arXiv:2302.04136v1 [math.CO] 8 Feb 2023

$q=-1$处的 Delta 猜想的组合数学

Sylvie Corteel[1], Matthieu Josuat-Verg`es[1], 和 Anna Vanden Wyngaerd [2]

[1]IRIF、法国国家科学研究中心及巴黎大学´
e [2]布鲁塞尔自由大学´

2023年2月9日

摘要

在洗牌定理的背景下，许多经典整数数列都可以通过两个统计量 q 和 t进行自然细化：例如，Catalan 数和 Schr¨oder 数。特别地，对角调和多项式的双分次希尔伯特级数是（$n+1$）$^{n-1}$的一个 q、t类比（并且可以通过 nabla 算子用对称函数表示）。这项工作的动机在于观察到，在 $q=-1$处，这个 q、t类比变成了欧拉数的一个 t类比；欧拉数是一列著名的整数数列，用于计数交错排列。我们通过一个更一般的陈述证明了这一观察，该陈述一方面涉及对称函数上的 Delta 算子，另一方面涉及排列上与峰和谷有关的新组合统计量。一个重要工具是停车函数的调度数，这些调度数最初由 Hicks 引入，后由 Haglund 和 Sergel 加以扩展。其他经验观察表明，在 $q=-1$ 处的非负性在更广泛的情形下成立。

目录

1 引言 **2**

2 谷值 Delta 猜想 3
2.1 谷装饰标记戴克路径.4 2.2 对称函数.5 2.3 陈述.6

3 调度公式 6

4 排列 10

5 生成树 12 5.1 调度为 1^n 的带标记置换的树.12 5.2 与峰和谷相关的第二棵树.14 5.3 树的同构.15

6 结论与未来方向 **16**

1 引言

在 21 世纪初，Haglund、Haiman、Remmel、Loehr 和 Ulyanov 提出了 *shuffle conjecture* [10] ∇e_n *labelled Dyck* ： 关于对 *paths* ∇e_n ∇ 称函数的组合公式，以.....为基础。人们对对称函数的兴趣（其中 是 [1] 中引入的 MacDonald 特征算子）源于它是对称群 [14] 的对角调和表示的双分次 Frobenius 特征。完整洗牌猜想提出十多年后，Carlsson 和 Mellit 证明了该猜想，因此它成为一条定理 [2]。到那时，许多特殊情形已为人所知：例如 $\langle \nabla e_n \ e_n \rangle$ $q \ t$-*Catalan*，给出了 *numbers* [8] $\langle \nabla e_n \ h_d e_{n-d} \rangle$ $q \ t$-*Schröder numbers* [9] 著名的.....，而.....则给出了.....。完整洗牌定理的一个推论是，双分次 Hilbert 级数 $\langle \nabla e_n, h_1^n \rangle$ 给出了（$n+1$）$^{n-1}$ 的 q,t 类比。它可以用组合方式描述为长度为 n 的停车函数关于面积和对角逆序数的生成函数。

著名的 *Euler numbers* $(E_n)_{n\geq 0}$ 可由其生成级数定义：

$$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{z^n}{n!} = \tan(z) + \sec(z).$$

它们可以解决各种计数问题，其中最著名的是： E_n 是 $\mathfrak{S}_n$ 中交错排列的数量，也就是说，是满足 $\sigma_1 > \sigma_2 < \sigma_3 > \cdots$ 的那些 σ。它们还出现在 Arnold 奇点理论中，并通过与伯努利数的关系应用于数论。在 Macdonald q、t-组合数学的背景下研究它们是全新的，这也是本项目的动机。我们将证明，在 q、t-类似式（$n+1$）$^{n-1}$（对角调和多项式的双分次 Hilbert 级数）中令 $q=-1$ 取特定值，可得：

$$\langle \nabla e_n, h_1^n \rangle\big|_{q=-1} = t^{\lfloor n^2/4 \rfloor} E_n(t) \tag{1}$$

其中 $E_n(t)$ 是 t 的一个类似物，出现在 [15] 中。此处令 $q=-1$ 取特定值，得到的是 t-恒等式的一个精细化版本

$$\sum_{P\in \mathsf{PF}_n} (-1)^{\mathsf{area}(P)} = E_n, \tag{2}$$

其中 PF_n 表示大小为 n 的停车函数。该恒等式的历史可见 [18, 21, 22]。关于停车函数的定义及其与标准标号 Dyck 路径之间的对应关系，请参见 [12, 第 5] 章。

我们将把方程 (1) 作为一条更一般命题的推论来证明，该命题涉及洗牌定理的一种推广： *valley version Delta conjecture* [11]的 $\Delta'_{e_{n-k-1}} e_n$。这是对称函数 $\Delta'_{e_{n-k-1}} e_n$ 的一个组合公式。我们主要会用到 Delta 猜想的以下推论：

$$\langle \Delta'_{e_{n-k-1}} e_n, h_1^n \rangle = \sum_{P\in \mathsf{stLD}^{\bullet k}(n)} q^{\mathsf{dinv}(P)} t^{\mathsf{area}(P)} x^P, \tag{3}$$

其中，$\mathsf{stLD}(n)^{\bullet k}$ 表示满足 k *decorated valleys* 的 *standardly labelled Dyck paths* 集合，而 dinv 和面积是定义在该集合上的组合统计量。精确的组合定义见第 2.1 节。当 $k=0$ 时，我们有 $\Delta'_{e_{n-1}} e_n = \nabla e_n$，此时 Delta 猜想化为洗牌定理。

关于在 $q=0$ 或 $q=1$ 处对洗牌定理和 Delta 猜想进行特化，已有大量研究（分别参见 [7] 和 [24], ）。据我们所知，除（2）之外，关于在 $q=-1$处的特化，鲜有研究。

我们的灵感来自以下这个重要的对称函数恒等式，它最早出现在 [5, 定理 4.11 的情形 $m = 0$]中

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-q)^k \Delta'_{e_{n-k-1}} e_n = \nabla e_n|_{q=0}\,. \tag{4}$$

与 h_1^n 作数量积并在 $q = -1$ 处求值，可得

$$\sum_{k=0}^{n-1} \langle \Delta'_{e_{n-k-1}} e_n, h_1^n \rangle \Big|_{q=-1} = \langle \nabla e_n|_{q=0}, h_1^n \rangle = [n]_t!, \tag{5}$$

其中第二个等式是洗牌定理的一个简单推论。

我们的主要结果是在条件 (3) 成立的前提下，对该和式各项给出组合解释。

定理 1.1. *For all $n \in \mathbb{N}$, we have*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{P \in \mathsf{stLD}(n)^{\bullet k}} t^{\mathsf{area}(P)} (-1)^{\mathsf{dinv}(P)} \right) z^k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t^{\mathsf{inv}_3(\sigma)} z^{\mathsf{monot}(\sigma)},$$

where 逆序数$_3$ *is a new statistic on permutations generalising Chebikin's notion of* 交替下降 [3] *and* σ *is the number of double ascents or descents of* σ *(see Section 4 for* 单调数( ) *the precise definitions).*

因此，若 Delta 猜想被证明成立，我们便得到以下对称函数解释。

推论 1.2. *If Equation* (3) *is true, then for all $n \in \mathbb{N}$ we have:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \langle \Delta'_{e_{n-k-1}} e_n, h_1^n \rangle \Big|_{q=-1} z^k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t^{\mathsf{inv}_3(\sigma)} z^{\mathsf{monot}(\sigma)}.$$

注意，在 $z = 1$ 处，我们的定理与方程 (5) 一致。

我们的定理在 $z = 0$ 处的特化，以及 Delta 猜想在 $k = 0$ 处化为洗牌定理这一事实，将推出我们的公式 (1)。

我们的证明依赖于 [13]中给出的谷型 Delta 猜想组合侧的 schedule 公式分解。我们利用这一 schedule 框架，找出在 $q = -1$处特化时不会相互抵消的谷型装饰戴克路径。接着，我们构造这些路径与排列之间的双射。该映射将通过对象的特定生成树来定义，并将面积映射为 inv_3 ，将装饰数映射为单调数。这样，没有标记的路径（$k = 0$）就会映射为没有双上升或下降的排列，也就是交错排列。

2 谷型 Delta 猜想

本节给出陈述谷型 Delta 猜想所需的定义。

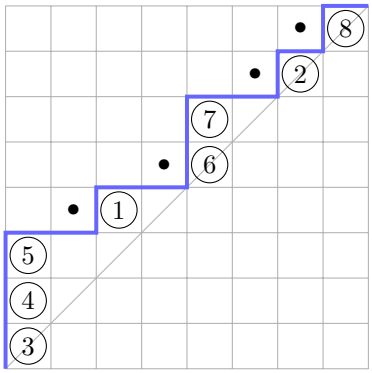

图 1：stLD$^{\bullet 4}$(8) 中的一个元素。

2.1 谷装饰标号 Dyck 路径

定义 2.1. 一个大小为 n 的 *Dyck path* 是一条从 (0, 0) 到 (n, n) 的格路径，由向东或向北的单位步组成，并始终位于称为 *main diagonal* 的直线 $x = y$ 的上方或线上。Dyck 路径的集合记为 D(n)。

定义 2.2. *labelled Dyck path* 是一个有序对（π， w），其中 $\pi \in$ D(n)，而 w 其 *labelling*：一个由正整数组成的词，其中第 i 个字母为 π的第 i 个竖直步标上标号，该标号放在此步右侧的方格中，并且同一列中的标号从下到上递增。如果标记所用的标号恰为 1、2、.....、 n，则称该标记为 *standard*。大小为 n 的（标准）标号 Dyck 路径集合记作 LD(n)（分别记作 stLD(n)）。

标准标号 Dyck 路径与停车函数之间存在双射。

定义 2.3. Dyck 路径 $\pi \in$ D(n)的 *area* 是词 a ，由 n 个非负整数组成，其中第 i 个字母表示 π 的第 i 个竖直步与主对角线 $x = y$之间完整方格的数量。Dyck 路径的 *area* 是其面积词各字母之和，记作 area(π)。

定义 2.4. 给定 $P \coloneqq (\pi, w) \in$ LD(n)，其面积词为 a， P 的第 i 个竖直步称为 a *contractible valley* ，如果

- 或者 $a_{i-1} > a_i$,
- 或者 $a_{i-1} = a_i$ 且 $w_{i-1} < w_i$。

换句话说， i个竖直步是可收缩谷，当且仅当它前面紧邻一个水平步，并且满足以下条件：将这两个步替换为（并相应地将 i个标号向左移动一个单元格）后，仍得到一个有效标号路径，且每一列中的标号均递增。

定义 2.5. 一个 *(valley) decorated labelled Dyck path* 是一个三元组 (π, w, dv)，其中 $(\pi, w) \in$ LD(n)，且 dv 是 (π, w) 的可收缩谷的某个子集。 dv 中的元素称为 *decorations* ，我们用在这些可收缩谷左侧画一个 $\bullet$ 来表示它们。集合 LD(n)$^{\bullet k}$ 表示恰有 k 个标记的带装饰的带标号 Dyck 路径。

定义 2.6. 给定 $P \coloneqq (\pi, w, dv) \in$ LD(n)$^{\bullet k}$，其面积词为 a，若一对竖直步的指标 (i, j) 满足 $1 < j \leq n$ ，则称其为

- *primary diagonal inversion*，如果 $a_i = a_j, w_i < w_j$ 和 $i \notin dv$,
- *secondary diagonal inversion* 若 $a_i = a_j + 1$, $w_i > w_j$ 且 $i \notin dv$。

P 的 *dinv* 定义为主要和次要 dinv 对的总数减去带装饰谷点的数量，并记作 dinv(P)。

Remark 2.7. 我们注意到，带标号的已装饰路径的 dinv 始终是非负整数。事实上，稍加反思便会发现，每个可收缩谷至少会带来一个 dinv 对。

定义 2.8. 给定 $P := (\pi, w, dv) \in \mathrm{LD}(n)^{\bullet k}$, P的 *area* 定义为 ar ea 底层 Dyck 路径的面积，不计标号和装饰：area(P) := area(π)。

Example 2.9. 图 1 给出了 stLD(8)$^{\bullet 4}$中一个元素的例子。其标记为 3451672 8, 其面积词为 01210100，因此面积为 5。其主要 dinv 对为

$$(1,5), (1,8), (2,6),$$

其次要 dinv 对为

$$(2,7), (3,4), (6,7).$$

因此，由于有 4 个装饰谷，其 dinv 等于 2。

2.2 对称函数

对于所有未定义的记号和未经证明的恒等式，请参阅 [4], ，其中可以找到定义、证明和/或参考文献。

我们用 Λ 表示系数取自 $\mathbb{Q}(q,t)$ 的对称函数分次代数，并用 $\langle , \rangle$ 表示 Λ上的 *Hall scalar product*，其定义是将 Schur 函数规定为标准正交基。对称函数的标准基包括单项式 $\{m_\lambda\}_\lambda$、完全 $\{h_\lambda\}_\lambda$、初等 $\{e_\lambda\}_\lambda$、幂 $\{p_\lambda\}_\lambda$ 和 Schur $\{s_\lambda\}_\lambda$ 基。

对于一个分拆 $\mu \vdash n$，我们记

$$\tilde{H}_\mu := \tilde{H}_\mu[X] = \tilde{H}_\mu[X; q, t] = \sum_{\lambda \vdash n} \widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t) s_\lambda$$

the *(modified) Macdonald polynomials*，其中

$$\widetilde{K}_{\lambda\mu} := \widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t) = K_{\lambda\mu}(q, 1/t) t^{n(\mu)}$$

是 *(modified) Kostka coefficients*（更多细节见 [12] ）。

Macdonald 多项式构成对称函数环 Λ 的一组基。这是对 Macdonald Λ 引入的基的一种修 i- Macdonald [20] 引入的基的分类。

若将分拆 μ 与其 Ferrer 图相对应，即与单元格 $\{(i,j) \mid 1 \le i \le \mu_j, 1 \le j \le \ell(\mu)\}$ 的集合相对应，则对每个单元格 $c \in \mu$，我们定义 *co-arm* 和 *co-leg*（分别记作 $a'_\mu(c)$ $l'_\mu(c)$ ），分别表示在 μ 中严格位于 c 左侧和下方的 μ 中的单元格数量（见图 2）。定义以下常数:

$$B_\mu := B_\mu(q,t) = \sum_{c \in \mu} q^{a'_\mu(c)} t^{l'_\mu(c)}.$$

令 $f[g]$ 表示表达式 g 中对称函数 f 的 *plethystic evaluation*（参见 [12, 第 1 章第 19] 页）。

定义 2.10（[1, 3.11]）。我们在 Macdonald 多项式的特征基上定义线性算子 ∇: $\Lambda \to \Lambda$，如下所示

$$\nabla \widetilde{H}_\mu = e_{|\mu|}[B_\mu] \widetilde{H}_\mu = q^{n(\mu')} t^{n(\mu)} \widetilde{H}_\mu.$$

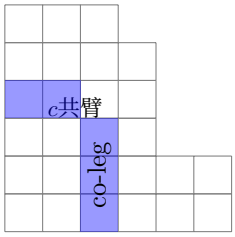

图 2：分拆中一个单元格的共臂和共腿。

定义 2.11。对于 $f \in \Lambda$，我们在 Macdonald 多项式的特征基上定义线性算子 $\Delta_f, \Delta'_f \colon \Lambda \to \Lambda$，如下所示

$$\Delta_f \widetilde{H}_\mu = f[B_\mu]\widetilde{H}_\mu, \qquad \Delta'_f \widetilde{H}_\mu = f[B_\mu - 1]\widetilde{H}_\mu.$$

2.3 陈述

现在，我们已经具备陈述谷型 Delta 猜想所需的全部定义。该猜想最早发表于 [11]。

猜想 2.12。 *For all* $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\Delta'_{e_{n-k-1}} e_n = \sum_{P \in \mathsf{LD}^{\bullet k}(n)} q^{\mathsf{dinv}(P)} t^{\mathsf{area}(P)} x^D$$

where the sum is over the set of 带标号的 Dyck 路径 *of size* n *with* k *decorations on* 可收缩谷。

与 h_1^n （即希尔伯特级数）取（Hall）数量积后，Delta 猜想推出了（3）。

3 调度公式

本节讨论 Haglund 和 Sergel 在 [13] 中证明的谷 Delta 猜想组合数学中的调度公式。他们的公式扩展了 Hicks 在其学位论文 [16] 中关于调度数的早期工作。

定义 3.1。 *decorated permutations* $\mathfrak{S}_n^{\bullet k}$的 $[n] := \{1, \ldots, n\}$ 是 $[n]$ 的排列集合，其中 k 个 n 字母为 *decorated*，表示为$\circ$ $\sigma_{i\circ}$。令 $\mathfrak{S}_n^\bullet := \sqcup_{k\in[n]}\mathfrak{S}_n^{\bullet k}$。对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_n^\bullet$，我们用 dec($\sigma$) 表示其装饰数。

定义 3.2。给定 $P := (\pi, w, dv) \in \mathsf{stLD}(n)^{\bullet k}$，其面积词为 a，带装饰的带标号 Dyck 路径的 *diagonal word* 是按如下方式得到的 n 的带标记置换。若 $a_i = j$，则称 P的标号 w_i 位于 *j-th diagonal*。按递减顺序列出第 0 条对角线上的所有标号 w_i；若 $i \in dv$，则在该标号上添加装饰。然后对第 1 条、第 2 条对角线依此类推。将这个对角词记为 dw(P)。

Example 3.3. 图 1 中路径的对角词是$\bullet$ 8$\bullet$63$\bullet$274$\bullet$15.

定义 3.4. 对于一个排列 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，其 *major index* 定义为集合 $\{i \in [n-1] \mid \sigma(i) > \sigma(i+1)\}$ 中各元素之和。排列的 *reverse major index* 就是逆序排列 $\sigma^{\mathsf{rev}} := \sigma_n \cdots \sigma_1$ 的主指标。对于任意带标记排列 $\sigma \in \mathfrak{S}_n^\bullet$，记 revmaj($\sigma$) 为其底层置换的反向主指标。

以下结论可由定义直接得到。

命题 3.5. *For all* $P \in \mathsf{stLD}(n)^{\bullet k}$, *we have* $\mathsf{area}(P) = \mathsf{revmaj}(\mathsf{dw}(P))$.

Proof. 由于带标号的 Dyck 路径的列中标签严格递增，每条对角线都至少有一个标签大于前一条对角线上的某个标签。因此， P的第 j 条对角线上的标签恰好是 $\mathsf{dw}(P)$ 的第 $(j+1)$ 个递减段中的数字，并且它们各自对面积贡献 j 个单位。 □

以下约定将大大简化定义和证明。

Convention 3.6. 给定 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，我们将默认认为 σ 前面有一个第 0 项：$\sigma_0 = 0$。如果 $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{\bullet}$，那么 σ_0 永远不会被装饰。

定义 3.7（Hicks [16]）。对于 $\tau \in \mathfrak{S}_n^{\bullet}$，定义其 *schedule numbers* $\mathsf{sched}(\tau) = (s_i)_{1 \le i \le n}$ 如下。令 r_0, $r_1, r_2, \ldots$ 为 $\tau_0 \cdots \tau_n$ 的递减段（我们有 $r_0 = 0$）。

- 若 τ_i 未装饰且属于 r_j，令

$$\begin{aligned} s_i =& \#\{k \in r_j \mid k \text{ is undecorated and } k > \tau_i\} \\ &+ \#\{k \in r_{j-1} \mid k \text{ is undecorated and } k < \tau_i\}. \end{aligned}$$

- 若 τ_i 已装饰且属于 r_j，令

$$\begin{aligned} s_i =& \#\{k \in r_j \mid k \text{ is undecorated and } k < \tau_i\} \\ &+ \#\{k \in r_{j+1} \mid k \text{ is undecorated and } k > \tau_i\}. \end{aligned}$$

为改述这个关于调度数的定义，我们引入如下定义。

定义 3.8。设 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$。$\sigma$ 中一列连续元素 $\sigma_i, \ldots, \sigma_j$（其中 $0 \le i \le j$）称为一个 *cyclic (decreasing) run*，如果存在整数 k，使得 $\sigma_i + k \bmod n+1, \ldots, \sigma_j + k \bmod n+1$ 呈递减（这里的模运算表示取 $\{0, \ldots, n\}$ 中的代表元）。此外，循环段 $\sigma_i, \ldots, \sigma_j$ 称为 *left-maximal*，如果 $i = 0$ 或 $\sigma_{i-1}, \ldots, \sigma_j$ 不是循环段；称为 *right-maximal*，如果 $j = n$ 或 $\sigma_i, \ldots, \sigma_{j+1}$ 不是循环段。

Example 3.9. 令 $\sigma = 0649751832$。一些右极大循环段为 064、6497、7518。一些左极大循环段为 1832、6497。

注意，对于每个 j，都有唯一的左极大循环段 $\sigma_i, \ldots, \sigma_j$（通过令 i 取最小值得到）；类似地，对于每个 i，都有唯一的右极大循环段 $\sigma_i, \ldots, \sigma_j$（通过令 j 取最大值得到）。

Remark 3.10. 调度的定义可改述如下：如果 τ_i 未装饰（分别地，已装饰），那么 s_i 就是以 τ_i 结尾（分别地，以 τ_i 开始）的极大循环递减段中未装饰数值（不包括 τ_i）的个数。

Example 3.11. 如果 τ 是图 1 中路径的对角词，那么我们有

$$\begin{array}{lccccccc} \tau & 0 & \overset{\bullet}{8}\overset{\bullet}{6}3\overset{\bullet}{2} & & 74\overset{\bullet}{1} & & 5 \\ s & & 1212 & & 121 & & 1. \end{array}$$

在图 3 中，我们通过在坐标 (i, τ_i) 处放置点来可视化 τ：白点表示未装饰，黑点表示已装饰的 τ_i。注意，如果将这幅图看作一个圆柱体，并将顶部与底部视为重合，那么操作 $\sigma_i \mapsto \sigma_i + k \bmod n$ 可以看作是这个圆柱体的旋转，因此称为“循环段”。从$\bullet$ 6 开始的极大循环游程是$\bullet$ 63$\bullet$27 （图 3，左图），因此调度数为 2。以 4 结束的极大循环游程是 3$\bullet$274 （图 3，右图），因此调度数也为 2。

以下结果可由 [13]定理 3.13 推导得出。

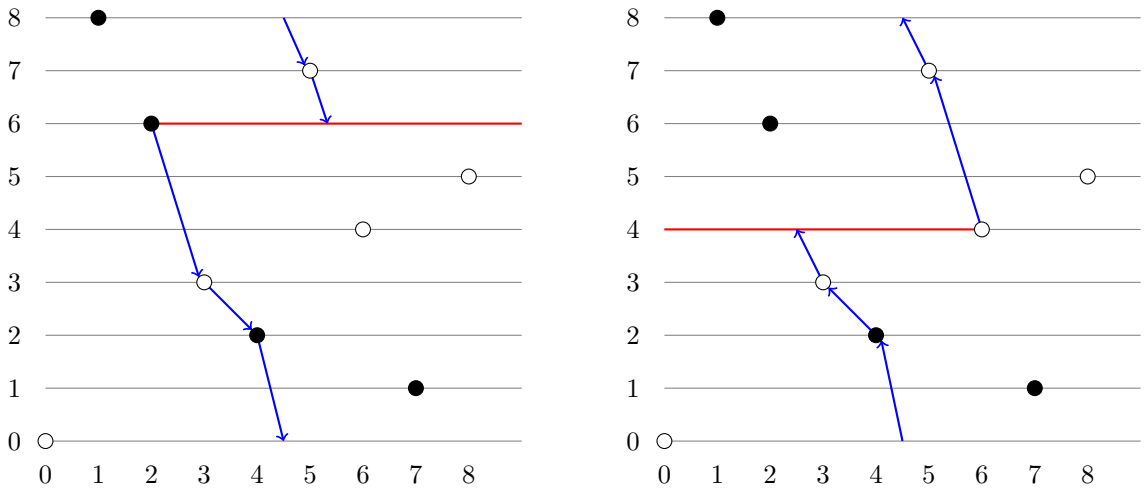

图 3：循环段示意图。

定理 3.12。 *Given $\tau \in \mathfrak{S}_n^{\bullet k}$ and $(s_i)_{1\le i\le n}$ its schedule numbers, we have:*

$$\sum_{\substack{P\in \mathsf{stLD}(n)^{\bullet k}\\ \mathsf{dw}(P)=\tau}} q^{\mathsf{dinv}(P)} t^{\mathsf{area}(P)} = t^{\mathsf{revmaj}(\tau)} \prod_{i\in[n]} [s_i]_q.$$

该定理的一个推论是：当且仅当一个标记排列的所有调度数都严格为正时，它才是某个排列的对角词。在 $q=-1$，根据以下内容，更多项会消失。

引理 3.13 *Let $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{\bullet}$ and $s_1 \dots s_n = \sigma$ then there exists $j \ge 1$ such that the set of schedule numbers $\{s_i \mid 1 \le i \le n\}$ is equal to $[j]$. If $s_i > 0$ for all $i \in [n]$),*

Proof. 假设存在一个指标 i 使得 $s_i > 1$。我们的目标是证明存在 i' 使得 $s_{i'} = s_i - 1$。我们区分两种情况（这两种情况非常相似）：

- σ_i 未装饰。考虑以 σ_i 结尾的左极大游程，记为 R，因此对于某个 h，有 $R = (\sigma_h, \dots, \sigma_i)$。考虑满足 $\sigma_{i'}$ 未装饰的极大 i'，以及 $h \le i' < i$。它存在是因为 $s_i > 0$。令 $R' = \sigma_{h'}, \dots, \sigma_{i'}$ 为以 $\sigma_{i'}$ 结尾的左极大循环段。我们有 $h' \le h$ （因为我们知道 $(\sigma_h, \dots, \sigma_{i'})$ 是一个循环段），所以 R 和 R' 在 R 的每个非装饰值（σ_i 除外）上重叠。由此可得 $s_{i'} \ge s_i - 1$。若相等，则证明完毕。否则，我们迭代这一构造，找到 $i'' < i'$ 使得 $s_{i''} \ge s_{i'} - 1$，等等。由于增量至多为 1，经过若干步后，我们会找到 $i(k)$ 使得 $s_{i(k)} = s_i - 1$。

- σ_i 已装饰。考虑从 σ_i 开始的右极大游程，记为 R，因此对于某个 j，有 $R = (\sigma_i, \dots, \sigma_j)$。考虑满足 $\sigma_{i'}$ 未装饰的最大 i'，并且 $i < i' \le j$。它存在，因为 $s_i > 0$。令 $R' = \sigma_{h'}, \dots, \sigma_{i'}$ 为以 $\sigma_{i'}$ 结尾的左极大循环段。我们有 $h' \le i$ （因为我们知道 $(\sigma_i, \dots, \sigma_{i'})$ 是一个循环段），因此 R 和 R' 在 R 的每个未装饰值上都重叠，除了 $\sigma_{i'}$。由此可得 $s_{i'} \ge s_i - 1$。若取等号，则结论成立。否则，我们回到前一种情况中的情形。

无论哪种情况，我们最终都会如前所述找到 i' 。通过迭代即可得到引理中的结论。

□

这个引理的一个推论是，乘积 $\prod_{i=1}^{n}[s_i]_q$ at $q=-1$ is 除非所有调度数都为 1，否则为 0（否则，其中一个因子是 $[2]_q=1+q$）。因此，定理 3.12 的调度公式变为

$$\sum_{\substack{P\in \mathsf{stLD}(n)^{\bullet k}\\ \mathsf{dw}(P)=\tau}} (-1)^{\mathsf{dinv}(P)} t^{\mathsf{area}(P)} = t^{\mathsf{revmaj}(\tau)}. \tag{6}$$

Notation. 我们将 $\mathfrak{S}_n^{\bullet}(1^n)$ 记为 $\mathfrak{S}_n^{\bullet}$ 中调度数为 1^n的标记排列子集。

现在，将公式（6）对所有带有 k 个标记 τ 的可能排列求和，我们得到 Delta 猜想在 $q=-1$ 处的希尔伯特级数的组合解释：

$$\sum_{P\in \mathsf{stLD}(n)^{\bullet k}} (-1)^{\mathsf{dinv}(P)} t^{\mathsf{area}(P)} = \sum_{\tau\in \mathfrak{S}_n^{\bullet k}(1^n)} t^{\mathsf{revmaj}(\tau)}. \tag{7}$$

Remark 3.14. 我们在引言中指出，当 $k=0$ 且 $t=1$ 时，(7) 的左边是欧拉数 E_n。与右边比较可知，调度数为 1^n 的未装饰排列 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ 由欧拉数 E_n 计数。另一方面，Ramassamy [23, 推论 5] 给出了欧拉数 E_n 的一种新的组合解释：它等于满足对于每个 $i\in\{0,\dots,n-2\}$，$(i, i+1, i+2)$ 均为顺时针定向的 $\{0,\dots,n\}$ 上全循环序的数量。调度数为 1^n 的未装饰排列 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ 与 Ramassamy 的全循环序通过 $\sigma\mapsto(0,\sigma^{-1}(1)\dots,\sigma^{-1}(n))$ 简单相关。

我们通过给出 $\mathfrak{S}_n$ 与 $\mathfrak{S}_n^{\bullet}(1^n)$ 之间的一个双射来结束本节；其逆映射只需移除标记即可得到。这个双射的存在性意味着，每个排列都恰好可以用一种方式进行标记，使得结果具有调度 1^n。

引理 **3.15** *Let $\sigma\in\mathfrak{S}_n^{\bullet}$ 1^n σ_ℓ be a left-maximal cyclic run and assume that . . (). Let $\sigma_k,\dots,,,,,$, σ_ℓ is undecorated. Then σ_k is undecorated as well and $\sigma_{k+1}\ \dots\ \sigma_{\ell-1}$ are decorated.*

Proof. 由于 $s_\ell=1$， $\sigma_k,\dots,\sigma_{\ell-1}$ 中恰有一个未装饰项。记 σ_u 为这个未装饰项。如果 $u\neq k$, σ_k 已装饰，并且从 σ_k 开始的右极大循环段中至少有两个已装饰项（即 σ_u 和 σ_ℓ），这将得到 $s_k\geq 2$, 与 $s_k=1$ 矛盾。因此 $u=k$，我们得到 σ_k 是 $\sigma_k,\dots,\sigma_{\ell-1}$ 中唯一未装饰的项。

□

引理 **3.16** *For each permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ there exists exactly one decorated permutation .. , with underlying permutation σ and schedule 1^n.*

Proof. 假设存在一种对 σ 的标记，使得调度为 1^n，则前一个引理很容易给出寻找它的必要条件（特别是，唯一性将由存在性推出）：我们从右向左进行（从 σ_n 开始，到 σ_1 结束），注意到 σ_n 必然是未装饰的（否则就会有 $s_n=0$）。我们定义一列指标 $i_1>i_2>\cdots>i_m$，其中某个 $m\geq 1$ 满足如下条件；

- $i_1=n$,
- 已知 i_j，我们根据条件 $\sigma_{i_{j+1}}\cdots\sigma_{i_j}$ 是以 σ_{i_j} 结尾的左极大循环段，求出 i_{j+1},
- 该序列在 $i_m=0$处停止。

我们声称，为不属于 $\{i_1, \ldots, i_m\}$ 的指标添加标记，将得到唯一的标记，使得相应的调度为 1^n。现在只需验证该带标记置换的调度确实为 1^n。

根据构造，若 σ_k 未装饰，则有 $s_k = 1$。还需证明当 σ_k 已装饰时 $s_k = 1$。因此，考虑一个右极大循环段 $\sigma_k, \ldots, \sigma_\ell$，其中 σ_k 已装饰。

- 假设 $s_k \geq 2$。因此，这个循环段中有两个（或更多）未装饰的项，例如 σ_i 和 σ_j，且 $k < i < j$。以 σ_j 结尾的左极大循环段至少包含 $\sigma_k, \ldots, \sigma_j$，因此 σ_i 未装饰，这与上述 $i_1 > i_2 > \cdots > i_m$ 的构造矛盾。
- 假设 $s_k = 0$。因此，这个循环段中没有未装饰的项。设 σ_i 是一个未装饰的项，且 $i > k$ 和 i 最小（这样的项存在，因为 σ_n 未装饰）。我们有 $i > \ell$（因为 $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_\ell$ 已装饰）。考虑以 σ_i 结尾的左极大循环段，记作 $\sigma_{i'}, \ldots, \sigma_i$。它不可能以 $\sigma_{i'}$ 开始且 $i' \leq k$，因为 $\sigma_k, \ldots, \sigma_i$ 不是循环段（以 σ_k 开始的右极大循环段以 σ_ℓ 结尾，且 $i > \ell$）。因此 $i' > k$，所以 $\sigma_{i'}, \ldots, \sigma_i$ 除了 σ_i 之外不包含任何未装饰的项。但这意味着 $s_i = 0$，矛盾。

排除其他情形后，我们便有 $s_k = 1$。这就完成了对具有调度 1^n 的标记的存在性和唯一性的证明。□

4 排列

我们继续采用约定 3.6：对于任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，令 $\sigma_0 = 0$。

定义 4.1。给定一个排列 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ 和一个指标 $i \in \{2, \ldots, n\}$，我们称σ_i 为

- *double ascent*，如果 $\sigma_{i-2} < \sigma_{i-1} < \sigma_i$；• *peak*，如果 $\sigma_{i-2} < \sigma_{i-1} > \sigma_i$；
- *double descent*，如果 $\sigma_{i-2} > \sigma_{i-1} > \sigma_i$；• *valley*，如果 $\sigma_{i-2} > \sigma_{i-1} < \sigma_i$。

定义 4.2. 对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，我们定义

$$\mathsf{monot}(\sigma) = \#\big\{i \in \{2, \ldots, n\} \;\big|\; \sigma_i \text{ is a double descent or a double ascent}\big\}.$$

定义 4.3. 设 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，若带有 $1 \leq i < j \leq n$ 的一对 (i, j) 被称为 3-*inversion*，当 o ne 满足以下条件之一时：

- σ_j 是双上升，且 $\sigma_{j-1} < \sigma_i < \sigma_j$；
- σ_j 是双下降，且 $\sigma_{j-1} > \sigma_i > \sigma_j$；
- σ_j 是峰，且 $\sigma_i > \sigma_j$；
- σ_j 是一个谷，并且 $\sigma_i < \sigma_j$。

σ 的 3-逆序数记作 $\mathsf{inv}_3(\sigma)$。

Example 4.4. 对于 $n = 3$，123 有 0 个 3-逆序，132 和 321 各有 1 个 3-逆序，231 and 312 有 2 个 3-逆序，213 有 3 个 3-逆序。

尽管这个统计量的定义看起来或许不太自然，但我们将在命题的证明中看到，可以通过一种相当简单的排列插入过程来跟踪它（类似于莱默码）。

我们回顾以下经典定义。

定义4.5. 对于 $n \in \mathbb{N}$，定义其 t-*analogue*乘以 $[n]_t := 1 + t + \ldots + t^{n-1}$。 $n!$的 t模拟形式为 $[n]_t! = [n]_t[n-1]_t \ldots [1]_t$。

定义4.6. 排列上的统计量 I 称为 *Mahonian*，如果$\sum_{\sigma\in S_n} t^{I(\sigma)} = [n]_t!$。

两个经典的马奥尼统计量是主指标（定义3.4）和逆序数，其定义如下：

$$\mathsf{inv}(\sigma) = \#\big\{(i,j) \;\big|\; 1 \le i < j \le n \text{ and } \sigma_i > \sigma_j\big\}.$$

根据第5节的主要结果（定理5 1）以及revmaj是马奥尼统计量这一事实，我们可以推导出以下结论。

命题4.7。 *The statistic* inv_3 *is Mahonian; that is*

$$\sum_{\sigma\in S_n} t^{\mathsf{inv}_3(\sigma)} = [n]_t!.$$

在 [3], 中，Chebikin定义了逆序统计量的另一种变体。

定义4.8。设 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，定义$\hat{c}_i(\sigma)$为满足以下条件的指标 $j > i$ 的个数：

- i 为奇数且 $\sigma_i > \sigma_j$；或者
- i 是偶数且 $\sigma_i < \sigma_j$。

设 $\hat{\imath}(\sigma) = \hat{c}_1(\sigma) + \ldots + \hat{c}_{n-1}(\sigma)$】【。

命题4.9（[3, 推论 3.5]）。 *The statistics* $\hat{\imath}$ *is Mahonian. Indeed we have*

$$\sum_{\sigma\in S_n} t^{\hat{\imath}(\sigma)} = [n]_t!.$$

定义 **4 10** *alternating permutation* $[n]$ $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ $\sigma_1 >$。. 一个 of 是满足 的排列。 $\sigma_2 < \sigma_3 > \cdots$ $\mathfrak{A}_n$ 我们用 表示这类排列的集合。换言之，

$$\mathfrak{A}_n \coloneqq \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \mathsf{monot}(\sigma) = 0\}.$$

交错排列的数量由欧拉数 E_n 给出，其生成函数定义为

$$\tan(x) + \sec(x) = \sum_{n\ge 0} E_n \frac{x^n}{n!}.$$

容易验证，若 σ 是交错排列，则 $\hat{\imath}(\sigma) = \mathsf{inv}_3(\sigma)$。但一般而言并非如此。例如，若 $\sigma = 123$, $\mathsf{inv}_3(\sigma) = 3$ 且 $\hat{\imath}(\sigma) = 1$。

定义 4.11. $31-2$ *pattern* 中的一个 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 是满足 $\sigma_j > \sigma_i > \sigma_{i+1}$的三元组 $1 \le i < i+1 < j \le n$。我们用 $31-2(\sigma)$表示 σ中 $31-2$ 模式的数量。

在 [15], 中，作者引入了欧拉数的一个有趣的 t-类比，随后在 [3] 和 [17]中对此进行了研究。

定义 4.12. 对所有 $n \in \mathbb{N}$，定义：

$$E_n(t) \coloneqq \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n} t^{31-2(\sigma)}. \tag{8}$$

这个多项式 $E_n(t)$具有若干优美性质，其中包括生成函数 $\sum_{n\ge 0} E_{2n}(t) z^n$ 和 $\sum_{n\ge 0} E_{2n+1}(t) z^n$ 具有优美的连分式表达式 [15, 17]。

这里我们研究这个 t-类比的一个移位，即 $t^{\lfloor n^2/4\rfloor} E_n(t)$。这个 t-类比与我们的 3-逆序统计量自然相关。

命题 4.13. *For all* $n \in \mathbb{N}$

$$t^{\lfloor n^2/4\rfloor} E_n(t) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n} t^{\mathsf{inv}_3(\sigma)}. \tag{9}$$

Proof. 这是 [3] 的引理 9.4 的一个推论。在该引理中，Chebikin 证明，若 $\sigma \in \mathfrak{A}_n$，则 $\lfloor n^2/4\rfloor + 31 - 2(\sigma) = \hat{\imath}(\sigma)$；而我们刚刚指出，若 $\sigma \in \mathfrak{A}_n$，则 $\mathsf{inv}_3(\sigma) = \hat{\imath}(\sigma)$。 □

5 生成树

本节的目标是证明以下结论。回想一下，我们用 $\mathfrak{S}_n^\bullet(1^n)$ 表示 $\mathfrak{S}_n^\bullet$ 中调度为 1^n 的带标记排列子集。

定理 5.1. *There is a bijection* $\phi : \mathfrak{S}_n^\bullet(1^n) \to \mathfrak{S}_n$ *with the following properties:*

(i) revmaj(τ) = inv$_3$($\phi(\tau)$),*(ii)* 装饰数(τ) = 单调数($\phi(\tau)$)。我们将通过构造两棵同构生成树来展示这个双射。

5.1 调度 1^n 的带标记置换树

我们继续采用约定 3.6：对于任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，设 $\sigma_0 = 0$。

设 $\tau \in \mathfrak{S}_n$。根据定义 3.8，我们知道，$\tau_0 \dots \tau_j$ 是循环段当且仅当 $\tau_1 > \dots > \tau_j$。构造这棵树将依赖于以下操作。

定义 5.2. 设 $\tau \in \mathfrak{S}_n$ 和 $1 \le k \le n$。定义 $k + \tau$ 为由 $\mathfrak{S}_n$ 定义的排列

$$\begin{cases} \sigma_0 = 0 \\ \sigma_{i+1} = (k + \tau_i) \mod n + 1 \quad \text{for } 0 \le i \le n. \end{cases}$$

Example. 若 $n = 7$、$\tau = 01423657$和 $k = 3$，则有

$$k + \tau = 034756182.$$

引理 5 3 *Let* $\tau \in \mathfrak{S}_n$ *and* $\sigma = k + \tau$. *For* $0 \le i \le j \le n$ $\tau_i \cdots \tau_j$ *is a cyclic run of* τ *if*.. *and only if* $\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j+1}$ *is a cyclic run of* σ. *Moreover for* $1 \le j \le n$: , , , *(*$\tau_0 \cdots \tau_j$ *is a cyclic run and* $\tau_j + k > n + 1$*) if and only if* $\sigma_0 \dots \sigma_{j+1}$ *is a cyclic run.*

Proof. 第一个陈述是循环段定义（定义 3.8）的直接推论。注意，对于任意排列 τ，$\tau_0 \dots \tau_j$ 是循环段当且仅当 $\tau_1 > \dots > \tau_j$。因此，$\sigma_0 \dots \sigma_{j+1}$ 是循环段当且仅当 $k = \sigma_1 > \dots > \sigma_{j+1}$。由于 $\sigma_{j+1} = (\tau_j + k) \bmod n + 1$，我们有 $\sigma_{j+1} < k$ 当且仅当 $\tau_j + k > n + 1$。 □

生成树的结构将密切取决于以下量。

定义 5.4。给定 $\tau \in \mathfrak{S}_n^\bullet(1^n)$，我们将其 *structural attribute*, $a(\tau)$ 定义为其第一个未装饰字母的值。

定义 5.5。如下定义带标记置换的树 $\mathcal{T}_1$。取其根为 $1 \in \mathfrak{S}_1$。对于具有 $n \ge 1$ 和 $1 \le k \le n + 1$ 的 $\tau \in \mathfrak{S}_n^\bullet(1^n)$，其 *k-th descendant of* τ *in* $\mathcal{T}_1$（记作 $\delta_k(\tau)$）是底层置换为 $\sigma = k + \tau$ 的带标记置换。σ 的标记如下：

- $\sigma_0 = 0$ 从不带标记
- σ_1 带标记当且仅当 $k > n + 1 - a(\tau)$

对于 $i \ge 2$，σ_i 带标记当且仅当 τ_{i-1} 带标记。

关于这棵树前三层的示意，请参见图5左侧的树。*Example* 5.6. 例如，取 $n = 5$和 $\tau = 0$○ 534○ 21. 于是 $a(\tau) = 3$，因此 $n+1-a(\tau) = 3$。我们有

$$\delta_2(\tau) = 02\overset{\bullet}{1}56\overset{\bullet}{4}3 \qquad \delta_4(\tau) = 0\overset{\bullet}{4}\overset{\bullet}{3}12\overset{\bullet}{6}5.$$

我们来证明关于 $\mathcal{T}_1$的一些观察结果。假设 τ 是一个已装饰的排列，其调度为 1^n。

引理

5.7 *Take $\tau \in \mathfrak{S}_n^\bullet(1^n)$. If $\tau_0 \dots \tau_j$ is a right-maximal cyclic run then there is a unique ℓ such that $1 \le \ell \le j$ and τ_ℓ is undecorated.*

Proof. 令 $r := \tau_0 \dots \tau_j$。若 r 包含至少两个未装饰字母，第二大的字母的调度将为 2。若 r 不包含未装饰字母，则必定恰有一个未装饰的 τ_i，且对于所有 $1 \le k \le j$，它都与 $i > j$ 一起位于从 τ_k 开始的极大循环递减段中。因此，以 τ_i 结尾的极大递减段只包含已装饰字母，其调度必为 0（见注 3.10）。 □

命题 **5.8** *The n-th level of the tree $\mathcal{T}_1$ contains exactly all the decorated permutations whose schedule numbers are 1^n.*

Proof. 取 $\tau \in \mathfrak{S}_n^\bullet(1^n)$。我们需要证明，对于所有 $k \in [n+1]$, $\mathsf{sched}(\delta_k(\tau)) = 1^{n+1}$。由引理 3.16 以及定义 5.5 中的树显然会在第 n 层生成 n 的所有排列这一事实，即可得出结论。

设 $\tau_\ell := a(\tau)$ 为包含 τ_0 的右极大循环段中的唯一未装饰项。根据引理 5.7，这个 ℓ 是唯一的。

W我们构造带标记置换 $\sigma = \delta_k(\tau$).

根据引理 5.3，我们知道，如果 $\tau_0 \dots \tau_j$ 不是循环段，那么包含 σ_{j+1} 的循环段与包含 τ_j 的循环段之间存在双射，并且 σ_{j+1} 的调度等于 τ_j 的调度，且其值为一。

此外，如果 $j > 0$ 和 $\tau_0 \dots \tau_j$ 构成一个循环段，且 τ_j 已装饰，那么以 σ_{j+1} 开始的循环段与以 τ_j 开始的循环段之间存在双射，并且 σ_{j+1} 的调度等于 τ_j 的调度，且其值为一。

我们只需证明 $\sigma_{\ell+1}$ 和 σ_1 的调度为 1。

若 $\tau_\ell + k > n+1$，则（根据引理 5.3），$\sigma_0 \dots \sigma_{\ell+1}$是一个循环段。由于 $\sigma_{\ell+1}$未被装饰，我们必须装饰 σ_1，以确保 $\sigma_{\ell+1}$和 σ_1的调度为 1。

若 $\tau_\ell + k \le n+1$，则 $\sigma_0 \dots \sigma_{\ell+1}$不是循环段，但 $\sigma_1 \dots \sigma_{\ell+1}$是。因此，$\sigma_1 \dots \sigma_{\ell+1}$是一个左极大运行；为了确保 $\sigma_{\ell+1}$ 的调度为 1，σ_1 必须未被装饰（否则 $\sigma_{\ell+1}$ 的调度为 0）。此外，若 σ_1 未被装饰，其调度为 1，由此即可得证。 □

命题 5.9. *For all decorated permutations τ, we have*

$$\mathsf{revmaj}(\delta_k(\tau)) = \mathsf{revmaj}(\tau) + (n+1-k).$$

Proof. 对于 $k = n+1$，这显然成立，因为 $\delta_{n+1}(\tau)$是通过将 $n+1$ 附加在 τ 的开头得到的（这不会在反向排列中产生新的下降，因此保持反向主指标不变）。

接下来，我们证明 $\mathsf{revmaj}(\delta_k(\tau)) = \mathsf{revmaj}(\delta_{k-1}(\tau)) - 1$。要从 $\delta_{k-1}(\tau)$ 得到 $\delta_k(\tau)$，我们将每个字母加 1，并把 $n+1$ 替换为 1。令 m 为 $n+1$ 在 $\delta_{k-1}(\tau)^{\mathsf{rev}}$ 中的索引。于是我们有：

$$\mathsf{Des}(\delta_k(\tau)^{\mathsf{rev}}) = \begin{cases} (\mathsf{Des}(\delta_{k-1}(\tau)^{\mathsf{rev}}) \setminus \{m\}) \cup \{m-1\} & \text{if } m > 1, \\ \mathsf{Des}(\delta_{k-1}(\tau)^{\mathsf{rev}}) \setminus \{m\} & \text{if } m = 1. \end{cases}$$

事实上，$\delta_{k-1}(\tau)^{\mathsf{rev}}$ 的第 m 个字母等于 $n+1$，因此是一个下降；但在 $\delta_k(\tau)^{\mathsf{rev}}$ 中它等于 1，所以不是下降。此外，如果 $m > 1$，那么 $\delta_k(\tau)^{\mathsf{rev}}$ 的第 $m-1$ 个字母后面跟着 1，因此必定是一个下降。无论如何

$$\mathsf{revmaj}(\delta_k(\tau)^{\mathsf{rev}}) = \mathsf{revmaj}(\delta_{k-1}(\tau)^{\mathsf{rev}}) - m + m - 1 = \mathsf{revmaj}(\delta_{k-1}(\tau)^{\mathsf{rev}}) - 1$$

因此结论成立。 □

最后，以下性质可由定义5.4和定义5.5轻易推出。

命题 5.10。 *Recall that* 装饰数(τ) *is the number of decorations of* $\tau \in \mathfrak{S}_n^\bullet(1^n)$. *We have:*

$$\mathsf{dec}(\delta_k(\tau)) = \mathsf{dec}(\tau) + \chi(n+1-k \le a(\tau)).$$

Furthermore, we have:

$$a(\delta_k(\tau)) = \begin{cases} k & \text{if } k \le n+1-a(\tau), \\ a(\tau) & \text{if } k > n+1-a(\tau). \end{cases}$$

5.2 另一棵与峰和谷相关的树

定义5.11。如下定义排列的树 $\mathcal{T}_2$。令其根为 $1 \in \mathfrak{S}_1$。对于$\sigma \in \mathfrak{S}_n$和 $1 \le l \le n+1$，定义 $\eta_l(\sigma) \in \mathfrak{S}_{n+1}$为满足以下条件的唯一排列： σ'使得$\sigma'_{n+1} = l$和 σ'_1，……， σ'_n与 σ_1，……， σ_n具有相同的相对顺序。换言之

$$\sigma'_i = \sigma_i + \chi(\sigma_i \ge l);$$

对于 $1 \le l \le n+1$。该排列为 *called the insertion of* l *in* σ。 $\eta_l(\sigma)$将构成 $\mathcal{T}_2$中 σ 的后代节点。

参见图5右侧的树。稍后（定义 5.14）我们将在 $\mathcal{T}_2$中节点的后代节点上定义一个全序，从而得到与 $\mathcal{T}_1$的同构。该排序将紧密依赖于以下数量。

定义5.12。给定 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，定义 *structural attribute*:

$$\tilde{a}(\sigma) = \begin{cases} n+1-\sigma_n & \text{if } \sigma_{n-1} < \sigma_n, \\ \sigma_n & \text{if } \sigma_{n-1} > \sigma_n, \end{cases},$$

其中，在 $n = 1$的情况下，我们考虑 $\sigma_0 = 0$。

命题 5.13。 *For* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, *the map* ψ *on* $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ *defined by*

$$\mathsf{inv}_3(\eta_l(\sigma)) = \mathsf{inv}_3(\sigma) + \psi(l)$$

is a bijection onto $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Proof. 取 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$并令 $\sigma' = \eta_l(\sigma)$。注意，对于 $j \le n$，(i, j)在 σ中构成一个3-逆序，当且仅当它在 σ'中构成一个3-逆序（见定义4.3和定义5.11）。由此可得，$\mathsf{inv}_3(\sigma') = \mathsf{inv}_3(\sigma') + s$，其中 s是形如$(i, n+1)$的3-逆序的数量。我们分两种情况讨论。证明的示意图见图4。

1. *Either* σ *ends with an ascent*，也就是说 $\sigma_{n-1} < \sigma_n$。因此我们有 $\tilde{a} := \tilde{a}(\sigma) = n+1-\sigma_n$。图4左侧对此作了说明，其中红色的值表示 $\psi(l)$的值。
   - 对于 $l > \sigma_n$， σ'_{n+1}是一个双上升。满足 $\sigma'_n < \sigma'_i < \sigma'_{n+1}$ 的 i 的数量等于 $l-(\sigma_n+1)$。因此，对于 $l = \sigma_n+1$、σ_n+2、……、$n+1$，我们分别得到 $\psi(l) = 0$、1、……、$\tilde{a}-1$。
   - 对于 $l \le \sigma_n$， σ'_{n+1}是一个峰。满足$\sigma'_i > \sigma'_{n+1}$ 的 i 的数量等于 $n+l-1$。因此，对于 $l = \sigma_n$、$\sigma_n - 1$、……、1，我们分别得到 $\psi(l) = \tilde{a}$、$\tilde{a}+1$、……、n。
2. *Or*、 σ *ends with a descent*，也就是 $\sigma_{n-1} > \sigma_n$。因此我们有 $\tilde{a} := \tilde{a}(\sigma) = \sigma_n$。图4右侧对此作了说明。
   - 对于 $l \le \sigma_n$， σ'_{n+1}是一个双下降。满足 $\sigma'_n > \sigma'_i > \sigma'_{n+1}$等于 $\sigma_n - l$的 i 的数量。因此，对于 $l = \sigma_n$， $\sigma_n - 1$，……，1，我们分别有 $\psi(l) = 0$、1、……、$\tilde{a}-1$。

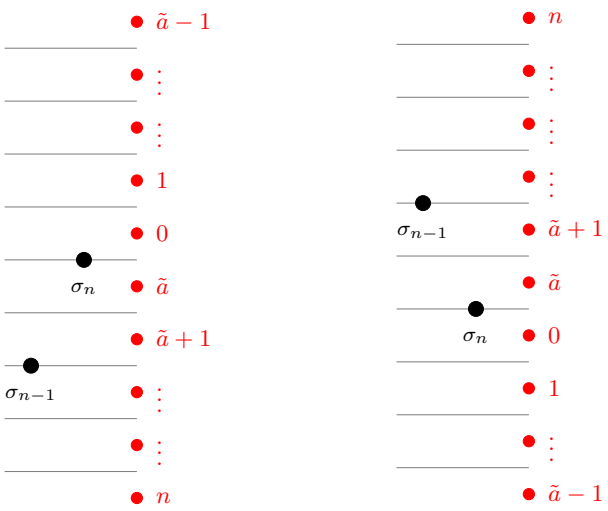

图4：将 n 插入排列时， $n+1$ 种不同插入对 inv_3 的贡献。

- For $l > \sigma_n$, σ'_{n+1} is a valley. The number of i such that $\sigma'_i > \sigma'_{n+1}$ is equal to $l-1$. So for $l = \sigma_n + 1, \ldots, n+1$, we have $\psi(l) = \tilde{a}, \tilde{a}+1, \ldots, n$, respectively.

在这两种情况下，我们都可以看到， $\psi(l)$取到的值恰好是 0， ....., n。 □

定义 5.14. 对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，我们将 *$k$-th descendant of σ in $\mathcal{T}_2$*, $\delta_k(\sigma)$ 定义为满足 $\psi(l) = n+1-k$ 的唯一后代 $\eta_l(\sigma)$，换言之，$\mathrm{inv}_3(\tilde{\delta}_k(\sigma)) = \mathrm{inv}_3(\sigma) + (\{v18)$。

最后，我们可以从命题 5.13 的证明中推导出以下结论。

命题 5 15 *Recall that* σ *denotes the number of double ascents and descents . .* 单调数() *of* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. *We have:*

$$\mathsf{monot}(\eta_k(\sigma)) = \mathsf{monot}(\sigma) + \chi(n+1-k \le \tilde{a}(\sigma)).$$

Furthermore, we have:

$$\tilde{a}(\eta_k(\sigma)) = \begin{cases} k & \text{if } k \le n+1-\tilde{a}(\sigma), \\ \tilde{a}(\sigma) & \text{if } k > n+1-\tilde{a}(\sigma). \end{cases}$$

5.3 树的同构

为了证明定理 5.1，我们按如下方式递归地定义 ϕ：

$$\phi(1) = 1,$$
$$\phi(\delta_k(\sigma)) = \eta_k(\phi(\sigma)) \text{ for all } \sigma \in \biguplus_{n\ge 1} \mathfrak{S}_n^{\bullet}(1^n).$$

在图5中，每个节点的第 k个后代都是从底部数起的第 k个后代，因此，如果我们把两棵树“叠在一起”，就可以通过在右树中寻找对应元素，得到左树中某个元素在 ϕ 下的像。

根据 ϕ的这个定义，以及将 $k\text{-}th\ descendant$定义为在两棵树中都使相关统计量增加 $n+1-k$个单位的后代（参见定义 5.5、命题 5.9 和定义 5.14），我们可以得出

$$\mathsf{revmaj}(\sigma) = \mathsf{inv}_3(\phi(\sigma)).$$

由命题 5.10 和命题 5.15，我们可得

$$\mathsf{dec}(\sigma) = \mathsf{monot}(\phi(\sigma)).$$

因此，我们现在已经证明了定理 5.1。

6 结论与未来方向

现在让我们把各部分综合起来。由定理 5.1 中的双射，我们可以推得 t

$$\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n^{\bullet}(1^n)} t^{\mathsf{revmaj}(\tau)} z^{\mathsf{dec}(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t^{\mathsf{inv}_3(\sigma)} z^{\mathsf{monot}(\sigma)}.$$

回顾方程 7:

$$\sum_{P \in \mathsf{stLD}(n)^{\bullet k}} (-1)^{\mathsf{dinv}(P)} t^{\mathsf{area}(P)} = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n^{\bullet k}(1^n)} t^{\mathsf{revmaj}(\tau)}.$$

将最后两个方程合并，并对 k 求和，我们得到:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{P \in \mathsf{stLD}(n)^{\bullet k}} t^{\mathsf{area}(P)} (-1)^{\mathsf{dinv}(P)} \right) z^k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t^{\mathsf{inv}_3(\sigma)} z^{\mathsf{monot}(\sigma)};$$

这正是定理 1.1 的表述。

由于式 (7) 的左边恰好是 Delta 猜想（式 3）的希尔伯特级数在 $q=-1$ 处的组合数学表达，Delta 猜想成立便可推出

$$\sum_{k=0}^{n-1} \langle \Delta'_{e_{n-k-1}} e_n, h_1^n \rangle \Big|_{q=-1} z^k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t^{\mathsf{inv}_3(\sigma)} z^{\mathsf{monot}(\sigma)},$$

正如推论 1.2 中所述。

由于在 $k=0$ 处，Delta 猜想化为洗牌定理，我们的结果意味着

$$\langle \nabla e_n, h_1^n \rangle|_{q=-1} = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \mathsf{monot}(\sigma)=0}} t^{\mathsf{inv}_3(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} t^{\mathsf{inv}_3(\sigma)} = t^{\lfloor n^2/4 \rfloor} E_n(t),$$

最后一个等号由命题 4.13 得出。因此，我们证明了式 (1)。

计算证据表明，在 $q=-1$ 处求值后，许多其他与洗牌定理和 Delta 猜想相关的多项式也会得到 t-正结果。例如

- $\langle \nabla e_n, h_\mu \rangle$ 对任意分拆 μ;
- $\langle \nabla \omega(p_n);\ h_1^n \rangle$，其中 $\nabla \omega(p_n)$ 是与 square 定理相关的对称函数（该定理由 [19] 猜想，并由 [25]证明）;
- $\langle \nabla E_{n,\ k}, h_1^n \rangle$ 其中 $E_{n,\ k}$ 是 e_n 于 [6]引入的对称函数精化;

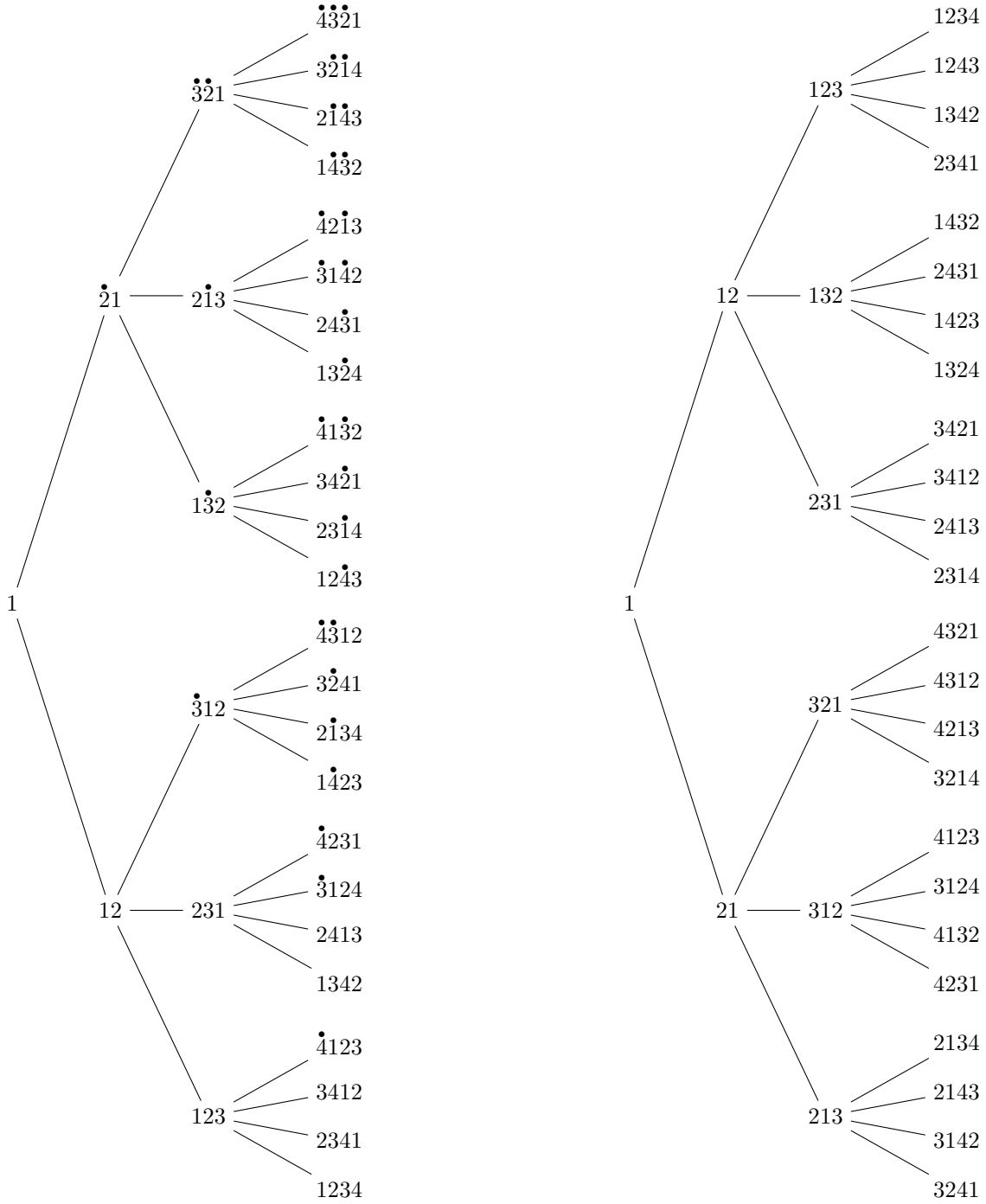

图5： $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 直到第 4 级。

因此，在更一般的框架下研究 $q=-1$ 求值会很有趣；例如，研究修正 Macdonald 多项式中的情形。

最后，我们以一个组合问题结束本节。考虑以下求和

$$D_{n,j}(t) = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\\ \mathsf{monot}(\sigma)\le j}} t^{\mathsf{inv}_3(\sigma)}. \tag{10}$$

特别地，当 $j<0$ 时，该式为 0；当 $j>n-1$ 时，则为 $D_{n,\,j}(q)=D_{n,\,n-1}(q)$。

猜想 6.1. *For $n>1$, we have:*

$$D_{n,j}(t) = t^{n-j-1}[j+1]_t D_{n-1,j+1}(t) + [n-j-1]_t D_{n-1,j-1}(t). \tag{11}$$

若能给出 (11) 的组合证明，将会非常有趣。当然，也可以尝试从另一种组合解释出发来证明：

$$D_{n,j}(q) = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}^\bullet(1^n),\\ \mathsf{dec}(\sigma)\le j}} q^{\mathsf{revmaj}(\sigma)}.$$

在 $t=1$ 的情形下，可以基于 (10) 中的组合解释给出该猜想的组合证明。其思路是考虑映射 $\sigma\mapsto\sigma'$ (其中，对于$\sigma\in\mathfrak{S}_n$，$\sigma'\in\mathfrak{S}_{n-1}$ 是通过移除条目 n 得到的)，并考察单调数在给定 $\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}$ 的 n 个原像中的分布情况。

致谢

作者谨此感谢 ANR Combin´e ANR-19-CE48-0011 的支持。末位作者感谢 FSMP 在本项研究期间给予她的支持。感谢 Michele D'Adderio 富有洞见的讨论。

参考文献

[1] F. Bergeron 和 A. M. Garsia, *Science Fiction and Macdonald's Polynomials* （1998年），363–429。[2] Erik Carlsson 和 Anton Mellit, *A proof of the shuffle conjecture*, 《美国数学会杂志》第31卷（2018年7月），第3期，661–697（英文）。[3] Denis Chebikin, *Variations on descents and inversions in permutations*, 《电子组合学杂志》第15卷（2008年），第1期，研究论文 r132，34页（英文）。[4] Michele D'Adderio、Alessandro Iraci 和 Anna Vanden Wyngaerd, *Decorated Dyck paths polyominoes and the delta conjecture*, 《美国数学会回忆录》，第1370卷，罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2022年（英文）。[5] Michele D'Adderio、Alessandro Iraci 和 Anna Vanden Wyngaerd, *The Delta Square Conjecture*, 《国际数学研究通知》2021年（2020年12月），第1期，38–84。[6] A. M. Garsia 和 J. Haglund, *A proof of the q, t-Catalan positivity conjecture*, 《离散数学》第256卷（2002年），第3期，677–717（英文）。[7] Adriano Garsia、James Haglund、Jeffrey Remmel 和 Meesue Yoo, *A proof of the delta conjecture when q=0* **23** 2019 317 333 , 《组合学年刊》（），–。[8] J. Haglund, *Conjectured statistics for the q, t-catalan numbers*, 《数学进展》第175卷（2003年），第2期，319–334。[9] , *A proof of the q, t-Schröder conjecture*, IMRN.《国际数学研究通知》2004年（2004年），第11期，525–560（英文）。

[10] J. Haglund、M. Haiman、N. Loehr、J. B. Remmel 和 A. Ulyanov, *A combinatorial formula for the character of the diagonal coinvariants* **126** 2005 , 《杜克数学杂志》（），第2期，195 232–。[11] J. Haglund、J. Remmel 和 A. Wilson, *The Delta Conjecture*, 《美国数学会汇刊》第370卷（2018年6月），第6期，4029–4057（英文）。[12] James Haglund, *The q t-catalan numbers and the space of diagonal harmonics: with an appendix* , 第 卷, *on the combinatorics of macdonald polynomials* 41, 2008 美国数学会，。[13] James Haglund 和 Emily Sergel, *Schedules and the Delta Conjecture*, 《组合学年刊》第25卷（2021年3月），第1期，1–31（英文）。[14] Mark Haiman, *Vanishing theorems and character formulas for the hilbert scheme of points in the plane* **149** 2002 2, 371 407 , 《数学创见》（），第 – 期。[15] Guo-Niu Han、A. Randrianarivony 和 Jiang Zeng, *A different q-analogue of Euler numbers*, 洛塔林根组合学研讨会 42（1999年），b42e（法文）。[16] Angela Hicks, *Parking function polynomials and their relation to the shuffle conjecture*, 博士论文, 2013年。[17] Matthieu Josuat-Verg ` *moments de polynômes orthogo-* es, *naux* 2010 *Énumération de tableaux et de chemins*, 博士论文, 。[18] G. Kreweras, *Une famille de polynômes ayant plusieurs propriétés énumeratives*, 《匈牙利数学期刊》第11卷（1980年），第4期，309–320。MR603398[19] Nicholas A. Loehr 和 Gregory S. Warrington, *Square q, t-lattice paths and nabla(pn)*, 《美国数学会汇刊》第359卷（2007年），第2期，649–669（英文）。[20] Ian Grant Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 克拉伦登出版社，1998年（英文）。Google 图书 ID：srv90XiUbZoC。[21] C. L. Mallows 和 John Riordan, *The inversion enumerator for labeled trees*, 《美国数学会通报》第74卷（1968年），92–94。MR218254[22] J.-J. Pansiot, *Nombres d'Euler et inversions dans les arbres* **3** 1982 3, , 《欧洲组合学杂志》（），第 – 期。MR679210[23] Sanjay Ramassamy, *Extensions of partial cyclic orders Euler numbers and multidimensional bous-* , 《电子 *trophedons* **25** 2018 1, 1 66, 20 组合学杂志》（），研究论文 p（英文）。[24] Marino Romero, *The delta conjecture at q=1*, 《美国数学会汇刊》第369卷（2016年09月）。[25] Emily Sergel, *A proof of the square paths conjecture*, 《组合理论杂志：A辑》第152卷（2017年），363–379（英文）。