具有集体算符值速率的开放量子系统的平均场动力学：有效性与应用

Eliana Fiorelli[1, 2, 3*]、Markus M¨uller [2,3]、Igor Lesanovsky [4,5]、Federico Carollo [4]

1 西班牙马略卡岛帕尔马07122，UIB–CSIC，UIB校区，跨学科物理与复杂系统研究所（IFISC）2 德国于利希52428，尤利希研究中心理论纳电子学研究所（PGI-2）3 德国亚琛52056，亚琛工业大学量子信息研究所4 德国图宾根72076，Auf der Morgenstelle 14，图宾根大学理论物理研究所5 英国诺丁汉NG7 2RD，诺丁汉大学物理与天文学学院及量子非平衡系统数学与理论物理中心，
eliana@ifisc.uib-csic.es 2023年2月9日

arXiv:2302.04155v1 [cond-mat.stat-mech] 8 Feb 2023

摘要

我们研究一类开放量子多体林德布拉德动力学，其特征在于采用全连接耦合哈密顿量，并具有包含集体“状态依赖”速率的耗散。后者编码了取决于系统平均性质的局域非相干跃迁。这类开放量子动力学可视为经典（平均场）随机马尔可夫动力学在量子领域中的推广；在经典随机马尔可夫动力学中，跃迁取决于系统的瞬时构型。我们研究无限大系统极限下的时间演化，并证明平均场方程对于平均算符动力学是精确的。进一步地，我们推导出支配（准）局域算符时间演化的有效动力学生成元。我们的结果为严格且系统地研究量子效应对典型经典模型的影响提供了可能，例如量子广义霍普菲尔德联想记忆或（平均场）动力学约束模型。

1. 引言

开放量子多体系统构成了一个引人入胜的研究 वषिय [1,2]。相干过程与耗散过程之间的相互作用，加上构成系统的大量微观组分，能够产生有趣的非平衡稳态相或动力学相 [3–12] ，以及非平衡临界动力学 [12–16]。开放量子系统形式主义的一个引人关注之处在于，它允许我们从纯粹的经典随机动力学出发（例如，参见文献 [17] 中研究的反应扩散过程），逐步引入量子效应——如量子叠加——并分析其对典型经典模型的影响 [8, 12, 15]。在马尔可夫区间内，开放量子动力学通过量子主方程 [（见下方公式 **(1)**）] ，以及具有时间无关性的（林德布拉德）生成元 [1, 2] 来描述。尽管这些量子主方程看似相当简单，但由于描述量子态所需的资源会随粒子数呈指数增长，求解它们仍是一项艰巨任务。这通常使得对其进行数值模拟 [18] 和求解析解变得不可行。

取得进展并初步分析这些量子系统行为的一种方法，是采用平均场方法 [19–22],; 这种方法在平衡情形下也已证明非常有用 [23, 24]。概括而言，在这一框架中，人们忽略系统中的关联，从而能够得到一组简化的微分方程，用以描述关键系统可观测量的时间演化。有趣的是，在某些情况下，可以证明这种方法在热力学极限下是精确的，参见例如文献 [19–24]。就开放量子动力学而言，已有严格证明表明，对于具有集体跃迁算符且哈密顿量包含不同子系统之间全连接相互作用的系统 [25–27] ，以及不同版本的自旋-玻色子模型 [20, 28–30]，平均场方法是精确的。研究人员还通过数值方法考察了平均场方法在某些开放量子系统中的有效性 [31–35]。

在本文中，我们研究由大量有限维粒子组成、经历耗散马尔可夫时间演化的量子系统。具体而言，我们假设其开放量子动力学由全对全耦合的哈密顿量以及耗散性的（随机）单体跃迁刻画，这些跃迁的速率取决于完整的多体态。对于这类开放量子动力学，我们严格证明了平均场方法的有效性，既适用于系统平均性质的演化，也适用于局域可观测量的动力学。作为一个具体例子，我们的结果适用于——但不限于——类霍普菲尔德联想记忆动力学的量子推广 [36, 37], ；这类系统由于有望在当前实验中实现，近年来也受到了关注[38]。我们的研究为关于其非平衡行为的已有结果提供了严格基础 [39–41], ，并为在平均场方法框架内研究量子效应对这些平台的影响提供了依据。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们简要概述本文工作，并以非技术性的方式介绍研究设定及我们的发现。在第3节中，我们引入所研究的系统及其林德布拉德生成元；在第4节中，我们推导主要结果。在第 5 节中，作为我们研究结果的一项应用，我们讨论开放量子霍普菲尔德神经网络的平均场方程的精确性。最后，在附录中，我们证明了若干用于说明主要定理的引理。

2. 论文概述

这里我们概述本文内容，旨在介绍我们将重点研究的开放量子动力学类别，并说明其重要性。为便于具体讨论，本章节仅讨论由二能级粒子组成的系综。然而，我们的结果适用于由 d 能级粒子组成、具有任意 $d < \infty$ 的多体系统。

2.1. 算符值速率下的耗散

我们考虑由一组 N 经典（伊辛）自旋-$1/2$ 粒子组成的系统。因此，每个粒子都是一个二能级系统，可以处于激发态$|\bullet\rangle$ 或基态 $|\circ\rangle$ [（参见图 1(a)）]。对于这些粒子，最简单的随机马尔可夫动力学是彼此独立的自旋翻转。也就是说，每个粒子都可以以速率 $\gamma_\circ$从激发态变为基态，$|\bullet\rangle \to |\circ\rangle$；也可以以速率 $\gamma_\bullet$从基态变为激发态，$|\circ\rangle \to |\bullet\rangle$，如图 1(a) 所示。这是一个简单的非相互作用“热”时间演化，适用于N体系统，并未呈现特别有趣的动力学或稳态特征。当单粒子跃迁的速率取决于系统其余部分的构型时，便会出现更复杂的动力学，例如图 1(b) 所示。比如，第 k 个自旋翻转至激发态的速率，可能取决于粒子 $k-1$ 和 $k+1$ 是处于激发态还是基态 [（参见图 1(b)）]。在研究趋向于经典相互作用哈密顿量热态的弛豫动力学时，通常会遇到这种情形；此时跃迁速率取决于跃迁前后的能量差 [42, 43]。另一种存在状态依赖速率的有趣框架是动力学约束模型 [44–46], ，其中若不满足给定约束，某些跃迁就可能被禁止。例如，在图 1(b) 所示的例子中，我们展示了一种模型：只有当两个相邻粒子都处于激发态时，给定粒子的状态才会发生变化。在某些情况下，例如具有集体全连接经典哈密顿量函数的系统，跃迁速率取决于系统的集体性质。将图 1(b) 中的例子推广到集体速率的一种方法，是令速率取决于 $|\bullet\rangle$中激发态密度算符的平方，即 $n_\bullet = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n^{(k)}$；其中 $n^{(k)}$ 是第 k个粒子的 $n = |\bullet\rangle\langle\bullet|$ 算符 [（图 1(c) 示意图见此）]。

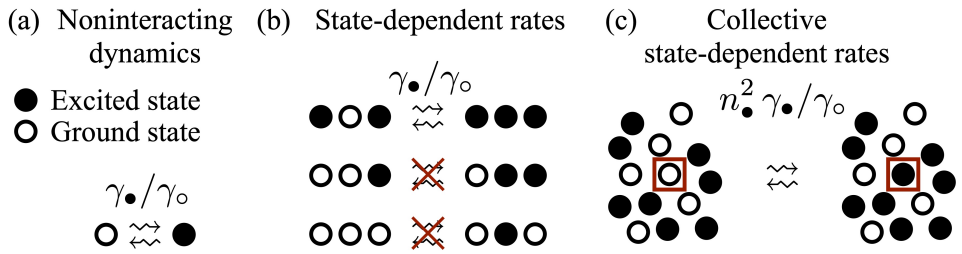

图 1. 集体态依赖速率。a) 二能级系统可以处于占据态 $\bullet$，也可以处于空态 $\circ$。对于由多个二能级系统组成的系综，最简单的经典随机非相互作用动力学是独立的自旋翻转 $\bullet \to \circ$（速率 $\gamma_\circ$）或 $\circ \to \bullet$（速率 $\gamma_\bullet$）。在这种情况下，不同跃迁的速率不依赖相邻粒子的状态。b) 动力学约束模型示例：只有当两个相邻粒子都处于占据态时，中心粒子才会改变其状态。c) 在集体全连接模型中，图 b) 所示的动力学会简化为跃迁速率取决于占据粒子密度平方的动力学 $n_\bullet$。

这种动力学与任何经典随机动力学一样，都可以用开放量子系统的密度矩阵形式来表述 [47]。具体做法是引入一个动力学生成元——它保持对角密度矩阵不变（例如参见文献 [48]）——如下所示 ‡

$$\mathcal{D}^*[\rho] = \sum_{k=1}^{N}\left(J_\bullet^k \rho J_\bullet^{k\,\dagger} - \frac{1}{2}\left\{J_\bullet^{k\,\dagger}J_\bullet^k, \rho\right\}\right) + \sum_{k=1}^{N}\left(J_\circ^k \rho J_\circ^{k\,\dagger} - \frac{1}{2}\left\{J_\circ^{k\,\dagger}J_\circ^k, \rho\right\}\right),$$

with

$$J_\bullet^k = \sqrt{\gamma_\bullet}\sigma_+^{(k)} n_\bullet\,, \qquad J_\circ^k = \sqrt{\gamma_\circ}\sigma_-^{(k)} n_\bullet\,,$$

和 $\sigma_+ = |\bullet\rangle\langle\circ|$, $\sigma_- = \sigma_+^\dagger$。该生成元通过方程 $\dot{\rho}_t = \mathcal{D}^*[\rho_t]$ 演化初始密度矩阵 $\rho_\circ$。在上述示例中，速率是集体可观测量的算符值函数，即激发粒子的密度 $n_\bullet$。

尽管上述动力学是用量子语言表述的，但它完全是经典的（只要初态是对角态）。不过，现在可以很容易地在这类耗散随机时间演化中加入量子相干哈密顿量贡献，并研究其对系统行为的影响。为此，可以考虑更一般的量子主方程

$$\dot{\rho}_t = \mathcal{L}^*[\rho_t] := -i[H, \rho_t] + \mathcal{D}^*[\rho_t]\,. \tag{1}$$

在本文中，我们将考虑具有全连接相互作用哈密顿量 H 的林德布拉德生成元，其耗散由集体态依赖速率表征。

‡ 我们用 $*$ 表示作用于密度矩阵的动力学生成元，这与 $\mathcal{D}^*$ 中的做法相同。我们用 $\mathcal{D}$ 表示实现可观测量时间演化的生成元。

2.2. 本文贡献

在本工作中，我们推导了平均算符的时间演化，例如自旋系统 $m_\alpha^N = \sum_{k=1}^N \sigma_\alpha^{(k)}/N$ 的平均“磁化”算符（其中 σ_α 是由基态 $|\bullet\rangle, |\circ\rangle$ 构造的泡利矩阵），在热力学极限下，由第2.1 [小节中讨论的形式的林德布拉德算符（],另见下文公式（9-11））所生成的动力学下的时间演化。特别地，我们证明了对于这些模型，平均场近似是有效的——该近似通过对平均算符的期望值进行因子分解得到（见第4.1节的讨论）。相应的证明见第4.2节，其方法沿用了文献 [30] 中提出的方法。在第4.3节中，我们进一步推导了有效林德布拉德生成元，在热力学极限下实现任意（准）局域算符（例如单自旋算符 $\sigma_\alpha^{(k)}$）的时间演化。

3. 模型系统及其动力学生成元

在本章节中，我们介绍所研究的系统类别，并引入算符代数以及量子态的泛函表示 [49]。随后，我们给出所谓平均算符的定义——它们不过是同一个单粒子算符 [27, 50] 在整个系统上的样本均值 [51–53], ，并讨论其在聚类态下的性质；聚类态即具有足够短程关联的态——其确切含义将在下文的定义 1 中说明。在本章节末尾，我们引入所考虑的动力学生成元的一般形式，并首先证明它们对局部算符和平均算符作用的相关结果。

3.1. 准局域代数与量子态

我们考虑一个多体量子系统 S，它由（可数）个数无限的相同（可区分）粒子组成，并假设这些粒子是具有 $d < \infty$ 的 d 能级系统。因此，每个粒子都可以与一个自然数 $k \in \mathbb{N}$ 相关联。任意单粒子算子 $x^{(k)}$，其中 $x \in M_d(\mathbb{C})$ 和 $M_d(\mathbb{C})$ 是 $d \times d$ 复矩阵的代数，且该算符仅在第 k 个粒子上具有非平凡作用，都可以利用张量积结构提升为多体系统的算符，形式如下

$$x^{(k)} = \mathbf{1}_d \otimes \mathbf{1}_d \otimes \ldots \otimes x \otimes \mathbf{1}_d \otimes \mathbf{1}_d \otimes \ldots,$$

其中， $\mathbf{1}_d$ 是 $M_d(\mathbb{C})$中的单位算符，而 x 出现在张量积的第 k个条目中。多体系统的所有（几乎局域）算符都包含在所谓的准局域 C^*-代数 $\mathcal{A}$中。该代数由系统 [49]所有可能的局域子代数的并集的范数闭包构成（这里以及下文中，我们所考虑的是算符范数，记作 $\|\cdot\|$，其值等于该算符特征值的模中的最大值）。实际上，准局域代数 $\mathcal{A}$ 包含所有严格局域算符，即支撑在有限数量粒子上的所有算符，以及那些准局域的算符——

也就是说，它们延伸至整个系统，但恰好是局域算符收敛序列的极限。

关于物理系统状态的完整信息，等价于知晓其所有算符可能的期望值。因此，给定代数$\mathcal{A}$，量子系统的态通常可表示为一个泛函 ω，它将每个算符 $A \in \mathcal{A}$ 映射为一个复数 $\langle A \rangle$，该复数体现了算符本身的期望值， $\mathcal{A} \ni A \mapsto \omega(A) = \langle A \rangle$。若要使这种泛函描述一个物理上自洽的态， ω 必须是线性、正且归一化的 [$\omega(\mathbf{1}) = 1$，其中$\mathbf{1}$是准局域代数 [49]上的泛函 $\mathcal{A}$] 的单位算符。在某些情况下，单粒子算符的期望值与所考虑的粒子无关，即对任意 $x \in M_d(\mathbb{C})$，都有 $\omega(x^{(k)}) = \langle x \rangle, \forall k \in \mathbb{N}$。在这些情况下，该态称为平移不变态 [另见下文定义 1]。

3.2. 平均算符

准局域代数 $\mathcal{A}$ 是由所有算符构成的代数。粗略地说，这些算符几乎局限于系统的某些区域。然而，在研究多体系统时，考察集体算符的行为往往十分重要，因为它们能够反映整个系统的平均性质。例如，在研究平衡相变和非平衡相变时，便是如此；这些相变可以通过所谓序参量的行为来研究和刻画。

我们关注以下形式的算符序列的行为

$$X_N \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x^{(k)}, \qquad \text{with} \qquad x \in M_d(\mathbb{C})\,. \tag{2}$$

这些算符表示同一个单粒子算子的样本均值，并与大数定律 [54]中出现的随机变量相关。对于每个有限的 N，上述求和所涉及的粒子数有限，因此该算符是严格局域的。然而，我们关注的是当 $N \to \infty$时平均算符的行为。

事实证明，任意两个平均算符 $[X_N, Y_N]$ 之间的对易子在 N 较大时趋于零，因为其范数由 $2\|x\|\|y\|/N$ [27,49,51] 所界定。因此，这些算符在热力学极限下产生了涌现的经典代数。不过，公式 (2) 中序列 X_N 的极限点 X_∞ 并不属于准局域代数 $\mathcal{A}$，因为序列 X_N 在范数拓扑 [49] 下不收敛。为了理解这些算符在热力学极限 $N \to \infty$ 下的结构，我们需要采用较弱形式的收敛性。在此，我们考虑所谓的弱算子拓扑 [52]。我们称算符序列 C_n 弱收敛到算符 C，形式上记作 $C = \text{(w–)}\lim_{n\to\infty} C_n$（读作……的弱极限）

序列 C_n），如果 §

$$\lim_{n\to\infty} \omega(A^\dagger C_n B) = \omega(A^\dagger C B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{A}\,. \tag{3}$$

这个看似抽象的定义具有非常重要的物理意义：在弱算子拓扑下，通过考察量子态 ω 所对应的期望中，极限算子 C 与任意准局域算子的所有可能关联函数，我们可以了解极限算子的性质。

对于聚类量子态，即具有足够短程关联的态，序列 X_N 的极限算子 X_∞ 不过是单位算符 [49–52]的倍数。这意味着， $X_\infty = \text{(w–)}\lim_{N\to\infty} X_N = \langle x\rangle$，其中 $\langle x\rangle = \omega(x)$ 是单粒子算子 x 的期望；此外，我们还假设该态具有平移不变性。（请注意，在上述极限的右侧，复数 $\langle x\rangle$ 应乘以单位算符 **1**。不过，为了简化记号，我们在此处及下文中省略这一写法。）例如，所谓的遍历态就具有这一性质，即满足

$$\omega(x^{(k)}y^{(h)}) \approx \omega(x^{(k)})\omega(y^{(h)})$$

当 $|k-h|$ 足够大时（例如，参见文献 [50] 中更一般的定义）。由于本文主要考察平均算符，我们通过下述定义中公式 **(5)** 所强调的性质来定义聚类态。

定义 1. 如果量子态 ω 满足以下性质，我们就称其为准局域代数 $\mathcal{A}$ 上的平移不变聚类态:

$$i)\quad \omega(x^{(k)}) = \omega(x^{(h)}) = \langle x\rangle, \qquad \forall x \in M_d(\mathbb{C}), \forall k, h \in \mathbb{N}\,; \tag{4}$$

$$ii)\ \lim_{N\to\infty} \omega([X_N - \langle x\rangle]^2) = 0, \qquad \forall x = x^\dagger \in M_d(\mathbb{C})\,. \tag{5}$$

上述第二个性质表明，对于这类聚类态，算符 X_N 的方差在 N 趋于无穷大时消失，因此，极限算子 X_∞ 必须收敛到单位算符的倍数。事实上，可以证明，公式 **(5)** 蕴含 X_N 按照公式 **(3)** 的定义弱收敛到 $X_\infty = \langle x\rangle$。

3.3. 具有集体算符值速率的林德布拉德生成元

我们假设上述引入的多体系统受马尔可夫开放量子动力学 $[1, 2]$，支配，该动力学通过时间无关的动力学生成元构成的量子主方程实现。为使动力学在物理上保持一致，该生成元必须具有 Lindblad形式 [2]。

因此，任意算符 $O \in \mathcal{A}$ 的时间演化都必须满足以下方程

$$\dot{O}(t) = \mathcal{L}_N[O(t)]\,, \tag{6}$$

其中 $\mathcal{L}_N$ 是演化可观测量的林德布拉德算符，即与式（**1**）中引入的生成元互为对偶的生成元（另见脚注 **2**）。上述方程的形式解

§ 我们注意到，这种收敛形式与代数 $\mathcal{A}$ 在态 ω [49, 52]所诱导的所谓 GNS表示中的弱算符收敛相一致

方程由 $O(t) = e^{t\mathcal{L}_N}[O]$ 给出。为了研究无限系统中的涌现动力学，我们通常先为由 N 个粒子组成的系综定义动力学生成元 $\mathcal{L}_N$，然后取极限 $N \to \infty$推导渐近动力学。

在讨论所考虑的动力学生成元的形式之前（第 2.1 节中曾简要提及），先为单粒子代数 $M_d(\mathbb{C})$ 引入一组正交归一厄米基 $\{v_\alpha\}_{\alpha=1}^{d^2}$ 会比较方便。由此，我们得到一组算符，它们满足 $v_\alpha = v_\alpha^\dagger$，并且 $\mathrm{tr}\,(v_\alpha v_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$（这意味着 $\|v_\alpha\| \leq 1$）；利用这组算符，我们可以通过关系式将任意其他算符 $x \in M_d(\mathbb{C})$ 分解为

$$x = \sum_{\alpha=1}^{d^2} \mathrm{tr}\,(x\, v_\alpha) v_\alpha\,. \tag{7}$$

为便于后续讨论，我们还定义所选基的结构系数$a_{\alpha\beta}^{\gamma}$，其定义如下:

$$[v_\alpha, v_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{d^2} a_{\alpha\beta}^{\gamma} v_\gamma, \quad a_{\alpha\beta}^{\gamma} \equiv \mathrm{tr}\,([v_\alpha, v_\beta] v_\gamma). \tag{8}$$

利用这组单粒子基，可以将林德布拉德生成元分解为两个不同的贡献

$$\mathcal{L}_N[O] = i[H, O] + \sum_{\ell=1}^{q} \mathcal{D}_\ell[O]\,, \tag{9}$$

其中，H 是系统的哈密顿量，其形式为

$$H = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{d^2} \epsilon_\alpha v_\alpha^{(k)} + \frac{1}{N} \sum_{k,j=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{d^2} h_{\alpha\beta} v_\alpha^{(k)} v_\beta^{(j)}\,. \tag{10}$$

上式右侧的第一项（其中 ϵ_α 为实数）表示哈密顿量中的单粒子贡献，而第二项（其中 $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}^*$）则以全连接方式考虑二体相互作用。需要注意的是，由于这里的求和没有任何约束——会对粒子间的相互作用重复计数——因此，项 $h_{\alpha\beta}$ 等于实际相互作用强度的一半。此外，双重求和还包含 $k = j$ 的项，它们描述的是单粒子项，而非相互作用。由于哈密顿量第二部分前有因子 $1/N$，这些项在热力学极限下变得无关紧要。因此，我们可以放心地保留它们，这会为后续推导带来便利。总之，式（10）中哈密顿量的第二部分描述了所有粒子对之间的相互作用，其强度相同，并与 $1/N$ 成正比。

映射（或耗散子） $\mathcal{D}_\ell$ 中的各项描述的是时间演化中的耗散贡献。正如第 2.1 节所述，我们将其取为以下形式

$$\mathcal{D}_\ell[O] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\left[J_\ell^{k\,\dagger}, O \right] J_\ell^k + J_\ell^{k\,\dagger} [O, J_\ell^k] \right)\,, \tag{11}$$

with

$$J_\ell^k = j_\ell^{(k)} \Gamma_\ell(\Delta_N^\ell) \tag{12}$$

其中的跳跃算符为。此处， $j_\ell^{(k)}$ 仅作用于格点 k ，而 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell) = [\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)]^\dagger$ 是针对算符 $\Delta_N^\ell = [\Delta_N^\ell]^\dagger$计算的算符值函数。我们假设后者是由实系数组成的线性组合，其项为公式 (2) 中定义的那类平均算符，即，

$$\Delta_N^\ell = \sum_{\alpha=1}^{d^2} r_{\ell\alpha} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} v_\alpha^{(k)} \right], \qquad \text{with } r_{\ell\alpha} \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

根据它们的定义，我们可以看出这些算符的范数有界，即 $\|\Delta_N^\ell\| \leq \delta_\ell$，其中

$$\delta_\ell = \sum_{\alpha=1}^{d^2} |r_{\ell\alpha}| < \infty \,. \tag{14}$$

如第 2.1 节所述，跳跃算符 J_ℓ^k 的结构表明，函数 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$ 的平方会产生一个算符值速率，对应于由 $j_\ell^{(k)}$ 在第 k 个粒子上实现的跃迁。由于作为该函数自变量的算符 Δ_N^ℓ 是一个平均算符，因此该速率具有平均场速率的结构，用以描述系统的平均（集体）性质。我们考虑满足以下假设的函数 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$。

假设 1. 算符值函数 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$ 可以写成幂级数

$$\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell) = \sum_{n=0}^{\infty} c_\ell^n (\Delta_N^\ell)^n \,,$$

系数为 c_ℓ^n ，使得对于任意 $z \in \mathbb{R}$

$$\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_\ell^n| |z|^n < \infty \,. \tag{15}$$

为便于后续，我们注意到，关于级数 γ（z） 的假设还意味着 t

$$\gamma'(z) := \sum_{n=0}^{\infty} n |c_\ell^n| |z|^{n-1} < \infty \,.$$

上述假设规定，我们考虑的是 Γ_ℓ 这样一类函数：它们在零点附近具有泰勒展开，且收敛半径为无穷大。这是一个较强的假设，我们在此采用它只是为了简化论述。严格来说，要证明我们的主要定理并不需要这一假设。在第 5 节中，我们将说明，我们的方法同样适用于某些不满足假设 1 的算符值速率。基于这一假设，我们能够为一大类动力学生成元得到结果。

根据假设 1，我们现在可以很容易地证明以下结果。

引理 1. 对于任意满足假设 *1* 的算符值函数 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$ ，以下关系成立

$$
\begin{aligned}
&i)\,\big\|\big[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\big]\big\| \le \frac{2N_O}{N}\|O\|\delta_\ell\gamma'(\delta_\ell)\,,\\
&ii)\,\big\|\big[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), X_N\big]\big\| \le \frac{2}{N}\|x\|\delta_\ell\gamma'(\delta_\ell)\,,\\
&iii)\,\big\|\big[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), \big[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\big]\big]\big\| \le \frac{4N_O^2}{N^2}\|O\|\delta_\ell^2[\gamma'(\delta_\ell)]^2\,,\\
&iv)\,\big\|\big[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), \big[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), X_N\big]\big]\big\| \le \frac{4}{N^2}\|x\|\delta_\ell^2[\gamma'(\delta_\ell)]^2\,,
\end{aligned}
$$

其中， O 为具有严格局域支撑的任意算符， N_O 为该支撑的长度，X_N 为公式 *(2)*中定义的任意平均算符。

上述引理的证明见附录 A.1，只需利用算符值速率的幂级数展开，计算其与局域算符之间的对易子即可。

我们通过陈述一个关于所考虑的动力学生成元作用于严格局域可观测量和平均算符的初步结果，结束本章节。特别地，我们证明，在热力学极限 $N\to\infty$下，映射 $\mathcal{D}_\ell$ 作用于这些算符时，表现得仿佛它们是由等于 $\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell)$ 的前因子加权的局域映射。这印证了这样一种直觉：所考虑的跳跃算符实现了与算符值速率相关联的局域跃迁。形式上，这可由下述引理表述：

引理 2。 由公式 *(11)–(12)*定义、其函数 $\Gamma_\ell\,(\Delta_N^\ell)$ 满足假设 *1* 的映射 $\mathcal{D}_\ell$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\big\|\mathcal{D}_\ell[O] - \Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell)\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[O]\big\| \le \frac{C_O}{N}\,,\\
&\big\|\mathcal{D}_\ell[X_N] - \Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell)\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[X_N]\big\| \le \frac{C_x}{N}\,,
\end{aligned}
$$

with

$$
\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[A] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\Big[j_\ell^{\dagger\,(k)}, A\Big]\,j_\ell^{(k)} + j_\ell^{\dagger\,(k)}[A, j_\ell^{(k)}]\Big)\,, \tag{16}
$$

以及与 N 无关的适当 C_O、 C_x 常数。在上述表达式中， O 是支撑于有限个格点上的任意局域算符， N_O 是其支撑的扩展，而 X_N 则是由单粒子算符 x 构造的平均算符，如公式 *(2)* 所示。

引理的证明见附录 A.2。求出常数 C_O， C_x的表达式，需要直接计算耗散子 $\mathcal{D}_\ell$ 对算符 O, X_N的作用。

4. 主要结果

本章节将介绍本文的主要结果。在第一个小节中，我们推导单粒子可观测量的平均算符所满足的海森堡运动方程，并给出平均场方程。正如我们将要说明的，后者是通过对平均算符的期望值进行因子化得到的。在第二个小节中，我们证明，在热力学极限下，这些平均场方程实际上能够精确重现所研究平均算符的时间演化。在最后一个小节中，我们利用关于平均算符所得的结果，为多体系统中的任意准局域算子推导出一个有效动力学映射。

4.1. 海森堡方程与平均场动力学

正如上一章节中所预示的，在研究多体系统时，人们往往关注集体算符的动力学行为或稳态行为。具体而言，我们关注公式 (2) 中的平均算符。鉴于我们已为单粒子代数定义了一组基，因此可以构造所有可能的平均算符的一组基。我们定义以下平均算符集合

$$m_\alpha^N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} v_\alpha^{(k)}\,, \qquad \alpha = 1, 2, \dots d^2\,, \tag{17}$$

并注意到，任意 X_N 都可以表示为上述算符的线性组合。因此，我们的目标是在热力学极限下，从定义 1 所述的平移不变聚类态出发，描述 m_α^N、$e^{t\mathcal{L}_N}[m_\alpha^N]$ 的时间演化。为此，第一步是计算海森堡运动方程，即

$$\frac{d}{dt}e^{t\mathcal{L}_N}[m_\alpha^N] = \mathcal{L}_N\left[e^{t\mathcal{L}_N}[m_\alpha^N]\right] = e^{t\mathcal{L}_N}\left[\mathcal{L}_N[m_\alpha^N]\right]\,. \tag{18}$$

为此，需要控制林布拉德算符对平均算符的作用，如上式中的第二个等号所示。下面的引理将给出这一结果。

引理 3. 给定由方程 *(9)–(12)* 指定的生成元 $\mathcal{L}_N$，其中函数 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$ 满足假设 *1*，则有

$$\|\mathcal{L}_N[m_\alpha^N] - f_\alpha(\vec{m}^N)\| \leq \frac{C_L}{N}$$

其中

$$f_\alpha(\vec{m}^N) = i\sum_{\beta=1}^{d^2} A_{\alpha\beta} m_\beta^N + i\sum_{\beta,\gamma=1}^{d^2} B_{\alpha\beta\gamma} m_\beta^N m_\gamma^N + \sum_{\ell,\beta} M_{\ell\alpha}^\beta \Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) m_\beta^N$$

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{\beta'=1}^{d^2} \epsilon_{\beta'} a_{\beta'\alpha}^\beta \quad B_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\beta'=1}^{d^2} a_{\beta'\alpha}^\gamma (h_{\beta\beta'} + h_{\beta'\beta})\,.$$

这里， M 是一个实矩阵，使得 $\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[\cdot]$ 对单点算符基 $v_\alpha^{(k)}$中元素的作用为

$$\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[v_\alpha^{(k)}] = \sum_{\beta=1}^{d^2} M_{\ell\alpha}^{\beta} v_\beta^{(k)} ,$$

且 C_L 是一个与 N无关的有界量。

为证明此引理并推导常数 C_L（如附录 A.3 所示），需要计算生成元 $\mathcal{L}_N$ 在 m_α^N 上的作用，并利用引理 2。

值得强调的是，引理 3 表明，在热力学极限下，对于任意 α，林德布拉德生成元对平均算符 m_α^N 的作用都可以写成平均算符本身的非线性函数 f_α 。然而，目前还无法求解由此产生的方程组。实际上，关键在于开放量子动力学并非由自同构表示，因此原则上，$e^{t\mathcal{L}_N}[m_\alpha^N m_\beta^N] \neq e^{t\mathcal{L}_N}[m_\alpha^N] e^{t\mathcal{L}_N}[m_\beta^N]$。因此，由于平均算符的非线性函数 f_α，式 (18) 的海森堡方程在算符$e^{t\mathcal{L}_N}[m_\alpha^N]$上并不封闭。要继续推导，需要计算生成元对函数$f_\alpha$的作用。这会产生一个在热力学极限下无穷无尽、且很少能求解的方程层级。

感兴趣的最终对象是平均算符的期望值，其演化方程可通过对方程两边取期望值，从式 (18) 推导得到。定义 $\omega_t(A) := \omega\left(e^{t\mathcal{L}_N}[A]\right)$，并回忆引理 3，可得

$$\frac{d}{dt}\omega_t\left(m_\alpha^N\right) \approx \omega_t\left(f_\alpha(\vec{m}^N)\right) . \tag{19}$$

显然，仅仅取期望值并不能让我们在求解该系统方面取得太大进展。不过，在这一层次上，引入所谓的平均场运动方程很简单。这些方程通过假设平均算符乘积的期望值可以分解为各自期望值的乘积而得到，例如，假设

$$\omega_t(m_\alpha^N m_\beta^N) \approx \omega_t(m_\alpha^N)\omega_t(m_\beta^N) . \tag{20}$$

将其应用于式 (19)，可得所考虑的林德布拉德生成元对应的平均场运动方程：

$$\frac{d}{dt}m_\alpha = f_\alpha(\vec{m}) . \tag{21}$$

这里， m_α 是时间的函数，应能在热力学极限下刻画 $\omega_t\left(m_\alpha^N\right)$ 的动力学。原则上，上述非线性常微分方程组可以通过解析方法求解，或者至少可以高效地进行模拟；所取初始条件为与初始态 ω相对应的初始条件。

$$m_\alpha(0) = \lim_{N\to\infty} \omega(m_\alpha^N) . \tag{22}$$

然而，这些方程是否给出了平均算符的精确动力学，仍有待证明。直观而言，要使这一结论成立，人们会预期

时间演化态 ω_t 在热力学极限下是一个聚类态（定义 1 中所述），因此平均算符会收敛到单位算符的倍数，从而使方程 (20) 中的近似成立。

在下一章节中，我们将证明情况确实如此。在此之前，我们先陈述一个关于式 (21) 中方程组的技术性结果，其证明见附录 A.4。

引理 4. 对于由量子态 ω 按照式 *(22)* 定义的初始条件 $m_\alpha(0)$，方程组 *(21)* 存在唯一的解，适用于 $t \in [0,\infty)$。此外，还有

$$|m_\alpha(t)| \leq \|v_\alpha\| \leq 1\,, \qquad \forall t \in [0,\infty)\,.$$

4.2. 平均算符的平均场方程的精确性

为了证明平均场运动方程的精确性，我们必须证明

$$\lim_{N\to\infty} \omega_t(m_\alpha^N) - m_\alpha(t) = 0, \qquad \forall t. \tag{23}$$

正如上一章节末尾简要提到的，为了证明上述极限的有效性，我们希望证明态 ω_t 在考虑所有相关平均算符时满足聚类性质，如定义 1 所述。我们通过采用参考文献 [30] 中讨论的方法来实现这一点。我们定义如下量

$$\mathcal{E}_N(t) = \sum_{\alpha=1}^{d^2} \omega_t([m_\alpha^N - m_\alpha]^2)\,, \tag{24}$$

它是若干正项之和，因此仅当所有项都为零时才为零。此外，每一项都由算符与其平均场对应项之间距离的平方的期望值构成。因此，每个加项都考察了平均算符与单位算符的倍数（由平均场算符给出）有多接近。也就是说，若 $\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}_N(t) = 0$，则态 ω_t 在热力学极限下满足聚类性质，这可用于证明平均场方程是精确的。事实上，利用柯西-施瓦茨不等式，我们有 $|\omega_t(m_\alpha^N - m_\alpha)| \leq \sqrt{\omega_t([m_\alpha^N - m_\alpha]^2)} \leq \sqrt{\mathcal{E}_N(t)}$，因此可用它来控制式 (23) 中的极限。在继续之前，我们先陈述一个引理，它将有助于证明平均场方程的精确性。

引理 5。 算符值函数 $\Gamma^2_\ell(\Delta_N^\ell)$ 的平方收敛于通过平均场算符 $\Gamma^2_\ell(\Delta_\ell(t))$计算得到的同一函数，其中

$$\Delta_\ell(t) = \sum_\alpha r_{\ell\alpha} m_\alpha(t)\,, \tag{25}$$

由平均算符 m_α^N 收敛至平均场变量$m_\alpha(t)$ 所主导

$$\begin{aligned}&\left|\omega\left(A^\dagger e^{t\mathcal{L}_N}\left[\left(\Gamma^2_\ell(\Delta_N^\ell) - \Gamma^2_\ell(\Delta_\ell(t))\right)X\right]B\right)\right| \\ &\leq 2\gamma(\delta_\ell)\gamma'(\delta_\ell)\|X\| \sum_{\alpha=1}^{d^2} |r_{\ell\alpha}| \sqrt{\omega(A^\dagger e^{t\mathcal{L}_N}[(m_\alpha^N - m_\alpha(t))^2]A)}\sqrt{\omega(B^\dagger B)}\,.\end{aligned}$$

这里，AB、X 可以是准局域算符，也可以是平均算符的函数 $s.$

关于函数 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$ 的平方收敛性上述界的证明见附录 A.5，并利用了引理 6 中证明的广义柯西-施瓦茨不等式（见附录 A.6）。

有了这一结果，我们现在可以陈述本文的第一个主要定理，证明平均算符的时间演化的平均场方程是精确的。

定理 1. 给定一个如公式 *(9)–(13)* 中所示的生成元，且函数 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$满足假设 *1*，则有

$$if \quad \lim_{N\to\infty} \mathcal{E}_N(0) = 0, \quad then \quad \lim_{N\to\infty} \mathcal{E}_N(t) = 0, \forall t < \infty. \tag{26}$$

这意味着平均场公式 *(23)* 是精确的。

证明。该定理的证明利用了格朗沃尔引理。该引理指出，若存在两个正的、有界且与 N 无关的常数 C_1和 C_2，使得 $\mathcal{E}_N(t) \leq C_1\mathcal{E}_N(t) + C_2/N$，则

$$\mathcal{E}_N(t) \leq e^{C_1 t}\mathcal{E}_N(0) + C_2(e^{C_1 t} - 1)/(C_1 N)$$

这就足以利用关于初始值 $\mathcal{E}_N(0)$ 的假设并取极限 $N \to \infty$ 来证明该定理。因此，目标是找到这样的常数 C_1，C_2。

接下来考察 $\mathcal{E}_N(t)$ 的时间导数，

$$\dot{\mathcal{E}}_N(t) = \sum_{\alpha=1}^{d^2} \frac{d}{dt}\omega_t\left([m_\alpha^N - m_\alpha(t)]^2\right). \tag{27}$$

分别考察后一个表达式中每个 α 项的贡献较为方便，

$$D_t^\alpha = \frac{d}{dt}\omega_t\left([m_\alpha^N - m_\alpha(t)]^2\right) \tag{28}$$

$$= \quad \omega_t(\mathcal{L}_N[(m_\alpha^N - m_\alpha(t))^2]) - 2\dot{m}_\alpha(t)\omega_t(m_\alpha^N - m_\alpha(t)), \tag{29}$$

这里我们利用了 $\dot{\omega}_t(X) = \omega_t(\mathcal{L}_N[X])$，以及 $m_\alpha(t)$、$\dot{m}_\alpha(t)$ 是标量函数这一事实。现在考察项 $\mathcal{L}_N[(m_\alpha^N - m_\alpha(t))^2]$。为此，值得注意的是，给定任意两个算符 A、B，有

$$\mathcal{L}_N[AB] = \mathcal{L}_N[A]B + A\mathcal{L}_N[B] + \sum_{\ell,k}[J_\ell^{k\,\dagger}, A][B, J_\ell^k], \tag{30}$$

其中 J_ℓ^k 是由方程 (12) 定义的跳跃算符。下面关注最后一项，$P \equiv \sum_{\ell,k}[J_\ell^{k\,\dagger}, m_\alpha^N][m_\alpha^N, J_\ell^k]$，其中令 $A = B = m_\alpha^N - m_\alpha(t)$。它是

$$\begin{aligned} P = \sum_{\ell=1}^{q}\sum_{k=1}^{N} &\left(j_\ell^{(k)\,\dagger}[m_\alpha^N, \Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)] + [m_\alpha^N, j_\ell^{(k)\,\dagger}]\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right) \\ &\times \left([\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), m_\alpha^N]j_\ell^{(k)} + \Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)[j_\ell^{(k)}, m_\alpha^N]\right). \end{aligned} \tag{31}$$

利用引理 1，我们得到 $\|P\| \leq C_P/N$，其中 C_P 是与 N 无关的常数

$$C_P = \sum_{\ell=1}^{q} \|j_\ell\|^2 [2\delta_\ell \gamma'(\delta_\ell) + d^2 a_{\max} \gamma(\delta_\ell)]^2 \,. \tag{32}$$

这里，$a_{\max} = \max_{\alpha,\ \beta,\ \gamma} |a^{\gamma}_{\alpha\beta}|$。代入

$$\mathcal{L}_N[(m^N_\alpha - m_\alpha(t))^2] = \mathcal{L}_N[m^N_\alpha][m^N_\alpha - m_\alpha(t)] + [m^N_\alpha - m_\alpha(t)]\mathcal{L}_N[m^N_\alpha] + P \,, \tag{33}$$

时间导数 (28) 中，得到

$$\begin{aligned} D^\alpha_t =& \omega_t([\mathcal{L}_N[m^N_\alpha] - \dot{m}_\alpha(t)][m^N_\alpha - m_\alpha(t)]) \\ &+ \omega_t([m^N_\alpha - m_\alpha(t)][\mathcal{L}_N[m^N_\alpha] - \dot{m}_\alpha(t)]) + \omega_t(P) \,. \end{aligned} \tag{34}$$

由于上述表达式右侧的第二项是第一项的复共轭，因此我们可以只关注后者，

$$D^{\alpha,I}_t = \omega_t([\mathcal{L}_N[m^N_\alpha] - \dot{m}_\alpha(t)][m^N_\alpha - m_\alpha(t)]) \,. \tag{35}$$

利用引理 3 以及关于量 $\mathcal{L}_N[m^N_\alpha]$ 和 $\dot{m}_\alpha(t)$ 的平均场方程 (21)，分别可得

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_N[m^N_\alpha] - \dot{m}_\alpha(t) = L + f_\alpha(\vec{m}^N) - f_\alpha(\vec{m}(t)) \\ &= L + i\sum_{\gamma=1}^{d^2} A_{\alpha\beta}(m^N_\beta - m_\beta(t)) + i\sum_{\beta,\gamma=1}^{d^2} B_{\alpha\beta\gamma}(m^N_\beta m^N_\gamma - m_\beta(t)m_\gamma(t)) \\ &+ \sum_{\ell=1}^{q}\sum_{\beta=1}^{d^2} M^\beta_{\ell\alpha}[\Gamma^2_\ell(\Delta^\ell_N)m^N_\beta - \Gamma^2_\ell(\Delta_\ell(t))m_\beta(t)]. \end{aligned} \tag{36}$$

在上述方程中，L 是算子差 $L = \mathcal{L}_N[m^N_\alpha] - f_\alpha(\vec{m}^N)$。根据引理 3，它满足 $\|L\| \leq C_L/N$，其中 C_L 是证明引理 3 时得到的与 N 无关的有界常数。

在上述方程的第二行中，最后一项可以重新整理如下

$$m^N_\beta m^N_\gamma - m_\beta(t)m_\gamma(t) = (m^N_\beta - m_\beta(t))m^N_\gamma + m_\beta(t)[m^N_\gamma(t) - m_\gamma(t)], \tag{37}$$

同理，在加上并减去项 $\Gamma^2_\ell(\Delta_\ell(t))m^N_\beta$ 后，方程（36）的最后一行可改写为

$$\begin{aligned} &\Gamma^2_\ell(\Delta^\ell_N)m^N_\beta - \Gamma^2_\ell(\Delta_\ell(t))m_\beta(t) = \\ &\Gamma^2_\ell(\Delta_\ell(t))\left(m^N_\beta(t) - m_\beta(t)\right) + \left[\Gamma^2_\ell(\Delta^\ell_N) - \Gamma^2_\ell(\Delta_\ell(t))\right] m^N_\beta \,. \end{aligned} \tag{38}$$

因此， $\mathcal{L}_N[m_\alpha^N] - \dot{m}_\alpha(t)$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N[m_\alpha^N] - \dot{m}_\alpha(t) = L &+ i\sum_{\beta=1}^{d^2} A_{\alpha\beta}(m_\beta^N - m_\beta(t)) \\ &+ i\sum_{\beta,\gamma=1}^{d^2} B_{\alpha\beta\gamma}[(m_\beta^N - m_\beta(t))m_\gamma^N + m_\beta(t)(m_\gamma^N(t) - m_\gamma(t))] \\ &+ \sum_{\ell=1}^{q}\sum_{\beta=1}^{d^2} M_{\ell\alpha}^{\beta}\left\{\Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t))\left[m_\beta^N(t) - m_\beta(t)\right]\right. \\ &\left.+ \left[\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t))\right] m_\beta^N\right\}.\end{aligned} \tag{39}$$

将此表达式代入公式（35）中的时间导数，我们得到

$$\begin{aligned}D_t^{\alpha,I} = {} & \omega_t\left(L[m_\alpha^N - m_\alpha(t)]\right) + i\sum_{\beta=1}^{d^2} A_{\alpha\beta}\,\omega_t\left([m_\beta^N - m_\beta(t)][m_\alpha^N - m_\alpha(t)]\right) \\ & + i\sum_{\gamma,\beta=1}^{d^2} B_{\alpha\beta\gamma}\left\{\omega_t\left([m_\beta^N - m_\beta(t)]m_\gamma^N[m_\alpha^N - m_\alpha(t)]\right)\right. \\ & \left.+\omega_t\left(m_\beta(t)[m_\gamma^N - m_\gamma(t)][m_\alpha^N - m_\alpha(t)]\right)\right\} \\ & + \sum_{\ell=1}^{q}\sum_{\beta=1}^{d^2} M_{\ell\alpha}^{\beta}\left\{\omega_t\left(\Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t))[m_\beta^N - m_\beta(t)][m_\alpha^N - m_\alpha(t)]\right)\right. \\ & \left.+\,\omega_t\left(\left[\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t))\right] m_\beta^N[m_\alpha^N - m_\alpha(t)]\right)\right\}.\end{aligned} \tag{40}$$

我们希望找到构成 $D^{\alpha}{}_{,t}{}^{I}$ 的所有项的模的上界。由 L 导致的贡献可界定为

$$\left|\omega_t\left(L[m_\alpha^N - m_\alpha(t)]\right)\right| \le \frac{2C_L}{N}\,.$$

其余项的类型为 (I) $\omega_t([m_\beta^N - m_\beta(t)]X[m_\alpha^N - m_\alpha(t)])$，以及 $\omega_t(\left[\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t))\right] X[m_\alpha^N - m_\alpha(t)])$，其中 X 为某些算符。类似 (I) 的项可界定为 [30]

$$|\omega_t([m_\beta^N - m_\beta(t)]X[m_\alpha^N - m_\alpha(t)])| \le \|X\|\,\mathcal{E}_N(t)\,, \tag{41}$$

因此我们有

$$|\omega_t([m_\beta^N - m_\beta(t)][m_\alpha^N - m_\alpha(t)])| \le \mathcal{E}_N(t), \tag{42}$$

$$|\omega_t([m_\beta^N - m_\beta(t)]m_\gamma^N[m_\alpha^N - m_\alpha(t)])| \le \mathcal{E}_N(t), \tag{43}$$

$$|\omega_t(m_\gamma(t)[m_\beta^N - m_\beta(t)][m_\alpha^N - m_\alpha(t)])| \le \mathcal{E}_N(t), \tag{44}$$

$$|\omega_t\left(\Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t))[m_\beta^N - m_\beta(t)][m_\alpha^N - m_\alpha(t)]\right)| \le \gamma^2(\delta_\ell)\mathcal{E}_N(t) \tag{45}$$

分别对应 $X=\mathbb{I}$、 $X=m_\gamma^N$、 $X=m_\gamma(t)$ 和 $X=\Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t))$。注意，我们进一步利用了 $\|m_\alpha^N\|\leq 1$，并根据引理 4，利用了 $|m_\alpha(t)|\leq 1$ 和 $|\Delta_\ell(t)|\leq\delta_\ell$。对于 (II) 这类项，我们利用引理 5 和柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned}&|\omega_t(\left[\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell)-\Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t))\right]X[m_\alpha^N-m_\alpha(t)])|\leq\\&2\gamma(\delta_\ell)\gamma'(\delta_\ell)\|X\|\sum_\beta|r_{\ell\beta}|\sqrt{\omega_t([m_\beta^N-m_\beta(t)]^2)}\sqrt{\omega_t([m_\alpha^N-m_\alpha(t)]^2)}\leq\\&2\delta_\ell\gamma(\delta_\ell)\gamma'(\delta_\ell)\|X\|\mathcal{E}_N(t)\,,\end{aligned}\tag{46}$$

借助 $\|X\|=\|m_\gamma^N\|\leq 1$。因此，我们可以推导出

$$|D_t^{\alpha,I}|\leq\frac{C_0}{2}\mathcal{E}_N(t)+\frac{2C_L}{N}\,,\tag{47}$$

with

$$C_0=2\left(d^2A+d^42B+qd^2M[\gamma^2(\delta)+2\delta\gamma(\delta)\gamma'(\delta)]\right)$$

其中 $A\equiv\max_{\alpha,\gamma}|A_{\alpha,\gamma}|$, $B\equiv\max_{\alpha,\beta,\gamma}|B_{\alpha\beta\gamma}|$, $M\equiv\max_{\ell,\alpha,\gamma}|M_{\ell\alpha}^\gamma|$, $\delta\equiv\max_\ell\delta_\ell$，并回忆定义

$$\gamma(z):=\sum_{k=0}^\infty|c_\ell^k||z|^k<\infty\,,\qquad\gamma'(z):=\sum_{k=1}^\infty k|c_\ell^k||z|^{k-1}<\infty\,,$$

我们有 $\gamma(\delta)\geq\gamma(\delta_\ell)$, $\gamma'(\delta)\geq\gamma'(\delta_\ell)$ 对所有 ℓ 均成立。因此，对于时间导数 D_t，它 i s

$$|D_t|\leq 2\sum_{\alpha=1}^{d^2}|D_t^{\alpha,I}|+|\omega_t\left(P\right)|\leq C_1\,\mathcal{E}_N(t)+\frac{C_2}{N}\,,\tag{48}$$

其中 $C_1=d^2C_0$ 和 $C_2=d^2(C_P+4C_L)$。

因此，代价函数的时间导数可由以下式子界定

$$\dot{\mathcal{E}}_N(t)\leq\left|\dot{\mathcal{E}}_N(t)\right|\leq C_1\mathcal{E}_N(t)+\frac{C_2}{N}\,.\tag{49}$$

□

4.3. 准局域算符的开放量子动力学

本节将展示如何利用平均场方程的精确性，推导出有效动力学生成元，该生成元可在热力学极限下实现任意准局域算符的时间演化。

考虑以下含时林德布拉德生成元

$$\tilde{\mathcal{L}}_t\left[\cdot\right]=i\left[\tilde{H},\cdot\right]+\sum_\ell\Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t))\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}\left[\cdot\right]\,,\tag{50}$$

其中， $\mathcal{D}_\alpha^{\mathrm{Loc}}$是式 (16) 中引入的耗散子， $\Delta_\ell(t)$ 是平均场变量的线性组合

$$\Delta_\ell(t)=\sum_\alpha r_{\ell\alpha}m_\alpha(t)\,,$$

并且哈密顿量定义为

$$\tilde{H} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{d^2} \epsilon_\alpha v_\alpha^{(k)} + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{d^2} h_{\alpha\beta} \left(m_\alpha(t) v_\beta^{(k)} + m_\beta(t) v_\alpha^{(k)} \right) .$$

由于引理 4 保证变量 $m_\alpha(t)$ 有良好定义，因此对于任意时刻 t ，这样的林德布拉德算符都有良好定义。

通过这个生成元，我们可以定义（时间排序的）动力学映射 $\Lambda_{t,\ s}^{N}[\cdot]$使得

$$\frac{d}{dt}\Lambda_{t,s}^{N}[\cdot] = \Lambda_{t,s}^{N} \circ \tilde{\mathcal{L}}_t[\cdot] , \qquad \text{and} \qquad \frac{d}{ds}\Lambda_{t,s}^{N}[\cdot] = -\tilde{\mathcal{L}}_s \circ \Lambda_{t,s}^{N}[\cdot] .$$

此外，由于该生成元独立地作用于不同粒子，如果算符 O 的支撑仅位于某些格点上，那么 $\Lambda_{t,\ s}^{N}[O]$ 的支撑也将位于相同的格点上。

˜正如我们将在以下定理中证明的，在热力学极限下，生成元 $\mathcal{L}_t$ 实际上是系统中任意准局域可观测量（或算符）的动力学生成元。因此，该生成元适用于 $\mathcal{A}$ 中的任意算符以及任意充分聚簇态 ω [，见定义 1]。此外，我们注意到，将态 ω 约化到单个粒子或有限个粒子后，可以用密度矩阵 ρ表示。如果在初始时刻，后者在所考虑的粒子上具有乘积形式˜，那么生成元 $\mathcal{L}_t$分别作用于不同粒子的结构保证了：在热力学极限下，所考虑的有限粒子集的时间演化态 ρ_t 在所有时刻都将保持乘积形式。这是理解平均场方法有效性的另一种方式，参见例如文献 [22] 中的讨论，其中考虑的是一个封闭多体系统。因此，我们在此的观察证实，基于研究单粒子或少粒子约化密度矩阵的方法，实际上等同于本文采用的方法；后者关注平均算符以及准局域算符。

定理 2. 由 $\mathcal{L}_N$ 实现的时间演化，在准局域代数的弱算子拓扑下，通过映射 $\Lambda_{t,\ 0}^{N}$收敛到由时变生成元 $\tilde{\mathcal{L}}_t$ 实现的时间演化。也就是说，

$$\lim_{N\to\infty} \omega\left(A^\dagger e^{t\mathcal{L}_N}[O]\, B\right) = \lim_{N\to\infty} \omega\left(A^\dagger \Lambda_{t,0}^{N}[O]\, B\right) ,$$

对所有 A、B、$O \in \mathcal{A}$ 以及任意 $t < \infty$，均成立。

证明. 为使记号简洁，我们定义

$$\omega^{A^\dagger B}(O) := \omega(A^\dagger O B) ,$$

并考虑其差值

$$I_O = \omega^{A^\dagger B}\left(e^{t\mathcal{L}_N}[O]\right) - \omega^{A^\dagger B}\left(\Lambda_{t,0}^{N}[O]\right) .$$

我们先考虑 O 严格局域，因而仅支撑于有限个格点上的情形。这意味着存在 $k_{min} \leq k_{max}$ ，使得 ($k_{max} < \infty$)

$$\left[v_\alpha^{(k)}, O\right] = 0\,, \forall v_\alpha\,,$$

当 $k < k_{min}$ 或 $k > k_{max}$时。该算符的支撑长度为$N_O = k_{max} - k_{min} + 1$。由于这里我们关注极限 $N \to \infty$ ，因此始终考虑$N > k_{max}$。

现在开始正式证明。量 I_O 可以写为

$$I_O = \omega^{A^\dagger B}\left(\int_0^t ds\,\frac{d}{ds}\left[e^{s\mathcal{L}_N}\circ\Lambda_{t,s}^N\left[O\right]\right]\right).$$

显式计算导数后，我们得到

$$I_O = \int_0^t ds\,\omega^{A^\dagger B}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\circ\left[\mathcal{L}_N - \tilde{\mathcal{L}}_s\right]\circ\Lambda_{t,s}^N[O]\right). \tag{51}$$

现在，定义 $O_{t,s} = \Lambda_{t}^{N}{}_{,s}[O]$。这是一个与 O具有相同支撑的算符，因此其支撑有限。计算 $\mathcal{L}_N$ 对 $O_{t,s}$ 的作用，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N[O_{t,s}] =& i\sum_\alpha \epsilon_\alpha \sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[v_\alpha^{(k)}, O_{t,s}\right]\\ &+ i\sum_{\alpha\beta} h_{\alpha,\beta}\left(m_\alpha^N\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[v_\beta^{(k)}, O_{t,s}\right] + \sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[v_\alpha^{(k)}, O_{t,s}\right]m_\beta^N\right)\\ &+ \sum_\ell \Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell)\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}\left[O_{t,s}\right] + O(N)\,,\end{aligned} \tag{52}$$

其中， $O(N)$考虑了原始林德布拉德算符的耗散部分与其经算符值速率调制的局部作用之间的差异；该差异在热力学极限下以范数收敛至零（参见引理 2）。由此，我们还可以计算式（51）中出现的两个生成元的作用之差。这等价于

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N[O_{t,s}] - \tilde{\mathcal{L}}_s[O_{t,s}] =& i\sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}(m_\alpha^N - m_\alpha(s))\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[v_\beta^{(k)}, O_{t,s}\right] +\\ &+ i\sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[v_\alpha^{(k)}, O_{t,s}\right](m_\beta^N - m_\beta(s)) +\\ &+ \sum_\ell(\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(s)))\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}\left[O_{t,s}\right] + O(N)\,.\end{aligned} \tag{53}$$

现在，我们将其代回 I_O 的表达式中。得到

$$\begin{aligned} I_O = &\int_0^t ds\, \omega^{A^\dagger B}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\left[i\sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}(m_\alpha^N - m_\alpha(s))\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[v_\beta^{(k)}, O_{t,s}\right]\right]\right) + \\ &\int_0^t ds\, \omega^{A^\dagger B}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\left[i\sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[v_\alpha^{(k)}, O_{t,s}\right](m_\beta^N - m_\beta(s))\right]\right) + \\ &\int_0^t ds\, \omega^{A^\dagger B}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\left[\sum_{\ell}(\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(s)))\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}\left[O_{t,s}\right]\right]\right) + \\ &\int_0^t ds\, \omega^{A^\dagger B}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\left[O(N)\right]\right). \end{aligned} \tag{54}$$

上述求和的最后一项，我们记作 I_O^4，很容易处理，因为 $O(N)$ 在范数意义下趋于零，因此有 $|I_O^4| \leq \|A\|\|B\|\|O(N)\|$。其余各项则需要更仔细地处理。我们先看第一项，记作 I_O^1。记

$$O_{t,s}^\alpha = \sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[v_\alpha^{(k)}, O_{t,s}\right],$$

我们可以写成

$$I_O^1 = i\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}\int_0^t ds\, \omega^{A^\dagger B}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\left[(m_\alpha^N - m_\alpha(s))O_{t,s}^\beta\right]\right).$$

利用附录中证明的引理 6（另见参考文献 [27]），我们可以写成 te

$$\begin{aligned} |I_O^1| &\leq d^4 h_{\max}\int_0^t ds\, \left|\omega^{A^\dagger B}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\left[(m_\alpha^N - m_\alpha(s))O_{t,s}^\beta\right]\right)\right| \leq \\ &\leq d^4 h_{\max} 2N_O\|B\|\|v_\beta\|\|O\|\int_0^t ds\, \sqrt{\omega^{A^\dagger A}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\left[(m_\alpha^N - m_\alpha(s))^2\right]\right)} \end{aligned} \tag{55}$$

其中我们定义了 $h_{\max} = \max_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}$，并进一步利用了

$$\|O_{t,s}^\beta\| \leq 2N_O\|v_\beta\|\|O\|.$$

考虑平方根内的项。我们可以将经由 A 从 ω 得到的态定义为

$$\tilde{\omega}^{A^\dagger A}(X) := \frac{\omega\left(A^\dagger X A\right)}{\omega\left(A^\dagger A\right)}.$$

只要 ω 是聚类的，且 A 是准局域的，态 $\tilde{\omega}^{A^\dagger A}$ 也满足定义 1 意义下的聚类性质。因此我们有

$$\omega^{A^\dagger A}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\left[(m_\alpha^N - m_\alpha(s))^2\right]\right) = \omega(A^\dagger A)\tilde{\omega}^{A^\dagger A}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\left[(m_\alpha^N - m_\alpha(s))^2\right]\right).$$

与定理 1 中的做法相同，我们可以为态 $\tilde{\omega}^{A^\dagger A}$ 定义代价函数

$$\mathcal{E}_N^A(t) = \sum_\alpha \tilde{\omega}^{A^\dagger A}\left(e^{t\mathcal{L}_N}\left[(m_\alpha^N - m_\alpha(t))^2\right]\right).$$

对这个新的代价函数重复定理证明中的所有步骤，我们得到

$$\mathcal{E}_N^A(t) \leq e^{tC_1}\mathcal{E}_N^A(0) + \frac{1}{N}\frac{C_2}{C_1}\left(e^{C_1 t} - 1\right) .$$

右侧的第二项在大 N 极限下趋于零。第一项也趋于零，因为态 $\tilde{\omega}^A$ 具有聚类性质，即

$$\tilde{\omega}^{A^\dagger A}\left(\left[m_\alpha^N - m_\alpha(0)\right]^2\right) \to 0$$

对于 $N \to \infty$。考虑到平均算符与准局域算符对易，即可看出

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{\omega}^{A^\dagger A}\left(\left[m_\alpha^N - m_\alpha(0)\right]^2\right) = \frac{1}{\omega(A^\dagger A)} \lim_{N\to\infty} \omega\left(A^\dagger A\left[m_\alpha^N - m_\alpha(0)\right]^2\right) .$$

适当地运用柯西-施瓦茨不等式后，我们得到

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{\omega}^{A^\dagger A}\left(\left[m_\alpha^N - m_\alpha(0)\right]^2\right) \leq 2\|A\|^2 \lim_{N\to\infty} \sqrt{\omega\left(\left[m_\alpha^N - m_\alpha(0)\right]^2\right)}$$

其中我们用到了 $\|m_\alpha^N - m_\alpha(0)\| \leq 2$。根据对态 ω 的假设，上述不等式右侧趋于零。综上可得

$$\lim_{N\to\infty} |I_O^1| = 2d^4 h_{\max} N_O \|B\| \|v_\beta\| \|O\| \omega(A^\dagger A) \lim_{N\to\infty} \int_0^t ds\, \sqrt{\mathcal{E}_N^A(s)} = 0 .$$

式（54）中的第二项（记作 I_O^2）可完全按照上述方法处理，因此只需考虑第三项 I_O^3。为清晰起见，我们有

$$I_O^3 = \sum_\ell \int_0^t ds\, \omega^{A^\dagger B}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\left[(\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(s)))\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}\left[O_{t,s}\right]\right]\right) ,$$

利用引理 5，我们立即得到

$$\begin{aligned} |I_O^3| \leq 2\sum_{\ell,\beta} |r_{\ell\beta}|\gamma_\ell(\delta_\ell)\gamma_\ell'(\delta_\ell)\sqrt{\omega(B^\dagger B)}\|\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}\left[O_{t,s}\right]\| \\ \times \int_0^t ds\, \sqrt{\omega^{A^\dagger A}\left(e^{s\mathcal{L}_N}\left[(m_\beta^N - m_\beta(s))^2\right]\right)} . \end{aligned}$$

注意，由于算符 $O_{t,s}$ 具有局域支撑，$\|\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}\left[O_{t,s}\right]\|$ 保持有限。现在，考察积分中的平方根，并回忆用于证明项 I_O^1 趋于零的讨论，我们可以证明，在 $N \to \infty$极限下，I_O^3 也趋于零。

综合以上所有结果，我们已经证明

$$\lim_{N\to\infty} |I_O| = \lim_{N\to\infty} \left(|I_O^1| + |I_O^2| + |I_O^3| + |I_O^4|\right) = 0 , \tag{56}$$

由此便完成了对任意具有严格局域支撑的算符 O 的定理证明。

为了将这一结果推广到准局域代数中的任意算符 O，我们按如下方式进行。首先，我们注意到，任意准局域算子 O 都可以

以任意精度由一个具有局域支撑的算符近似。这意味着，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们总能找到一个算符 O_ε，使得

$$\|O - O_\varepsilon\| \leq \varepsilon \,.$$

接着，我们再次考虑量 I_O，并将其改写为

$$\begin{aligned} I_O &= \omega^{A^\dagger B}\left(e^{t\mathcal{L}_N}[O]\right) - \omega^{A^\dagger B}\left(\Lambda^N_{t,0}[O]\right) = \\ &= \omega^{A^\dagger B}\left(e^{t\mathcal{L}_N}[O - O_\varepsilon]\right) - \omega^{A^\dagger B}\left(\Lambda^N_{t,0}[O - O_\varepsilon]\right) + I_{O_\varepsilon} \,. \end{aligned} \tag{57}$$

由于 $e^{t\mathcal{L}_N}$ 和 $\Lambda^N_{t,0}$ 均为压缩映射，前两项有界于 $\|A\|\|B\|\|O - O_\varepsilon\|$。因此，我们有

$$|I_O| \leq 2\|A\|\|B\|\varepsilon + |I_{O_\varepsilon}| \,.$$

现在，我们选择 ε 使得 $\varepsilon = \chi/(4\|A\|\|B\|)$。此外，根据式 (56) 总结的关于具有严格局域支撑的算符 $\tilde{}$ 的结果，对任意 $\chi > 0$，存在一个 $N\tilde{}$，使得对任意 $N > N$，我们有

$$|I_{O_\varepsilon}| < \frac{\chi}{2} \,.$$

$\tilde{}$考虑到这些因素，我们因此可以说，$\forall\chi > 0$ 存在一个 N，使得$\tilde{}\forall N > N$ 我们有

$$|I_O| < \chi \,,$$

这正是定理中出现的极限的定义。 □

5. 量子霍普菲尔德型神经网络的应用

5.1. 量子霍普菲尔德型神经网络

本节中，我们将所得结果应用于霍普菲尔德类模型的开放量子推广。这些系统起源于经典神经网络（NN）的研究领域。它们是实现联想记忆行为的基本模型 [55], ，即能够按照学习规则从受损数据中检索出完整信息。联想记忆的典型实例是所谓的霍普菲尔德神经网络（HNN） [36], ，下文将对此进行讨论。HNN 是一种具有全对全相互作用的经典自旋网络 [55, 56], ，其能量函数为$E = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1}^{N} w_{ij}\,\sigma_z^{(i)}\sigma_z^{(j)}$，其中 N表示自旋数，$\sigma_z^{(i)}$表示经典伊辛自旋。相互作用耦合 w_{ij}的选取方式使得系统能够存储并检索一组 p 个自旋构型$\{\xi_i^\mu\}_{i=1.....N}$（$\mu = 1,\ 2,\ \ldots p$），这对应于这些模式是能量函数的极小值。不同的自旋构型 $\{\xi_i^\mu\}_i$ 可以表示模式，例如图像或字母。各种学习规则中，广为人知的一种是赫布规则，它设定$w_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p}\xi_i^\mu\xi_j^\mu$。

—

实际上，就这些模型的理论研究而言，模式可以选取为由独立同分布（i.i.d.）随机变量生成，这些变量可以取值 $\xi_i^\mu = \pm 1$。对于 $p/N \ll 1$，能量最小的自旋构型是所有自旋都与模式对齐的构型。为 HNN 配备逆热浴温度为 β^{-1} [42]的盖尔曼热单自旋翻转动力学后，便会出现检索机制。

霍普菲尔德神经网络的量子推广已在文献 [41, 57] 中提出，旨在将这些系统纳入由式 (10)-(12) 定义的、更一般的开放量子马尔可夫演化框架，并研究量子效应对其检索动力学的影响。在这里，系统由 N 自旋-1/2 粒子构成，并经历马尔可夫演化，其跳跃算符为

$$J_\pm^{(k)} = \sigma_\pm^{(k)} \Gamma_\pm^{\mathrm{HN}}(\Delta E_k), \qquad \Gamma_\pm^{\mathrm{HN}}(\Delta E_k) = \frac{e^{\pm \frac{\beta}{2}\Delta E_k}}{\sqrt{2\cosh(\beta \Delta E_k)}}, \tag{58}$$

其中

$$\Delta E_k = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{p} \xi_k^\mu \sum_{j \neq k} \xi_j^\mu \sigma_z^{(j)}$$

表示跃迁前后构型之间的能量差。我们注意到，该算符量化了格点 j处自旋翻转所对应的能量变化。因此，它并非单位算符的简单倍数，而是一个取决于所有自旋状态的多体算符。值得注意的是，该模型的算符值速率 $\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E_k)$不作用于第 k 个自旋，因此与算符 $\sigma_\alpha^{(k)}$, $\alpha = \pm$对易。哈密顿量项取为均匀横场 $H = \Omega \sum_{i=1}^N \sigma_x^{(i)}$，并与耗散性霍普菲尔德神经网络动力学相互竞争。在热力学极限下，对于 $p/N \ll 1$，该量子模型已通过若干宏观量的动力学演化进行了分析。事实上，在平均场近似下，即忽略平均算符之间的关联，量子霍普菲尔德神经网络在参数区域 (Ω β) 内的检索性质已得到刻画 [39]。研究表明，在高温下，量子霍普菲尔德神经网络呈现所谓的顺磁（无序）相，此时无法进行模式检索。在低温且横场强度足够小时，系统则呈现铁磁相，并能够作为联想记忆运行。有趣的是，当 Ω 较大时，可以观察到量子检索相，其特征是系统的态处于极限环区域，并与某个模式具有非零重叠度。然而，尽管平均场理论对经典霍普菲尔德神经网络成立，目前尚无针对该模型量子推广的精确证明。接下来我们将证明，定理 1 和定理 2 适用于这些情形。

在继续之前，我们先引入以下量

$$\Delta E = \frac{1}{N} \sum_{\mu} \xi_k^\mu \sum_{j} \xi_j^\mu \sigma_z^{(j)},$$

以及算符值速率

$$\Gamma_{\pm}^{\mathrm{HN}}(\Delta E) \equiv \frac{e^{\pm\frac{\beta}{2}\Delta E}}{\sqrt{2\cosh\left(\beta\Delta E\right)}}\,. \tag{59}$$

这些速率与式（58）中定义的速率之间的区别在于，前者还计入了自能贡献，即求和涉及所有格点。下面我们将证明，用式（59）定义的速率替换算符值速率（58），即用 ΔE替换 ΔE_k，在热力学极限下会得到相同的运动方程。不过，通过（59）表示系统动力学与我们上文给出的结果联系得更为紧密。

5.2. 平均场方法的精确性

值得注意的是，式（58）、（59）中的算符值速率不满足假设 1。事实上，当给定一个实数 x 时，$(\cosh(\beta x))^{-1/2}$ 是一个实解析函数，而函数 $(\cosh(\beta z))^{-1/2}$ 在 z 为复数时并不是整函数。这意味着不存在以 $x=0$ 为中心、收敛半径为无穷大的 $(\cosh(\beta x))^{-1/2}$ 的幂级数。显然，正如我们在假设 1 后紧接着提到的，要求算符值速率函数具有收敛半径为无穷大的幂级数，是一个很强的要求，对于我们的处理而言并非严格必要。事实上，回顾定理的证明可以看到，为了应用我们的定理，算符值函数 Γ_ℓ 必须满足两个基本要求：i）它们必须满足引理 1 的相应条件，即它们与局部算符或平均算符的对易子，除某些关于 N 充分快速收敛到零的项外为零；ii）它们必须满足引理 5 的相应条件，即它们向其平均场对应项的收敛，必须由平均算符向其平均场对应项的（二次）收敛所控制。如下所示，式（58）—（59）中的速率满足这些要求。

由于我们处理的是自旋-$1/2$ 粒子系统，因此我们选取单粒子代数 $M_2(\mathbb{C})$ 的一组基，即泡利算符 $\sigma_x^{(k)}$、$_y$、$_z$ 和单位算符。由于不同格点上的速率与 σ_z 成正比，我们有 $[\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E)\ \sigma_z^{(k)}] = 0 \forall i = 1,$ ……、N 以及 $\ell = \pm$。为证明这些速率满足引理 1，我们需要计算对易子 $[\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E)\ \sigma_+^{(k)}]$ 的范数。为此，我们注意到 $\sigma_+^{(k)}\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E) = \Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E - c\sigma_z^{(k)})\sigma_+^{(k)}$，其中 $|c| \leq 2p/N$，因为我们有 $|w_{ij}| \leq p/N$。因此，我们可以写成

$$\|[\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E), \sigma_+^{(k)}]\| \leq \|\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E) - \Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E - c\sigma_z^{(k)})\|\,. \tag{60}$$

不难验证，对于两个实数 x, y，有

$$\begin{aligned}\Gamma_{\pm}^{\mathrm{HN}}(x) - \Gamma_{\pm}^{\mathrm{HN}}(y) = &\frac{e^{\pm\frac{\beta x}{2}}\left[\cosh(y) - \cosh(x)\right]}{\sqrt{\cosh(x)\cosh(y)}\left[\sqrt{2\cosh(y)} + \sqrt{2\cosh(x)}\right]} + \\ &+ \frac{e^{\pm\frac{\beta x}{2}} - e^{\pm\frac{\beta y}{2}}}{\sqrt{2\cosh(y)}}\,,\end{aligned} \tag{61}$$

这表明，两个函数之差可以用两个整函数之差与有界项乘积的和来界定（因为 ΔE 只有有限个特征值）。因此，在式（60）右侧，我们可以将整函数展开为泰勒级数（其收敛半径为无穷大）；注意到这两个函数的自变量之差为 $1/N$ 阶，可以找到一个合适的常数 C_σ ，使得

$$\|[\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E), \sigma_+^{(k)}]\| \leq \frac{C_\sigma}{N}\,.$$

对于 $[\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E)\ \sigma_-^{(k)}]$，同样的结果也成立。因此，对于任意单点算符，我们有 $\|[\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E)\ x^{(k)}]\| \sim 1/N$ ，平均算符也同样满足

$$\|[\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E), X_N]\| \leq 2x_{\max}\frac{C_\sigma}{N}\,, \tag{62}$$

其中， $x_{\max}$ 是 x 的矩阵元中绝对值最大的那个的模。我们进一步指出，由于泡利矩阵 $\sigma_\pm, \sigma_z$ 构成单点代数的一组基，任意局域算符 O 都可以写成有限个泡利矩阵乘积的线性组合，且这些乘积仅在 O的支撑上非平凡作用。利用关于单点算符的结果以及对易子的线性性，我们由此可以为任意严格局域算符 $O \in \mathcal{A}$找到一个上界。

现在我们考虑双重对易子 $[\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E)\ [\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E)\ \sigma_\alpha^{(k)}]]$。显然，当考虑 $\sigma_\alpha = \sigma_z$ 或单位算符时，该式为零。聚焦于 $\sigma_+^{(k)}$ 时，直接计算可得，

$$\|[\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E), [\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E), \sigma_+^{(k)}]]\| \leq \|\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E) - \Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E - c\sigma_z^{(k)})]\|^2\,, \tag{63}$$

由于上述论证，该项的阶为 $1/N^2$。因此我们得到

$$\|[\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E), [\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E), X_N]]\| \leq 2x_{\max}\frac{C_\sigma^2}{N^2}\,. \tag{64}$$

对于严格局域算符，也可以再次得到类似的结果。随后可直接利用式 (62) 和式 (64) 中的结果，证明一个与引理 2 等价的结论，该结论适用于描述量子 Hopfield 神经网络的算符值速率。事实上，按照上述引理的证明过程，并利用式 (59) 所定义的跳跃算符的特定形式，我们得到

$$\|\mathcal{D}_\ell[x_k] - \Gamma_\ell^{\mathrm{HN}\,2}(\Delta E)\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[x_k]\| \leq \frac{x_{\max}}{N}\Gamma(3C_\sigma + C_\sigma^2), \tag{65}$$

其中 Γ 是算符值速率 $\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E)$ 的范数。

可以验证，由式 (58) 定义的算符值速率满足上述相同的界。因此，在考虑 $\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E_i)$ 并将 $\tilde{\mathcal{D}}_\ell[\cdot]$与相应的耗散子对应起来时，我们得到

$$\|\tilde{\mathcal{D}}_\ell[x_k] - \Gamma_\ell^{\mathrm{HN}\,2}(\Delta E_i)\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[x_k]\| \leq \frac{x_{\max}}{N}\Gamma(3C_\sigma + C_\sigma^2)\,. \tag{66}$$

此时，我们可以证明，在热力学极限下，算符值速率 (58) 和 (59) 会导出相同的运动方程。为此，我们来考察它们的差

$$\begin{aligned} D =& \|\mathcal{D}_\ell[x_h] - \tilde{\mathcal{D}}_\ell[x_h]\| \\ =& \quad \| \left((\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E))^2 - (\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E_k))^2 \right) \mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[x_h] + L_1 + L_2 \| \,, \end{aligned} \tag{67}$$

其中 L_1 和 L_2 分别满足式 (65)、(66) 给出的界。接下来，我们关注剩余项的范数。注意到 $\Delta E_k = \Delta E - \frac{c}{2}\sigma_z^{(k)}$，我们考虑差值

$$\begin{aligned} & \left((\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E))^2 - (\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}}(\Delta E - \frac{c}{2}\sigma_z^{(k)}))^2 \right) \mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[x_h] \\ &= \left(e^{\ell\beta\Delta E} \cosh\left(\ell\beta\Delta E - \frac{c}{2}\sigma_z^{(k)}\right) - e^{\ell\beta(\Delta E - \frac{c}{2}\sigma_z^{(k)})} \cosh\left(\ell\beta\Delta E\right) \right) W \,, \end{aligned} \tag{68}$$

其中 $W = \mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[x_k]/(2\cosh(\beta\Delta E)\cosh(\beta\Delta E_k))$ 是一个范数有界算符。因此，我们可以关注范数

$$\begin{aligned} & \|e^{\ell\beta\Delta E} \cosh\left(\ell\beta\Delta E - \frac{c}{2}\sigma_z^{(k)}\right) - e^{\ell\beta(\Delta E - \frac{c}{2}\sigma_z^{(k)})} \cosh\left(\ell\beta\Delta E\right)\| \\ & \le \| \sinh\left(\beta c \sigma_z^{(k)}/2\right)\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\beta p)^{(2n+1)} \frac{1}{N^{(2n+1)}} \\ & \le \frac{1}{N} \sum_{\substack{n=0 \\ (2n+1)!}}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\beta p)^{(2n+1)} \le \frac{1}{N} \sinh\left(\beta p\right) , \end{aligned} \tag{69}$$

利用级数 $\sum_n \frac{1}{(2n+1)!}|b|^n < \infty$, $\forall b \in \mathbb{R}$ 的收敛性，我们得到

$$\|\mathcal{D}_\ell[x_h] - \tilde{\mathcal{D}}_\ell[x_h]\| \le \frac{1}{N}[\sinh(\beta p)\|W\| + 2x_{\max}\Gamma(3C_\sigma + C_\sigma^2)] \tag{70}$$

现在，我们明确证明式 (59) 中的算符值速率可以写成适当平均算符的线性组合。为此，我们对全连接经典能量函数执行映射 [30]（见图 2]）

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}\sigma_z^{(i)}\sigma_z^{(j)} = -\frac{1}{2N}\sum_{\mu=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i^\mu\sigma_z^{(i)}\right)^2 , \tag{71}$$

其中已写出 w_{ij} 关于模式 ξ_i^μ 的表达式。现在，我们将重新排列模式的 p 行（ξ_1^μ，...，ξ_N^μ），每一行都对应一个 $\{\sigma_z^{(i)}\}_{i=1,\ldots,N}$自旋构型。第一个模式 ξ_i^1 在随机位置取值 ±1。我们按如下方式重新标记自旋：将满足 $\xi_j^1 = +1$ 的自旋移至左侧，其余满足 $\xi_j^1 = -1$的自旋移至右侧，如图 2 所示。因此，存在 $\tilde{h}$，使得对于 $h \le \tilde{h}$，$\xi_h^1 = 1$；其他情况下则为 $\xi_h^1 = -1$。接下来，我们考虑第二个模式 ξ_i^2。在对应于 $\xi_h^1 = 1$ 的子集中，我们重新标记自旋，将 $\xi_i^2 = 1$移至左侧，将 $\xi_i^2 = -1$ 移至右侧。对对应于 $\xi_h^1 = -1$的子集也进行相同操作。该过程可以重复进行，直到最后一个模式。对于较大的 N，这种映射会产生 2^p 个自旋子集，如图 2 所示；每个子集均由宏观自旋算符描述，这些算符彼此相互作用。在

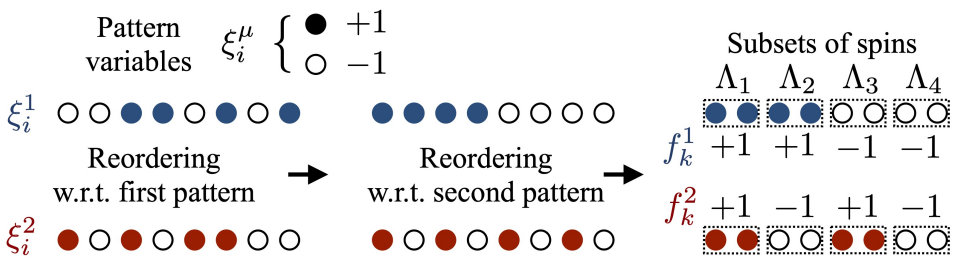

图2. 映射到大自旋的示意图。正文中讨论的映射示例，涉及 $N = 8$ 个自旋和 $p = 2$ 个模式。构成这些模式的每个变量 ξ_i^μ 都可以取值 $+1$ 或 -1。映射的第一步是对自旋进行置换，使变换后第一个模式中所有 $\xi_i^1 = +1$ 都排在 $\xi_i^1 = -1$ 之前。这也重新排列了第二个模式的结构。第二步，我们对变换后的第一个模式 ξ_i^1所确定的两个子块内部的自旋进行置换。我们以这样的方式重新排列自旋：在第一个模式所确定的每个子块中，第二个模式 ξ_i^2 里取值 $+1$ 的自旋都排在取值 -1 的自旋之前。该过程生成 2^p 个自旋子集 Λ_k（当 N 很大时，它们构成大自旋子系统），使得如果 m, $n \in \Lambda_k$，那么 $\xi_m^\mu = \xi_n^\mu = f_k^\mu, \forall \mu$。这里，函数 f_k^μ 表示模式 ξ_i^μ，其表示方式是用子集 Λ_k 来表示。

下文中，我们将这些子集记为 Λ_k、$k = 1$，……，2^p。此外，由于 ξ_i^μ 是独立同分布随机变量，只要满足 $N \gg 1$，每个模式（ξ_1^μ，……，ξ_N^μ）在主导阶上都包含数量相等的 $+1$ 和 -1。因此，2^p 个子集中的每一个在主导阶上都包含相同数量的自旋，即 $N_\mathrm{s} = N/2^p$（假设 $N/2^p$ 是整数）。在这种映射下，能量函数写作

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{2^p N_\mathrm{s}} \tilde{w}_{hk} S_z^{(h)} S_z^{(k)} = -\frac{1}{2^{p+1} N_\mathrm{s}} \sum_{\mu=1}^{p} \left(\sum_{h=1}^{2^p} f_h^\mu S_z^{(h)} \right)^2 , \tag{72}$$

它描述了大自旋算符 $S_z^{(h)}$ 之间的相互作用，其中 $S_\alpha^{(h)} = \sum_{i\in\Lambda_h} \sigma_\alpha^{(i)}$定义为属于第 h 个子集 Λ_h 的自旋 -1/2 算符之和。系数 f_h^μ [（参见图 2], ）可以取值 ± 1，表示子集 Λ_h 中自旋的模式值。尤为重要的是，它们参与了$\tilde{w}_{hk} = \frac{1}{2^p}\sum_{\mu=1}^{p} f_h^\mu f_k^\mu$的定义，该算符规定了第 k 个与第 h 个大自旋之间的相互作用耦合。此外，考虑属于集合 Λ_k 的自旋 1/2 时，算符 ΔE 变为

$$\Delta E_{\Lambda_k}^{N_s} = \frac{1}{N_\mathrm{s}} \sum_{h=1}^{2^p} \tilde{w}_{hk} S_z^{(h)} = \sum_{h=1}^{2^p} \tilde{w}_{hk}\, m_{z,h}^{N_\mathrm{s}} \tag{73}$$

其中我们引入了平均磁化算符

$$m_{\alpha,k}^{N_\mathrm{s}} \equiv \frac{S_\alpha^{(k)}}{N_\mathrm{s}} , \tag{74}$$

对于 $\alpha = x$、y、z、以及 $k = 1$、……、2^p。该映射阐明了如何推导出平均算符描述，而我们正是利用这种描述推导平均场描述。

现在我们将作出总结，并说明定理 1 在此情形下可以应用。为此，我们回忆一下，我们已经得到了引理 1 和引理 2 的结果（而引理 3 和引理 4 实际上独立于假设 1）。因此，我们只需验证引理 5 的等价形式成立即可。只需写出

$$\begin{aligned}
&\Gamma_\ell^{\mathrm{HN}\,2}(\Delta E_{\Lambda_k}^{N_{\mathrm{s}}}) - \Gamma_\ell^{\mathrm{HN}\,2}(\Delta E_{\Lambda_k}(t)) \\
&= \frac{e^{\ell\beta\Delta E_{\Lambda_k}^{N_{\mathrm{s}}}}\cosh(\beta\Delta E_{\Lambda_k}(t)) - e^{\ell\beta\Delta E_{\Lambda_k}(t)}\cosh(\beta\Delta E_{\Lambda_k}^{N_{\mathrm{s}}})}{2\cosh(\beta\Delta E_{\Lambda_k}^{N_{\mathrm{s}}})\cosh(\beta\Delta E_{\Lambda_k}(t))} \\
&= \sinh(\ell\beta(\Delta E_{\Lambda_k}^{N_{\mathrm{s}}} - \Delta E_{\Lambda_k}(t)))\frac{1}{2\cosh(\beta\Delta E_{\Lambda_k}^{N_{\mathrm{s}}})\cosh(\beta\Delta E_{\Lambda_k}(t))} \\
&= \sum_h \tilde{w}_{hk}(m_{z,h}^{N_{\mathrm{s}}} - m_{z,h}(t))Q_k\,,
\end{aligned} \tag{75}$$

即，在平均算子 $\Delta E^{N_{\mathrm{s}}}$ 和平均场变量的线性组合 $\Delta E(t)$ 上计算得到的算符值速率之差，可由一个整函数 $\sinh(\cdot)$ 与一个有界于范数的项的乘积所控制。对前者采用幂级数展开，其余所有有界于范数的部分均保留在 Q_k 中，即

$$Q_k = R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(\ell\beta)^{2n+1}\left(\sum_h \tilde{w}_{hk}(m_{z,h}^{N_{\mathrm{s}}} - m_{z,h}(t))\right)^{2n}, \tag{76}$$

其中 $R = 1/(2\cosh(\beta\Delta E_{\Lambda_k}^{N_{\mathrm{s}}})\cosh(\beta\Delta E_{\Lambda_k}(t)))$。因此，$Q_k$ 的范数可界定为

$$\begin{aligned}
\|Q_k\| &= \|R\|\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(\ell\beta)^{2n+1}\left(\sum_h \tilde{w}_{hk}(m_{z,h}^{N_{\mathrm{s}}} - m_{z,h}(t))\right)^{2n}\right\| \\
&\le \|R\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\beta^{(2n+1)}\left(\sum_h 2|\tilde{w}_{hk}|\right)^{2n} \\
&\le \frac{\|R\|}{2\delta_{E_{\Lambda_k}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(2\beta\delta_{E_{\Lambda_k}})^{2n+1} = \frac{\|R\|}{2\delta_{E_{\Lambda_k}}}\sinh(2\beta\delta_{E_{\Lambda_k}})\,,
\end{aligned} \tag{77}$$

利用了 $\|\Delta E_{\Lambda_k}\| \le \sum_h |\tilde{w}_{hk}| \equiv \delta_{E_{\Lambda_k}}$。由此可重述该引理的证明，得到

$$\begin{aligned}
&|\omega(A^\dagger e^{t\mathcal{L}_N}[(\Gamma_\ell^2(\Delta E_{\Lambda_k^{N_{\mathrm{s}}}}) - \Gamma_\ell^2(\Delta E_{\Lambda_k}(t)))X]B)| \\
&\le C\|X\|\sum_h |\tilde{w}_{hk}|\sqrt{\omega(A^\dagger e^{t\mathcal{L}_N}[(m_{z,h}^{N_{\mathrm{s}}} - m_{z,h}(t))^2]A)}\sqrt{\omega(B^\dagger B)}\,,
\end{aligned} \tag{78}$$

其中 $C = \|R\|\sinh(2\beta\delta_{E_{\Lambda_k}})/(2\delta_{E_{\Lambda_k}})$。因此，可以应用定理 1。结合速率与局域算子的对易子相关结果，也可为 HNN 动力学的量子推广证明定理 2。

6. 结论

在本文中，我们研究了在林德布拉德形式的动力学生成元作用下演化的多体开放量子系统。我们将耗散部分引入为

对经典随机动力学生成元的一种推广：在这类生成元中，单格点跃迁发生的速率取决于系统自身的集体性质。在量子情形下，这些跃迁由算符值函数 Γ 表示，并假设它们是平均算符的（实）解析函数。随后，我们通过单粒子哈密顿量和全连接二体相互作用哈密顿量加入了动力学的相干部分。首先，我们证明，对于较大的系统大小，严格局域算符和平均算符上的耗散映射表现为局域耗散映射，其权重由算符值速率的平方给出（引理 2）。接着，我们从平均算符的海森堡方程出发，分析其动力学。事实上，定理 1 表明，在热力学极限下，这些方程恰好由平均场运动方程给出（该方程通过对算符的期望值进行因子分解得到）。这是我们的第二个主要结果。第三，我们聚焦于准局域算符的动力学。基于平均场方程的精确性，我们推导出了在热力学极限下描述其动力学的有效动力学生成元（定理 2）。最后，我们展示了这一结果对于大系统大小且存储容量趋于零时的开放量子霍普菲尔德模型类具有重要意义。

对我们的方法进行改进，以研究更一般形式的林德布拉德算符，将会很有意义，例如超越集体全连接耦合哈密顿量或置换不变模型。举例来说，可以考虑具有二体相互作用的平移不变哈密顿量，以及一般的平移不变耗散子，例如光介导相互作用存在时产生的耗散子（参见例如文献 [58]），并通过分析在傅里叶空间中定义的一组合适的（可能是无限多个）平均算符的动力学行为，来发展研究这类模型的方法。与全连接耦合模型中只有零阶傅里叶模相关不同，平移不变系统需要考虑所有模。

7. 致谢

EF 和 MM 感谢 ERC 起始资助项目 QNets（资助编号 804247）提供的支持。EF、MM 和 IL 感谢德国研究联合会（DFG）通过资助编号 449905436 提供的资助。我们还感谢 DFG 通过研究小组 FOR 5413/1（资助编号 465199066）以及德国卓越战略——卓越集群编号 2064/1，项目编号 390727645——提供的资助。FC 感谢巴登-符腾堡州基金会通过博士后精英计划为本研究项目提供的经费支持。

附录 A. 引理

附录 *A.1.* 引理 *1* 的证明

引理 1. 若函数 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$ 满足假设 *1*，则

$$
\begin{aligned}
&i)\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right]\right\| \leq \frac{2N_O}{N}\|O\|\delta_\ell\gamma'(\delta_\ell)\,,\\
&ii)\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), X_N\right]\right\| \leq \frac{2}{N}\|x\|\delta_\ell\gamma'(\delta_\ell)\,,\\
&iii)\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), \left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right]\right]\right\| \leq \frac{4N_O^2}{N^2}\|O\|\delta_\ell^2[\gamma'(\delta_\ell)]^2\,,\\
&iv)\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), \left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), X_N\right]\right]\right\| \leq \frac{4}{N^2}\|x\|\delta_\ell^2[\gamma'(\delta_\ell)]^2\,,
\end{aligned}
$$

其中 O 是具有严格局域支撑的任意算符， N_O 是该支撑的长度，X_N 是公式 *(2)* 中定义的任意平均算符。

证明. 给定一个仅支撑于有限个格点上的算符 O，我们总能找到两个整数 $k_{min} \leq k_{max} < \infty$ 来定义其支撑。特别地，k_{min} 是满足下式的最大数

$$
\left[v_\alpha^{(k)}, O\right] = 0\,, \qquad \forall v_\alpha,
$$

对任意 $k < k_{min}$ 均成立。整数 k_{max} 则是满足下式的最小数

$$
\left[v_\alpha^{(k)}, O\right] = 0\,, \qquad \forall v_\alpha,
$$

对所有 $k > k_{max}$ 均成立。于是我们称算符 O 的支撑从格点 k_{min} 延伸至格点 k_{max}，而 $N_O = k_{max} - k_{min} + 1$ 是其支撑的长度或延伸范围。

基于这一观察，我们可以继续证明 i）。具体做法是直接计算对易子。我们有

$$
\left[\Gamma_\ell\left(\Delta_N^\ell\right), O\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_\ell^n \left[\left(\Delta_N^\ell\right)^n, O\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_\ell^n \sum_{j=0}^{n-1} \left(\Delta_N^\ell\right)^j \left[\Delta_N^\ell, O\right] \left(\Delta_N^\ell\right)^{n-1-j}\,.
$$

接下来，我们计算 Δ_N^ℓ 与局域算符 O 的对易子。结果为

$$
\left[\Delta_N^\ell, O\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{\alpha=1}^{d^2} r_{\ell\alpha} v_\alpha^{(k)}, O\right]\,.
$$

由于算符 O 的局域性，我们进一步发现

$$
\left[\Delta_N^\ell, O\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[\sum_{\alpha=1}^{d^2} r_{\ell\alpha} v_\alpha^{(k)}, O\right]\,.
$$

接着，我们定义算符 $O^\ell := \left[\Delta_N^\ell, O\right]$；根据上述观察，它是一个局域算符，其支撑在与 O 相同的格点上，且范数为

$$\|O^\ell\| \leq \frac{2N_O}{N}\|O\|\delta_\ell\,,$$

其中 δ_ℓ 由公式 **(14)** 定义。将这一信息代回对易子 i**)** 中，并取适当的范数界（回忆 $\|\Delta_N^\ell\| \leq \delta_\ell$），我们得到

$$\| \left[\Gamma_\ell\left(\Delta_N^\ell\right), O\right] \| \leq \frac{2N_O}{N}\|O\|\delta_\ell\gamma'(\delta_\ell) \tag{A.1}$$

其中，量 $\gamma'(\delta_\ell)$ 定义为级数

$$\gamma'(\delta_\ell) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_\ell^n| n\, \delta_\ell^{n-1} < \infty\,.$$

公式 **(A.1)** 中的关系恰好就是引理中给出的关系 i**)**。

现在我们利用此前的一些结果来证明 iii**)**。考虑 i**)** 中的对易子，我们已经证明

$$\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_\ell^n \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_N^\ell)^j O^\ell (\Delta_N^\ell)^{n-1-j}\,.$$

现在，为了证明 iii**)**，我们需要再考虑一个与 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$ 的对易子。根据 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$ 的幂级数定义，双重对易子可写为

$$\begin{aligned}&\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), \left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right]\right] \\ &= \sum_{n,n'=1}^{\infty} c_\ell^n c_\ell^{n'} \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_N^\ell)^j \left[\sum_{i=0}^{n'-1} (\Delta_N^\ell)^i \left[\Delta_N^\ell, O^\ell\right] (\Delta_N^\ell)^{n'-1-i}\right] (\Delta_N^\ell)^{n-1-j}\,.\end{aligned}$$

现在我们聚焦于算符 $O^{\ell\ell} := [\Delta_N^\ell, O^\ell]$。展开 Δ_N^ℓ，可写为

$$O^{\ell\ell} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{\alpha=1}^{d^2} r_{\ell\alpha} v_\alpha^{(k)}, O^\ell\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[\sum_{\alpha=1}^{d^2} r_{\ell\alpha} v_\alpha^{(k)}, O^\ell\right]\,,$$

其中，在第二个等号中，我们利用了这样一个事实： O^ℓ 是一个与 O具有相同支撑的严格局域算符。这表明

$$\|O^{\ell\ell}\| \leq \frac{2N_O}{N}\|O^\ell\|\delta_\ell \leq \frac{4N_O^2}{N^2}\|O\|\delta_\ell^2\,,$$

我们可以利用这一点求得 iii**)**中的界

$$\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), \left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right]\right]\right\| \leq \frac{4N_O^2}{N^2}\|O\|\delta_\ell^2\left[\gamma'(\delta_\ell)\right]^2\,.$$

现在，我们可以利用 i**)** 和 iii**)** 直接证明关系 ii**)** 和 iv**)**。对于 ii**)**，我们考虑

$$\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), X_N\right]\right\| \leq \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), x^{(k)}\right]\right\|\,.$$

现在，右侧对易子的范数实际上并不依赖于 k，这是由于算符 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$ 具有置换不变性，因此我们有

$$\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), X_N\right]\right\| \leq \left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), x^{(k)}\right]\right\| .$$

我们可以利用 $i)$ 的结果，并注意到 $x^{(k)}$ 是支撑等于 $N_{x^{(k)}} = 1$ 的局域算符，从而得到

$$\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), X_N\right]\right\| \leq \frac{2}{N}\|x\|\delta_\ell\gamma'(\delta_\ell) .$$

我们可以用类似的方法处理 $iv)$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), \left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), X_N\right]\right]\right\| &\leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), \left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), x^{(k)}\right]\right]\right\| \\ &\leq \left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), \left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), x^{(k)}\right]\right]\right\| ,\end{aligned}$$

由于 $x^{(k)}$ 是局域的，利用 $iii)$，我们可以得出

$$\left\|\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), \left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), X_N\right]\right]\right\| \leq \frac{4}{N^2}\|x\|\delta_\ell^2[\gamma'(\delta_\ell)]^2 .$$

□

附录 *A.2.* 引理 *2* 的证明

引理 2. 由满足假设 *1* 的函数 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$ 按照公式 ***(11)–(12)*** 定义的映射 $\mathcal{D}_\ell$ 满足

$$\begin{aligned}&\left\|\mathcal{D}_\ell[O] - \Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell)\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[O]\right\| \leq \frac{C_O}{N} , \\ &\left\|\mathcal{D}_\ell[X_N] - \Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell)\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[X_N]\right\| \leq \frac{C_x}{N} ,\end{aligned}$$

with

$$\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[A] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\left[j_\ell^{\dagger\,(k)}, A\right] j_\ell^{(k)} + j_\ell^{\dagger\,(k)}[A, j_\ell^{(k)}]\right) . \tag{A.2}$$

而 C_O、 C_x 是适当的 N 独立常数。在上述表达式中， O 是任意一个支撑在有限个格点上的局域算符， N_O 是其支撑的扩展，而 X_N 是单粒子算符 x 的平均算符，如公式 *(2)* 所定义

证明。 为证明该引理，我们先考虑一个局域支撑延伸至 N_O 个格点的算符 O ，并计算 $\mathcal{D}_\ell$ 对其的作用。我们有

$$\mathcal{D}_\ell[O] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)j_\ell^{\dagger\,(k)}, O\right] j_\ell^{(k)}\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell) + \Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)j_\ell^{\dagger\,(k)}\left[O, j_\ell^{(k)}\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right]\right) .$$

利用 $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$，我们将其改写为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\ell[O] =&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\left[j_\ell^{\dagger\,(k)},O\right]j_\ell^{(k)}\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)+\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)j_\ell^{\dagger\,(k)}\left[O,j_\ell^{(k)}\right]\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right)\\ +&\quad\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell),O\right]j_\ell^{\dagger\,(k)}j_\ell^{(k)}\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)+\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)j_\ell^{\dagger\,(k)}j_\ell^{(k)}\left[O,\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right]\right).\end{aligned}\tag{A.3}$$

我们先考虑右侧的第一项，记作 D_1。由于 O的局域性，我们可以将求和截断为 k_{min} 和 k_{max}，它们定义了 O的支撑。也就是说，

$$D_1=\frac{1}{2}\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left(\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\left[j_\ell^{\dagger\,(k)},O\right]j_\ell^{(k)}\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)+\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)j_\ell^{\dagger\,(k)}\left[O,j_\ell^{(k)}\right]\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right).$$

现在，我们定义以下算符

$$\tilde{O}_1=\frac{1}{2}\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[j_\ell^{\dagger\,(k)},O\right]j_\ell^{(k)},\qquad\tilde{O}_2=\frac{1}{2}\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}j_\ell^{\dagger\,(k)}\left[O,j_\ell^{(k)}\right]$$

这些算符是局域的，具有与 O相同的支撑，并且满足 $\|\tilde{O}_{1/2}\|\le N_O\|O\|\|j_\ell\|^2$。利用这些算符，我们可以写出

$$\begin{aligned}D_1&=\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\tilde{O}_1\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)+\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\tilde{O}_2\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)=\\&=\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell)\left(\tilde{O}_1+\tilde{O}_2\right)+\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\left(\left[\tilde{O}_1,\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right]+\left[\tilde{O}_2,\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right]\right).\end{aligned}\tag{A.4}$$

现在，需要注意的是 $\tilde{O}_1+\tilde{O}_2=\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[O]$，因此

$$D_1=\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell)\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[O]+\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\left(\left[\tilde{O}_1,\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right]+\left[\tilde{O}_2,\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right]\right).$$

右侧的第一项，记作 D_{11}，已经是我们预期量 $\mathcal{D}_\ell[O]$ 收敛到的项。因此，我们必须证明其余部分，也就是 D_1 中的第二项以及等式（A.3）右侧的第二项，在大 N 极限下趋于零。对于等式（A.4）中的第二项，记作 D_{12}，利用引理 1 中的关系 i)，我们得到

$$\|D_{12}\|=\left\|\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\left(\left[\tilde{O}_1,\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right]+\left[\tilde{O}_2,\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right]\right)\right\|\le 4\gamma(\delta_\ell)\frac{N_O^2}{N}\delta_\ell\gamma'(\delta_\ell)\|O\|\|j_\ell\|^2.$$

因此，我们只剩下式（A.3）中的第二项。该项为

$$\begin{aligned}D_2&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell),O\right]j_\ell^{\dagger\,(k)}j_\ell^{(k)}\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)-\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)j_\ell^{\dagger\,(k)}j_\ell^{(k)}\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell),O\right]\right)=\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell),O\right]\left[j_\ell^{\dagger\,(k)}j_\ell^{(k)},\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right]+\\&+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell),O\right]\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)j_\ell^{\dagger\,(k)}j_\ell^{(k)}-\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)j_\ell^{\dagger\,(k)}j_\ell^{(k)}\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell),O\right]\right).\end{aligned}\tag{A.5}$$

观察上式，我们将 D_2 分成两部分。于是有

$$\begin{aligned} D_{21} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right]\left[j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}, \Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right], \\ D_{22} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right], \Gamma_\ell(\Delta_N^\ell) j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}\right]. \end{aligned} \tag{A.6}$$

利用引理 1，我们有

$$\|D_{21}\| \leq \sum_{k=1}^{N}\frac{2N_O}{N^2}\|O\|\delta_\ell^2[\gamma'(\delta_\ell)]^2\|j_\ell\|^2 \leq \frac{2N_O}{N}\|O\|\delta_\ell^2[\gamma'(\delta_\ell)]^2\|j_\ell\|^2 .$$

接下来我们关注 D_{22}。我们可以将其写为

$$D_{22} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right], \Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right] j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\left[\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right], j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}\right].$$

根据引理 1，上面的第一项（记作 D_{221}）有界于

$$\|D_{221}\| = \left\|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right], \Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\right] j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}\right\| \leq \frac{2N_O^2}{N}\|O\|\delta_\ell^2[\gamma'(\delta_\ell)]^2\|j_\ell\|^2 .$$

对第 二项 D_{22}（记作 D_{222}），我们利用（参见引理 1 的证明 ）

$$\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_\ell^n \sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_N^\ell)^i O^\ell (\Delta_N^\ell)^{n-1-i},$$

with

$$O^\ell = \left[\Delta_N^\ell, O\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}}\left[\sum_{\alpha=1}^{d^2} r_{\ell\alpha} v_\alpha^{(k)}\right].$$

因此，我们有

$$\left[\left[\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell), O\right], j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_\ell^n \sum_{i=0}^{n-1}\left[(\Delta_N^\ell)^i O^\ell (\Delta_N^\ell)^{n-1-i}, j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}\right],$$

因此

$$\begin{aligned} D_{222} = {} & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} c_\ell^n\left(\left[(\Delta_N^\ell)^i, j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}\right] O^\ell (\Delta_N^\ell)^{n-1-i}\right) + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} c_\ell^n\left((\Delta_N^\ell)^i\left[O^\ell, j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}\right](\Delta_N^\ell)^{n-1-i}\right) + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} c_\ell^n\left((\Delta_N^\ell)^i O^\ell\left[(\Delta_N^\ell)^{n-1-i}, j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}\right]\right). \end{aligned} \tag{A.7}$$

我们注意到

$$\|[(\Delta_N^\ell)^n, j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}]\| \leq \frac{2}{N} n \delta_\ell^n \|j_\ell\|^2 \,,$$

并且

$$\|[O^\ell, j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}]\| \leq \frac{4N_O}{N} \delta_\ell \|O\| \|j_\ell\|^2 \,, \qquad \text{if} \quad k \in [k_{min}, k_{max}] \,,$$

或者 $\|[O^\ell, j_\ell^{\dagger\,(k)} j_\ell^{(k)}]\| = 0$ 否则。

深入考察三个项 D'_{222}， D''_{222}， D'''_{222}，即公式（A.7）中出现的三个项，利用上述界可得

$$\begin{aligned} \|D'_{222}\| &\leq \frac{N\gamma(\delta_\ell)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |c_\ell^n| \frac{2}{N} i \delta_\ell^{n-1} \|j_\ell\|^2 \frac{2N_O}{N} \|O\| \delta_\ell \\ &\leq \frac{2N_O\gamma(\delta_\ell)}{N} \|j_\ell\|^2 \|O\| \delta_\ell^2 \sum_{n=0}^{\infty} |c_\ell^n| n^2 \delta_\ell^{n-2} \\ &= \frac{2N_O\gamma(\delta_\ell)}{N} \|j_\ell\|^2 \|O\| \delta_\ell^2 \gamma''(\delta_\ell) \,, \end{aligned} \tag{A.8}$$

以及

$$\begin{aligned} \|D''_{222}\| &\leq \frac{N_O\gamma(\delta_\ell)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |c_\ell^n| \delta_\ell^{n-1} (n-1) \frac{4N_O}{N} \delta_\ell \|O\| \|j_\ell\|^2 \\ &\leq \frac{2N_O^2\gamma(\delta_\ell)}{N} \|j_\ell\|^2 \delta_\ell \|O\| \gamma'(\delta_\ell) \,, \end{aligned} \tag{A.9}$$

and

$$\|D'''_{222}\| \leq \frac{2N_O\gamma(\delta_\ell)}{N} \|j_\ell\|^2 \delta_\ell^2 \|O\| \gamma''(\delta_\ell) \,, \tag{A.10}$$

正如对 D'_{222}所做的那样。

有了所有这些界，我们现在可以证明引理的第一部分。我们有

$$\mathcal{D}_\ell[O] = D_{11} + D_{12} + D_{21} + D_{221} + D'_{222} + D''_{222} + D'''_{222} \,,$$

由此可得

$$\|\mathcal{D}_\ell[O] - D_{11}\| \leq \frac{C_O}{N} \,,$$

其中， C_O 是通过合并上述所有界得到的一个与 N 无关的常数，其表达式为

$$C_O = 2N_O \|O\| \|j_\ell\|^2 \left\{ \delta_\ell \gamma'(\delta_\ell) [\delta_\ell \gamma'(\delta_\ell)(1 + N_O) + 3N_O \gamma(\delta_\ell)] + 2\gamma(\delta_\ell) \delta_\ell^2 \gamma''(\delta_\ell) \right\} .$$

现在，考虑到

$$\mathcal{D}_\ell[X_N] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathcal{D}_\ell[x^{(k)}] \,,$$

我们发现

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\mathcal{D}_\ell[x^{(k)}] - \mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[x^{(k)}] \right) \right\| \leq \left\| \mathcal{D}_\ell[x^{(k)}] - \mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[x^{(k)}] \right\| \leq \frac{C_{x^{(k)}}}{N} ,$$

其中 $C_{x^{(k)}}$ 是一个与 N无关的常数，其取值为

$$C_{x^{(k)}} = 2\|x\|\|j_\ell\|^2 \left\{ [2\delta_\ell \gamma'(\delta_\ell) + 3\gamma(\delta_\ell)]\delta_\ell \gamma'(\delta_\ell) + 2\gamma(\delta_\ell)\delta_\ell^2 \gamma''(\delta_\ell) \right\} .$$

□

附录 *A.3.* 引理 *3* 的证明

引理 3. 给定由方程 *(9)-(12)* 指定的生成元 $\mathcal{L}_N$ ，其函数 $\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell)$满足假设 *1*，则有

$$\|\mathcal{L}_N[m_\alpha^N] - f_\alpha(\vec{m}^N)\| \leq \frac{C_L}{N} ,$$

其中

$$f_\alpha(\vec{m}^N) = i \sum_{\beta=1}^{d^2} A_{\alpha\beta} m_\beta^N + i \sum_{\beta,\gamma=1}^{d^2} B_{\alpha\beta\gamma} m_\beta^N m_\gamma^N + \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{\beta=1}^{d^2} M_{\ell\alpha}^\beta \Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) m_\beta^N$$
$$A_{\alpha\beta} = \sum_{\beta'} \epsilon_{\beta'} a_{\beta'\alpha}^\beta \quad B_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\beta'} a_{\beta'\alpha}^\gamma (h_{\beta\beta'} + h_{\beta'\beta});$$

M 是一个实矩阵，使得 $\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[\cdot]$ 作用于单点算符基 $v_\alpha^{(k)}$中的元素时满足

$$\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[v_\alpha^{(k)}] = \sum_{\beta=1}^{d^2} M_{\ell\alpha}^\beta v_\beta^{(k)} ,$$

并且 C_L 是一个与 N 无关的常数。

证明。 这个引理的证明只需计算林德布拉德生成元对 m_α^N 的作用，

$$\mathcal{L}_N[m_\alpha^N] = i[H, m_\alpha^N] + \sum_{\ell=1}^{q} \mathcal{D}_\ell[m_\alpha^N] .$$

单粒子哈密顿量贡献为

$$\begin{aligned} L_1 &= i \sum_{\beta'} \epsilon_{\beta'} \sum_k [v_{\beta'}^{(k)}, m_\alpha^N] = i \sum_{\beta'} \epsilon_{\beta'} \sum_k [v_{\beta'}^{(k)}, \frac{1}{N} \sum_{k'} v_\alpha^{(k')}] \\ &= i \sum_{\beta',\beta} \epsilon_{\beta'} a_{\beta'\alpha}^\beta \frac{1}{N} \sum_k v_\beta^{(k)} \\ &= i \sum_{\beta',\beta} \epsilon_{\beta'} a_{\beta'\alpha}^\beta m_\beta^N = i \sum_{\beta=1}^{d^2} A_{\alpha\beta} m_\beta^N . \end{aligned} \tag{A.11}$$

而全连接双粒子相互作用的贡献为

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{N}\sum_{k,l}\sum_{\beta,\beta'} h_{\beta\beta'}[v_\beta^{(k)} v_{\beta'}^{(l)}, \frac{1}{N}\sum_i v_\alpha^{(i)}] \\ &= \sum_\gamma \sum_{\beta,\beta'} h_{\beta\beta'}(a^\gamma_{\beta'\alpha} m_\beta^N m_\gamma^N + a^\gamma_{\beta\alpha} m_\gamma^N m_{\beta'}^N) \\ &= \sum_{\gamma,\beta} B_{\alpha\beta\gamma} m_\beta^N m_\gamma^N + \sum_\gamma \sum_{\beta,\beta'} h_{\beta'\beta} a^\gamma_{\beta'\alpha}[m_\gamma^N, m_\beta^N]. \end{aligned}$$

我们可以看到，第二行的最后一项（记作 L_{22}，）在热力学极限下范数趋于零。事实上，它是 $[m_\gamma^N, m_\beta^N] = \frac{1}{N^2}\sum_k [v_\gamma^{(k)}, v_\beta^{(k)}] = \frac{1}{N}\sum_\eta a^\eta_{\gamma\beta} m_\eta^N$，因此 —

$$\|L_{22}\| \le \frac{1}{N} d^8 h_{\max} a_{max}^2 \,, \tag{A.12}$$

其中 $h_{\max} = \max_{\beta,\ \beta'} h_{\beta,\ \beta'}$，且 $a_{\max} = \max_{\alpha,\ \beta,\ \gamma} a^\gamma_{\alpha\beta}$。至于耗散项，记作 $L_3 = \sum_{\ell=1}^q \mathcal{D}_\ell[m_\alpha^N]$，根据引理 2，有

$$\|L_3 - \sum_{\ell=1}^q \Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell)\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[m_\alpha^N]\| \le q\frac{C_v}{N} \,,$$

其中 $C_v = \max_{\forall \ell}\{2\|j_\ell\|^2[2\delta_\ell\gamma'(\delta_\ell) + 3\gamma(\delta_\ell)]\delta_\ell\gamma'(\delta_\ell) + 2\gamma(\delta_\ell)\delta_\ell^2\gamma''(\delta_\ell)\}$。考虑这三个贡献 $L_{1,\ 2,\ 3}$，有

$$\|L_1 + L_2 + L_3 - f_\alpha(\vec{m}^N)\| \le \frac{1}{N}(d^8 h_{\max} a_{\max}^2 + qC_v) \,, \tag{A.13}$$

由此我们得到 $C_L = d^8 h_{\max} a_{\max}^2 + qC_v$。 □

附录 *A.4.* 引理 *4* 的证明

引理 4. 由量子态 ω 定义的方程组 *(21)*，其初始条件为 $m_\alpha(0)$（如方程 *(22)* 所示），在 $t \in [0,\infty)$ 上有唯一解。此外，有

$$|m_\alpha(t)| \le \|v_\alpha\| \le 1 \,, \qquad \forall t \,.$$

证明。 我们将方程 (21) 中出现的微分方程组写成向量形式:

$$\frac{d}{dt}\vec{m} = \vec{f}(\vec{m}) \,,$$

其中 $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots m_{d^2})$ 和 $\vec{f}(\vec{m}) = (f_1(\vec{m})\ f_2(\vec{m})\ \dots f_{d^2}(\vec{m}))$。上述微分方程的初始条件由 $\vec{m}(0)$ 给出，它是作为极限得到的

$$m_\alpha(0) = \lim_{N\to\infty} \omega(m_\alpha^N) \,.$$

初始条件来自一个定义良好的量子态 ω这一事实意味着，对于所有 $\alpha = 1, 2, \dots d^2$，都有 $|m_\alpha(0)| \le 1$。

函数 $f_\alpha(\vec{m})$ 由多项式项和函数 Γ_α 构成；根据假设，这些函数$\vec{}$是连续且可微的。因此， f 在整个 $\mathbb{R}^{d^2}$上连续且可微，即 $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^{d^2})$。由基本存在唯一性定理可知，微分方程组在（右侧）最大存在区间 $t \in [0, T)$ 内有唯一的解 $\vec{m}(t)$，其中$T > 0$。

为了证明对于上述方程组 $T = \infty$，我们需要证明 $\vec{m}(t)$ 包含在某个紧集 $K \subset \mathbb{R}^{d^2}$ 中。事实上，只要 $\vec{m}(t)$ 属于某个紧集（即只要它有界），就可以得出结论：$T = +\infty$。这就是如下命题的逆否命题：只要 $T < \infty$，就必定存在某个时刻 $t \in (0, T)$，使得微分方程 $\vec{m} \notin K$的解（其中 K 为 $\mathbb{R}^{d^2}$ 中的任意紧集）满足这一条件（例如，参见参考文献 [59] 第 2 章中的定理 3）。简言之，我们需要证明所有的 $m_\alpha(t)$ 都保持有界。

为此，我们将比较变量 m_α 的时间演化与通过有效动力学得到的算符 v_α 平均值的时间演化。因此，考虑辅助动力学生成元（另见正文中的定理 2）

$$\tilde{\mathcal{L}}_t[\cdot] = i\left[\tilde{H}, \cdot\right] + \sum_\ell \Gamma_\ell^2(\Delta^\ell(t))\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}[\cdot]\,, \tag{A.14}$$

其中， $\mathcal{D}_\ell^{\mathrm{Loc}}$是式 (16) 中引入的耗散子， $\Delta_\ell(t)$ 是平均场变量的线性组合

$$\Delta_\ell(t) = \sum_\beta r_{\ell\beta} m_\beta(t)\,,$$

and

$$\tilde{H} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{d^2} \epsilon_\alpha v_\alpha^{(k)} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha,\beta=1}^{d^2} h_{\alpha\beta}\left(m_\alpha(t)v_\beta^{(k)} + m_\beta(t)v_\alpha^{(k)}\right)\,.$$

由于函数 $m_\alpha(t)$ 在区间 $[0, T)$ 上定义良好，上述生成元在该区间内也定义良好。上述生成元分别作用于不同的单粒子，并实现置换不变动力学。现在，我们计算格点 k 处单粒子可观测量 $v_\alpha^{(k)}$ 的海森堡运动方程。我们发现

$$\frac{d}{dt}v_\mu^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{d^2} G_{\mu\nu} v_\nu^{(k)}\,,$$

其中我们有

$$G_{\mu\nu} = i\sum_{\alpha=1}^{d^2}\epsilon_\alpha a_{\alpha\mu}^\nu + i\sum_{\alpha,\beta=1}^{d^2}(h_{\alpha\beta}m_\alpha a_{\beta\mu}^\nu + h_{\alpha\beta}m_\beta a_{\alpha\mu}^\nu) + \sum_{\ell=1}^{q}\Gamma_\ell^2(\Delta_\ell)M_{\ell\mu}^\nu\,.$$

为简洁起见，我们在上述方程中省略了所有算符和平均场变量的时间依赖性。对算符 v_μ 取期望值

并采用平移不变量子态 ω，可得以下微分方程组

$$\frac{d}{dt}\omega(v_\mu) = \sum_{\nu=1}^{d^2} G_{\mu\nu}\omega(v_\nu)\,,$$

并且我们选取初始态，使得 $\omega(v_\mu)(0) = m_\mu(0)$。考察函数 f_μ 的结构可知，平均场方程实际上可以改写为

$$\frac{d}{dt}m_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2} G_{\mu\nu}m_\nu\,.$$

因此，我们引入函数 $y_\mu = \omega(v_\mu) - m_\mu$，并得到以下微分方程组

$$\frac{d}{dt}y_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2} G_{\mu\nu}y_\nu\,.$$

这是一个具有时变系数的一阶线性微分方程组，因此，由构造可知 $y_\mu(0) = 0\ \forall\mu$，我们有 $y(t) \equiv 0$。由此可得 $m_\mu(t) = \omega(v_\mu)(t)$。接着注意到 $\omega(v_\mu)(t) = \omega(v_\mu(t))$，并且由于算子动力学 $v_\mu(t)$由时变压缩映射实现，我们有 $\|v_\mu(t)\| \le \|v_\mu\| = 1$，进而推出

$$|m_\mu(t)| = |\omega(v_\mu)(t)| \le 1\,.$$

□

附录 *A.5.* 引理 *5* 的证明

引理 5. 算子值速率的平方收敛至其平均场标量函数所计算出的相同速率，这一收敛性由平均场算子收敛至平均场标量函数所支配，即有

$$\begin{aligned}&|\omega\left(A^\dagger e^{t\mathcal{L}_N}\left[(\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t)))X\right]B\right)| \\ &\le C\|X\|\sum_{\alpha=1}^{d^2}|r_{\ell\alpha}|\sqrt{\omega(A^\dagger e^{t\mathcal{L}_N}[(m_\alpha^N - m_\alpha(t))^2]A)}\sqrt{\omega(B^\dagger B)}\,,\end{aligned}$$

其中 $C = 2\gamma\left(\delta_\ell\right)\gamma'\left(\delta_\ell\right)$。

证明。 我们先考虑生成元作用中的差值。可得

$$\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t)) = [\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell(\Delta_\ell(t))][\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell) + \Gamma_\ell(\Delta_\ell(t))]\,.$$

Ex利用函数 Γ_ℓ 的幂级数展开，我们可以改写为

$$\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell(\Delta_\ell(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_\ell^n\left[(\Delta_N^\ell)^n - \Delta_\ell^n(t)\right]$$

$$= (\Delta_N^\ell - \Delta_\ell(t)) \sum_{n=0}^{\infty} c_\ell^n \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_N^\ell)^{n-j-1} \Delta_\ell^j(t)\,.$$

展开 Δ_N^ℓ 和 $\Delta_\ell(t)$ 的定义后，最终得到

$$\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell(\Delta_\ell(t)) = \sum_\alpha r_{\ell\alpha}(m_\alpha^N - m_\alpha(t)) \sum_{n=0}^{\infty} c_\ell^n \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_N^\ell)^{n-j-1} \Delta_\ell^j(t)\,.$$

综合以上结果，我们得到

$$\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t)) = \sum_\alpha r_{\ell\alpha}(m_\alpha^N - m_\alpha(t)) Q_\ell\,,$$

其中

$$Q_\ell = [\Gamma_\ell(\Delta_N^\ell) + \Gamma_\ell(\Delta_\ell(t))] \sum_{n=0}^{\infty} c_\ell^n \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_N^\ell)^{n-j-1} \Delta_\ell^j(t)\,.$$

因此可以写成

$$\begin{aligned} I &= \omega\left(A^\dagger e^{t\mathcal{L}_N}\left[(\Gamma_\ell^2(\Delta_N^\ell) - \Gamma_\ell^2(\Delta_\ell(t)))X\right]B\right) \\ &= \sum_\alpha r_{\ell\alpha}\,\omega\left(A^\dagger e^{t\mathcal{L}_N}\left[(m_\alpha^N - m_\alpha(t))Q_\ell X\right]B\right)\,, \end{aligned}$$

并利用引理 6 中的广义柯西–施瓦茨不等式，以及对 $\|X\|$ 和 $\|Q_\ell\|$ 取范数界，我们得到

$$|I| \le \|X\|\|Q_\ell\| \sum_\alpha |r_{\ell\alpha}| \sqrt{\omega\left(A^\dagger e^{t\mathcal{L}_N}\left[(m_\alpha^N - m_\alpha(t))^2\right]A\right)}\sqrt{\omega(B^\dagger B)}\,.$$

最后，我们注意到

$$\|Q_\ell\| \le 2\gamma(\delta_\ell)\gamma'(\delta_\ell)\,,$$

其中

$$\gamma'(\delta_\ell) = \sum_{n=0}^{\infty} n|c_\ell^n|\delta_\ell^{n-1}\,.$$

注意，这里我们使用 δ_ℓ，因为 $\|\Delta_N^\ell\|$ 以及根据引理 4，$|\Delta_\ell(t)|$ 也都小于或等于 δ_ℓ。显然，$\gamma(\delta_\ell)$ 和 $\gamma'(\delta_\ell)$ 都是有限的。 □

附录 *A.6.* 引理 *6*

引理 6. 给定准局域代数$\mathcal{A}$上的任意完全正且保单位映射 $\Lambda[\cdot]$ 以及一个态 ω，我们有

$$|\omega\left(A^\dagger\Lambda[C^\dagger D]B\right)| \le \sqrt{\omega(A^\dagger\Lambda[C^\dagger C]A)}\sqrt{\omega\left(B^\dagger\Lambda[D^\dagger D]B\right)}$$

证明。上述引理的证明（另见参考文献 [27] 中的证明）利用了斯廷斯普林扩张定理。该定理指出，对于任意完全正映射，

存在一个作用于扩展代数 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ 上的幺正算符 U，以及一个仅作用于代数 $\mathcal{B}$ 上的态 τ，使得

$$\Lambda[C]=\tau\left(U^{\dagger}C\otimes\mathbf{1}U\right)\,. \tag{A.15}$$

考虑到这一点，我们可以写成

$$\omega\left(A^{\dagger}\Lambda[C^{\dagger}D]B\right)=\omega\otimes\tau\left(A^{\dagger}\otimes\mathbf{1}[U^{\dagger}(C^{\dagger}\otimes\mathbf{1})(D\otimes\mathbf{1})U]B\otimes\mathbf{1}\right)\,,$$

并且利用柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}|\omega\left(A^{\dagger}\Lambda[C^{\dagger}D]B\right)|\leq&\sqrt{\omega\otimes\tau\left(A^{\dagger}\otimes\mathbf{1}[U^{\dagger}(C^{\dagger}C\otimes\mathbf{1})U]A\otimes\mathbf{1}\right)}\times\\&\sqrt{\omega\otimes\tau\left(B^{\dagger}\otimes\mathbf{1}[U^{\dagger}(D^{\dagger}D\otimes\mathbf{1})U]B\otimes\mathbf{1}\right)}.\end{aligned} \tag{A.16}$$

最后，回忆公式（A.15）中的关系，我们可以回到映射 Λ，得到

$$|\omega\left(A^{\dagger}\Lambda[C^{\dagger}D]B\right)|\leq\sqrt{\omega\left(A^{\dagger}\Lambda[C^{\dagger}C]A\right)}\sqrt{\omega\left(B^{\dagger}\Lambda[D^{\dagger}D]B\right)}\,,$$

由此完成证明。 □

[1] H. P. Breuer 和 F. Petruccione。《开放量子系统理论》。牛津大学出版社，大克拉伦登街，2002年。[2] G. Lindblad。量子动力半群生成元论。《数学物理通讯》，48:119–130，1976年。[3] S. Diehl、A. Micheli、A. Kantian、B. Kraus、H. P. B¨uchler 和 P. Zoller。冷原子驱动开放量子系统中的量子态与相。《自然·物理》，4:878–883，2008年。[4] S. Diehl、A. Tomadin、A. Micheli、R. Fazio 和 P. Zoller。开放原子多体系统中的动力学相变与不稳定性。《物理评论快报》，105:015702，2010年。[5] E. G. Dalla Torre、E. Demler、T. Giamarchi 和 E. Altman。非平衡噪声存在下的量子临界态与相变。《自然·物理》，6:806–810，2010年。[6] P. Schindler、M. M¨uller、D. Nigg、J. T. Barreiro、E. A. Martinez、M. Hennrich、T. Monz、S. Diehl、P. Zoller 和 R. Blatt。利用囚禁离子对动力学映射进行量子模拟。《自然·物理》，9:361–367，2013年。[7] U. C. T¨auber 和 S. Diehl。驱动耗散玻色-爱因斯坦临界性的微扰场论重整化群方法。《物理评论*X*》，4:021010，2014年。[8] M. Marcuzzi、M. Buchhold、S. Diehl 和 I. Lesanovsky。量子与经典涨落竞争下的吸收态相变。《物理评论快报》，116:245701，2016年。[9] F. Minganti、A. Biella、N. Bartolo 和 C. Ciuti。耗散相变中刘维尔算符的谱理论。《物理评论*A*》，98:042118，2018年。[10] F. Iemini、A. Russomanno、J. Keeling、M. Schir`o、M. Dalmonte 和 R. Fazio。边界时间晶体。《物理评论快报》，121:035301，2018年。[11] F. Carollo、E. Gillman、H. Weimer 和 I. Lesanovsky。一维量子接触过程的临界行为。《物理评论快报》，123:100604，2019年。[12]E. Chertkov、Z. Cheng、A. C. Potter、S. Gopalakrishnan、T. M. Gatterman、J. A. Gerber、K. Gilmore、D. Gresh、A. Hall、A. Hankin、M. Matheny、T. Mengle、D. Hayes、B. Neyenhuis、R. Stutz 和 M. Foss-Feig。在量子计算机上表征非平衡相变。*arXiv:2209.12889*，2022年。[13] L. M. Sieberer、S. D. Huber、E. Altman 和 S. Diehl。驱动耗散系统中的动力学临界现象。《物理评论快报》，110:195301，2013年。[14] S. Helmrich、A. Arias、G. Lochead、T. M. Wintermantel、M. Buchhold、S. Diehl 和 S. Whitlock。超冷原子气体中自组织临界性的迹象。《自然》，577:481–486，2020年。

[15] M. Jo、J. Lee、K. Choi 和 B. Kahng。量子接触过程中指数连续变化的吸收相变：一种神经网络方法。《物理评论研究》，3:013238，2021年。[16] M. Jo 和 M. Kim。利用数字量子模拟中的优化电路模拟开放量子多体系统。arXiv:2203.14295，2022年。[17] H. Hinrichsen。非平衡临界现象与进入吸收态的相变。《Adv. Phys.》，49:815–958，2000年。[18] H. Weimer、A. Kshetrimayum 和 R. Or´us。开放量子多体系统的模拟方法。《Rev. Mod. Phys.》，93:015008，2021年。[19] N. Benedikter、M. Porta 和 B. Schlein。量子动力学导出的有效演化方程。《施普林格数学物理简明丛书》。施普林格国际出版公司，2015年。[20] M. Merkli 和 A. Rafiyi。若干开放量子系统的平均场动力学。《Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.》，474:20170856，2018年。[21] M. Porta。相互作用费米子系统的平均场动力学。《量子物理中的数学问题》，717:13，2016年。[22] P. Pickl。量子系统平均场极限的简单推导。《Lett. Math. Phys.》，97:151–164，2011年。[23] K. Hepp 和 E. H. Lieb。量子化辐射场中分子的超辐射相变：迪克腔微波激射器模型。《Ann. Phys.》，76:360–404，1973年。[24] F. T. Hioe。若干广义迪克超辐射模型中的相变。《物理评论A》，8:1440–1445，1973年。[25] R. Alicki 和 J. Messer。多体开放系统的非线性量子动力半群。《J. Stat. Phys.》，32:299–312，1983年。[26] F. Benatti、F. Carollo、R. Floreanini 和 H. Narnhofer。开放量子自旋链的非马尔可夫介观耗散动力学。《Phys. Lett. A》，380:381–389，2016年。[27] F. Benatti、F. Carollo、R. Floreanini 和 H. Narnhofer。量子自旋链耗散平均场动力学。《J. Phys. A: Math. Theor.》，51:325001，2018年。[28] E. B. Davies。无限原子迪克腔微波激射器模型的精确动力学。《数学物理通讯》，33:187–205，1973年。[29] T. Mori。光学腔系统中平均场动力学的精确性。《J. Stat. Mech. Theory Exp.》，2013:P06005，2013年。[30] F. Carollo 和 I. Lesanovsky。开放迪克模型平均场方程的精确性及其在模式检索动力学中的应用。《物理评论快报》，126:230601，2021年。[31] P. Kirton 和 J. Keeling。通过退相干和衰减抑制并恢复迪克超辐射相变。《物理评论快报》，118:123602，2017年。[32] N. Shammah、S. Ahmed、N. Lambert、S. De Liberato 和 F. Nori。具有局域与集体非相干过程的开放量子系统：利用置换不变性进行高效数值模拟。《物理评论A》，98:063815，2018年。[33] D. Huybrechts、F. Minganti、F. Nori、M. Wouters 和 N. Shammah。耗散临界系统中平均场理论的有效性：李乌维尔能隙、 $\mathbb{PT}$对称反能隙以及XYZ模型中的置换对称性。《Phys. Rev. B》，101:214302，2020年。[34] P. Wang 和 R. Fazio。具有 p自旋相互作用的全连接伊辛模型中的耗散相变。《物理评论A》，103:013306，2021年。[35] G. Piccitto、M. Wauters、F. Nori 和 N. Shammah。广义自旋模型中边界时间晶体的对称性与守恒量。《Phys. Rev. B》，104:014307，2021年。[36] J. J. Hopfield。具有涌现集体计算能力的神经网络与物理系统。《PNAS》，79:2554–2558，1982年。[37]V. Gayrard。具有无限多个模式的q态波茨–霍普菲尔德模型的热力学极限。《J. Stat. Phys.》，68:977–1011，1992年。[38] B. P. Marsh、Y. Guo、R. M. Kroeze、S. Gopalakrishnan、S. Ganguli、J. Keeling 和 B. L. Lev。利用共焦腔量子电动力学提升联想记忆的回忆能力与存储容量。《Phys.

《物理评论X》，11:021048，2021年。[39]P. Rotondo、M. Marcuzzi、J. P. Garrahan、I. Lesanovsky 和 M. M¨uller。《霍普菲尔德神经网络的开放量子推广》。《J. Phys. A: Math. Theor.》，51:115301，2018年。[40] E. Fiorelli、P. Rotondo、M. Marcuzzi、J. P. Garrahan 和 I. Lesanovsky。《经典全连接自旋系统热态的量子加速方法及其在霍普菲尔德神经网络模式检索中的应用》。《物理评论A》，99:032126，2019年。[41] E. Fiorelli、I. Lesanovsky 和 M. M¨uller。《量子广义Potts-Hopfield神经网络的相图》。《New J. Phys.》，24:033012，2022年。[42] R. J. Glauber。《伊辛模型的时变统计》。《J. Math. Phys.》，4:294–307，1963年。[43] J.-C. Walter 和 G.T. Barkema。《蒙特卡罗方法导论》。《 Phys. A: Stat. Mech. Appl. 》，418:78–87，2015 年。发表于第13届统计物理学基本问题国际暑期学校论文集。[44] G. H. Fredrickson 和 H. C. Andersen。《玻璃化转变的动力学伊辛模型》。《物理评论快报》，53:1244–1247，1984年。[45] N. Cancrini、F. Martinelli、C. Roberto 和 C. Toninelli。《动力学约束自旋模型》。《Probab. Theory. Relat. Fields.》，140:459–504，2008年。[46] J. P Garrahan、P. Sollich 和 C. Toninelli。《动力学约束模型》。载于《玻璃、胶体与颗粒介质中的动力学异质性》，编者：L. Berthier、G. Biroli、J.-P. Bouchaud、L. Cipelletti 和 W. van Saarloos（牛津大学出版社，2011年），150:111–137，2011年。[47] J. P. Garrahan。《经典与量子系统中的非平衡问题：慢弛豫与玻璃、动力学大偏差、量子非遍历性及开放量子动力学》。《Physica A: Statistical Mechanics and its Applications》，504:130–154，2018年。第14届统计物理学基本问题国际暑期学校讲义。[48] F. Carollo、J. P. Garrahan 和 R. L. Jack。《马尔可夫开放量子系统在2.5级的大偏差：量子跳跃与量子态扩散》。《J. Stat. Phys.》，184，2021年。[49]O. Bratteli 和 D. W. Robinson。《算子代数与量子统计力学II：量子统计力学中的平衡态模型》。《Springer Berlin, Heidelberg》，1981年。[50] A. F. Verbeure。《多体玻色子系统：半个世纪之后》。《Springer London》，2011年。[51] O. E. Lanford III 和 D. Ruelle。《无穷远处的可观测量与统计力学中具有短程关联的态》。《数学物理通讯》，13:194–215，1969年。[52] F. Strocchi。《对称性破缺》。《Springer Berlin, Heidelberg》，2021年。[53] W. Thirring。《量子数学物理：原子、分子与大系统》。《Springer Science & Business Media》，2013年。[54] G. Grimmett 和 D. Stirzaker。《概率与随机过程》。《牛津大学出版社》，2020年。[55] Daniel J. Amit。《脑功能建模：吸引子神经网络的世界》。《Cambridge University Press》，美国，第1版，1992年。[56] Daniel J. Amit、H. Gutfreund 和 H. Sompolinsky。《神经网络的自旋玻璃模型》。《物理评论A》，32:1007–1018，1985年。[57]P. Rotondo、M. Marcuzzi、J. P. Garrahan、I. Lesanovsky 和 M. M¨uller。《霍普菲尔德神经网络的开放量子推广》。《J. Phys. A: Math. Theor.》，51:115301，2018年。[58] L. A. Williamson、M. O. Borgh 和 J. Ruostekoski。《原子阵列中集体非经典光发射与偶极阻塞的超原子图像》。《物理评论快报》，125:073602，2020年。[59] L. Perko。《微分方程与动力系统》。《Springer Science & Business Media》，2013年。