用于 $2d$纠缠游走的简单硬币

Ahmadullah Zahed* 和 Kallol Sen†

*印度科学研究所高能物理中心，*C. V.* 拉曼路，班加罗尔 *560012*，印度

†*ICTP*南美基础研究所，*IFT-UNESP*（*1° andar*），本托·特奥巴尔多·费拉兹博士街 *271* 号，*2* 号楼——巴拉丰达，*01140-070*，圣保罗州圣保罗，巴西

arXiv:2302.04140v1 [quant-ph] 8 Feb 2023

摘要

我们分析了由贝尔对构成的简单硬币算符在 $2d$ 离散量子随机游走（DQRW）问题中的作用。这种特定形式的硬币使我们能够为 DQRW 的递推关系求得解析的闭式解。该硬币在自旋与位置自由度之间引入纠缠，其纠缠随时间振荡，并渐近趋于一个常数值。我们通过两种不同的度量进一步探究硬币算符的纠缠性质。首先，对初始张量积态空间进行积分，以确定硬币算符的纠缠能力 。其次，我们计算纠缠态对应的密度矩阵与初始纯非纠缠态对应的密度矩阵之间的广义相对 *R´enyi* 熵 。纠缠能力 和广义相对 *R´enyi* 熵 均随时间呈现出与纠缠相似的变化。最后，在连续极限下，该特定硬币算符将 $2d$ DQRW 化为两个与合成规范场耦合的 $1d$ 有质量费米子，其中质量项和规范场均由硬币参数构成。

C 目录

1 **引言设置：硬币算符、概率与纠缠、纠缠能力、广义相对 R´enyi 熵、连续极限、结论与未来方向、致谢** 2

2 4

3 6

4 7

5 9

6 11

7 13

8 14

电子邮箱： *ahmadullah@iisc.ac.in， †kallolmax@gmail.com

1 引言

离散量子随机游走（DQRW）算法已在物理学 [1, 2, 3, 4]和数学 [5, 6] 以及计算智能 [7, 8], 和优化技术领域得到研究和应用[9][1]。尽管经典离散随机游走与量子离散随机游走的基本特征本质上相同，但经典游走与量子游走之间一个关键的区别在于，后者具有一个非平凡的硬币算符 [11]。大多数随机游走研究都采用数值方法。 $1d$ 随机游走存在解析解，正如 [12]所示。然而，随着维度增加，硬币算符最一般的参数化选择也随之增加，解析解因此难以求得。我们使用一种特殊的 SU（4）硬币算符分析二维游走，该算符存在解析解。我们的符号约定遵循 [11], [13]。我们考虑一个由波函数描述的二维行走者 $|\Psi_w\ (t)\rangle$

$$|\Psi_w(t)\rangle = \sum_{i=0}^{3}\sum_{m,n=-t}^{t} A^{(i)}_{m,n}(t)\ |i\rangle \times |m,n\rangle \in \mathcal{H}_{spin}\otimes\mathcal{H}_{position}\,, \tag{1.1}$$

其存在于由自旋与坐标自由度构成的积空间中。积空间 $\mathcal{H}_{spin}\otimes\mathcal{H}_{position}$由一组正交归一向量基 $|i\rangle \in \mathcal{H}_{spin}$ 和 $|m,n\rangle \in \mathcal{H}_{position}$ 张成，使得，

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}\,,\quad \text{and}\quad \langle m,n|p,q\rangle = \delta_{mp}\delta_{nq}\,. \tag{1.2}$$

波函数 $|\Psi_w(t)\rangle$ 是演化时间 t 和坐标 $\vec{x}=(m,n)$的函数，满足 $-t \leq (m,n) \leq t$。波函数在幺正算子 $\mathbf{U} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{C}\otimes\mathbf{I}_{pos}$的作用下随时间离散演化，其中 $\mathbf{I}_{pos}$ 是位置空间中的恒等算子，$\mathbf{S}$ 是 $2d$ 移位算子，而 $\mathbf{C}$ 是硬币算子

$$\mathbf{C}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{-2i\pi z}\cos(2\pi y) & 0 & 0 & -ie^{-2i\pi z}\sin(2\pi y) \\ 0 & e^{2i\pi z}\cos(2\pi x) & -ie^{2i\pi z}\sin(2\pi x) & 0 \\ 0 & -ie^{2i\pi z}\sin(2\pi x) & e^{2i\pi z}\cos(2\pi x) & 0 \\ -ie^{-2i\pi z}\sin(2\pi y) & 0 & 0 & e^{-2i\pi z}\cos(2\pi y) \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

主要结果： 一个 $SU(4)$ 硬币算子有 15 个参数。不过，我们选择了包含 3 个参数的最简形式，它仍能展现硬币的非平凡性质。简单的形式（1.3）使我们的$2d$ DQRW 算法可解析求解。不过，（1.3）会在自旋与位置自由度之间产生非平凡纠缠。它还展现出非平凡的纠缠性质，我们使用两种不同的度量来考察这些性质。a）纠缠能力：通过对初态的影响进行积分，考察其对量子行走的作用。b）广义 R´enyi 熵：在纠缠态与参考的非纠缠态之间，对两个密度矩阵算子进行 POVM（正值算子测量）。此外，该算法的连续极限可映射为与规范场耦合的两个有质量 $1+1d$ 费米子。下面我们将简要讨论上述各项主张：

- **精确解：** 由于演化方程 $|\Psi_w(t+1)\rangle = \mathbf{U}|\Psi_w(t)\rangle$，系数 $A_{(i)m,\ n}(t)$ 在（1.1）中满足一组离散递推关系。给定特定的硬币算符（1.3），我们可以求出系数 $A_{(i)m,\ n}(t)$ 的闭式解析解，其形式如下：

$$\begin{aligned}
A^{(0)}_{m,n}(t) &= \delta_{m,n}(1-\delta_{m,-t})e^{-2\pi itz}\left(F_m(y)A^{(0)}_{0,0}(0) + G_m(y)A^{(3)}_{0,0}(0)\right).\\
A^{(1)}_{m,n}(t) &= \delta_{m,-n}(1-\delta_{m,-t})e^{2\pi itz}\left(F_m(x)A^{(1)}_{0,0}(0) + G_m(x)A^{(2)}_{0,0}(0)\right).\\
A^{(2)}_{m,n}(t) &= \delta_{m,-n}(1-\delta_{m,t})e^{2\pi itz}\left(G_{-m}(x)A^{(1)}_{0,0}(0) + F_{-m}(x)A^{(2)}_{0,0}(0)\right).\\
A^{(3)}_{m,n}(t) &= \delta_{m,n}(1-\delta_{m,t})e^{-2\pi itz}\left(G_{-m}(y)A^{(0)}_{0,0}(0) + F_{-m}(y)A^{(3)}_{0,0}(0)\right).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

[1]如需更全面地了解有关应用和算法的主题，请参阅 [10]。

$$
\begin{aligned}
F_m(x) &= \frac{(-1)^{\frac{t-m}{2}}\sin^2(2\pi x)\Gamma\left(\frac{m+t+2}{2}\right)\cos^m(2\pi x)}{\Gamma(m+1)\Gamma\left(\frac{-m+t+2}{2}\right)}\,{}_2F_1\left(\frac{m-t+2}{2},\frac{m+t+2}{2};m+1;\cos^2(2\pi x)\right)\\
G_m(x) &= -i\sin(2\pi x)\cos^{t-1}(2\pi x)\,{}_2F_1\left(\frac{2-m-t}{2},\frac{m-t}{2};1;-\tan^2(2\pi x)\right)
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

- **概率与纠缠：**概率分布是坐标的函数，其表达式为：

$$
P_{m,n}(t)=\sum_{i=0}^{3}|A^{(i)}_{m,n}(t)|^2\,,\quad \sum_{m,n=-t}^{t}P_{m,n}(t)=1\,. \tag{1.6}
$$

行走者的密度矩阵，

$$
\rho(t)=|\Psi_w(t)\rangle\langle\Psi_w(t)|\,,\quad \widetilde{\rho}(t)=\mathrm{tr}_{\,pos}|\Psi_w(t)\rangle\langle\Psi_w(t)|\,. \tag{1.7}
$$

$E(t)=-\widetilde{\rho}(t)\log\widetilde{\rho}(t)$ 是 $\mathcal{H}_{spin}$ 与 $\mathcal{H}_{position}$ 自由度之间的纠缠熵。如果我们将自旋希尔伯特空间视为 $\mathcal{H}_{spin}=\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$，其中 A，B 是自旋空间中的子系统，那么 A 与 B 之间的纠缠随网格变化的关系可由下式得到，

$$
E_{m,n}(t)=-\rho^A_{m,n}(t)\log\rho^A_{m,n}(t)\,,\ \text{where}\ \rho^A_{m,n}(t)=\mathrm{tr}_{\,B}\frac{\langle m,n|\rho^{AB}(t)|m,n\rangle}{\langle\Psi_w(t)|m,n\rangle\langle m,n|\Psi_w(t)\rangle}\,. \tag{1.8}
$$

该函数经过归一化，使得 $\mathrm{tr}\rho^A_{m,\ n}(t)=1$。位置与自旋自由度之间的纠缠为，$E_{\mathbf{C}}(t)=-\widetilde{\rho}(t)\log\widetilde{\rho}(t)$。渐近纠缠（对于 $x=y=1/8$ 和 $z=1/10$）为，

$$
E_{1/8,1/8,1/10}(t)=0.693156-\frac{\cos^2(\pi t/2)}{4t^2}+\frac{\sin^2(\pi t/4+\pi/8)}{2t^{5/2}}+\dots\,, \tag{1.9}
$$

其他参数选择也呈现出相同的函数行为，如（3.7）所示。

- **纠缠能力：**随机游走中硬币的纠缠能力 [14, 15] 定义为，

$$
\mathcal{E}_{\mathbf{C}}(t)=\frac{1}{V}\int_{\psi_{initial}}dV\sqrt{g}\left(1-\mathrm{tr}\,\widetilde{\rho}(t)^2\right)\,. \tag{1.10}
$$

其中，$\rho_{\mathbf{C}}(t)$ 是对位置进行偏迹后得到的约化密度矩阵。例如，硬币算符的渐近纠缠能力，

$$
\mathcal{E}_{\mathbf{C}}(t)=0.671914\,-\frac{0.0318321\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt[4]{t}}+\dots\,,\quad x=y=1/8\,,z=1/10\,. \tag{1.11}
$$

随时间振荡，并在 $t\to\infty$时趋于一个常数。其他参数选择下的纠缠也遵循完全相同的函数变化规律，只是数值系数不同，如（4.4）所示。

- **广义 Rényi 熵：**我们计算并比较两种不同的定义 [16, 17, 18, 19], 即$\alpha-$夹心 *Rényi* 散度（SRD）和 $\alpha-$相对 *Rényi* 熵（RRE）。给定两个算子 ρ和 σ，$\alpha-$SRD 和 $\alpha-$RRE 的定义如下：

$$
D_{\alpha-RRE}=\frac{1}{\alpha-1}\log\frac{\mathrm{tr}\,\rho^a\sigma^{1-\alpha}}{\mathrm{tr}\,\rho}\,,\quad \widetilde{D}_{\alpha-SRD}=\frac{1}{\alpha-1}\log\frac{\mathrm{tr}\,\sigma^{(1-\alpha)/2\alpha}\rho\sigma^{(1-\alpha)/2\alpha}}{\mathrm{tr}\,\rho}\,, \tag{1.12}
$$

对于 $\rho \not\perp \sigma$ 和 $\alpha \in [0,1)$。对于我们的情况，$\rho = \widetilde{\rho}\ (t)$ 表示最终纠缠混合态 $|\Psi_w\ (t)\ \rangle$ 的密度算符，而 σ 是对应于纯态的参考算符。对于我们的情况，当 t 较大时，α–SRD 和 α–RRE 的渐近形式如下:

$$D_{1/4-SRD} = 0.379594 + \frac{0.106996 \sin\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{16}\right)}{t^{3/2}} - \frac{0.157844 \cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{16}\right)}{\sqrt{t}} + \ldots, x = y = 1/8 \tag{1.13}$$

$$D_{1/4-RRE} = 0.389889 + \frac{0.0955922 \sin\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{16}\right)}{t^{3/2}} - \frac{0.179794 \cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{16}\right)}{\sqrt{t}} + \ldots, x = y = 1/8 \tag{1.14}$$

我们计算了硬币算符的其他参数选择以及 α–SRD 和 α–RRE 在渐近形式下的类似表达式，对应 $\alpha = 1/2$，$3/4$ 见（5.7）-（5.11）。当 t较大时，渐近展开的函数形式类似，但数值系数不同，具体取决于硬币参数和 α。

- **连续极限：**在连续极限下，[1, 20, 21]，递推关系化为 $1+1$ 维空间中的狄拉克方程，

$$(\gamma^{\mu} D_{\mu}^{\pm} - \mathcal{M}_{\pm})\psi_{\pm} = 0\,, \tag{1.15}$$

两个有质量费米子（ψ_+，ψ_-）与规范场耦合。$D_{\mu}^{\pm} = \partial_{\mu} - iA_{\mu}^{\pm}$其中 $A_{\mu}^{\pm} =$（V，$\mathbf{0}$，$\mathbf{0}$，$\mathbf{0}$）。连续极限下的随机游走波函数与费米子之间的关系为，

$$|\Psi_w(t,\vec{x})\rangle = M \cdot (|\uparrow\rangle \otimes |\psi_+\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\psi_-\rangle)\ ,\ \text{where}\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

这种双粒子系统的谱为，

$$E(p_1,p_2) = 2\alpha \pm \sqrt{p_1^2 + \theta_1^2} \pm \sqrt{p_2^2 + \theta_2^2}\,. \tag{1.17}$$

正能量条件表明，$\theta_i \le V_i$。

本文其余部分安排如下：第 2 节介绍问题的数学设定。我们将阐明相关记号，并构造递推关系的解析解。第 3 节考察二维网格上的概率和纠缠分布，并给出自旋与位置自由度之间的纠缠随时间变化的情况。第4节讨论游走中硬币算符的纠缠能力如何随时间和硬币参数变化。与纠缠类似，该函数在时间较长时趋于常数。第 5 节从随机游走的角度讨论并比较 量子动力学熵 的不同定义。对于非常简单的参考矩阵，我们可以得到两者的精确解析解；而对于一般参考态，数值结果已足够。第 6 节讨论游走的连续极限，该极限将其约化为两个与规范场耦合的一维费米子。最后，我们将在第 7 节讨论未来的研究方向。

2 设置：硬币算符

二维量子离散随机游走的波函数可以写成如下形式，

$$|\Psi_w(t)\rangle = \sum_{i=0}^{3} \sum_{m,n=-t}^{t} A_{m,n}^{(i)}(t)\ |i\rangle \otimes |m,n\rangle\,. \tag{2.1}$$

波函数 $|\Psi_w(t)\rangle \in \mathcal{H}_{spin} \otimes \mathcal{H}_{position}$ 其中 $|i\rangle \in \mathcal{H}_{spin}$ 是自旋希尔伯特空间，$|m,\ n\rangle \in \mathcal{H}_{position}$ 是坐标希尔伯特空间。$|i\rangle \in \mathcal{H}_{spin}$ 和 $|m,\ n\rangle \in \mathcal{H}_{position}$ 是正交归一向量组，使得，

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \quad \text{and} \quad \langle m,n|p,q\rangle = \delta_{mp}\delta_{nq}\,. \tag{2.2}$$

位置网格是一个有限大小的系统 $\mathfrak{dim}(m,\ n) = (2t+1) \times (2t+1)$。随机游走的幺正演化由以下方程支配，

$$|\Psi_w(t)\rangle = \mathbf{U}|\Psi_w(t-1)\rangle\,, \quad \mathbf{U} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{C}\otimes\mathbb{I}_{pos}\,, \tag{2.3}$$

其中 $\mathbf{U}$ 是一个幺正算子，而

$$\mathbf{S} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{\vec{x}} |i\rangle\langle i| \otimes |\vec{x}+\alpha_i\rangle\langle\vec{x}|\,. \tag{2.4}$$

其中 $\alpha_0 = (1,\ 1)$、$\alpha_1 = (1,\ -1)$、$\alpha_2 = -\alpha_1$ 和 $\alpha_3 = -\alpha_0$ 是移位算子，我们针对当前目的选择一个由贝尔对构成的特定硬币算符 $\mathbf{C}$，

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^{4} e^{i\lambda_k}|\Phi_k\rangle\langle\Phi_k|\,, \quad \sum_{k=1}^{4}\lambda_k = 0\,, \tag{2.5}$$

对于 $\lambda_1+\lambda_2 = -4\pi z$，$\lambda_1-\lambda_2 = -4\pi y$，$\lambda_3-\lambda_4 = -4\pi x$，且其中，

$$|\Phi_{1,2}\rangle = \frac{|0\rangle \pm |3\rangle}{\sqrt{2}}\,,\ |\Phi_{3,4}\rangle = \frac{|1\rangle \pm |2\rangle}{\sqrt{2}}\,. \tag{2.6}$$

具体而言，

$$\mathbf{C}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{-2i\pi z}\cos(2\pi y) & 0 & 0 & -ie^{-2i\pi z}\sin(2\pi y) \\ 0 & e^{2i\pi z}\cos(2\pi x) & -ie^{2i\pi z}\sin(2\pi x) & 0 \\ 0 & -ie^{2i\pi z}\sin(2\pi x) & e^{2i\pi z}\cos(2\pi x) & 0 \\ -ie^{-2i\pi z}\sin(2\pi y) & 0 & 0 & e^{-2i\pi z}\cos(2\pi y) \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

根据幺正算子 $\mathbf{U}$ 的显式形式以及演化方程（2.3），系数 $A^{(i)}_{m,\ n}(t)$ 的递推关系为，

$$\begin{aligned}
A^{(0)}_{m,n}(t) =& e^{-2i\pi z}\cos(2\pi y)A^{(0)}_{m-1,n-1}(t-1) - ie^{-2i\pi z}\sin(2\pi y)A^{(3)}_{m-1,n-1}(t-1)\,, 2-t\le m,n\le t \\
A^{(1)}_{m,n}(t) =& e^{2i\pi z}\cos(2\pi x)A^{(1)}_{m-1,n+1}(t-1) - ie^{2i\pi z}\sin(2\pi x)A^{(2)}_{m-1,n+1}(t-1)\,, 2-t\le m\le t\,, -t\le n\le t-2 \\
A^{(2)}_{m,n}(t) =& -ie^{2i\pi z}\sin(2\pi x)A^{(1)}_{m+1,n-1}(t-1) + e^{2i\pi z}\cos(2\pi x)A^{(2)}_{m+1,n-1}(t-1)\,, -t\le m\le t-2\,, 2-t\le n\le t \\
A^{(3)}_{m,n}(t) =& -ie^{-2i\pi z}\sin(2\pi y)A^{(0)}_{m+1,n+1}(t-1) + e^{-2i\pi z}\cos(2\pi y)A^{(3)}_{m+1,n+1}(t-1)\,, -t\le m,n\le t-2
\end{aligned} \tag{2.8}$$

由于硬币算符的特殊性质，递推关系发生解耦，即 $(A^{(0)}_{m,\ n}(t)\ \ A^{(3)}_{m,\ n}(t))$ 与 $(A^{(1)}_{m,\ n}(t)\ \ A^{(2)}_{m,\ n}(t))$ 相互解耦。递推关系可以精确求解，我们可以将这些系数的解析形式写成如下形式，

$$\begin{aligned}
A^{(0)}_{m,n}(t) &= \delta_{m,n}(1-\delta_{m,-t})e^{-2\pi itz}\left(F_m(y)A^{(0)}_{0,0}(0) + G_m(y)A^{(3)}_{0,0}(0)\right)\,, \\
A^{(3)}_{m,n}(t) &= \delta_{m,n}(1-\delta_{m,t})e^{-2\pi itz}\left(G_{-m}(y)A^{(0)}_{0,0}(0) + F_{-m}(y)A^{(3)}_{0,0}(0)\right)\,, \\
A^{(1)}_{m,n}(t) &= \delta_{m,-n}(1-\delta_{m,-t})e^{2\pi itz}\left(F_m(x)A^{(1)}_{0,0}(0) + G_m(x)A^{(2)}_{0,0}(0)\right)\,, \\
A^{(2)}_{m,n}(t) &= \delta_{m,-n}(1-\delta_{m,t})e^{2\pi itz}\left(G_{-m}(x)A^{(1)}_{0,0}(0) + F_{-m}(x)A^{(2)}_{0,0}(0)\right)\,,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

初始波函数位于原点时，

$$|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} A^{(0)}_{0,0}(0) \\ A^{(1)}_{0,0}(0) \\ A^{(2)}_{0,0}(0) \\ A^{(3)}_{0,0}(0) \end{pmatrix} \otimes |0,0\rangle \,. \tag{2.10}$$

函数 F_m 和 G_m 为，

$$\begin{aligned} F_m(x) &= \frac{(-1)^{\frac{t-m}{2}} \sin^2(2\pi x)\Gamma\left(\frac{m+t+2}{2}\right)\cos^m(2\pi x)}{\Gamma(m+1)\Gamma\left(\frac{-m+t+2}{2}\right)}\, {}_2F_1\left(\frac{m-t+2}{2}, \frac{m+t+2}{2}; m+1; \cos^2(2\pi x)\right) \\ G_m(x) &= -i\sin(2\pi x)\cos^{t-1}(2\pi x)\, {}_2F_1\left(\frac{2-m-t}{2}, \frac{m-t}{2}; 1; -\tan^2(2\pi x)\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

在本文余下部分，我们将采用特定的硬币参数。具体如下：

$$\mathbf{C}(1/8, 1/8, 1/10)\,, \mathbf{C}(1/8, 1/12, 1/10) \text{ and } \mathbf{C}(1/6, 1/8, 1/10)\,. \tag{2.12}$$

3 概率与纠缠

概率分布是 $2D$ 网格的函数，定义如下：

$$P_{m,n}(t) = \langle m,n|\Psi_w(t)\rangle\langle\Psi_w(t)|m,n\rangle = \sum_{i=0}^{3} \left|A^{(i)}_{m,n}(t)\right|^2 \,, \quad \sum_{m,n=-t}^{t} P_{m,n}(t) = 1\,. \tag{3.1}$$

密度算符定义如下：

$$\rho(t) = |\Psi_w(t)\rangle\langle\Psi_w(t)|\,, \tag{3.2}$$

存在于 $(8t+4) \times (8t+4)$ 维空间中，据此我们可以定义 $2D$ 网格上的密度矩阵如下：

$$\rho_{m,n}(t) = \frac{\langle m,n|\rho(t)|m,n\rangle}{|\langle m,n|\Psi_w(t)\rangle|^2}\,. \tag{3.3}$$

对此表达式还有一种看法，如下所述。稍作题外讨论，若将自旋希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{spin}(=\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)$ 视为由两个子系统 A 和 B （即 $\rho_{m,\ n} = \rho^{AB}_{m,\ n}$）组成，那么对任一子系统取偏迹，便可定义 A 和 B之间的纠缠

$$E_{m,n}(t) = -\mathrm{tr}\ \rho^A_{m,n}(t)\log\rho^A_{m,n}(t)\,,\ \rho^A_{m,n}(t) = \mathrm{tr}\ {}_B\rho^{AB}_{m,n}(t)\,, \tag{3.4}$$

作为网格的函数。我们在图 1 中绘出了二维网格上的概率和纠缠分布，对应的硬币参数为 $x = 1/6$, $y = 1/8$ 和 $z = 1/10$。其他参数选择下的图形也类似。请注意，网格上的概率和纠缠分布仅沿对角线非零，这反映了（2.8）中的解耦递推关系。另一方面，对整个网格取偏迹，可得一个约化密度矩阵，

$$\widetilde{\rho}(t) = \mathrm{tr}\ {}_{pos}\rho(t)\,,\quad E(t) = -\widetilde{\rho}(t)\log\widetilde{\rho}(t)\,, \tag{3.5}$$

它定义了自旋与位置自由度之间的纠缠。下面我们绘制张量积初态的概率和纠缠分布，

$$|\Psi_w(0)\rangle = |0\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0,0\rangle\,. \tag{3.6}$$

由（3.5）给出的自旋与位置自由度的纠缠是时间的函数，如图 2所示。对于所选的硬币参数，我们可以将渐近纠缠拟合为以下形式，

$$E_{1/6,1/8,1/10}(t) = 0.695062 - 0.042797\frac{\cos^2(\pi t/4+\pi/8)}{\sqrt{t}} - 0.0567782\frac{\sin^2(\pi t/3+\pi/6)}{\sqrt{t}} + \dots , \tag{3.7}$$

$$E_{1/8,\ 1/8,\ 1/10}\ (t)\ = 0.693156 - \frac{\cos^2(\pi t/2)}{4t^2} + \frac{\sin^2(\pi t/4+\pi/8)}{2t^{5/2}} + \dots , \tag{3.8}$$

$$E_{1/8,1/12,1/10}(t) = 0.69212 - 0.0207781\frac{\cos^2(\pi t/6+\pi/12)}{\sqrt{t}} - 0.046477\frac{\sin^2(\pi t/4+\pi/8)}{\sqrt{t}} + \dots , \tag{3.9}$$

其中.....表示次领先项。纠缠硬币的渐近纠缠低于 Grover 硬币和 Kempe 硬币在 $2d$ 随机游走 [22], [23]中的最小纠缠值。对于我们选择的硬币，渐近纠缠的一般渐近形式可写为:

$$E_{x,y,z}(t) = A_0(x,y,z) + \sum_{i,m\geq 0}\rho_i\frac{\sin^2(\pi t/a_i+\gamma_i)}{t^m} + \sum_{i,n\geq 0}\sigma_i\frac{\cos^2(\pi t/b_i+\delta_i)}{t^n} , \tag{3.10}$$

其中我们得到 (3.7) 中的首个领先系数。

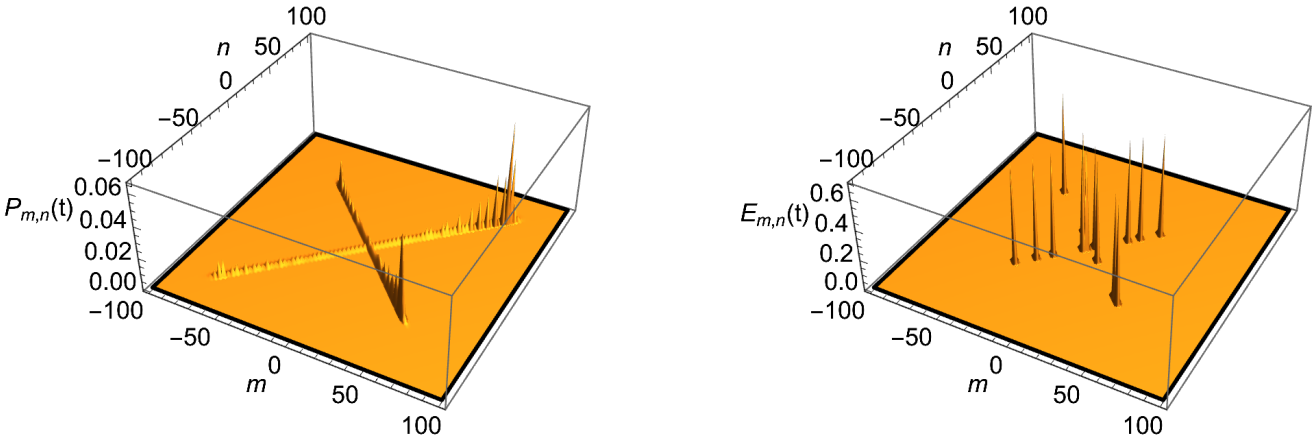

图 1：$P_{m,\ n}\ (t)$ 和$E_{m,\ n}\ (t)$ ，其中 $t = 100$ 对于$\mathbf{C}$（1/6，1/8，1/10），对应于（3.6）中的初始张量积态。

4 纠缠能力

为了进一步探究（2.7）中硬币算符的纠缠性质，我们分析其纠缠能力 [14],[15], [24], [25, 26], [27], ，它描述了硬币算符从初始张量积态生成纠缠态的能力。具体而言，考虑初始态:

$$|\Psi_w(0)\rangle = (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) \otimes |0,0\rangle , \tag{4.1}$$

其中,

$$|\psi_i\rangle = \cos\frac{\theta_i}{2}|0\rangle + e^{i\alpha_i}\sin\frac{\theta_i}{2}|1\rangle . \tag{4.2}$$

这意味着 $|\Psi(0)\rangle \in \mathbb{CP}_1 \otimes \mathbb{CP}_1$。

$$\mathcal{E}_{\mathbf{C}}(t) = \frac{1}{16\pi^2}\int_{\mathcal{M}} d\theta_1 d\theta_2 d\alpha_1 d\alpha_2\ \sin\theta_1 \sin\theta_2\ \left(1 - \mathrm{tr}\ \widetilde{\rho}(t)^2\right) , \tag{4.3}$$

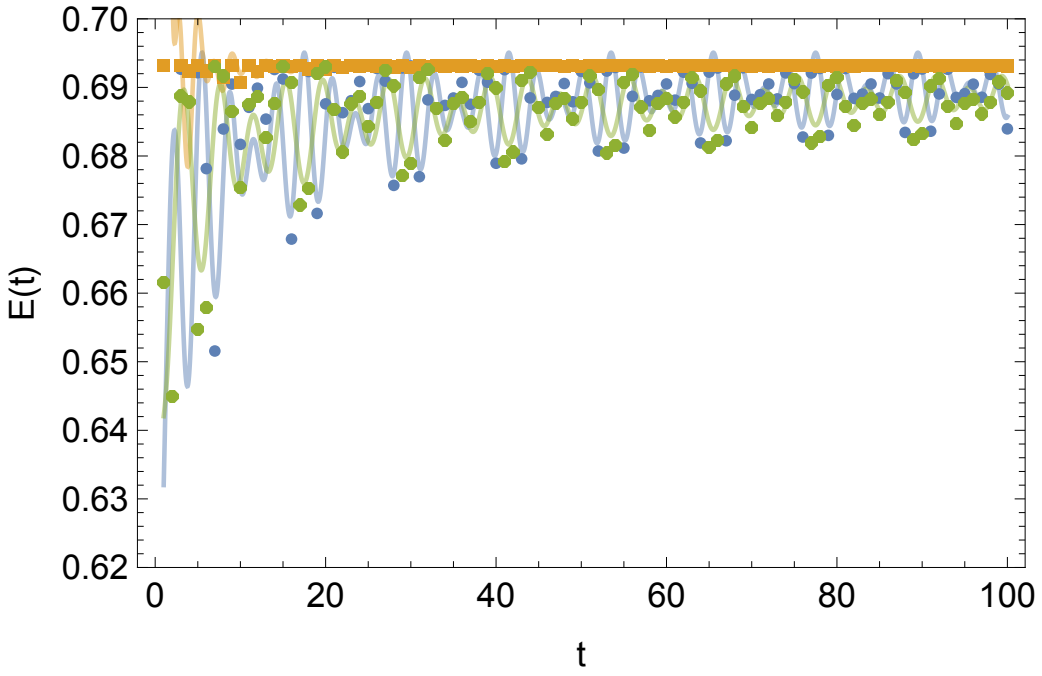

图 2： $E(t)$ 与 t 的关系，针对量子硬币 $C(1/6,\ 1/8,\ 1/10)$（蓝色）、 $C(1/8,\ 1/8,\ 1/10)$（橙色）和 $C(1/8,\ 1/12,\ 1/10)$（绿色）。

给出了硬币算符在随机游走中的纠缠能力，也就是“使纠缠产生的能力”。积分遍历张量积态的整个流形，$\mathcal{M} = \mathbb{CP}_1 \otimes \mathbb{CP}_1$。积分上下限为$0 \leq (\theta_1,\ \theta_2) \leq \pi$和 $0 \leq (\alpha_1,\ \alpha_2) \leq 2\pi$。在图（3）中，我们探讨了 $\mathcal{E}_C(t)$ 对硬币算符的三种参数选择所对应的纠缠能力。

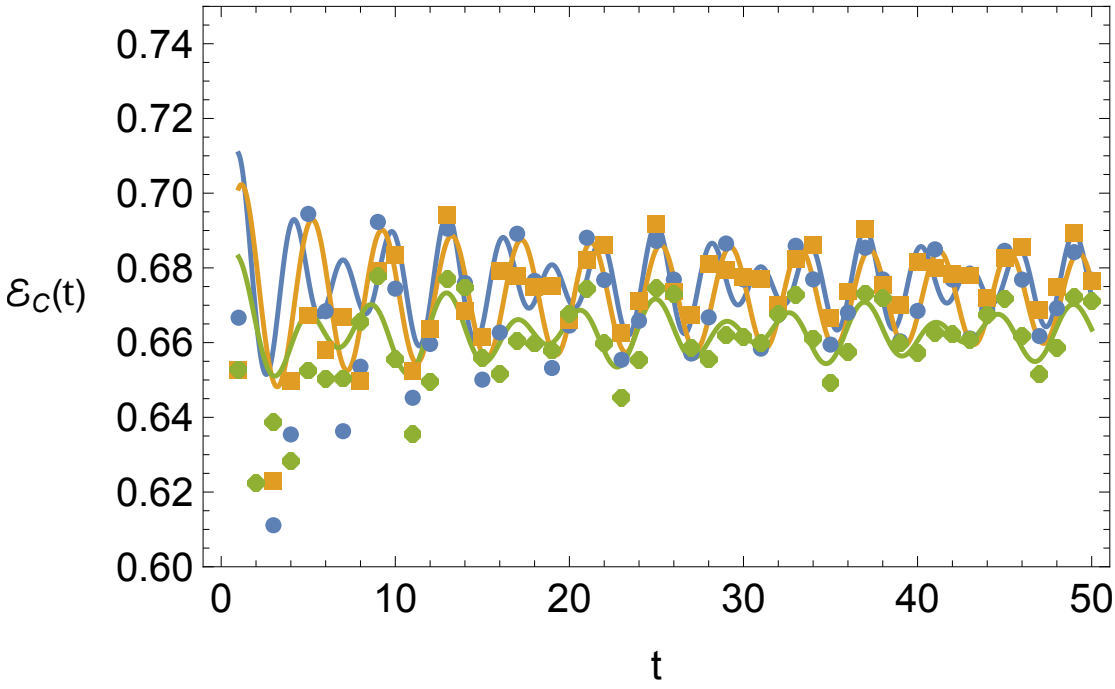

图 3：图中展示了拟合得到的函数形式（实线）与针对 $\mathcal{E}_C(t)$ 与 t 的关系、最多达到 $t = 50$ 时获得的数据的对比，涵盖三种参数选择：$\mathbf{C}(1/8,\ 1/8,\ 1/10)$（蓝色）、$\mathbf{C}(1/6,\ 1/8,\ 1/10)$（橙色）和$\mathbf{C}(1/8,\ 1/12,\ 1/10)$（绿色）。

渐近（$t \gg 1$）纠缠能力（固定 $z = 0.1$ 时）的函数形式如下：

$$\mathcal{E}_{\mathbf{C}}(t) = \begin{array}{ll} 0.671914 - \frac{0.0318321 \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt[4]{t}} + \ldots, & x = y = 1/8 \\ 0.676256 + \frac{0.0123798 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt[4]{t}} - \frac{0.0219393 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi t}{3}\right)}{\sqrt[4]{t}} + \ldots, & x = 1/6, y = 1/8 \\ 0.662477 + \frac{0.00779714 \sin\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt[4]{t}} + \frac{0.0131973 \sin\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{16}\right)}{\sqrt[4]{t}} + \ldots, & x = 1/8, y = 1/12 \end{array} \tag{4.4}$$

这表明，作为时间和硬币参数的函数，纠缠能力的一般渐近主导形式将为：

$$\mathcal{E}_{\mathbf{C}}(t) = \mathcal{A}_{\mathbf{C}} + \sum_{i,m \geq 0} \rho_i \frac{\sin^2(\pi t/a_i + \gamma_i)}{t^{m+1/4}} + \sum_{i,n \geq 0} \sigma_i \frac{\cos^2(\pi t/b_i + \delta_i)}{t^{n+1/4}} + \ldots, \tag{4.5}$$

其中，$\mathcal{A}_C$ 与时间无关，是硬币参数的函数。参数 ρ_i，σ_i，a_i，b_i，γ_i，δ_i取决于硬币参数。

5 广义相对 R´ényi 熵

除了纠缠能力之外，另一种阐明硬币纠缠性质的度量是使用广义相对 *R´ényi* 熵的定义。由于行走算法描述的是一个量子过程，因此需要使用能够体现该算法量子特性的可观测量。遵循[16] [17], [19, 18], ，我们从量子行走的角度计算了两种定义，即 $\alpha-$夹心式 *R´ényi* 散度和 $\alpha-$相对 *R´ényi* 熵。定义如下。给定两个正算子 ρ 和σ，使得 $\rho \not\perp \sigma$，我们可以定义：

$$D_{\alpha-SRD}(\rho, \sigma) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \frac{\text{tr } \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}}{\text{tr } \rho}, D_{\alpha-RRE}(\rho, \sigma) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \frac{\text{tr } \rho^{\alpha} \sigma^{1-\alpha}}{\text{tr } \rho}, \tag{5.1}$$

for $\alpha \in [0, 1)$。对于任意量子操作 $\Lambda: \rho \to \Lambda\rho$，这些定义满足 fy,

$$D_{\alpha}(\rho, \sigma) \geq D_{\alpha}\left(\Lambda(\rho), \Lambda(\sigma)\right). \tag{5.2}$$

注意,

$$[\rho, \sigma] = 0, \quad \Rightarrow \quad D_{\alpha-SRD} = D_{\alpha-RRE} = D_{\alpha}^{\text{cl}}. \tag{5.3}$$

其中,

$$D_{\alpha}^{\text{cl}}(p, q) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \frac{\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x)^{\alpha} q(x)^{1-\alpha}}{\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x)}, \text{ supp } p(x) \subseteq \text{supp } p(x) \ \wedge \ \alpha \neq 1. \tag{5.4}$$

是定义在集合$x \in \mathfrak{X}$上的两个正概率分布 $p(x)$和 $q(x)$之间的经典相对 R´ényi 熵，其中 supp $p(x) \subseteq$supp $q(x)$ [2]。出于计算用途，我们采用ρ 和 σ的以下定义。我们取,

$$\rho(t) = \text{tr}_{pos} |\Psi_w(t)\rangle\langle\Psi_w(t)|, \quad \text{and} \quad \sigma = |\Psi_w(0)\rangle\langle\Psi_w(0)|. \tag{5.5}$$

注意，$\rho(t)$ 是混合态的密度算符（对位置坐标进行偏迹得到），而 σ 是纯态的密度算符。两者均满足 tr $\rho =$ tr $\sigma = 1$。我们将为熵度量[3],选择特定的初始条件

$$|\Psi_w(0)\rangle = \frac{(1, i, 0, 0)}{\sqrt{2}} \otimes |0, 0\rangle. \tag{5.6}$$

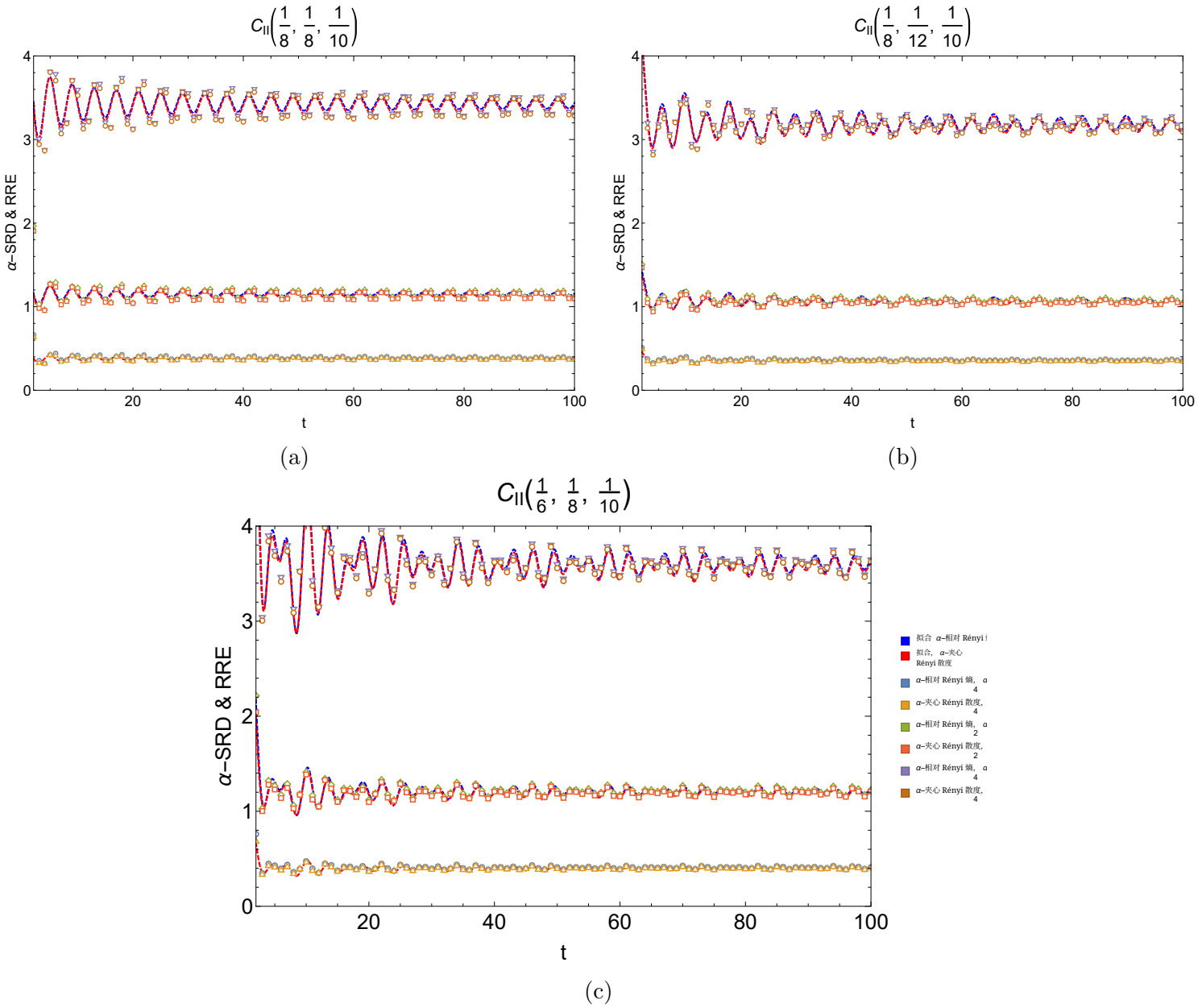

图4：图中将拟合得到的函数形式（虚线所示）与针对α–夹心 Rényi 散度和 α–相对 Rényi 熵相对于 t 的数据进行了比较，取值范围截至 $t = 100$；图中标注了所选用的硬币参数。我们选择$\alpha = 1/4,\ 1/2,\ 3/4$。

ρ（t）可利用（2.9）中的解进行解析计算。我们绘制 $D_{\alpha-SRD}$ 和 $D_{\alpha-RRE}$ 随时间（t）变化的函数图像，见图 4，其中硬币算符（2.12）采用了三种参数选择。

从图4中，我们可以将 $D_{\alpha-SRD}$ 在 t较大时的主导渐近形式拟合为以下函数形式

[2]这意味着，只要 $q(x) = 0$，就有 $p(x) = 0$。[3]需要指出的是，这些选择绝非唯一，其他初始条件同样有效。不过，我们强调，当 $t \to \infty$ 时，熵函数渐近行为的函数形式不会受到初始条件具体形式的影响。

形式（所有计算中我们固定 $z=0.1$ ），

$$D_{1/4-SRD}=\begin{cases}0.379594+\frac{0.106996\sin\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{16}\right)}{t^{3/2}}-\frac{0.157844\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{16}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=y=1/8\\ 0.352781-\frac{0.0568579\cos\left(\frac{\pi t}{3}+\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{t}}-\frac{0.0932246\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=1/8, y=1/12\\ 0.401346-\frac{0.113507\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{t}}-\frac{0.0769188\cos\left(\frac{2\pi t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=1/6, y=1/8\end{cases} \tag{5.7}$$

$\alpha=1/2$ 和 $\alpha=3/4$ 也存在相同的函数基，因此，

$$D_{1/2-SRD}\sim 3D_{1/4-SRD}+\ldots \quad \text{and} \quad D_{3/4-SRD}\sim 9D_{1/4-SRD}+\ldots . \tag{5.8}$$

同样，对于 $\alpha-RRE$ 在 t较大时的主导渐近形式，我们得到如下函数形式，

$$D_{1/4-RRE}=\begin{cases}0.389889+\frac{0.0955922\sin\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{16}\right)}{t^{3/2}}-\frac{0.179794\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{16}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=y=1/8\\ 0.363284-\frac{0.0645552\cos\left(\frac{\pi t}{3}+\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{t}}-\frac{0.10113\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=1/8, y=1/12\\ 0.411921-\frac{0.118399\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{t}}-\frac{0.0762127\cos\left(\frac{2\pi t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=1/6, y=1/8\end{cases}, \tag{5.9}$$

$$D_{1/2-RRE}=\begin{cases}1.15822+\frac{0.300902\sin\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{16}\right)}{t^{3/2}}-\frac{0.51888\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{16}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=y=1/8\\ 1.07782-\frac{0.185198\cos\left(\frac{\pi t}{3}+\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{t}}-\frac{0.296234\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=1/8, y=1/12\\ 1.22452-\frac{0.353662\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{t}}-\frac{0.228691\cos\left(\frac{2\pi t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=1/6, y=1/8\end{cases}, \tag{5.10}$$

and,

$$D_{3/4-RRE}=\begin{cases}3.44391+\frac{0.937397\sin\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{16}\right)}{t^{3/2}}-\frac{1.49066\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{16}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=y=1/8\\ 3.20219-\frac{0.532561\cos\left(\frac{\pi t}{3}+\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{t}}-\frac{0.864633\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=1/8, y=1/12\\ 3.64189-\frac{1.04617\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{t}}-\frac{0.68791\cos\left(\frac{2\pi t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{t}}+\ldots, x=1/6, y=1/8\end{cases}. \tag{5.11}$$

根据这些渐近形式，我们可以推导出 $\alpha-SRD$ 和 $\alpha-RRE$的一般渐近形式，如下所示，

$$F(\alpha,\mathbf{C})=A_{\alpha,\mathbf{C}}+\sum_{i,m}\rho_i\frac{\cos(4\pi t/a_i+\gamma_i)}{t^{m+1/2}}+\sum_{i,n}\sigma_i\frac{\sin(4\pi t/b_i+\delta_i)}{t^{n+1/2}}\,. \tag{5.12}$$

6 连续极限

对于我们选择的硬币（2.7），量子离散随机游走的连续极限会产生合成规范场 [20, 21]。首先，我们将离散差分替换为导数，

$$|\Psi_w(t+\Delta t,\vec{x})\rangle-|\Psi_w(t,\vec{x})\rangle=\Delta t\partial_t|\Psi_w(t,\vec{x})\rangle\,,\ |\Psi_w(t,\vec{x}+\Delta\vec{x})\rangle-|\Psi_w(t,\vec{x})\rangle=\Delta\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}|\Psi_w(t,\vec{x})\rangle\,. \tag{6.1}$$

利用 $|\psi_w(t+\Delta t,\ \vec{x})=\mathbf{U}|\Psi_w(t,\ \vec{x})\rangle$，我们还可以写出式（2.3）的类比连续版本，

$$\partial_t|\Psi_w(t,\vec{x})\rangle=\frac{\mathbf{U}-\mathbf{I}}{\Delta t}|\Psi_w(t,\vec{x})\rangle\,,\ \ \mathbf{U}=\mathbf{S}\cdot\mathbf{C}\,. \tag{6.2}$$

在连续极限下（对于 $\Delta\vec{x}=(\Delta x,\ \Delta y)$ ），

$$\mathbf{S}=\sum_i|i\rangle\langle i|\otimes|\vec{x}+\Delta\vec{x}_i\rangle\langle\vec{x}|=\mathbf{I}+\underbrace{(\mathbf{I}\otimes\sigma_3)\Delta x\partial_x+(\sigma_3\otimes\mathbf{I})\Delta y\partial_y}_{\Delta\mathbf{S}}\,, \tag{6.3}$$

其中 σ_i 是泡利矩阵。类似地，我们可以将硬币算符写成如下形式，

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(\theta_1,\theta_2,\xi,\alpha) =&\frac{e^{i(\alpha-\xi)}}{2}\Big[\left(\mathbb{I}_4+\sigma_3\otimes\sigma_3\right)\cos\theta_1 - i\left(\sigma_1\otimes\sigma_1-\sigma_2\otimes\sigma_2\right)\sin\theta_1\Big]\\ &+\frac{e^{i(\alpha+\xi)}}{2}\Big[\left(\mathbb{I}_4-\sigma_3\otimes\sigma_3\right)\cos\theta_2 - i\left(\sigma_1\otimes\sigma_1+\sigma_2\otimes\sigma_2\right)\sin\theta_2\Big]\,.\end{aligned} \tag{6.4}$$

其中我们引入了另一个 $U(1)$ 相位 α。使用参数化，，

$$\begin{aligned}\theta_1(t,x,y) =&\theta_1^{(0)}(t,x,y)+\bar{\theta}_1(t,x,y)\epsilon^{\mu}\,,\ \theta_2(t,x,y)=\theta_2^{(0)}(t,x,y)+\bar{\theta}_2(t,x,y)\epsilon^{\nu}\,,\\ \xi(t,x,y) =&\xi^{(0)}(t,x,y)+\bar{\xi}(t,x,y)\epsilon^{\rho}\,,\ \alpha(t,x,y)=\alpha^{(0)}(t,x,y)+\bar{\alpha}(t,x,y)\epsilon^{\omega}\,,\end{aligned} \tag{6.5}$$

并且 $\mathbf{C}(\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},\xi^{(0)},\alpha^{(0)}) =\mathbf{I}$，可转化为，

$$\theta_1^{(0)}=k_1\pi\,,\ \theta_2^{(0)}=k_2\pi\,,\ \xi^{(0)}=\pi(n-m)+\frac{k_1-k_2}{2}\pi\,,\ \alpha^{(0)}=\pi(m+n)-\frac{k_1+k_2}{2}\pi\,, \tag{6.6}$$

满足 $(k_1,k_2,n,m)\in\mathbb{Z}$。最一般地，我们可以取 $\Delta t\sim\epsilon^{\mathfrak{T}}$, $\Delta x\sim\Delta y\sim\epsilon^{\delta}$ 即所有参数具有不同的标度。不过，为了采用最简单的标度，我们取 $\mathfrak{T}=\delta=\mu=\nu=\rho=\omega=1$。这也确保了所有参数的贡献最大。在此标度下，取主导阶（令 $\cos\theta=1+O(\theta)^2$ 和 $\sin\ \theta\approx\theta$），

$$\mathbf{C}(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\bar{\xi},\bar{\alpha}) =\mathbf{I}+i\epsilon\left(\bar{\alpha}\mathbf{I}-\bar{\xi}\sigma_3\otimes\sigma_3\right)-\frac{i\epsilon}{2}\sigma_1\otimes\sigma_1\Theta_+-\frac{i\epsilon}{2}\sigma_2\otimes\sigma_2\Theta_-\,. \tag{6.7}$$

其中，$\Theta_{\pm}=\bar{\theta}_1e^{i(\alpha-\xi+k_1\pi)}\pm e^{i(\alpha+\xi+k_2\pi)}\bar{\theta}_2$。将 (6.3) 和 (6.7) 代入 (6.2)，并展开至 $O(\epsilon)$，可写出运动方程的微扰形式，

$$\partial_t\Psi_w=\underbrace{\left((\sigma_3\otimes\mathbf{I})\partial_x+(\mathbf{I}\otimes\sigma_3)\partial_y+i\left(\bar{\alpha}\mathbf{I}-\bar{\xi}\sigma_3\otimes\sigma_3\right)-\frac{i}{2}\left(\sigma_1\otimes\sigma_1\Theta_++\sigma_2\otimes\sigma_2\Theta_-\right)\right)}_{Hamiltonian}\Psi_w\,. \tag{6.8}$$

此外，定义 $X=1/2(x+y)$ 和 $Y=1/2(x-y)$ 后，分量 $(\mathcal{A}^{(0)},\ \mathcal{A}^{(3)})$ 与 $(\mathcal{A}^{(1)},\ \mathcal{A}^{(2)})$ 的运动方程相互耦合，

$$\begin{aligned}&\left(\partial_t-\partial_X-i(\bar{\alpha}-\bar{\xi})\right)\mathcal{A}^{(0)}=-\tfrac{i}{2}(\Theta_+-\Theta_-)\mathcal{A}^{(3)} \quad \left(\partial_t+\partial_Y-i(\bar{\alpha}+\bar{\xi})\right)\mathcal{A}^{(1)}=-\tfrac{i}{2}(\Theta_++\Theta_-)\mathcal{A}^{(2)}\\ &\left(\partial_t+\partial_X-i(\bar{\alpha}-\bar{\xi})\right)\mathcal{A}^{(3)}=-\tfrac{i}{2}(\Theta_+-\Theta_-)\mathcal{A}^{(0)} \quad \left(\partial_t-\partial_Y-i(\bar{\alpha}+\bar{\xi})\right)\mathcal{A}^{(2)}=-\tfrac{i}{2}(\Theta_++\Theta_-)\mathcal{A}^{(1)}\end{aligned} \tag{6.9}$$

经过一些整理，(6.9) 可写成有质量费米子的狄拉克方程形式，

$$\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}^{\pm}-\mathcal{M}_{\pm}\right)\psi_{\pm}=0\,, \tag{6.10}$$

其中 $D_{\mu}^{\pm}=\partial_{\mu}-iA_{\mu}^{\pm}$和 $A_{\mu}^{\pm}=(\bar{\alpha}\mp\bar{\xi},\ 0)$，质量矩阵为 $\mathcal{M}_{\pm}=(\Theta_+\mp\Theta_-)/2$。狄拉克方程的显式解为，

$$\psi_{\pm}(t,y)=e^{i(\bar{\alpha}\pm\bar{\xi})t}\widetilde{\psi}_{\pm}(t,y)\,,\ \widetilde{\psi}_{\pm}(t,y)=\begin{cases}e^{-ip_0t-ipy}u(p)\\ e^{ip_0t+ipy}v(p)\end{cases},\ p_0^2=p^2+m_i^2\,,\ p_0>0\,, \tag{6.11}$$

分别对应正能量解和负能量解。具体而言，

$$u(p)=\begin{pmatrix}Q_-\\ Q_+\end{pmatrix}\,,\ v(p)=\begin{pmatrix}Q_-\\ -Q_+\end{pmatrix}\,. \tag{6.12}$$

其中 $Q_\pm = \sqrt{p_0 \mp p_-} m^2 = (Q_- Q_+)^2$ 以及 $Q_+^2 + Q_-^2 = 2p_0$。在 $p \to -p$ 条件下，$Q_\pm \to Q_\mp$。这些向量满足，

$$u^\dagger(p)u(p) = 2p_0 = v^\dagger(p)v(p)\,, u^\dagger(p)v(-p) = 0\,. \tag{6.13}$$

于是，每个能量（正频率或负频率）对应的显式解为 $\widetilde{\psi}_\pm(t,\ y) = e^{-ip_0 t}\psi_\pm(y)$，其中，

$$\widetilde{\psi}_\pm(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ipy}}{\sqrt{2p_0}} \left(a_p^\pm u(p) + b_{-p}^\pm v(-p)\right)\,. \tag{6.14}$$

其中 $-p = (p_0,\ -\mathbf{p})$。系数 $a_\mathbf{p}$ 和 $b_{-\mathbf{p}}$ 可由逆变换确定，

$$a_p^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{ipy}}{\sqrt{2p_0}} u^\dagger(p)\widetilde{\psi}_\pm(y)\,,\ \ b_{-p}^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{ipy}}{\sqrt{2p_0}} v^\dagger(-p)\widetilde{\psi}_\pm(y)\,. \tag{6.15}$$

每个时间切片 t 的归一化条件为，

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{y}\ \widetilde{\psi}_\pm^\dagger(y)\widetilde{\psi}_\pm(y) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{p}}{2\pi} \left(|a_\mathbf{p}^\pm|^2 + |b_{-\mathbf{p}}^\pm|^2\right)\,. \tag{6.16}$$

我们选择初始波函数在空间坐标上为高斯函数，

$$\widetilde{\psi}_+(0,y) = \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^{1/4} e^{-y^2/\sigma^2} \left(\cos\theta_+/2|\uparrow\rangle + \sin\theta_+/2 e^{i\mu_+}|\downarrow\rangle\right)\,. \tag{6.17}$$

由此确定，

$$a_p^+ = (2\pi\sigma^2)^{1/4} \frac{e^{-p^2\sigma^2/4}}{\sqrt{2p_0}} \left(Q_- \cos\theta_+/2 + Q_+ \sin\theta_+/2 e^{i\mu_+}\right)\,, \tag{6.18}$$

$$b_{-p}^+ = (2\pi\sigma^2)^{1/4} \frac{e^{-p^2\sigma^2/4}}{\sqrt{2p_0}} \left(Q_+ \cos\theta_+/2 - Q_- \sin\theta_+/2 e^{i\mu_+}\right)\,. \tag{6.19}$$

对于初始波函数 $\psi_-(0,\ y)$，同样如此。随机游走的波函数可以通过映射由这些费米子构造得到，

$$|\Psi_w(t,\vec{x})\rangle = M \cdot (|\uparrow\rangle \otimes |\psi_+\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\psi_-\rangle)\,,\ \text{where}\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{6.20}$$

每个费米子的能量为，

$$E_\pm(p) = V_\pm \pm \sqrt{p^2 + m_\pm^2}\,. \tag{6.21}$$

具体而言，对于 $V_\pm \geq m_\pm$，下界为正，

$$E(p) = V_\pm - \sqrt{p^2 + m_\pm^2} \geq 0\ \to\ -\sqrt{V_\pm^2 - m_\pm^2} \leq p \leq \sqrt{V_\pm^2 - m_\pm^2}\,. \tag{6.22}$$

7 结论与未来方向

一个 $2d$ DQRW 需要一个 $SU(4)$ 硬币算符，该算符有 15 个参数。在这项工作中，我们选择了一种由贝尔对构成且仅含 3 个参数的特殊硬币算符。硬币算符形式相对简单，因此 DQRW 可以精确求解。然而，该硬币在系统中引入了非平凡的纠缠。为了探究硬币算符的纠缠性质：

- 我们计算了硬币在自旋与位置自由度之间诱导的纠缠。该函数围绕一个参考常数值随时间振荡。

- 我们探究硬币算符的纠缠能力，该能力衡量从初始张量积态出发时，硬币算符在状态中诱导纠缠的能力。我们通过数值计算，研究硬币的纠缠能力随时间的变化，以及在特定硬币参数取值下的表现。

- 我们计算初始张量积态与最终纠缠态的密度矩阵算子之间的广义相对<*R´enyi* 熵函数。我们分析相对熵随硬币参数和时间的变化。

这两种度量的函数变化方式都与纠缠相同。此外，随机游走算法的连续极限可化为两个与合成规范场耦合的有质量费米子。随机游走的波函数可以表示为这些有质量费米子的非平凡线性组合。最后，我们讨论了本研究的结论以及有待探讨的问题。

- 我们计划采用非平凡移位算子和/或特征依赖硬币算子来推广该算法。这类推广可以描述多种现象，例如散射、隧穿、优化技术等。基于纠缠的随机游走方法还可用于区分拓扑相 [4] ，并利用纠缠纯化（EoP）区分纯态和混合态 [28]。

- 纠缠能力的推广版本可通过适用于更多量子比特和更高维度的并发矩阵 [15, 24] 或 n–缠结算符 [25, 26, 27]来实现。值得探究这些推广是否能用作序参量，以确定真实系统中的纠缠演化。探索混合态的纠缠能力也是一个有趣的方向 [29, 30]。

- 一个直接的问题是理解描述该算法的量子电路的复杂度 [31, 32] 。对于随机游走算法，这个问题很容易处理，并且可以比较和扩展 Neilson复杂度 [33, 34] 与 Krylov复杂度（态算符复杂度）的各种方法。

- 硬币算符的结构为我们提供了两个与合成规范场耦合的一维自由费米子。在 d 维空间中，硬币的相同结构应当为我们提供 d 一维耦合费米子。依赖于特征的硬币会为规范势引入非平凡的分布。如果我们想引入费米子之间的相互作用，需要对硬币算符作何种修改?

8 致谢

作者感谢 Siddhartha E. M. Guzm´an 和 Parthiv Halder 在工作初期的合作。作者还感谢 Aranya Bhattacharya 对这项工作提出的有益意见和宝贵见解。KS 获得了 FAPESP 项目资助，编号为 2021/02304-3。

参考文献

[1] P. Arnault，离散时间量子游走与规范理论。博士论文，UPMC，巴黎（主校区），2017。arXiv:1710.11123 [quant-ph]。

[2] D. P. Musumbu、M. Przybylska 和 A. J. Maciejewski，《多粒子量子游走中的热化》。https://arxiv.org/abs/1602.00305。

[3] S. Omanakuttan 和 A. Lakshminarayan，“采用量子混沌硬币的量子游走：洛施密特回声、经典极限与热化，”《物理评论E》103卷第1期，（2021年1月）。https://doi.org/10.1103%2Fphysreve.103.012207.[4] G. M. M. Itable 和 F. N. C. Paraan，“纠缠熵可区分一类非幺正量子游走中的 PT 对称性与拓扑相”，。 https://arxiv.org/abs/2212.07453.[5] D. Aharonov、A. Ambainis、J. Kempe 和 U. Vazirani，“图上的量子游走”，。https://arxiv.org/abs/quant-ph/0012090.[6] G. K. Tanner，“从量子图到量子随机游走”，载于《非线性动力学与基本相互作用》，第69–87页。Springer-Verlag。https://doi.org/10.1007%2F1-4020-3949-2_6.[7] L.-P. Henry、S. Thabet、C. Dalyac 和 L. Henriet，“量子演化核：利用可编程量子比特阵列进行图上的机器学习”，《物理评论A》104卷第3期，（2021年9月）。https://doi.org/10.1103%2Fphysreva.104.032416.[8] H. Tonchev 和 P. Danev，“通过机器学习优化量子随机游走搜索算法中的游走硬币”，。 https://arxiv.org/abs/2105.08020.[9] R. Campos、P. A. M. Casares 和 M. A. Martin-Delgado，“量子Metropolis求解器：一种用于优化问题的量子游走方法”，。https://arxiv.org/abs/2207.06462.[10] F. Xia、J. Liu、H. Nie、Y. Fu、L. Wan 和 X. Kong，“随机游走：算法与应用综述”，IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence 4卷第2期，（2020年）95–107。[11] J. Kempe，“量子随机游走：入门概述”，Contemporary Physics 44卷第4期，（2003年7月）307–327。 https://doi.org/10.1080%2F0010715103100011077 6.[12] N. Konno，“一维量子随机游走”，。 https://arxiv.org/abs/quant-ph/0206053.[13] B. C. Travaglione 和 G. J. Milburn，“实现量子随机游走”，Phys. Rev. A 65（2002年2月）032310。https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.032310.[14] P. Zanardi、C. Zalka 和 L. Faoro，“量子演化的纠缠能力”，Phys. Rev. A 62（2000年）030301， arXiv:quant-ph/0005031.[15] P. Badziag、P. Deuar、M. Horodecki、P. Horodecki 和 R. Horodecki，“任意维度下的并发度”，Journal of Modern Optics 49卷第8期，（2002年7月）1289–1297。https://doi.org/10.1080%2F09500340210121589.[16] F. Leditzky，“相对熵及其在量子信息论中的应用”，。https://arxiv.org/abs/1611.08802.[17] N. Datta 和 F. Leditzky，“量子 r´e nyi 散度的一个极限”，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 47卷第4期，（2014年1月）045304。https://doi.org/10.1088%2F1751-8113%2F47%2F4%2F045304.[18] F. Leditzky、C. Rouz´e 和 N. Datta，“关于夹心 r´enyi 散度的数据处理：等号成立条件”，Letters in Mathematical Physics 107卷第1期，（2016年11月）61–80。https://doi.org/10.1007%2Fs11005-016-0896-9。

[19] F. Leditzky、M. M. Wilde 和 N. Datta，“使用 Rényi 熵的强逆定理 ńyi 熵，”《Journal of 数学物理 57 第 8 期（2016 年 8 月）082202。 https://doi.org/10.1063%2F1.4960099。[20] G. DiMolfetta, 离散时间量子游走：从合成规范场到自发平衡.

博士论文，07，2015。[21] G. Di Molfetta and F. Debbasch，《随机人工规范场中的离散时间量子游走》，。https://arxiv.org/abs/1409.2122。[22] G. Abal, R. Siri, A. Romanelli, and R. Donangelo，《直线上的量子游走：纠缠与非局域初始条件》，《*Phys. Rev. A*》**73**（2006 年 4 月）042302。https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.73.042302。[23] G. Abal, R. Donangelo, and H. Fort，《离散时间量子游走中的渐近纠缠》，。https://arxiv.org/abs/0709.3279。[24] K. Chen, S. Albeverio, and S.-M. Fei，《任意维双部量子态的并发度，”

《物理评论快报》**95** 第4期，（2005年7月）。 https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.95.04050 4.

[25] C. Eltschka、A. Osterloh、J. Siewert 和 A. Uhlmann，“广义 GHZ 态和广义 W 态混合物的三缠结”，新物理学杂志 10 第4期，（2008年4月）043014。https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/10/4/043014。[26] M. Yahyavi、M. A. Jafarizadeh、N. Karimi 和 A. Heshmati，“用于直接测量三量子比特态三缠结的量子电路”，PTEP 2022年 第9期，（2022年）093A01。[27] R. Lohmayer、A. Osterloh、J. Siewert 和 A. Uhlmann，“不存在并发度和三缠结的纠缠三量子比特态”，《物理评论快报》97（2006年12月）260502。https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.260502。[28] A. Bhattacharyya、T. Takayanagi 和 K. Umemoto，“自由标量场论中的纠缠纯化”，《高能物理学杂志》2018年 第4期，（2018年4月）。https://doi.org/10.1007%2Fjhep04%282018%29132。[29] M. Paternostro、H. Jeong 和 M. S. Kim，“混合宏观叠加态的纠缠：一项纠缠能力研究”，《物理评论A》73 第1期，（2006年1月）。https://doi.org/10.1103%2Fphysreva.73.012338。[30] Z. Guan、H. He、Y.-J. Han、C.-F. Li、F. Galve 和 G.-C. Guo，“混合态上双量子比特门的纠缠能力”，《物理评论A》89 第1期，（2014年1月）。https://doi.org/10.1103%2Fphysreva.89.012324。[31] A. Kotil、R. Banerjee、Q. Huang 和 C. B. Mendl，“用于哈密顿量模拟的黎曼量子电路优化”，2022年。 https://arxiv.org/abs/2212.07556。[32] V. Balasubramanian、P. Caputa、J. M. Magan 和 Q. Wu，“量子混沌与态扩散复杂度”，《物理评论D》106 第4期，（2022年8月）。https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.106.046007。[33] R. A. Jefferson 和 R. C. Myers，“量子场论中的电路复杂度”，《高能物理学杂志》

y

《*Physics*》**2017** 第10期（2017年10月）。 https://doi.org/10.1007%2Fjhep10%282017%29107。[34] D. E. Parker、X. Cao、A. Avdoshkin、T. Scaffidi 和 E. Altman，《普适算符增长假说》，《物理评论*X*》**9** 第4期（2019年10月）。https://doi.org/10.1103%2Fphysrevx.9.041017。