arXiv:2302.04159v1 [math.MG] 8 Feb 2023

# 双曲多边形的离散四顶点定理

KyleGrant Wiktor Mogilski*

2023年2月9日

**摘要**

文献中出现了许多四顶点型定理，既有光滑形式，也有离散形式。其中最为人熟知的是微分几何中的经典定理，它指出，平面上一条简单光滑闭曲线的曲率函数至少有四个极值。O. Musin 将这一结果自然地离散化到欧几里得多边形上。本文借鉴 Musin 的方法，证明了凸双曲多边形的离散四顶点定理。

*Keywords*：四顶点定理，离散曲率，双曲多边形，渐屈线

## 1 引言

微分几何中的经典四顶点定理指出，平面上一条光滑简单闭曲线的曲率函数至少有四个极值（曲线上这些极值点称为顶点）。S. Mukhopadhayaya 首先于 1909 [5], 证明了该定理，但只证明了凸情形。1912年，A. Kneser [3] 运用射影论证证明了一般情形。此后，陆续发表了多个彼此独立的定理证明。十年后，即1922年，A. Kneser 的儿子 H. Kneser 给出了自己的独立直接证明；G. Herglotz 于1930年用反证法证明了凸情形；S.B. Jackson 则于1944年通过对只有两个顶点的所有曲线进行分类，证明了该定理。1985年，R. Osserman [8] 给出了一个简单得多的证明。Osserman 的证明利用曲线的外接圆，并通过计算圆与曲线的交点个数来推导顶点的数量。

读者或许会想知道上述定理在其他二维几何中的变体。D. Singer 通过推导 Ghys 的一个定理，给出了双曲平面中简单闭凸曲线的四顶点定理的证明

*数学科学系，犹他谷大学，犹他州奥勒姆

。1945年，P. Scherk 观察到，可以利用立体投影将有关平面曲线顶点的问题转化为有关球面上曲线的问题，从而确立了球面几何中的四顶点定理。

有趣的是，离散四顶点定理出现的时间，比任何光滑情形的研究都早了约一个世纪。1813年，A. Cauchy [1]证明，两个对应边长度相同的凸多边形，其对应角要么相等，要么对应角之间的角度差至少发生四次符号变化。遗憾的是，约一百年后，E. Steinitz发现 Cauchy 的证明存在错误，并于1934年发表了正确版本（如今称为 Cauchy-Steinitz引理）。大约在同一时期，还发表了其他几个离散四顶点定理。R.C. Bose于1932年发表了一个版本，该版本由涉及多边形空圆数量和满圆数量的方程推出。A.D. Aleksandrov于1950年证明了一个与 Cauchy-Steinitz引理类似的版本，但改为考察边上的符号变化；随后，S. Bilinski于1963年证明了另一个版本，重点考察单个凸多边形中角度差的符号变化。

尽管光滑四顶点型定理本身就很有趣，但其离散对应定理有几个优点。例如，它们比光滑版本更强，通过取极限即可推出光滑版本。再如，离散定理通常也更容易表述，而且通常可以用简单得多的组合论论证（例如归纳法）来证明。

我们尤其感兴趣的是 O. Musin 在 [6]中引入的一种离散曲率概念和一个四顶点定理。给定平面上的一个凸多边形（满足一些额外的温和条件，稍后会定义），其顶点为 $V_1$、$V_2$.....$V_n$，令 $R_i$ 表示经过相邻顶点 $V_{i-1}V_iV_{i+1}$的圆的半径。若一个顶点 $V_i$ 满足$R_{i-1} > R_i < R_{i+1}$ 或 $R_{i-1} < R_i > R_{i+1}$，则称其为极值顶点。Musin 通过反证法证明，至少有四个顶点的凸多边形至少有四个极值顶点。请注意，这种离散曲率概念与平面上的标准曲率概念相容。考虑光滑曲线上任意一点处的密切圆即可看出这一点，该圆的半径等于曲率的倒数。因此，Musin 的定理是对经典光滑四顶点定理的一种离散化。

在 [7], Musin 将这一离散曲率概念推广，使其适用于非凸多边形。随后，他引入了一种与多边形相关的新多边形曲线，称为离散渐屈线。它是光滑曲线的渐屈线的离散化；渐屈线是一条由原曲线的密切圆圆心构成的新曲线。事实证明，离散渐屈线可用于检测极值顶点。Musin 利用这一性质，得到一个等式，将多边形及其渐屈线的离散转数与极值顶点的数量联系起来。四顶点定理由此等式直接推出。

本文将 Musin 的顶点极值性概念引入双曲平面的背景中。随后，我们改进了他的研究方案，并证明了一个等式

该等式将我们所称的离散双曲密切圆的密度与极值顶点的数量联系起来（定理 5 ）。由此，我们得出凸双曲多边形的四顶点定理（定理 6 ）。这是双曲曲线的光滑四顶点定理的离散版本，其曲率处处大于 1。

## 2 离散曲率与顶点极值性

本文将把研究范围限定在双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 中。我们首先介绍一些定义和记号。用 $P$ 表示 $\mathbb{H}^2$ 中的一条多边形曲线，它就是一条具有非理想顶点 $V_1$，$V_2$.....、$V_n$ 的曲线，其中每一对相邻顶点都由一条测地线段连接，并且相邻的双曲线段仅在点 $V_i$ 处相交。若多边形曲线 $P$ 满足 $V_1 = V_n$，则称其为闭多边形曲线；如果 $P$ 没有自交，则称其为简单多边形曲线。为简便起见，我们将简单的闭多边形曲线称为多边形。

在双曲几何中，可能存在三个不位于同一条测地线上、且不被任何双曲圆所包围的点。例如，这些点可能位于另一种具有常曲率的曲线上，如极限圆或等距曲线。为确保双曲渐屈线（定义见第 3 节）在上述意义下是一条多边形曲线，我们将对多边形曲线 $P$ 施加以下条件。对于光滑曲线而言，相应的条件是曲率处处大于 1；在双曲几何中，这并不是一个不寻常的假设。

**定义**。 如果多边形曲线 $P$ 中没有理想顶点，并且

**(a)** $P$ 上位于同一个双曲圆上的顶点最多有三个。

**(b)** 没有三个顶点位于同一条测地线上。

对于一般位置的多边形曲线 $P$，记 $C_i = C(V_{i-1}V_iV_{i+1})$ 为由相应顶点确定的双曲外接圆，记 $O_i = O(V_{i-1}V_iV_{i+1})$ 为 $C_i$ 的圆心，并记 $R_i$ 为 $C_i$ 的半径。注意，所有指标均按多边形曲线 $P$ 的顶点数取模。

**定义**。 如果对于任意三个连续顶点 $V_{i-1}$、$V_i$ 和 $V_{i+1}$，圆 $C_i$ 的圆心都位于由顶点 $V_{i-1}$、$V_i$ 和 $V_{i+1}$ 形成的无界锥内，则称多边形曲线 $P$ 相容。

下图展示了 $P$ 可能不相容的情形：边 $V_{i-1}V_i$ 和 $V_iV_{i+1}$ 的垂直平分线交于由三个连续顶点形成的无界锥外部。

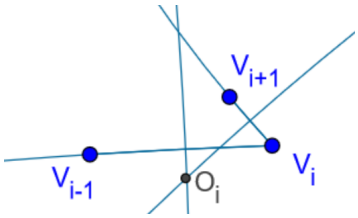


图1： $P$ 不相容

从此以后，我们假设所有多边形曲线都处于一般位置且相容。我们还约定，沿着这类多边形 $P$逆时针遍历，并用 $\angle V_i = \angle V_{i-1}V_iV_{i+1}$表示相对于这一方向的顶点左角。

**定义**。 若顶点 $V_i$ 满足 $\angle V_i$ 不大于 $\pi$，则称其为正顶点。否则，称其为负顶点。若多边形 $P$ 的所有顶点均为正顶点，则称 $P$ 为凸多边形。

遵循 Musin [7], 的做法，我们现在在一般位置且相容的多边形曲线上定义离散曲率的概念。假设顶点 $V_i$ 为正顶点。若顶点 $V_{i+1}$ 为正顶点，且 $V_{i+2}$ 位于圆 $C_i$ 外部；或者顶点$V_{i+1}$ 为负顶点，且 $V_{i+2}$ 位于圆 $C_i$内部，则称顶点 $V_i$ 处的曲率大于 $V_{i+1}$ ($V_i \succ V_{i+1}$)处的曲率。

在上述定义中将“内部”一词替换为“外部”（反之亦然），即可得到 $V_i \prec V_{i+1}$，也就是说， $V_i$ 处的曲率小于 $V_{i+1}$处的曲率。

若顶点 $V_i$ 为负顶点，只需将“较大”一词替换为“较小”，并将“外部”一词替换为“内部”。

下面的命题说明，这确实是曲率的一种合理离散概念。

**命题1**。 设 $P$ 是一个凸多边形。

1. $V_{i-1} \prec V_i$ *if and only if* $R_{i-1} > R_i$.
2. $V_{i-1} \succ V_i$ *if and only if* $R_{i-1} < R_i$.

证明。 由于假设 $P$ 是凸多边形， $V_{i-1}$ 和 $V_i$ 都是正的。我们只证明第一项。假设 $V_{i-1} \prec V_i$ ，从而 $V_{i+1}$ 位于圆 $C_{i-1}$ 的内部。注意，由于 $P$ 是相容的，$O_i$ 与 $O_{i-1}$ 位于 $\overleftrightarrow{V_{i-1}V_i}$ 的同侧。

现在， $O_i$ 位于 $V_{i-1}V_i$ 和 $V_iV_{i+1}$的垂直平分线上。由于 $V_{i+1}$ 位于$C_{i-1}$内部，因此 $O_i$ 位于三角形 $\Delta V_{i-1}O_{i-1}V_i$内部。注意，这是一个边长为 $R_{i-1}$、$R_{i-1}$ 和 $V_{i-1}V_i$的等腰三角形。我们还可以定义 $\Delta V_{i-1}O_iV_i$，它是一个边长为 $R_i$、 $R_i$ 和 $V_{i-1}V_i$的等腰三角形。这两个三角形具有相同的底边（见下图）。

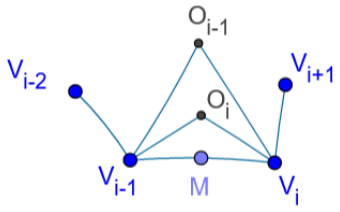


图2： $V_{i-1} \prec V_i$

由于 $O_i$ 位于 $\Delta V_{i-1}O_{i-1}V_i$内部，我们有 $V_{i-1} \prec V_i$ 当且仅当

$$\angle V_{i-1}V_iO_i < \angle V_{i-1}V_iO_{i-1},$$

当且仅当 $\angle O_i > \angle O_{i-1}$时，这种情况才会发生。现在考虑通过在 $V_{i-1}V_i$的中点 $M$ 处放置一个点所产生的直角三角形。于是，根据双曲几何中的正弦定理，

$$\frac{\sin\left(\frac{\angle O_{i-1}}{2}\right)}{\sinh(MV_i)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sinh(R_{i-1})} = \frac{1}{\sinh(R_{i-1})}$$

and

$$\frac{\sin\left(\frac{\angle O_i}{2}\right)}{\sinh(MV_i)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sinh(R_i)} = \frac{1}{\sinh(R_i)}.$$

注意，由于 $\frac{\angle O_{i-1}}{2}$和 $\frac{\angle O_i}{2}$是直角三角形中角的角度，

$$\frac{\angle O_{i-1}}{2} < \frac{\angle O_i}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\sinh(R_{i-1})\sin\left(\frac{\angle O_{i-1}}{2}\right) &= \sinh(R_i)\sin\left(\frac{\angle O_i}{2}\right)\\ &> \sinh(R_i)\sin\left(\frac{\angle O_{i-1}}{2}\right).\end{aligned}$$

上述计算等价于 $\sinh(R_{i-1}) > \sinh(R_i)$，因此$R_{i-1} > R_i$。由此我们证明了：$V_{i-1} \prec V_i$ 当且仅当 $R_{i-1} > R_i$。

□

**定义。** 折线 $P$ 的顶点 $V_i$ 是局部极大的，当且仅当
$V_{i-1} \prec V_i \succ V_{i+1}$ 且当 $V_{i-1} \succ V_i \prec V_{i+1}$ 时为局部极小。

请注意，上述离散曲率的概念将 $P$ 转化为一个有向图，也就是说，每条边上都有一个指示方向的箭头。

**定义**。 如果顶点 $v$ 在有向图 $G$ 上满足以下任一条件，我们就称其为局部极值：所有与 $v$ 相接的边上的箭头都背离 $v$ （即所有边都从 $v$出发），或者所有与 $v$ 相接的边上的箭头都指向 $v$（即所有边都进入 $v$）。

令 $l_+(G)$ 表示 $G$ 的局部极小顶点数量（即所有边都进入 $v$ 的顶点），令 $l_-(G)$ 表示 $G$ 的局部极大顶点数量（即所有边都从 $v$ 射出的顶点）。

假设 $G$ 是平面的。对于顶点 $v \in G$，定义 $v$ 的 指标 为

$$\mathrm{ind}(v) = 1 - G^-(v),$$

其中， $G^-(v)$ 表示从 $v$ 射出的边数。下述命题表明，在上述定义的排序下，$l_+(P) = l_- P$。

**命题 2**。 令 $G$ 为一个圈图。则

$$l_+(G) = l_-(G).$$

证明。 首先注意，如果 $v$ 是局部极小的，则 $\mathrm{ind}(v) = 1$；如果 $v$ 是局部极大的，则 $\mathrm{ind}(v) = -1$。否则，$\mathrm{ind}(v) = 0$。因此，

$$\sum_{v \in G} \mathrm{ind}(v) = l_+(G) - l_-(G).$$

如果我们证明 $\sum_{v \in G} \mathrm{ind}(v) = 0$，则证明即告完成；但这是离散 Poincaré–Hopf 公式 [4][定理 1], 的特例，该定理指出，对于有向图 $G$，有 $\sum_{v \in G} \mathrm{ind}(v) = \chi(G)$（此处 $\chi(G)$ 表示 $G$ 的欧拉示性数）。

□

# 3 多边形的渐屈线

本节将定义一条与给定双曲多边形 $P$ 相关联的新多边形曲线（可能不是简单曲线），称为渐屈线。渐屈线的一个显著特征是，它可用于检测极值顶点的存在。

**定义**。 由圆心 $O_1, O_2, \ldots, O_n$ 构成的闭多边形曲线称为 $P$的渐屈线 $E(P)$ 。

$E(P)$ 按顶点的顺序依次遍历。我们将顶点 $O_i$ 处的左角记为 $\angle O_i = \angle O_{i-1} O_i O_{i+1}$ （见下方图 3 和图 4）。

**定义**。 如果满足以下条件，则称渐屈线的顶点 $O_i$ 为尖点

$$|\angle O_i - \angle V_i| > \pi.$$

**定理 3**。 顶点 $V_i$ 是极值的，当且仅当 $O_i$ 是一个尖点。

证明。 我们只考虑 $P$ 是凸的情形（因此所有顶点都是正的）。其余几种非凸情形也可通过类似的常规检验得出。

假设 $V_i$ 是局部极大点。那么，关于顶点 $V_i$ ，我们有如下构型（见下图）。

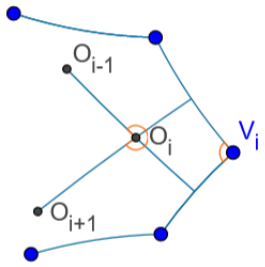


图 3： $V_i$ 局部极大

注意，我们有一个四边形，其角度为 $\frac{\pi}{2}$ 、 $\angle V_i$、 $\frac{\pi}{2}$ 和$2\pi - \angle O_i$。由于该四边形的内角和小于 $2\pi$ ，我们有$\angle V_i - \angle O_i < -\pi$，因此 $O_i$ 是 $P$的一个尖点。

如果 $V_i$ 是局部极小点，那么我们有下图所示的构型。

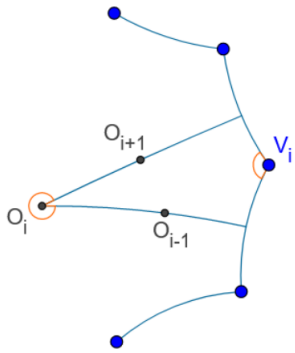


图 4： $V_i$ 局部极小

我们有 $\angle V_i + 2\pi - \angle O_i < \pi$。这再次意味着 $\angle V_i - \angle O_i < -\pi$，因此 $O_i$ 是 $P$的一个尖点。 □

注意， $V_i$ 不是极值的，当且仅当 $|\angle O_i - \angle V_i| < \pi$。此外，若假设 $P$ 是凸的，则计算时可以省去模（见上文的证明和下图）。在下图中，有 $\angle V_i + \pi + \pi - \angle O_i < 2\pi$，因此 $0 < \angle O_i - \angle V_i < \pi$。

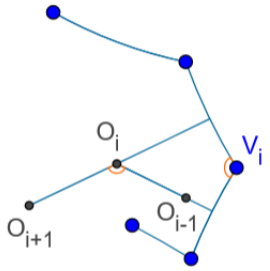


图5： $V_i$ 不是极值

# 4 离散双曲四顶点定理

**定义**。 设 $P$是一条顶点为 $V_1$、 $V_2$、.....、 $V_n$. 的多边形曲线。那么， $P$的多边形密度记作density$(P)$，定义为：

$$\text{density}(P) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}(\pi - \angle V_i).$$

在欧几里得平面中，多边形密度简单地等于绕数（也称为旋转指标）。事实上，对于平面中的多边形，简单的三角剖分论证表明，多边形密度始终等于 1。相比之下，高斯–博内定理意味着，双曲多边形的公式为 density($P$) $= 1 + \frac{1}{2\pi}$面积（$P$）。

众所周知，曲面上一条曲线的绕数可以通过该曲线相对于包含它的曲面坐标片的原像的绕数来计算。因此，当 $P$ 是一个多边形时，渐屈线的绕数是一个负整数（例如，参见 [7] 定理 3.2 后的讨论）。由广义高斯–博内定理 [2][定理 6.1]，我们得到以下不等式。

**定理 4.** 设 $P$ 是一个多边形。那么

$$\text{density}(E(P)) \leq -1.$$

现在我们将证明一个等式，它将多边形及其渐屈线的密度与 $P$的极值顶点数联系起来。我们将利用该等式推导出凸双曲多边形的离散四顶点定理。

**定理5.** 设 $P$ 是一个凸多边形，并设 $N$ 表示 $P$的局部极值顶点数。那么

$$2\,\text{density}(P) - 2\,\text{density}(E(P)) = N + \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\delta_i,$$

其中 $\delta_i$ 是由 $V_i$、 $O_i$ 以及$V_{i-1}V_i$ 和 $V_iV_{i+1}$的中点构成的四边形的亏格。

证明。 展开定义可得

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{density}(P) - 2\,\mathrm{density}(E(P)) &= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}(\pi - \angle V_i) - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}(\pi - \angle O_i) \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}(\angle O_i - \angle V_i).\end{aligned}$$

根据定理 3， $V_i$ 是局部极值的，当且仅当 $\angle O_i - \angle V_i > \pi$。特别地，$\angle O_i - \angle V_i = \pi + \delta_i$，其中 $\delta_i = \pi - \angle V_i - \alpha_i$ 和 $\alpha_i$ 是定理陈述中的四边形内与$\angle V_i$ 相对的角。此外， $V_i$ 不是极值的，当且仅当 $0 < \angle O_i - \angle V_i < \pi$。特别地， $\angle O_i - \angle V_i = \delta_i$。因此，根据上面的等式，

$$2\,\mathrm{density}\,(P) - 2\,\mathrm{density}\,(E(P)) = N + \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\delta_i.$$

□

现在我们可以推出双曲四顶点定理了。

**定理 6**。 每个至少有四个顶点的凸双曲多边形，都至少有四个局部极值顶点。

证明。 设 $P$ 是一个有 $n \geq 4$ 个顶点和 $N$ 个局部极值顶点的凸多边形。根据定理5,

$$2\,\mathrm{density}(P) - 2\,\mathrm{density}(E(P)) = N + \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\delta_i,$$

其中 $\delta_i = \pi - \angle V_i - \alpha_i$ （参见定理5的证明）。

根据密度的定义（$P$），上式可改写为:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i - 2\,\mathrm{density}\,(E(P)) = N.$$

由定理 4， $-2$ 密度（$E$（$P$）） $\geq$ 2，并且还有 $\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i > 0$，因此 $N > 2$。由命题 2，极大极值顶点的数量必须等于极小极值顶点的数量。也就是说， $N$ 必须是偶数。因此 $N \geq 4$。

□

# 参考文献

[1] A. L. Cauchy, *Recherches sur les polyèdres (Premier Mémoire)*, 《巴黎综合理工学院学报》**9** （1813年）。

[2] J. Cufí, A. Reventós, *Evolutes and Isoperimetric Deficit in Two-Dimensional Spaces of Constant Curvature*, 数学档案 **50** (2014).

[3] A. Kneser,
*Bemerkungen über die Anzahl der Extrema der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht euklidischen Geometrie*, Heinrich Weber 纪念文集。Teubner。**1** (1912年), 170—180.[4] O. Knill,
*A Graph Theoretical Poincaré-Hopf Theorem*, arXiv 1201.1162 (2012).[5] S. Mukhopadhayaya, *New methods in the geometry of a plane arc*, 加尔各答数学学会公报 **1** (1909年), 31–37.[6] O. Musin, *A four-vertex theorem for a polygon*, Kvant**2** (1997), 11–13.[7] , *Curvature Extrema and Four Vertex Theorems for Polygons and Polyhedra*, 数学科学杂志 **119** (2004).[8] R. Osserman, *The four-or-more Vertex Theorem*, 美国数学月刊 92 **5** (1985年), 332–337.[9] P. Scherk, *The four-vertex theorem*, 第一届加拿大数学大会论文集，蒙特利尔，1945年，97–102页。[10] D. Singer,
*Diffeomorphisms of the circle and hyperbolic curvature*,美国数学学会保形几何与动力学 **5** (2001), 第1期，1–5.