^\gamma\\z^\delta&y^\delta&z^\delta&t^\delta\end{vmatrix}.\tag{3.59}$$

公式（3.47）右端的第二项具有相同的结构。因此我们定义

$$\begin{aligned}f_{12}&=\sum_{\alpha=0}^{g}\left[2\lambda_{2\alpha}+\lambda_{2\alpha+1}(x+y)\right]x^\alpha y^\alpha\\&=\sum_{\alpha=0}^{g}\left[2\lambda_{2\alpha}x^\alpha y^\alpha+\lambda_{2\alpha+1}(x^{\alpha+1}y^\alpha+x^\alpha y^{\alpha+1})\right]=\sum_{\alpha,\beta}b_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta,\end{aligned}\tag{3.60}$$

其中

$$b_{\alpha\alpha}=2\lambda_{2\alpha},b_{\alpha,\alpha+1}=b_{\alpha+1,\alpha}=\lambda_{2\alpha+1},\ \text{Others}=0.\tag{3.61}$$

在这种情况下，我们构造

$$(x-y)f_{12}=\sum_{\alpha,\beta}(x-y)b_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta=\sum_{\alpha,\beta}\left[b_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}y^\beta-b_{\alpha\beta}x^\alpha y^{\beta+1}\right]=-\sum_{\alpha,\beta}\{\alpha\beta\}\,x^\alpha y^\beta,\tag{3.62}$$

其中

$$\{\alpha\beta\}=b_{\alpha,\beta-1}-b_{\alpha-1,\beta},\tag{3.63}$$

$$\{\alpha,\alpha+1\}=-\{\alpha+1,\alpha\}=2\lambda_{2\alpha},\{\alpha,\alpha+2\}=-\{\alpha+2,\alpha\}=\lambda_{2\alpha+1},\ \text{Others}=0.\tag{3.64}$$

那么公式（3.47）右端的第二项变为

$$\begin{aligned}&S((x-y)f_{12}(t-z)f_{34})=-S\Big(\{\alpha\beta\}\{\gamma\delta\}x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta\Big)\\&=-S\Big((\{\alpha\beta\}\{\gamma\delta\}-\{\alpha\gamma\}\{\beta\delta\}+\{\alpha\delta\}\{\beta\gamma\})x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta\Big)=-M\sum\{\alpha\beta\gamma\delta\}\,|\alpha\beta\gamma\delta|,\end{aligned}\tag{3.65}$$

其中

$$\{\alpha\beta\gamma\delta\}=\{\alpha\beta\}\{\gamma\delta\}-\{\alpha\gamma\}\{\beta\delta\}+\{\alpha\delta\}\{\beta\gamma\},\tag{3.66}$$

$$\{\alpha,\alpha+1\}=-\{\alpha+1,\alpha\}=2\lambda_{2\alpha},\{\alpha,\alpha+2\}=-\{\alpha+2,\alpha\}=\lambda_{2\alpha+1},\ \text{Others}=0.\tag{3.67}$$

为了得到方程（3.47）右端的第三项，我们必须先计算对称函数 $(x-y)^2P_{12}$，并得到

$$\begin{aligned}&(x-y)^2P_{12}=\sum_{\alpha,\beta}(x-y)^2a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta\\&=\sum_{\alpha,\beta}\left[a_{\alpha\beta}x^{\alpha+2}y^\beta+a_{\alpha\beta}x^\alpha y^{\beta+2}-2a_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}y^{\beta+1}\right]=\sum_{\alpha,\beta}c_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta,\end{aligned}\tag{3.68}$$

其中

$$c_{\alpha\beta}=\wp_{\alpha-1,\beta+1}(u)-2\wp_{\alpha,\beta}(u)+\wp_{\alpha+1,\beta-1}(u).\tag{3.69}$$

然后我们计算

$$(x-y)\cdot(x-y)^2P_{12}=-\sum_{\alpha,\beta}\langle\langle\alpha\beta\rangle\rangle x^\alpha y^\beta, \tag{3.70}$$

其中

$$\langle\langle\alpha\beta\rangle\rangle=c_{\alpha,\beta-1}-c_{\alpha-1,\beta}=-(\wp_{\alpha-2,\beta+1}(u)-3\wp_{\alpha-1,\beta}(u)+3\wp_{\alpha,\beta-1}(u)-\wp_{\alpha+1,\beta-2}(u)). \tag{3.71}$$

虽然我们有

$$(t-z)f_{34}=\sum\{\gamma\delta\}\,z^\gamma t^\delta. \tag{3.72}$$

利用方程(3.70)和方程(3.72)，我们得到方程（3.47）右端的第三项，其形式为

$$\begin{aligned}&-4S((x-y)(t-z)\Big((x-y)^2P_{12}f_{34}\Big)=4S\left(\langle\langle\alpha\beta\rangle\rangle\{\gamma\delta\}\,x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta\right)\\&=4M\sum\langle\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle\rangle|\alpha\beta\gamma\delta|,\end{aligned} \tag{3.73}$$

where

$$\begin{aligned}&\langle\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle\rangle=\langle\langle\alpha\beta\rangle\rangle\{\gamma\delta\}-\langle\langle\alpha\gamma\rangle\rangle\{\beta\delta\}+\langle\langle\alpha\delta\rangle\rangle\{\beta\gamma\}\\&+\{\alpha\beta\}\langle\langle\gamma\delta\rangle\rangle-\{\alpha\gamma\}\langle\langle\beta\delta\rangle\rangle+\{\alpha\delta\}\langle\langle\beta\gamma\rangle\rangle.\end{aligned} \tag{3.74}$$

因此，最终得到以下关系

$$\begin{aligned}&\sum(\mu-1,\nu-1,\rho-1,\sigma-1)[\mu\nu\rho\sigma]\\&=-2H\sum\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle|\alpha\beta\gamma\delta|+\frac{1}{2}\sum\langle\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle\rangle|\alpha\beta\gamma\delta|-\frac{1}{8}\sum\{\alpha\beta\gamma\delta\}\,|\alpha\beta\gamma\delta|.\end{aligned} \tag{3.75}$$

4 四属超椭圆 $\wp$ 函数的微分方程

一般亏格 g 超椭圆 $\wp_{ij}(u)$ 函数的微分方程由以下关系得到

$$\begin{aligned}&\sum(\mu-1,\nu-1,\rho-1,\sigma-1)[\mu\nu\rho\sigma]\\&=-2H\sum\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle|\alpha\beta\gamma\delta|+\frac{1}{2}\sum\langle\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle\rangle|\alpha\beta\gamma\delta|-\frac{1}{8}\sum\{\alpha\beta\gamma\delta\}\,|\alpha\beta\gamma\delta|,\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中

$$(\mu\nu\rho\sigma)=S(x^\mu y^\nu z^\rho t^\sigma)=(\text{cyclic symmetrization of } x,\ y,\ z \text{ and } t), \tag{4.2}$$

$$[\mu\nu\rho\sigma]=[\mu\nu\rho\sigma]=\wp_{\mu\nu\rho\sigma}-2(\wp_{\mu\nu}\wp_{\rho\sigma}+\wp_{\mu\rho}\wp_{\nu\sigma}+\wp_{\mu\sigma}\wp_{\nu\rho}), \tag{4.3}$$

$$\{\alpha\beta\gamma\delta\}=\{\alpha\beta\}\{\gamma\delta\}-\{\alpha\gamma\}\{\beta\delta\}+\{\alpha\delta\}\{\beta\gamma\}, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}&\langle\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle\rangle=\langle\langle\alpha\beta\rangle\rangle\{\gamma\delta\}-\langle\langle\alpha\gamma\rangle\rangle\{\beta\delta\}+\langle\langle\alpha\delta\rangle\rangle\{\beta\gamma\}\\&+\{\alpha\beta\}\langle\langle\gamma\delta\rangle\rangle-\{\alpha\gamma\}\langle\langle\beta\delta\rangle\rangle+\{\alpha\delta\}\langle\langle\beta\gamma\rangle\rangle,\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle=\langle\alpha\beta\rangle\langle\gamma\delta\rangle-\langle\alpha\gamma\rangle\langle\beta\delta\rangle+\langle\alpha\delta\rangle\langle\beta\gamma\rangle, \tag{4.6}$$

$$\langle\alpha\beta\rangle=\wp_{\alpha+1,\ \beta}(u)-\wp_{\alpha,\ \beta+1}(u), \tag{4.7}$$

$$\{\alpha,\alpha+1\}=-\{\alpha+1,\alpha\}=2\lambda_{2\alpha},\{\alpha,\alpha+2\}=-\{\alpha+2,\alpha\}=\lambda_{2\alpha+1},\text{Others}=0, \tag{4.8}$$

$$\langle\langle\alpha\beta\rangle\rangle=-\Big(\wp_{\alpha-2,\beta+1}(u)-3\wp_{\alpha-1,\beta}(u)+3\wp_{\alpha,\beta-1}(u)-\wp_{\alpha+1,\beta-2}(u)\Big), \tag{4.9}$$

$$|\alpha\beta\gamma\delta| = \frac{1}{M}\begin{vmatrix} x^\alpha & y^\alpha & z^\alpha & t^\alpha \\ x^\beta & y^\beta & z^\beta & t^\beta \\ x^\gamma & y^\gamma & z^\gamma & t^\gamma \\ z^\delta & y^\delta & z^\delta & t^\delta \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x & y & z & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \tag{4.10}$$

$$H = (2200) - (2110) + 6(1111). \tag{4.11}$$

对于亏格为 g 的微分方程，每个微分方程都包含项 $[\mu\nu\rho\sigma]$= $[\wp_{\mu\nu\rho\sigma}]$= $\wp_{\mu\nu\rho\sigma} - 2(\wp_{\mu\nu}\wp_{\rho\sigma} + \wp_{\mu\rho}\wp_{\nu\sigma} + \wp_{\mu\sigma}\wp_{\nu\rho})$，它们出现在式（4.1）的左侧。然后，$[\mu\nu\rho\sigma](g \geqslant \mu \geqslant \nu \geqslant \rho \geqslant \sigma \geqslant 1)$ 取值于区域 $[gggg] \sim [1111]$。因此，我们比较式（4.1）两侧在区域 $(g-1, g-1, g-1, g-1) \sim (0000)$中的 $(\mu-1, \nu-1, \rho-1, \sigma-1)$ 的系数，得到 ${}_gH_4 = {}_{g+3}C_4$ 个微分方程。对于 $g = 2$情形，我们有 ${}_5C_4 = 5$ 个微分方程。对于 $g = 3$ 情形，我们有 ${}_6C_4 = 15$ 个微分方程。对于 $g = 4$ 情形，我们有 ${}_7C_4 = 35$ 个微分方程。

为了求出一般 $|\alpha\beta\gamma\delta|$ 的微分方程，我们必须知道方程（4.1）右端的 $|\alpha\beta\gamma\delta|$ 中包含多少个 $(\mu-1$、$\nu-1$、$\rho-1$、$\sigma-1)$。我们知道，$(g-1$、$g-1$、$g-1$、$g-1)$ 是关于 x、y、z、t 的 $(4g-4)$ 次多项式，而$|\alpha\beta\gamma\delta|(\alpha > \beta > \gamma > \delta)$ 是 $(\alpha+\beta+\gamma+\delta-6)$ 次多项式。利用 $\alpha - 1 \geqslant \beta$、$\alpha - 2 \geqslant \gamma$、 $\alpha - 3 \geqslant \delta$，我们得到 $4\alpha - 6 \geqslant (\alpha+\beta+\gamma+\delta)$。因此，如果 $|\alpha\beta\gamma\delta|$ 包含$(\mu-1$、$\nu-1$、$\rho-1$、$\sigma-1)$，则它必须满足 $\alpha+\beta+\gamma+\delta-6 \leqslant 4\alpha-12 \leqslant 4g-4$，由此得到$\alpha \leqslant g+2$。那么只需考虑区域 $g+2 \geqslant \alpha > \beta > \gamma > \delta \geqslant 0$ 内的 $|\alpha\beta\gamma\delta|$。也就是说，只需计算方程（4.1）右端中 $|\alpha\beta\gamma\delta|$ 的 ${}_{g+3}C_4$ 项。

对于式（4.1）右端的第一项，其形式为

$$\begin{aligned} \langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle &= (\wp_{\alpha+1,\beta}(u) - \wp_{\alpha,\beta+1}(u))(\wp_{\gamma+1,\delta}(u) - \wp_{\gamma,\delta+1}(u)) \\ &- (\wp_{\alpha+1,\gamma}(u) - \wp_{\alpha,\gamma+1}(u))(\wp_{\beta+1,\delta}(u) - \wp_{\beta,\delta+1}(u)) \\ &+ (\wp_{\alpha+1,\delta}(u) - \wp_{\alpha,\delta+1}(u))(\wp_{\beta+1,\gamma}(u) - \wp_{\beta,\gamma+1}(u)), \end{aligned} \tag{4.12}$$

其中 $\alpha > \beta > \gamma > \delta$。若令 $\alpha = g+1$，利用 $\wp_{g+1,\ *}(u) = 0$，可得 $\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle = 0$。因此，只需考虑范围 $g \geqslant \alpha > \beta > \gamma > \delta \geqslant 0$内的 $\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle$，也就是说，只需为式（4.1）右端的第一项计算 ${}_{g+1}C_4$ 项。在 $g = 2$ 情况下，必须计算 ${}_3C_4 = 0$ 项。在 $g = 3$ 情况下，必须计算${}_4C_4 = 1$ 项。在 $g = 4$ 情况下，必须计算 ${}_5C_4 = 5$ 项。

4.1 推导双曲函数 $\wp_{ij}(u)$ 的四属微分方程的演示

在此，我们演示如何推导四属双曲超椭圆 $\wp_{ij}(u)$ 函数的微分方程。

式（4.1）右端的第一项

We 首先将式（4.1）右端的非规则项计算为如下形式

$$-2H\sum\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle|\alpha\beta\gamma\delta|, \tag{4.13}$$

其中

$$H = (2200) - (2110) + 6(1111),$$

非零 $\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle$ 有五种情形，分别记为 $\Delta_2 = -\langle 4321\rangle$、 $\Delta_3 = \langle 4320\rangle$、$\Delta_4 = \langle 4310\rangle$、$\Delta_5 = \langle 4210\rangle$、 $\Delta_7 = -\langle 3210\rangle$。它们的显式形式如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}): \Delta_2 = -\langle 4321\rangle &= -\wp_{44}(u)\wp_{22}(u) + \wp_{42}(u)^2 + \wp_{44}(u)\wp_{31}(u) - \wp_{43}(u)\wp_{41}(u) \\ &+ \wp_{43}(u)\wp_{32}(u) - \wp_{42}\wp_{33}(u), \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\mathbf{b}): \Delta_3 = \langle 4320\rangle = \wp_{44(u)}\wp_{21}(u) - \wp_{42}(u)\wp_{41}(u) - \wp_{43}(u)\wp_{31}(u) + \wp_{41}(u)\wp_{33}, \tag{4.15}$$

$$\mathbf{c}):\Delta_4=\langle 4310\rangle=\wp_{44}(u)\wp_{11}(u)-\wp_{41}(u)^2-\wp_{42}(u)\wp_{31}(u)+\wp_{41}(u)\wp_{32}(u), \tag{4.16}$$

$$\mathbf{d}):\Delta_5=\langle 4210\rangle=\wp_{43}(u)\wp_{11}(u)-\wp_{41}(u)\wp_{31}(u)-\wp_{42}(u)\wp_{21}(u)+\wp_{41}(u)\wp_{22}(u), \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}):\Delta_7=&-\langle 3210\rangle=-\wp_{33}(u)\wp_{11}(u)+\wp_{31}(u)^2+\wp_{42}(u)\wp_{11}(u)-\wp_{41}(u)\wp_{21}(u)\\&+\wp_{32}(u)\wp_{21}(u)-\wp_{31}(u)\wp_{22}(u).\end{aligned} \tag{4.18}$$

这些非规则项出现在下列微分方程的右端。a) 使用 $|4321|=(1111)$, Δ_2 项出现在 $-2H\langle 4321\rangle|4321|=2\Delta_2 H\cdot(1111)$ 中。于是得到

$$\begin{aligned}&2\Delta_2 H\cdot(1111)=2\Delta_2((2200)-(2110)+6(1111))\cdot(1111)\\&=2\Delta_2((2200)\cdot(1111)-(2110)\cdot(1111)+6(1111)\cdot(1111))\\&=2\Delta_2((3311)-(3221)+6(2222)),\end{aligned} \tag{4.19}$$

利用 $(2200)\cdot(1111)=(3311)$、$(2110)\cdot(1111)=(3221)$、$(1111)\cdot(1111)=(2222)$。因此，在右端，$[\wp_{4422}(u)]$、$[\wp_{4332}(u)]$、$[\wp_{3333}(u)]$、Δ_2 以如下形式出现

$$\mathbf{8})\ [\wp_{4422}]=2\Delta_2+\cdots, \tag{4.20}$$

$$\mathbf{12})\ [\wp_{4332}]=-2\Delta_2+\cdots, \tag{4.21}$$

$$\mathbf{21})\ [\wp_{3333}]=12\Delta_2+\cdots. \tag{4.22}$$

b) 利用 $|4320|=(1110)$, Δ_3 项出现在 $-2H\langle 4320\rangle|4320|=-2\Delta_3 H\cdot(1110)$ 中。于是得到

$$\begin{aligned}&-2\Delta_3 H\cdot(1110)=-2\Delta_3((2200)-(2110)+6(1111))\cdot(1110)\\&=-2\Delta_3((2200)\cdot(1110)-(2110)\cdot(1110)+6(1111)\cdot(1110))\\&=-2\Delta_3((3310)-(3220)-(3211)+3(2221)),\end{aligned} \tag{4.23}$$

利用 $(2200)\cdot(1110)=(3310)+(3211)$、$(2110)\cdot(1110)=2(3211)+3(2221)+(3220)$、$(1111)\cdot(1110)=(2221)$。因此，在右端，$[\wp_{4421}(u)]$、$[\wp_{4331}(u)]$、$[\wp_{4322}(u)]$、$[\wp_{3332}(u)]$、$\Delta_3$ 以如下形式出现

$$\mathbf{9})\ [\wp_{4421}]=-2\Delta_3+\cdots, \tag{4.24}$$

$$\mathbf{13})\ [\wp_{4331}]=2\Delta_3+\cdots, \tag{4.25}$$

$$\mathbf{14})\ [\wp_{4322}]=2\Delta_3+\cdots, \tag{4.26}$$

$$\mathbf{22})\ [\wp_{3332}]=-6\Delta_3+\cdots. \tag{4.27}$$

c) 使用 $|4310|=(1100)$ 后，Δ_4 项出现在 $-2H\langle 4310\rangle|4310|=-2\Delta_4 H\cdot(1100)$ 中。由此得到

$$\begin{aligned}&-2\Delta_4 H\cdot(1100)=-2\Delta_4((2200)-(2110)+6(1111))\cdot(1100)\\&=-2\Delta_4((2200)\cdot(1100)-(2110)\cdot(1100)+6(1111)\cdot(1100))\\&=-2\Delta_4((3300)-3(3111)-3(2220)+3(2211)),\end{aligned} \tag{4.28}$$

通过使用 $(2200)\cdot(1100)=(3300)+(3210)+(2211)$, $(2110)\cdot(1100)=(3210)+3(2220)+4(2211)+3(3111)$, $(1111)\cdot(1100)=(2211)$。因此，在右端 $[\wp_{4411}(u)]$, $[\wp_{4222}(u)]$,$[\wp_{3331}(u)]$, $[\wp_{3322}(u)]$, Δ_4 以如下形式出现

$$\mathbf{10})\ [\wp_{4411}]=-2\Delta_4+\cdots, \tag{4.29}$$

$$\mathbf{17})\ [\wp_{4222}]=6\Delta_4+\cdots, \tag{4.30}$$

$$\mathbf{23})\ [\wp_{3331}]=6\Delta_4+\cdots, \tag{4.31}$$

$$\mathbf{24})\ [\wp_{3322}] = -6\Delta_4 + \cdots . \tag{4.32}$$

d) 使用 $|4210| = (1000)$ 后， Δ_5 项出现在 $-2H\langle 4210\rangle|4210| = -2\Delta_5 H\cdot(1000)$ 中。于是我们得到

$$\begin{aligned} &-2\Delta_5 H\cdot(1100) = -2\Delta_4((2200)-(2110)+6(1111))\cdot(1000)\\ &= -2\Delta_5((2200)\cdot(1000)-(2110)\cdot(1000)+6(1111)\cdot(1000))\\ &= -2\Delta_5((3200)-(3110)-(2210)+3(2111)), \end{aligned} \tag{4.33}$$

通过使用 $(2200)\cdot(1000) = (3200)+(2210)$, $(2110)\cdot(1000) = (3110)+2(2210)+3(2111)$, $(1111)\cdot(1000) = (2111)$。因此，在右端， $[\wp_{4311}(u)]$, $[\wp_{4221}(u)]$, $[\wp_{3321}(u)]$,$[\wp_{3222}(u)]$, Δ_5 以如下形式出现

$$\mathbf{16})\ [\wp_{4311}] = -2\Delta_5 + \cdots , \tag{4.34}$$
$$\mathbf{18})\ [\wp_{4221}] = 2\Delta_5 + \cdots , \tag{4.35}$$
$$\mathbf{25})\ [\wp_{3321}] = 2\Delta_5 + \cdots , \tag{4.36}$$
$$\mathbf{27})\ [\wp_{3222}] = -6\Delta_5 + \cdots . \tag{4.37}$$

e) 通过使用 $|3210| = 1$， Δ_7 项出现在 $-2H\langle 3210\rangle|3210| = 2\Delta_7 H\cdot 1$ 中。然后我们得到

$$2\Delta_7 H\cdot 1 = 2\Delta_7((2200)-(2110)+6(1111)). \tag{4.38}$$

因此，在右端， $[\wp_{3311}(u)]$, $[\wp_{3211}(u)]$, $[\wp_{2222}(u)]$, Δ_7 以如下形式出现

$$\mathbf{26})\ [\wp_{3311}] = 2\Delta_7 + \cdots , \tag{4.39}$$
$$\mathbf{28})\ [\wp_{3221}] = -2\Delta_7 + \cdots , \tag{4.40}$$
$$\mathbf{31})\ [\wp_{2222}] = 12\Delta_7 + \cdots . \tag{4.41}$$

接下来，我们给出由 $(\mu\nu\rho\sigma)$组合而成的表达式列表 $|\alpha\beta\gamma\delta|$ 。

1)$|6543| = (3333)$, 2)$|6542| = (3332)$, 3)$|6541| = (3331)+(3322)$,
4)$|6540| = (3330)+(3321)+(3222)$, 5)$|6532| = (3322)$, 6)$|6531| = (3321)+2(3222)$,
7)$|6530| = (3320)+(3311)+2(3221)+3(2222)$, 8)$|6521| = (3311)+(3221)+2(2222)$,
9)$|6520| = (3310)+(3220)+2(3211)+3(2221)$,
10)$|6510| = (3300)+(3210)+(3111)+(2220)+2(2211)$,11)$|6432| = (3222)$,
12)$|6431| = (3221)+3(2222)$, 13)$|6430| = (3220)+(3211)+3(2221)$,
14)$|6421| = (3211)+2(2221)$, 15)$|6420| = (3210)+2(3111)+2(2220)+4(2211)$,
16)$|6410| = (3200)+(3110)+2(2210)+3(2111)$, 17)$|6321| = (3111)+(2211)$,
18)$|6320| = (3110)+(2210)+3(2111)$, 19)$|6310| = (3100)+(2200)+2(2110)+3(1111)$,
20)$|6210| = (3000)+(2100)+(1110)$, 21)$|5432| = (2222)$, 22)$|5431| = (2221)$,
23)$|5430| = (2220)+(2211)$, 24)$|5421| = (2211)$, 25)$|5420| = (2210)+2(2111)$,
26)$|5410| = (2200)+(2110)+2(1111)$, 27)$|5321| = (2111)$, 28)$|5320| = (2110)+3(1111)$,
29)$|5310| = (2100)+2(1110)$, 30)$|5210| = (2000)+(1100)$, 31)$|4321| = (1111)$,
32)$|4320| = (1110)$, 33)$|4310| = (1100)$, 34)$|4210| = (1000)$, 35)$|3210| = 1$.

我们将左侧项、右端的第一项、右端的第二项以及右端的第三项记为以下形式

$$(\text{L.H.S.}) = \sum(\mu-1,\nu-1,\rho-1,\sigma-1)[\mu\nu\rho\sigma], \tag{4.42}$$

$$(\text{F.R.H.S}) = -2H\sum\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle|\alpha\beta\gamma\delta|, \tag{4.43}$$

$$(\text{S.R.H.S}) = \frac{1}{2}\sum\langle\langle\alpha\beta\gamma\delta\rangle\rangle|\alpha\beta\gamma\delta|, \tag{4.44}$$

$$(\text{T.R.H.S}) = -\frac{1}{8}\sum\{\alpha\beta\gamma\delta\}\,|\alpha\beta\gamma\delta|. \tag{4.45}$$

接下来，我们逐步计算每个微分方程。

1) coefficient of (3333):

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3333): $|6543| = \underline{(3333)}$,

（左端）$=[\wp_{4444}(u)] = \wp_{4444}(u) - 6\wp_{44}(u)^2$,

（第一右端）$=0$,

（第二右端）$= \frac{1}{2}\langle\langle 6543\rangle\rangle = \lambda_9\wp_{43}(u) + \lambda_8\wp_{44}(u)$, （第三右端）

$=-\frac{1}{8}\{6543\} = \frac{1}{8}\lambda_7\lambda_9$, （微分方程）

$$\wp_{4444}(u) - 6\wp_{44}(u)^2 = \lambda_9\wp_{43}(u) + \lambda_8\wp_{44}(u) + \frac{1}{8}\lambda_7\lambda_9。$$

2) coefficient of (3332):

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3332): $|6542| = \underline{(3332)}$,

（左端）$=[\wp_{4443}(u)] = \wp_{4443}(u) - 6\wp_{44}(u)\wp_{43}(u)$,

（第一右端）$=0$, （第二右端）

$= \frac{1}{2}\langle\langle 6542\rangle\rangle = \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{42}(u) - \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{33}(u) + \lambda_8\wp_{43}(u)$, （第三右端）$=-\frac{1}{8}\{6542\} = 0$,

（微分方程） $\wp_{4443}(u) - 6\wp_{44}(u)\wp_{43}(u) = \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{42}(u) - \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{33}(u) + \lambda_8\wp_{43}(u)。$

3） (3331) 的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3331): $|6541| = \underline{(3331)+(3322)}$,

（左端）$=[\wp_{4442}(u)] = \wp_{4442}(u) - 6\wp_{44}(u)\wp_{42}(u)$,

（第一右端）$=0$, （第二右端）

$= \frac{1}{2}\langle\langle 6541\rangle\rangle = \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{41}(u) - \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{32}(u) + \lambda_8\wp_{42}(u)$, （第三右端）

$=-\frac{1}{8}\{6541\} = 0$, （微分方程）：

$$\wp_{4442}(u) - 6\wp_{44}(u)\wp_{42}(u) = \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{41}(u) - \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{32}(u) + \lambda_8\wp_{42}(u)。$$

4) (3330)的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3330): $|6540| = \underline{(3330) +(3321)+(3222)}$,

(左端)$=[\wp_{4441}(u)] = \wp_{4441}(u) - 6\wp_{44}(u)\wp_{41}(u)$,

(第一右端)$=0$, (第二右端)

$= \frac{1}{2}\langle\langle 6540\rangle\rangle = -\frac{1}{2}\lambda_9\wp_{31}(u) + \lambda_8\wp_{41}(u)$, (第三右端)

$=-\frac{1}{8}\{6540\} = 0$, (微分方程):

$$\wp_{4441}(u) - 6\wp_{44}(u)\wp_{41}(u) = -\frac{1}{2}\lambda_9\wp_{31}(u) + \lambda_8\wp_{41}(u).$$

5) (3322)的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3322): $|6541| = (3331) + \underline{(3322)}$、 $|6532| = \underline{(3322)}$、

（左端）=$[\wp_{4433}(u)] = \wp_{4433}(u) - 4\wp_{43}(u)^2 - 2\wp_{44}(u)\wp_{33}(u)$,
(　　第一右端　=0(第三右端)
(S.R.H.(6541)}-(6532)) = 0,
$\frac{1}{2}(\langle\langle 6541\rangle\rangle + \langle\langle 6532\rangle\rangle) = \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{41}(u) - \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{32}(u) + \lambda_8\wp_{42}(u) + \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{43}(u)$,
$\frac{1}{8}$
(Diff. Eq.): $\wp_{4433}(u) - 4\wp_{43}(u)^2 - 2\wp_{44}(u)\wp_{33}(u) = \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{41}(u) - \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{32}(u) + \lambda_8\wp_{42}(u) + \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{43}(u)$.

6) (3321)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3321): $|6540| = (3330) + \underline{(3321)} + (3222)$, $|6531| = \underline{(3321)} + 2(3222)$,
(左端)=$[\wp_{4432}(u)] = \wp_{4432}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{42}(u) - 2\wp_{44}(u)\wp_{32}(u)$,
(第一右端)=0,
(第二右端)= $\frac{1}{2}(\langle\langle 6540\rangle\rangle + \langle\langle 6531\rangle\rangle) = -\frac{1}{2}\lambda_9\wp_{31}(u) + \lambda_8\wp_{41}(u) + \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{42}(u)$,
(第三右端)=$-\frac{1}{8}(\{6540\} + \{6531\}) = 0$,
(微分方程): $\wp_{4432}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{42}(u) - 2\wp_{44}(u)\wp_{32}(u) = -\frac{1}{2}\lambda_9\wp_{31}(u) + \lambda_8\wp_{41}(u) + \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{42}(u)$。

7) (3320)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3320): $|6530| = (3320) + (3310) + 2(3221) + 3(2222)$,
(左端)=$[\wp_{4431}(u)] = \wp_{4431}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{41}(u) - 2\wp_{44}(u)\wp_{31}(u)$,
（第一右端）=0,
（第二右端）= $\frac{1}{2}\langle\langle 6530\rangle\rangle = \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{41}(u)$,　（第三右端）
=$-\frac{1}{8}\{6530\} = 0$,　（微分方程）：
$\wp_{4431}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{41}(u) - 2\wp_{44}(u)\wp_{31}(u) = \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{41}(u)$。

8） (3311)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3311): $|6530| = (3320) + \underline{(3311)} + 2(3221) + 3((2222)$,　$|6521| = \underline{(3311)} + (3221) + 2(2222)$,
（左端）=$[\wp_{4422}(u)] = \wp_{4422}(u) - 4\wp_{42}(u)^2 - 2\wp_{44}(u)\wp_{22}(u)$,
（第一右端）=$2\Delta_2$,　（第二右端）
= $\frac{1}{2}(\langle\langle 6530\rangle\rangle + \langle\langle 6521\rangle\rangle) = \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{41}(u)$,　（第三右端）
=$-\frac{1}{8}(\{6530\} + \{6521\}) = 0$,　（微分方程）：
$\wp_{4422}(u) - 4\wp_{42}(u)^2 - 2\wp_{44}(u)\wp_{22}(u) = 2\Delta_2 + \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{41}(u)$。

(3310)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3310):　$|6520| = (3310) + (3220) + 2(3211) + 3(2221)$,
（左端）=$[\wp_{4421}(u)] = \wp_{4421}(u) - 4\wp_{42}(u)\wp_{41}(u) - 2\wp_{44}(u)\wp_{21}(u)$,
(第一右端)=$-2\Delta_3$,
(第二右端)= $\frac{1}{2}\langle\langle 6520\rangle\rangle = 0$,
(第三右端)=$-\frac{1}{8}\{6520\} = 0$,

(微分方程): $\wp_{4421}(u) - 4\wp_{42}(u)\wp_{41}(u) - 2\wp_{44}(u)\wp_{21}(u) = -2\Delta_3$.

10) (3300)的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3300): $|6510| = (3300) + (3210) + (3111) + (2220) + 2(2211)$,
（左端）$=[\wp_{4411}(u)] = \wp_{4411}(u) - 4\wp_{41}(u)^2 - 2\wp_{44}(u)\wp_{11}(u)$, （第一右端）$=-2\Delta_4$,
（第二右端）$= \frac{1}{2}\langle\langle 6510\rangle\rangle = 0$, （第三右端）$=-\frac{1}{8}\{6510\} = 0$, （微分方程）：

$\wp_{4411}(u) - 4\wp_{41}(u)^2 - 2\wp_{44}(u)\wp_{11}(u) = -2\Delta_4$。

11) coefficient of (3222):
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3222): $|6540| = (3330) + (3321) + \underline{(3222)}$、$|6531| = (3321) + \underline{2(3222)}$、
$|6432| = (3222)$,
（左端）$=[\wp_{4333}(u)] = \wp_{4333}(u) - 6\wp_{43}(u)\wp_{33}(u)$, （第一右端）$=0$, （第二右端）
$= \frac{1}{2}(\langle\langle 6540\rangle\rangle + 2\langle\langle 6531\rangle\rangle + \langle\langle 6432\rangle\rangle)$

$= \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{31}(u) - \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{22}(u) + \lambda_8\wp_{41}(u) + \lambda_7\wp_{42}(u) + \lambda_6\wp_{43}(u) - \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{44}(u)$, （第三右端）$=-\frac{1}{8}(\{6540\} + 2\{6531\} + \{6432\}) = -\frac{1}{4}\lambda_4\lambda_9$, （微分方程）：

$\wp_{4333}(u) - 6\wp_{43}(u)\wp_{33}(u) = \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{31}(u) - \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{22}(u) + \lambda_8\wp_{41}(u) + \lambda_7\wp_{42}(u)$

$+\lambda_6\wp_{43}(u) - \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{44}(u) - \frac{1}{4}\lambda_4\lambda_9$。

12) .....的系数 (3221):
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3221): $|6530| = (3320) + (3311) + \underline{2(3221)} + 3(2222)$, $|6521| = (3311) + \underline{(3221)} + 2(2222)$, $|6431| = (3221) + 3(2222)$,
（左端）$=[\wp_{4332}(u)] = \wp_{4332}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{32}(u) - 2\wp_{42}(u)\wp_{33}(u)$, （第一右端）
$=-2\Delta_2$, （第二右端）
$= \frac{1}{2}(2\langle\langle 6530\rangle\rangle + \langle\langle 6521\rangle\rangle + \langle\langle 6431\rangle\rangle) = -\lambda_9\wp_{21}(u) + \lambda_7\wp_{41}(u) + \lambda_6\wp_{42}(u)$, （第三右端）$=-\frac{1}{8}(2\{6530\} + \{6521\} + \{6431\}) = -\frac{1}{8}\lambda_3\lambda_9$, （微分方程）：

$\wp_{4332}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{32}(u) - 2\wp_{42}(u)\wp_{33}(u) = -2\Delta_2 - \lambda_9\wp_{21}(u) + \lambda_7\wp_{41}(u)$
$+\lambda_6\wp_{42}(u) - \frac{1}{8}\lambda_3\lambda_9$。

13） (3220)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3220): $|6520| = (3310) + \underline{(3220)} + 2(3211) + 3(2221)$、$|6430| = \underline{(3220)} + (3211) + 3(2221)$,
（左端）$=[\wp_{4331}(u)] = \wp_{4331}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{31}(u) - 2\wp_{41}(u)\wp_{33}(u)$,
（第一右端）$=2\Delta_3$,
（第二右端）$= \frac{1}{2}(\langle\langle 6520\rangle\rangle + \langle\langle 6430\rangle\rangle) = \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{11}(u) + \lambda_6\wp_{41}(u)$, （第三右端）
$=-\frac{1}{8}(\{6520\} + \{6430\}) = 0$, （微分方程）：

$\wp_{4331}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{31}(u) - 2\wp_{41}(u)\wp_{33}(u) = 2\Delta_3 + \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{11}(u) + \lambda_6\wp_{41}(u)$。

14) 包含 (3211) 的 (3211) 的系数: $|6520| = (3310) + (3220) + \underline{2(3211)} + 3(2221)$、
$|6421| = \underline{(3211)} + 2(2221)$、$|6430| = (3220) + \underline{(3211)} + 3(2221)$,

（左端）$=[\wp_{4322}(u)]=\wp_{4322}(u)-4\wp_{42}(u)\wp_{32}(u)-2\wp_{43}(u)\wp_{22}(u)$，（第一右端）$=2\Delta_3$，（第二右端）$=\frac{1}{2}(2\langle\langle 6520\rangle\rangle+\langle\langle 6421\rangle\rangle+\langle\langle 6430\rangle\rangle)=-\lambda_9\wp_{11}(u)+\lambda_6\wp_{41}(u)+\frac{1}{2}\lambda_5\wp_{42}(u)$，（第三右端）$=-\frac{1}{8}(2\{6520\}+\{6421\}+\{6430\})=-\frac{1}{4}\lambda_2\lambda_9$，（微分方程）：

$$\wp_{4322}(u)-4\wp_{42}(u)\wp_{32}(u)-2\wp_{43}(u)\wp_{22}(u)=2\Delta_3-\lambda_9\wp_{11}(u)+\lambda_6\wp_{41}(u)+\frac{1}{2}\lambda_5\wp_{42}(u)-\frac{1}{4}\lambda_2\lambda_9。$$

15) (3210)的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3210): $|6510|=(3300)+\underline{(3210)}+(3111)+(2220)+2(2211)$, $|6420|=\underline{(3210)}+2(3111)+2(2220)+4(2211)$,

(L.H.S.)$=[\wp_{4321}(u)]=\wp_{4321}(u)-2\wp_{43}(u)\wp_{21}(u)-2\wp_{42}(u)\wp_{31}(u)-2\wp_{41}(u)\wp_{32}(u)$, (第一右端)$=0$,

(第二右端)$=\frac{1}{2}(\langle\langle 6510\rangle\rangle+\langle\langle 6420\rangle\rangle)=\frac{1}{2}\lambda_5\wp_{41}(u)$,

(第三右端)$=-\frac{1}{8}(\{6510\}+\{6420\})=-\frac{1}{8}\lambda_1\lambda_9$,

（微分方程）：$\wp_{4321}(u)-2\wp_{43}(u)\wp_{21}(u)-2\wp_{42}(u)\wp_{31}(u)-2\wp_{41}(u)\wp_{32}(u)=\frac{1}{2}\lambda_5\wp_{41}(u)-\frac{1}{8}\lambda_1\lambda_9。$

16) (3200)的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3200): $|6410|=(3200)+(3110)+2(2210)+3(2111)$,

（左端）$=[\wp_{4311}(u)]=\wp_{4311}(u)-4\wp_{41}(u)\wp_{31}(u)-2\wp_{43}(u)\wp_{11}(u)$,

（第一右端）$=-2\Delta_5$,

（第二右端）$=\frac{1}{2}\langle\langle 6410\rangle\rangle=0$，（第三右端）$=-\frac{1}{8}\{6410\}=-\frac{1}{4}\lambda_0\lambda_9$,

（微分方程）：

$$\wp_{4311}(u)-4\wp_{41}(u)\wp_{31}(u)-2\wp_{43}(u)\wp_{11}(u)=-2\Delta_5-\frac{1}{4}\lambda_0\lambda_9。$$

17) (3111)的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$，其中包含 (3111): $|6510|=(3300)+(3210)+\underline{(3111)}+(2222)+2(2211)$，$|6420|=(3210)+2(3111)+2(2220)+4(2211)$，$|6321|=\underline{(3111)}+(2211)$,

（左端）$=[\wp_{4222}(u)]=\wp_{4222}(u)-6\wp_{42}(u)\wp_{22}(u)$,

（第一右端）$=6\Delta_4$,

（第二右端）$=\frac{1}{2}(\langle\langle 6510\rangle\rangle+2\langle\langle 6420\rangle\rangle+\langle\langle 6321\rangle\rangle)=\lambda_5\wp_{41}(u)+\lambda_4\wp_{42}(u)-\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{43}(u)+\lambda_2\wp_{44}(u)$，（第三右端）$=-\frac{1}{8}(\{6510\}+2\{6420\}+\{6421\})=-\frac{1}{4}\lambda_1\lambda_9$，（微分方程）：$\wp_{4222}(u)-6\wp_{42}(u)\wp_{22}(u)=6\Delta_4+\lambda_5\wp_{41}(u)+\lambda_4\wp_{42}(u)-\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{43}(u)+\lambda_2\wp_{44}(u)-\frac{1}{4}\lambda_1\lambda_9。$

18) coeffi系数o 的3(1)10：

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3110): $|6410|=(3200)+\underline{(3110)}+2(2210)+3(2111)$, $|6320|=\underline{(3110)}+(2210)+3(2111)$,

(左端)$=[\wp_{4221}(u)]=\wp_{4221}(u)-4\wp_{42}(u)\wp_{21}(u)-2\wp_{41}(u)\wp_{22}(u)$,

(第一右端)$=2\Delta_5$,

(第二右端)$=\frac{1}{2}(\langle\langle 6410\rangle\rangle+\langle\langle 6320\rangle\rangle)=\lambda_4\wp_{41}(u)+\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{44}(u)$,

（第三右端）$=-\frac{1}{8}(\{6410\}+\{6320\})=-\frac{1}{4}\lambda_0\lambda_9$,

（微分方程）： $\wp_{4221}(u)-4\wp_{42}(u)\wp_{21}(u)-2\wp_{41}(u)\wp_{22}(u)=2\Delta_5+\lambda_4\wp_{41}(u)+\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{44}(u)-\frac{1}{4}\lambda_0\lambda_9$。

19) (3100)的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3100): $|6310|=(3100)+(2200)+2(2110)+3(1111)$,

（左端）$=[\wp_{4211}(u)]=\wp_{4211}(u)-4\wp_{41}(u)\overline{\wp_{21}(u)}-2\wp_{42}(u)\wp_{11}(u)$,

（第一右端）$=0$,

（第二右端）$=\frac{1}{2}\langle\langle 6310\rangle\rangle=\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{41}(u)+\lambda_0\wp_{44}(u)$,

（第三右端）$=-\frac{1}{8}\{6310\}=0$,

（微分方程）： $\wp_{4211}(u)-4\wp_{41}(u)\wp_{21}(u)-2\wp_{42}(u)\wp_{11}(u)=\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{41}(u)+\lambda_0\wp_{44}(u)$。

20） (3000)的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (3000): $|6210|=(3000)+(2100)+(1110)$,

（左端）$=[\wp_{4111}(u)]=\wp_{4111}(u)-6\wp_{41}(u)\overline{\wp_{11}(u)}$,

(第一右端)=0,

(第二右端)$=\frac{1}{2}\langle\langle 6210\rangle\rangle=\lambda_2\wp_{41}(u)-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{42}(u)+\lambda_0\wp_{43}(u)$,

(第三右端)$=-\frac{1}{8}\{6210\}=0$,

(微分方程): $\wp_{4111}(u)-6\wp_{41}(u)\wp_{11}(u)=\lambda_2\wp_{41}(u)-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{42}(u)+\lambda_0\wp_{43}(u)$.

21) (2222)的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (2222): $|6530|=(3320)+(3311)+2(3221)+\underline{3(2222)}$, $|6521|=(3311)+(3221)+2\underline{(2222)}$, $|6431|=(3221)+3(2222)$, $|5432|=(2222)$,

（左端）$=[\wp_{3333}(u)]=\wp_{3333}(u)-6\overline{\wp_{33}(u)^2}$, （第一右端）$=12\Delta_2$, （第二右端）

$=\frac{1}{2}(3\langle\langle 6530\rangle\rangle+2\langle\langle 6521\rangle\rangle+3\langle\langle 6431\rangle\rangle+\langle\langle 5432\rangle\rangle)$

$=-3\lambda_9\wp_{21}(u)+4\lambda_8\wp_{31}(u)-3\lambda_8\wp_{22}(u)+\lambda_7\wp_{32}(u)+\lambda_6\wp_{33}(u)+\lambda_5\wp_{43}(u)-3\lambda_4\wp_{44}(u)$, （第三右端）$=-\frac{1}{8}(3\{6530\}+2\{6521\}+3\{6431\}+\{5432\})=\frac{1}{8}\lambda_5\lambda_7-\frac{1}{2}\lambda_4\lambda_8-\frac{3}{8}\lambda_3\lambda_9$, （微分方程）： $\wp_{3333}(u)-6\wp_{33}(u)^2=12\Delta_2-3\lambda_9\wp_{21}(u)+4\lambda_8\wp_{31}(u)-3\lambda_8\wp_{22}(u)+\lambda_7\wp_{32}(u)+\lambda_6\wp_{33}(u)+\lambda_5\wp_{43}(u)-3\lambda_4\wp_{44}(u)+\frac{1}{8}\lambda_5\lambda_7-\frac{1}{2}\lambda_4\lambda_8-\frac{3}{8}\lambda_3\lambda_9$。

22） (2221)的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (2221): $|6520|=(3310)+(3220)+2(3211)+\underline{3(2221)}$、 $|6430|=(3220)+(3211)+3(2221)$、 $|6421|=(3211)+2(2221)$、 $|5431|=\underline{(2221)}$,

（左端）$=\overline{[\wp_{3332}(u)]}=\wp_{3332}(u)-6\wp_{33}(u)\wp_{32}(u)$,

(第一右端)$=-6\Delta_3$, (第二右端)$=\frac{1}{2}(3\langle\langle 6520\rangle\rangle+3\langle\langle 6430\rangle\rangle+2\langle\langle 6421\rangle\rangle+\langle\langle 5431\rangle\rangle)$

$=-\frac{3}{2}\lambda_9\wp_{11}(u)-2\lambda_8\wp_{21}(u)+\frac{3}{2}\lambda_7\wp_{31}(u)-\frac{1}{2}\lambda_7\wp_{22}(u)+\lambda_6\wp_{32}(u)+\lambda_5\wp_{42}(u)-\frac{3}{2}\lambda_3\wp_{44}(u)$,

(第三右端)$=-\frac{1}{8}(3\{6520\}+3\{6430\}+2\{6421\}+\{5431\})=-\frac{1}{2}\lambda_2\lambda_9-\frac{1}{4}\lambda_3\lambda_8$, (微分方程):

$\wp_{3332}(u)-6\wp_{33}(u)\wp_{32}(u)=-6\Delta_3-\frac{3}{2}\lambda_9\wp_{11}(u)-2\lambda_8\wp_{21}(u)+\frac{3}{2}\lambda_7\wp_{31}(u)$

$-\frac{1}{2}\lambda_7\wp_{22}(u)+\lambda_6\wp_{32}(u)+\lambda_5\wp_{42}(u)-\frac{3}{2}\lambda_3\wp_{44}(u)-\frac{1}{2}\lambda_2\lambda_9-\frac{1}{4}\lambda_3\lambda_8$。

23） (2220)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (2220): $|6510| = (3300) + (3210) + (3111) + \underline{(2220)} + 2(2211)$, $|6420| = (3210) + 2(3111) + 2(2220) + 4(2211)$ $|5430| = \underline{(2220)} + (2211)$,
（左端）$=[\wp_{3331}(u)] = \overline{\wp_{3331}(u) - 6\wp_{33}(u)\wp_{31}(u)}$, （第一右端）$=6\Delta_4$, （第二右端）
$= \frac{1}{2}(\langle\langle 6510\rangle\rangle + 2\langle\langle 6420\rangle\rangle + \langle\langle 5430\rangle\rangle) = \lambda_8\wp_{11}(u) - \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{21}(u) + \lambda_6\wp_{31}(u) + \lambda_5\wp_{41}(u)$, （第三右端）$=-\frac{1}{8}(\{6510\} + 2\{6420\} + \{5430\}) = -\frac{1}{4}\lambda_1\lambda_9$, （微分方程）:
$$\wp_{3331}(u) - 6\wp_{33}(u)\wp_{31}(u) = 6\Delta_4 + \lambda_8\wp_{11}(u) - \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{21}(u) + \lambda_6\wp_{31}(u) + \lambda_5\wp_{41}(u) - \frac{1}{4}\lambda_1\lambda_9.$$

24) (2211)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$，其中包含 (2211): $|6510| = (3300) + (3210) + (3111) + (2220) + 2(2211)$, $|6420| = (3210) + 2(3111) + 2(2220) + \underline{4(2211)}$, $|6321| = (3100) + \underline{(2211)}$, $|5430| = \overline{(2220)} + \underline{(2211)}$, $|5421| = \underline{(2211)}$,

（左端）$=[\wp_{3322}(u)] = \wp_{3322}(u) - 4\wp_{32}(u)^2 - 2\wp_{33}(u)\wp_{22}(u)$,
（第一右端）$=-6\Delta_4$, （第二右端）
$= \frac{1}{2}(2\langle\langle 6510\rangle\rangle + 4\langle\langle 6420\rangle\rangle + \langle\langle 6321\rangle\rangle + \langle\langle 5430\rangle\rangle + \langle\langle 5421\rangle\rangle)$
$= -2\lambda_8\wp_{11}(u) - \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{21}(u) + \lambda_6\wp_{31}(u) + \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{41}(u) + \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{32}(u) + \lambda_4\wp_{42}(u)$

$-\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{43}(u) - 2\lambda_2\wp_{44}(u)$, （第三右端）
$=-\frac{1}{8}(2\{6510\} + 4\{6420\} + \{6321\} + \{5430\} + \{5421\}) = -\frac{1}{2}\lambda_1\lambda_9 - \frac{1}{2}\lambda_2\lambda_8$, （微分方程）:
$$\wp_{3322}(u) - 4\wp_{32}(u)^2 - 2\wp_{33}(u)\wp_{22}(u) = -6\Delta_4 - 2\lambda_8\wp_{11}(u) - \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{21}(u)$$
$$+\lambda_6\wp_{31}(u) + \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{41}(u) + \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{32}(u) + \lambda_4\wp_{42}(u) - \frac{1}{2}\lambda_3\wp_{43}(u) - 2\lambda_2\wp_{44}(u) - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_9 - \frac{1}{2}\lambda_2\lambda_8.$$

25) (2210)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (2210): $|6320| = (3110) + \underline{(2210)} + 3(2111)$、$|5420| = \underline{(2210)} + 2(2111)$、$|6410| = (3200) + (3110) + 2(2210) + 3(2111)$, （左端）
$=[\wp_{3321}(u)] = \wp_{3321}\overline{(u) - 4}\wp_{32}(u)\wp_{31}(u) - 2\wp_{33}(u)\wp_{21}(u)$, （第一右端）$=2\Delta_5$, （第二右端）
$= \frac{1}{2}(\langle\langle 6320\rangle\rangle + \langle\langle 5420\rangle\rangle + 2\langle\langle 6410\rangle\rangle) = \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{31}(u) + \lambda_4\wp_{41}(u) - \lambda_1\wp_{44}(u)$, （第三右端）
$=-\frac{1}{8}(\{6320\} + \{5420\} + 2\{6410\}) = -\frac{1}{4}\lambda_1\lambda_8 - \frac{1}{2}\lambda_0\lambda_9$, （微分方程）:
$$\wp_{3321}(u) - 4\wp_{32}(u)\wp_{31}(u) - 2\wp_{33}(u)\wp_{21}(u) = 2\Delta_5 + \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{31}(u) + \lambda_4\wp_{41}(u) - \lambda_1\wp_{44}(u)$$
$$-\frac{1}{4}\lambda_1\lambda_8 - \frac{1}{2}\lambda_0\lambda_9.$$

26) (2200)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (2200): $|6310| = (3100) + \underline{(2200)} + 2(2110) + 3(1111)$, $|5410| = \underline{(2200)} + (2110) + 2(1111)$,
(左端)$=[\wp_{3311}(u)] = \wp_{3311}(u) - 4\wp_{31}(u)^2 - 2\wp_{33}(u)\wp_{11}(u)$,
(第一右端)$=2\Delta_7$,

(第二右端)$=\frac{1}{2}(\langle\langle 6310\rangle\rangle+\langle\langle 5410\rangle\rangle)=\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{41}(u)-2\lambda_0\wp_{44}(u)$, (第三右端)
$=-\frac{1}{8}(\{6310\}+\{5410\})=-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_8$, (微分方程):
$$\wp_{3311}(u)-4\wp_{31}(u)^2-2\wp_{33}(u)\wp_{11}(u)=2\Delta_7+\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{41}(u)-2\lambda_0\wp_{44}(u)-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_8.$$

27) (2111)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (2111): $|6410|=(3200)+(3110)+2(2210)+\underline{3(2111)}$, $|6320|=(3110)+(2210)+\underline{3(2111)}$, $|5420|=(2210)+2(\underline{2111})$, $|5321|=\underline{(2111)}$,
(左端)$=\overline{[\wp_{3222}(u)]}=\wp_{3222}(u)-6\wp_{32}(u)\overline{\wp_{22}(u)}$, (第一右端)$=-6\Delta_5$, (第二右端)
$$=\frac{1}{2}(3\langle\langle 6410\rangle\rangle+3\langle\langle 6320\rangle\rangle+2\langle\langle 5420\rangle\rangle+\langle\langle 5321\rangle\rangle)$$
$$=-\frac{3}{2}\lambda_7\wp_{11}(u)+\lambda_5\wp_{31}(u)+\lambda_4\wp_{32}(u)+\frac{3}{2}\lambda_3\wp_{42}(u)-\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{33}(u)-2\lambda_2\wp_{43}(u)-\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{44}(u),$$
(第三右端)$=-\frac{1}{8}(3\{6410\}+3\{6320\}+2\{5420\}+\{5321\})=-\frac{3}{4}\lambda_0\lambda_9-\frac{1}{2}\lambda_1\lambda_8-\frac{1}{4}\lambda_2\lambda_7$, (微分方程): $\wp_{3222}(u)-6\wp_{32}(u)\wp_{22}(u)=-6\Delta_5-\frac{3}{2}\lambda_7\wp_{11}(u)+\lambda_5\wp_{31}(u)+\lambda_4\wp_{32}(u)$
$+\frac{3}{2}\lambda_3\wp_{42}(u)-\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{33}(u)-2\lambda_2\wp_{43}(u)-\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{44}(u)-\frac{3}{4}\lambda_0\lambda_9-\frac{1}{2}\lambda_1\lambda_8-\frac{1}{4}\lambda_2\lambda_7$.

28) (2110)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (2110): $|6310|=(3100)+(2200)+\underline{2(2110)}+3(1111)$、 $|5410|=(2200)+\underline{(2110)}+2(1111)$、 $|5320|=\overline{(2110)+3(1111)}$, (左端)
$=[\wp_{3221}(u)]=\overline{\wp_{3221}(u)-4\wp_{32}(u)\wp_{21}(u)-2\wp_{31}(u)\wp_{22}(u)}$,
(F.R.H.S.)$=-2\Delta_7$,
(S.R.H.S)$=\frac{1}{2}(2\langle\langle 6310\rangle\rangle+\langle\langle 5410\rangle\rangle+\langle\langle 5320\rangle\rangle)=\lambda_4\wp_{31}(u)+\lambda_3\wp_{41}(u)-\lambda_1\wp_{43}(u)-\lambda_0\wp_{44}(u)$,
(T.R.H.S)$=-\frac{1}{8}(2\{6310\}+\{5410\}+\{5320\})=-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_8-\frac{1}{8}\lambda_1\lambda_7$,
(Diff. Eq.): $\wp_{3221}(u)-4\wp_{32}(u)\wp_{21}(u)-2\wp_{31}(u)\wp_{22}(u)=-2\Delta_7+\lambda_4\wp_{31}(u)+\lambda_3\wp_{41}(u)$
$-\lambda_1\wp_{43}(u)-\lambda_0\wp_{44}(u)-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_8-\frac{1}{8}\lambda_1\lambda_7$.

29) (2100)的系数:
$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (2100): $|6210|=(3000)+(2100)+(1110)$、 $|5310|=\underline{(2100)}+2(1110)$,
(左端)$=[\wp_{3211}(u)]=\wp_{3211}(u)-4\wp_{31}(u)\wp_{21}(u)-\overline{2\wp_{32}(u)}\wp_{11}(u)$, (第一右端)$=0$, (第二右端)$=\frac{1}{2}(\langle\langle 6210\rangle\rangle+\langle\langle 5310\rangle\rangle)=\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{31}(u)+\lambda_2\wp_{41}(u)-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{42}(u)-\lambda_0\wp_{43}(u)$, (第三右端)$=-\frac{1}{8}(\{6210\}+\{5310\})=-\frac{1}{4}\lambda_0\lambda_7$, (微分方程):
$$\wp_{3211}(u)-4\wp_{31}(u)\wp_{21}(u)-2\wp_{32}(u)\wp_{11}(u)=\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{31}(u)+\lambda_2\wp_{41}(u)-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{42}(u)$$
$$-\lambda_0\wp_{43}(u)-\frac{1}{4}\lambda_0\lambda_7.$$

30) (2000)的系数: $|\alpha\beta\gamma\delta|$, 其中包含 (2000): $|52310|=(2000)+(1100)$, (左端)
$=[\wp_{3111}(u)]=\wp_{3111}(u)-6\wp_{31}(u)\overline{\wp_{11}(u)}$, (第一右端)$=0$, (第二右端)
$$=\frac{1}{2}\langle\langle 5210\rangle\rangle=\lambda_2\wp_{31}(u)+\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{41}(u)-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{32}(u)-3\lambda_0\wp_{42}(u)+\lambda_0\wp_{33}(u),$$

（第三右端）$=-\frac{1}{8}\{5210\}=0$, （微分方程）：

$$\wp_{3111}(u)-6\wp_{31}(u)\wp_{11}(u)=\lambda_2\wp_{31}(u)+\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{41}(u)-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{32}(u)-3\lambda_0\wp_{42}(u)+\lambda_0\wp_{33}(u)。$$

31) coefficient of (1111)

:$|\alpha\beta\gamma\delta|$其中包含 (1111): $|6310|=(3100)+(2200)+2(2110)+\underline{3(1111)}$, $|5410|=(2200)+(2110)+\underline{2(1111)}$, $|5320|=(2110)+\underline{3(1111)}$, $|4321|=\underline{(1111)}$, (左端)

$=[\wp_{2222}(u)]=\wp_{2222}(u)-6\wp_{22}(u)^2$, (第一右端)$=12\Delta_7$, (第二右端)

$$=\frac{1}{2}(3\langle\langle 6310\rangle\rangle+2\langle\langle 5410\rangle\rangle+3\langle\langle 5320\rangle\rangle+\langle\langle 4321\rangle\rangle)$$

$$=-3\lambda_6\wp_{11}(u)+\lambda_5\wp_{21}(u)+\lambda_4\wp_{22}(u)+\lambda_3\wp_{32}(u)-3\lambda_2\wp_{33}(u)+4\lambda_2\wp_{42}(u)-3\lambda_1\wp_{43}(u)-3\lambda_0\wp_{44}(u),$$

(第三右端)$=-\frac{1}{8}(3\{6310\}+2\{5410\}+3\{5320\}+\{4321\})=-\lambda_0\lambda_8-\frac{3}{8}\lambda_1\lambda_7-\frac{1}{2}\lambda_2\lambda_6+\frac{1}{8}\lambda_3\lambda_5$, (微分方程): $\wp_{2222}(u)-6\wp_{22}(u)^2=12\Delta_7-3\lambda_6\wp_{11}(u)+\lambda_5\wp_{21}(u)+\lambda_4\wp_{22}(u)+\lambda_3\wp_{32}(u)$
$+4\lambda_2\wp_{42}(u)-3\lambda_2\wp_{33}(u)-3\lambda_1\wp_{43}(u)-3\lambda_0\wp_{44}(u)-\lambda_0\lambda_8-\frac{3}{8}\lambda_1\lambda_7-\frac{1}{2}\lambda_2\lambda_6+\frac{1}{8}\lambda_3\lambda_5$.

32) coefficient of (1110):

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ which contains (1110): $|6210|=(3000)+(2100)+\underline{(1110)}$, $|5310|=(2100)+\underline{2(1110)}$, $|4320|=\underline{(1110)}$,

(L.H.S.)$=\overline{[\wp_{2221}(u)]}=\wp_{2221}(u)-6\wp_{22}(u)\wp_{21}(u)$,

(F.R.H.S.)=0,

(S.R.H.S)$=\frac{1}{2}(\langle\langle 6210\rangle\rangle+2\langle\langle 5310\rangle\rangle+\langle\langle 4320\rangle\rangle)$

$$=-\frac{1}{2}\lambda_5\wp_{11}(u)+\lambda_4\wp_{21}(u)+\lambda_3\wp_{31}(u)+\lambda_2\wp_{41}(u)+\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{42}(u)-\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{33}(u)-3\lambda_0\wp_{43}(u),$$

(T.R.H.S)$=-\frac{1}{8}(\{6210\}+2\{5310\}+\{4320\})=-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_7-\frac{1}{4}\lambda_1\lambda_6$,

(Diff. Eq.): $\wp_{2221}(u)-6\wp_{22}(u)\wp_{21}(u)=-\frac{1}{2}\lambda_5\wp_{11}(u)+\lambda_4\wp_{21}(u)+\lambda_3\wp_{31}(u)+\lambda_2\wp_{41}(u)$
$+\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{42}(u)-\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{33}(u)-3\lambda_0\wp_{43}(u)-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_7-\frac{1}{4}\lambda_1\lambda_6$.

33) (1100)的系数:

$|\alpha\beta\gamma\delta|$ 其中包含 (1100): $|5210|=(2000)+\underline{(1100)}$, $|4310|=\underline{(1100)}$,

（左端）$=[\wp_{2211}(u)]=\wp_{2211}(u)-4\wp_{21}(u)^2-\overline{2\wp_{22}(u)\wp_{11}(u)}$, （第一右端）=0,

（第二右端）

$$=\frac{1}{2}(\langle\langle 5210\rangle\rangle+\langle\langle 4310\rangle\rangle)=\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{21}(u)+\lambda_2\wp_{31}(u)+\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{41}(u)-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{32}(u)$$

$+\lambda_0\wp_{42}(u)-2\lambda_0\wp_{33}(u)$, （第三右端）$=-\frac{1}{8}(\{5210\}+\{4310\})=-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_6$, （微分方程）：$\wp_{2211}(u)-4\wp_{21}(u)^2-2\wp_{22}(u)\wp_{11}(u)=\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{21}(u)+\lambda_2\wp_{31}(u)$
$+\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{41}(u)-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{32}(u)+\lambda_0\wp_{42}(u)-2\lambda_0\wp_{33}(u)-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_6$。

34) (1000)的系数: $|\alpha\beta\gamma\delta|$, 其中包含 (1000):

$|4210|=(1000)$, （左端）

$=[\wp_{2111}(u)]=\wp_{2111}(u)-6\wp_{21}(\overline{u)\wp_{11}(u)}$, （第一右端）

=0,

S.R.H.S)= $\frac{1}{2}\langle\langle 4210\rangle\rangle = \lambda_2\wp_{21}(u) + \frac{3}{2}\lambda_1\wp_{31}(u) - \frac{1}{2}\lambda_1\wp_{22}(u) + 3\lambda_0\wp_{41}(u) - 2\lambda_0\wp_{32}(u)$,
(T.R.H.S)=$-\frac{1}{8}\{4210\} = -\frac{1}{4}\lambda_0\lambda_5$,
(Diff. Eq.): $\wp_{2111}(u) - 6\wp_{21}(u)\wp_{11}(u) = \lambda_2\wp_{21}(u) + \frac{3}{2}\lambda_1\wp_{31}(u) - \frac{1}{2}\lambda_1\wp_{22}(u) + 3\lambda_0\wp_{41}(u)$
$-2\lambda_0\wp_{32}(u) - \frac{1}{4}\lambda_0\lambda_5$.

35） (0000) = 1的系数: $|\alpha\beta\gamma\delta|$, 其中包含 (0000) = 1: $|3210| = \underline{(0000)} = 1$,
（左端）=$[\wp_{1111}(u)] = \wp_{1111}(u) - 6\wp_{11}(u)^2$, （第一右端）=0, 第二右端）
$= \frac{1}{2}\langle\langle 3210\rangle\rangle = \lambda_2\wp_{11}(u) + \lambda_1\wp_{21}(u) + 4\lambda_0\wp_{31}(u) - 3\lambda_0\wp_{22}(u)$, （第三右端）
$=-\frac{1}{8}\{3210\} = -\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_4 + \frac{1}{8}\lambda_1\lambda_3$, （微分方程）：
$\wp_{1111}(u) - 6\wp_{11}(u)^2 = \lambda_2\wp_{11}(u) + \lambda_1\wp_{21}(u) + 4\lambda_0\wp_{31}(u) - 3\lambda_0\wp_{22}(u)$
$-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_4 + \frac{1}{8}\lambda_1\lambda_3$。

因此，我们得到以下微分方程

1) $\wp_{4444}(u) - 6\wp_{44}(u)^2 = \lambda_9\wp_{43}(u) + \lambda_8\wp_{44}(u) + \frac{1}{8}\lambda_7\lambda_9$, (4.46)

2) $\wp_{4443}(u) - 6\wp_{44}(u)\wp_{43}(u) = \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{42}(u) - \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{33}(u) + \lambda_8\wp_{43}(u)$, (4.47)

3) $\wp_{4442}(u) - 6\wp_{44}(u)\wp_{42}(u) = \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{41}(u) - \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{32}(u) + \lambda_8\wp_{42}(u)$, (4.48)

4) $\wp_{4441}(u) - 6\wp_{44}(u)\wp_{41}(u) = -\frac{1}{2}\lambda_9\wp_{31}(u) + \lambda_8\wp_{41}(u)$, (4.49)

5) $\wp_{4433}(u) - 4\wp_{43}(u)^2 - 2\wp_{44}(u)\wp_{33}(u) = \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{41}(u) - \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{32}(u) + \lambda_8\wp_{42}(u)$
$+ \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{43}(u)$, (4.50)

6) $\wp_{4432}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{42}(u) - 2\wp_{44}(u)\wp_{32}(u) = -\frac{1}{2}\lambda_9\wp_{31}(u) + \lambda_8\wp_{41}(u)$
$+ \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{42}(u)$, (4.51)

7) $\wp_{4431}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{41}(u) - 2\wp_{44}(u)\wp_{31}(u) = \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{41}(u)$, (4.52)

8) $\wp_{4422}(u) - 4\wp_{42}(u)^2 - 2\wp_{44}(u)\wp_{22}(u) = 2\Delta_2 + \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{41}(u)$, (4.53)

9) $\wp_{4421}(u) - 4\wp_{42}(u)\wp_{41}(u) - 2\wp_{44}(u)\wp_{21}(u) = -2\Delta_3$, (4.54)

10) $\wp_{4411}(u) - 4\wp_{41}(u)^2 - 2\wp_{44}(u)\wp_{11}(u) = -2\Delta_4$, (4.55)

11) $\wp_{4333}(u) - 6\wp_{43}(u)\wp_{33}(u) = \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{31}(u) - \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{22}(u) + \lambda_8\wp_{41}(u) + \lambda_7\wp_{42}(u)$
$+ \lambda_6\wp_{43}(u) - \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{44}(u) - \frac{1}{4}\lambda_4\lambda_9$, (4.56)

12) $\wp_{4332}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{32}(u) - 2\wp_{42}(u)\wp_{33}(u) = -2\Delta_2 - \lambda_9\wp_{21}(u) + \lambda_7\wp_{41}(u)$
$+ \lambda_6\wp_{42}(u) - \frac{1}{8}\lambda_3\lambda_9$, (4.57)

13) $\wp_{4331}(u) - 4\wp_{43}(u)\wp_{31}(u) - 2\wp_{41}(u)\wp_{33}(u) = 2\Delta_3 + \frac{1}{2}\lambda_9\wp_{11}(u) + \lambda_6\wp_{41}(u)$, (4.58)

14) $\wp_{4322}(u) - 4\wp_{42}(u)\wp_{32}(u) - 2\wp_{43}(u)\wp_{22}(u) = 2\Delta_3 - \lambda_9\wp_{11}(u) + \lambda_6\wp_{41}(u)$
$+ \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{42}(u) - \frac{1}{4}\lambda_2\lambda_9,$ (4.59)

15) $\wp_{4321}(u) - 2\wp_{43}(u)\wp_{21}(u) - 2\wp_{42}(u)\wp_{31}(u) - 2\wp_{41}(u)\wp_{32}(u) = \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{41}(u) - \frac{1}{8}\lambda_1\lambda_9,$

(4.60)

16) $\wp_{4311}(u) - 4\wp_{41}(u)\wp_{31}(u) - 2\wp_{43}(u)\wp_{11}(u) = -2\Delta_5 - \frac{1}{4}\lambda_0\lambda_9,$ (4.61)

17) $\wp_{4222}(u) - 6\wp_{42}(u)\wp_{22}(u) = 6\Delta_4 + \lambda_5\wp_{41}(u) + \lambda_4\wp_{42}(u) - \frac{1}{2}\lambda_3\wp_{43}(u)$

$+ \lambda_2\wp_{44}(u) - \frac{1}{4}\lambda_1\lambda_9,$ (4.62)

18) $\wp_{4221}(u) - 4\wp_{42}(u)\wp_{21}(u) - 2\wp_{41}(u)\wp_{22}(u) = 2\Delta_5 + \lambda_4\wp_{41}(u) + \frac{1}{2}\lambda_1\wp_{44}(u) - \frac{1}{4}\lambda_0\lambda_9,$

(4.63)

19) $\wp_{4211}(u) - 4\wp_{41}(u)\wp_{21}(u) - 2\wp_{42}(u)\wp_{11}(u) = \frac{1}{2}\lambda_3\wp_{41}(u) + \lambda_0\wp_{44}(u),$ (4.64)

20) $\wp_{4111}(u) - 6\wp_{41}(u)\wp_{11}(u) = \lambda_2\wp_{41}(u) - \frac{1}{2}\lambda_1\wp_{42}(u) + \lambda_0\wp_{43}(u),$ (4.65)

21) $\wp_{3333}(u) - 6\wp_{33}(u)^2 = 12\Delta_2 - 3\lambda_9\wp_{21}(u) + 4\lambda_8\wp_{31}(u) - 3\lambda_8\wp_{22}(u) + \lambda_7\wp_{32}(u)$
$+ \lambda_6\wp_{33}(u) + \lambda_5\wp_{43}(u) - 3\lambda_4\wp_{44}(u) + \frac{1}{8}\lambda_5\lambda_7 - \frac{1}{2}\lambda_4\lambda_8 - \frac{3}{8}\lambda_3\lambda_9,$ (4.66)

22) $\wp_{3332}(u) - 6\wp_{33}(u)\wp_{32}(u) = -6\Delta_3 - \frac{3}{2}\lambda_9\wp_{11}(u) - 2\lambda_8\wp_{21}(u) + \frac{3}{2}\lambda_7\wp_{31}(u)$
$- \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{22}(u) + \lambda_6\wp_{32}(u) + \lambda_5\wp_{42}(u) - \frac{3}{2}\lambda_3\wp_{44}(u) - \frac{1}{2}\lambda_2\lambda_9 - \frac{1}{4}\lambda_3\lambda_8,$ (4.67)

23) $\wp_{3331}(u) - 6\wp_{33}(u)\wp_{31}(u) = 6\Delta_4 + \lambda_8\wp_{11}(u) - \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{21}(u) + \lambda_6\wp_{31}(u)$

$+ \lambda_5\wp_{41}(u) - \frac{1}{4}\lambda_1\lambda_9,$ (4.68)

24) $\wp_{3322}(u) - 4\wp_{32}(u)^2 - 2\wp_{33}(u)\wp_{22}(u) = -6\Delta_4 - 2\lambda_8\wp_{11}(u) - \frac{1}{2}\lambda_7\wp_{21}(u)$
$+ \lambda_6\wp_{31}(u) + \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{41}(u) + \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{32}(u) + \lambda_4\wp_{42}(u) - \frac{1}{2}\lambda_3\wp_{43}(u) - 2\lambda_2\wp_{44}(u)$
$- \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_9 - \frac{1}{2}\lambda_2\lambda_8,$ (4.69)

25) $\wp_{3321}(u) - 4\wp_{32}(u)\wp_{31}(u) - 2\wp_{33}(u)\wp_{21}(u) = 2\Delta_5 + \frac{1}{2}\lambda_5\wp_{31}(u) + \lambda_4\wp_{41}(u)$
$- \lambda_1\wp_{44}(u) - \frac{1}{4}\lambda_1\lambda_8 - \frac{1}{2}\lambda_0\lambda_9,$ (4.70)

26) $\wp_{3311}(u) - 4\wp_{31}(u)^2 - 2\wp_{33}(u)\wp_{11}(u) = 2\Delta_7 + \frac{1}{2}\lambda_3\wp_{41}(u) - 2\lambda_0\wp_{44}(u) - \frac{1}{2}\lambda_0\lambda_8,$ (4.71)

27) $\wp_{3222}(u) - 6\wp_{32}(u)\wp_{22}(u) = -6\Delta_5 - \frac{3}{2}\lambda_7\wp_{11}(u) + \lambda_5\wp_{31}(u) + \lambda_4\wp_{32}(u) + \frac{3}{2}\lambda_3\wp_{42}(u)$

$- \frac{1}{2}\lambda_3\wp_{33}(u) - 2\lambda_2\wp_{43}(u) - \frac{3}{2}\lambda_1\wp_{44}(u) - \frac{3}{4}\lambda_0\lambda_9 - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_8 - \frac{1}{4}\lambda_2\lambda_7,$ (4.72)

28) $\wp_{3221}(u) - 4\wp_{32}(u)\wp_{21}(u) - 2\wp_{31}(u)\wp_{22}(u) = -2\Delta_7 + \lambda_4\wp_{31}(u) + \lambda_3\wp_{41}(u)$
$- \lambda_1\wp_{43}(u) - \lambda_0\wp_{44}(u) - \frac{1}{2}\lambda_0\lambda_8 - \frac{1}{8}\lambda_1\lambda_7,$ (4.73)

29) $$\wp_{3211}(u)-4\wp_{31}(u)\wp_{21}(u)-2\wp_{32}(u)\wp_{11}(u)=\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{31}(u)+\lambda_2\wp_{41}(u)$$
$$-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{42}(u)-\lambda_0\wp_{43}(u)-\frac{1}{4}\lambda_0\lambda_7, \tag{4.74}$$

30) $\wp_{3111}(u)-6\wp_{31}(u)\wp_{11}(u)=\lambda_2\wp_{31}(u)+\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{41}(u)-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{32}(u)$

$-3\lambda_0\wp_{42}(u)+\lambda_0\wp_{33}(u),$ (4.75)

31) $$\wp_{2222}(u)-6\wp_{22}(u)^2=12\Delta_7-3\lambda_6\wp_{11}(u)+\lambda_5\wp_{21}(u)+\lambda_4\wp_{22}(u)+\lambda_3\wp_{32}(u)$$
$$+4\lambda_2\wp_{42}(u)-3\lambda_2\wp_{33}(u)-3\lambda_1\wp_{43}(u)-3\lambda_0\wp_{44}(u)-\lambda_0\lambda_8-\frac{3}{8}\lambda_1\lambda_7$$
$$-\frac{1}{2}\lambda_2\lambda_6+\frac{1}{8}\lambda_3\lambda_5, \tag{4.76}$$

32) $$\wp_{2221}(u)-6\wp_{22}(u)\wp_{21}(u)=-\frac{1}{2}\lambda_5\wp_{11}(u)+\lambda_4\wp_{21}(u)+\lambda_3\wp_{31}(u)+\lambda_2\wp_{41}(u)$$
$$+\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{42}(u)-\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{33}(u)-3\lambda_0\wp_{43}(u)-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_7-\frac{1}{4}\lambda_1\lambda_6, \tag{4.77}$$

33) $$\wp_{2211}(u)-4\wp_{21}(u)^2-2\wp_{22}(u)\wp_{11}(u)=\frac{1}{2}\lambda_3\wp_{21}(u)+\lambda_2\wp_{31}(u)+\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{41}(u)$$
$$-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{32}(u)+\lambda_0\wp_{42}(u)-2\lambda_0\wp_{33}(u)-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_6, \tag{4.78}$$

34) $$\wp_{2111}(u)-6\wp_{21}(u)\wp_{11}(u)=\lambda_2\wp_{21}(u)+\frac{3}{2}\lambda_1\wp_{31}(u)-\frac{1}{2}\lambda_1\wp_{22}(u)$$
$$+3\lambda_0\wp_{41}(u)-2\lambda_0\wp_{32}(u)-\frac{1}{4}\lambda_0\lambda_5, \tag{4.79}$$

35) $$\wp_{1111}(u)-6\wp_{11}(u)^2=\lambda_2\wp_{11}(u)+\lambda_1\wp_{21}(u)+4\lambda_0\wp_{31}(u)-3\lambda_0\wp_{22}(u)$$
$$-\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_4+\frac{1}{8}\lambda_1\lambda_3, \tag{4.80}$$

其中

$$\Delta_2=(-\wp_{44}(u)\wp_{22}(u)+\wp_{42}(u)^2)+(\wp_{44}(u)\wp_{31}(u)-\wp_{43}(u)\wp_{41}(u))$$
$$+(\wp_{43}(u)\wp_{32}(u)-\wp_{42}\wp_{33}(u)), \tag{4.81}$$
$$\Delta_3=(\wp_{44(u)}\wp_{21}(u)-\wp_{42}(u)\wp_{41}(u))+(-\wp_{43}(u)\wp_{31}(u)+\wp_{41}(u)\wp_{33}), \tag{4.82}$$
$$\Delta_4=(\wp_{44}(u)\wp_{11}(u)-\wp_{41}(u)^2)+(-\wp_{42}(u)\wp_{31}(u)+\wp_{41}(u)\wp_{32}(u)), \tag{4.83}$$
$$\Delta_5=(\wp_{43}(u)\wp_{11}(u)-\wp_{41}(u)\wp_{31}(u))+(-\wp_{42}(u)\wp_{21}(u)+\wp_{41}(u)\wp_{22}(u)), \tag{4.84}$$
$$\Delta_7=(-\wp_{33}(u)\wp_{11}(u)+\wp_{31}(u)^2)+(\wp_{42}(u)\wp_{11}(u)-\wp_{41}(u)\wp_{21}(u))$$
$$+(\wp_{32}(u)\wp_{21}(u)-\wp_{31}(u)\wp_{22}(u)). \tag{4.85}$$

he 使用 $\zeta_i(u)$ 函数得到的 $\zeta_i(u)\Big(\overrightarrow{\partial_k}\overrightarrow{\partial_\ell}-\overrightarrow{\partial_k}\overleftarrow{\partial_\ell}\Big)\zeta_j(u)$ 特殊形式之和。

Δ_i 是 t

这些微分方程与我们先前论文 [4] 中的微分方程一致。为了与先前的论文进行比较，我们必须替换先前论文中的 $\wp_{ij}(u)\to 4\wp_{ij}(u)$ 和 $\wp_{ijk\ell}(u)\to 4\wp_{ijk\ell}(u)$ 。

5 总结

Weierstrass $\wp$ 函数的微分方程就是静态 KdV 方程的微分方程。因此，一组关于亏格 g 双曲函数的耦合微分方程，可视为静态 KdV 方程的 g维推广。由此，这类微分方程组是可积的，而 σ 函数则充当这类可积微分方程的势。这样一来，关于亏格g 双曲$\wp_{ij}$ 函数的微分方程组便成为一类特殊但相当重要的方程。

尽管求得一组关于亏格 g双曲$\wp_{ij}$ 函数的微分方程有多种方法，Baker 的方法似乎是最系统的一种。因此，我们回顾 Baker 方法，以求得一般亏格双曲$\wp_{ij}$ 函数的微分方程。正如 Baker 展示了他在亏格三情形中的方法，我们在四属情形中进行展示，这与我们先前的结果一致。

参考文献

[1] H.F. Baker，《论导出周期函数的一组微分方程》，《数学学报》27，135-156（1897）。[2] V.M. Buchstaber、V.Z. Enolskii 和 D.V. Leykin，《克莱因函数、超椭圆雅可比簇及其应用》，载于《数学与数理物理评论》，S.P. Novikov 和 I.M. Krichever 编（Gordon and Breach，伦敦，1997），第1-125页。Sylvester 恒等式[3] V.M. Buchstaber、V.Z. Enolski 和 D.V. Leykin，《多维西格玛函数》，[arXiv:1208.0990v1[math-ph]]（2012）。[4] M. Hayashi、K. Shigemoto 和 T. Tsukioka，《四属超椭圆函数的微分方程》，《物理学通讯》5，105008（2021）。[5] H.F. Baker，《阿贝尔函数：阿贝尔定理及相关的西塔函数理论》（剑桥大学出版社，剑桥，1995），第328页。[6] H.F. Baker，《多重周期函数理论导论》（剑桥大学出版社，剑桥，1909）。[7] O. Bolza，《论一般超椭圆情形下函数 $\wp u$ 的类似物》，《哥廷根科学学会通报》，数学与物理学部，1894，268-271（1895）。[8] O. Bolza，《论超椭圆函数 σ的一阶和二阶对数导数》，《美国数学杂志》17，11-36（1895）。[9] G. Rosenhain，《Rosenhain 博士致 Jacobi 教授的数封信摘录：论超椭圆超越函数》，《纯粹与应用数学杂志》40（1850），319-360。[10] G. Rosenhain 著，H. Weber 和 A. Witting 编，《关于具有四个周期的二元函数的论文：这类函数是第一类超椭圆积分的反函数》（莱比锡，W. Engelmann），1895。