arXiv:2302.04164v2 [math.CO] 7 Apr 2024

(–1)-带箭头的 Gelfand-Tsetlin 模式的计数

ILSE FISCHER 和 FLORIAN SCHREIER-AIGNER

ABSTRACT. 带箭头的 Gelfand-Tsetlin 图样最近被引入，用于研究交替符号矩阵。本文证明，带箭头的 Gelfand-Tsetlin 图样的 (–1)-计数可以表示为一个简单的乘积公式。这些数是 Di Francesco 近期研究中出现的数 $2^{n(n-1)/2}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{(4j+2)!}{(n+2j+1)!}$ 的一个单参数推广。第二个结果涉及带箭头的 Gelfand-Tsetlin 图样的 (–1)-计数；在不允许以双箭头作为装饰的情况下，我们同样得到了一个简单的乘积公式。我们还为这些结果提供了无符号解释。计数公式的证明基于一个近期的 Littlewood 型恒等式，该恒等式使我们能够将问题化简为两个行列式的求值。我们通过对相应矩阵作 LU 分解来完成求值，并使用 Sister Celine 算法的扩展以及创造性望远镜求和来计算某些三重求和。具体而言，我们使用了 Koutschan 的算法实现，以及 Wegschaider 和 Riese 的算法实现。

1. INTRODUCTION

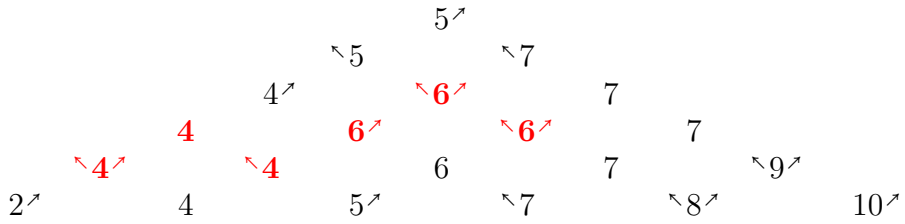
带箭头的 Gelfand-Tsetlin 模式近期出现在相关研究中 [Fis22、 FSA23] ，与交错符号矩阵及相关的 Littlewood 型恒等式有关。一个 Gelfand–Tsetlin 图样 是如下形式的整数三角数组

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & a_{1,1} & & & & & & & & \\
 & & & & & a_{2,1} & & a_{2,2} & & & & & & & \\
 & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & & & & \\
 & & & a_{n-2,1} & & \cdots & & \cdots & & a_{n-2,n-2} & & & & & \\
 & & a_{n-1,1} & & a_{n-1,2} & & \cdots & & \cdots & & a_{n-1,n-1} & & & & \\
 & a_{n,1} & & a_{n,2} & & a_{n,3} & & \cdots & & \cdots & & & a_{n,n} & &
\end{array},$$

沿 ↗-对角线和 ↘-对角线弱递增，即对于所有i、 j，$a_{i+1,\ j} \le a_{i,\ j} \le a_{i+1,\ j+1}$ 。带箭头的 Gelfand-Tsetlin 模式是 Gelfand-Tsetlin 图样，其中各项可以带有{↖、↗、↖↗}中的装饰，并满足以下条件：假设某项 a 等于其 ↗-邻项（相应地，↖-邻项），且 a 带有 ↗ 或 ↖↗（相应地，↖ 或 ↖↗）装饰，那么同一行中 a 右侧（相应地，左侧）的项也等于 a ，并带有 ↖ 或 ↖↗（相应地，↗ 或 ↖↗）装饰。

作者感谢奥地利科学基金会 FWF 对本研究的资助，项目编号为 P34931。1

在我们的示例中，带有 ↖、↗、↖↗装饰的项 a 分别表示为$\nwarrow a$、 $a\nearrow$、$\nwarrow a\nearrow$。下面给出这样一个例子。



我们如下定义给定的带箭头的盖尔范德–策特林图样 A 的符号和权重：假设图样中有一个元素 a，它既等于其 ↙ 邻居 b，也等于其 ↘ 邻居 c；并且 b 带有 ↗ 或 ↖↗ 装饰，c 带有 ↖ 或 ↖↗ 装饰，即 (b,c) 可能的箭头模式为 (↗, ↖)、(↗, ↖↗)、(↗, ↖)、(↖↗, ↖↗)。这样的构型称为特殊小三角形。那么 A 的符号为

$$\operatorname{sgn}(A) := (-1)^{\#\text{ of special little triangles in } A}.$$

我们的例子中有两个特殊小三角形，它们以加粗的红色元素突出显示，因此符号为 1。现在，A 的权重定义如下，其中 $\#\varnothing$ 表示未加装饰的元素数量。

$$\operatorname{sgn}(A)\cdot t^{\#\varnothing}u^{\#\nearrow}v^{\#\nwarrow}w^{\#\bowtie}\prod_{i=1}^{n}X_i^{\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}-\sum_{j=1}^{i-1}a_{i-1,j}+\#\nearrow\text{in row } i\ -\#\nwarrow\text{in row } i} =: \mathrm{W}(A) \tag{1}$$

在我们的例子中，权重为

$$t^6u^6v^4w^5X_1^6X_2^5X_3^6X_4^7X_5^6X_6^8.$$

带箭头的 Gelfand-Tsetlin 模式的重要性部分源于以下事实。如果每个元素都带有装饰，且带箭头的 Gelfand-Tsetlin 图样的底行严格递增，那么其底层未装饰的三角形整数数组就是一个单调三角形。（单调三角形是行严格递增的 Gelfand-Tsetlin 图样；底行为 1，2，....., n 的单调三角形与 $n\times n$交错符号矩阵之间存在简单的双射对应，参见[Bre99]。）事实上，从底行到顶行进行归纳即可看出，所有行都严格递增，因为每个元素都必须带有装饰，而在这种情况下，特殊小三角形是不可能出现的。

现在，若将所有底行为 $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ 的带箭头 Gelfand-Tsetlin 图样的生成函数按照上述权重作如下特化：

$$(X_1,\ldots,X_n) = (1,\ldots,1), t = 0, u = v = 1, w = -1,$$

于是，我们得到底行为 $k_1,\ldots,k_n$ 的单调三角形数量。事实上，令 $t = 0$ 意味着排除至少有一个条目没有装饰的图样；根据上一段所述，剩下的就是单调三角形。给定一个单调三角形 M，假设每个条目都带有装饰，那么有哪些合适的装饰？令 d 为 M 中等于其 ↖-邻项的条目数（此时装饰为 ↗），令 e 为 M 中等于其 ↗-邻项的条目数（此时装饰为 ↖），并令 f 为 M 中其余条目的数量（这些条目可以任选三种装饰之一）。那么，所有以 M 为底层单调三角形的带箭头的 Gelfand-Tsetlin 模式的权重之和，在令 $(X_1,\ldots,X_n)$ 为 $=(1,\ldots,1)$ 时，等于 $u^dv^e(u+v+w)^f$。将 $u = v = 1$ 和 $w = -1$ 特化后，权重显然为 1。

现在回到也含有未装饰条目的带箭头的 Gelfand-Tsetlin 模式，并介绍本文的结果。对于固定的 n 和 m，我们计算具有 n 行、且所有条目（可以带装饰）均为不大于 m 的非负整数，同时底行严格递增的带箭头的 Gelfand-Tsetlin 模式的生成函数，其中参数特化如下

$$(X_1, \dots, X_n) = (1, \dots, 1), u = v = t = 1, w = -1.$$

换句话说，我们研究带箭头的 Gelfand-Tsetlin 图样相对于权重的 (−1)-计数

$$\operatorname{sgn}(A)(-1)^{\#\bowtie} = (-1)^{\#\text{special little triangles}+\#\bowtie}.$$

定理 1. 将具有 n 行、底行严格递增且非负，并且各项不超过 m 的带箭头 Gelfand-Tsetlin 图样的生成函数在 $(X_1,\dots,X_n) = (1,\dots,1)$，$u = v = t = 1$ 和 $w = -1$ 处取特化，所得结果等于

$$2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{(m-n+3i+1)_{i-1}(m-n+i+1)_i}{\left(\frac{m-n+i+2}{2}\right)_{i-1}(i)_i},$$

使用 Pochhammer 符号 $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$.

在该定理中令 $m = n-1$，除相差 2^n 的幂次外，我们得到以下数列。

$$1, 4, 60, 3328, 678912, \dots = 2^{n(n-1)/2} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(4j+2)!}{(n+2j+1)!} = F_n \tag{2}$$

事实上，在定理中的公式里令 $m = n-1$，我们得到

$$2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{((n-1)-n+3i+1)_{i-1}((n-1)-n+i+1)_i}{\left(\frac{(n-1)-n+i+2}{2}\right)_{i-1}(i)_i} = 2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{(3i)_{i-1}}{\left(\frac{i+1}{2}\right)_{i-1}} =: F'_n,$$

使得 $\frac{F'_n}{F'_{n-1}} = 2\frac{(3n)_{n-1}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)_{n-1}}$，而

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 2^{n-1}\frac{(4n-2)!}{(3n-1)!}\prod_{j=0}^{n-2}\frac{1}{n+2j+1},$$

它与 $\frac{F'_{n+1}}{F'_n}$相差因子 2，且 $F'_n = 2^n F_n$现在可由 $F_n = 1$和$F'_n = 2$推出。其重要意义在于，式（2）中的数也出现在 Di Francesco [DF21]近期的研究中。Di Francesco 猜测，这些数既计数四边形上的 20 顶点构型，也计数阿兹特克三角形的多米诺骨牌铺砌（精确定义请参见 Di Francesco 的论文）。此后，Koutschan、Krattenthaler 和 Schlosser 在一篇近期论文中证明了该猜想 [KKS24]。令 $m = n-1$ 表示定理 1 中的组合对象，即箭头化 Gelfand–Tsetlin 模式的底行规定为 0，1、……、$n-1$。这涉及第二作者于 2018 年提出的一项更早、未发表的猜想。

我们的第二个定理讨论不含 ↖↗ 装饰的带箭头 Gelfand-Tsetlin 模式的 (−1)-计数。

定理 2. 具有 n 行、底行严格递增且非负，并且各项不超过 m 的带箭头 Gelfand–Tsetlin 图样的生成函数，在 $(X_1,\dots,X_n) = (1,\dots,1)$、$u = v = t = 1$ 和 $w = 0$ 处的特化等于

$$3^{\binom{n+1}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2n+m+2-3i)_i}{(i)_i}.$$

注意，在这种情况下，权重仅仅是

$$\operatorname{sgn}(A) = (-1)^{\#\text{ of special little triangles in } A}.$$

本文概要。 在第2节中，我们根据某些具有正权重的（可能带装饰的）Gelfand-Tsetlin 图样的加权计数，为定理 1 和2 中的数提供无符号组合解释。在第3节中，我们总结其他论文中的必要结果。在第4节中，我们证明定理1；在第5节中，我们证明定理2。

2. Signless versions of the objects

在本节中，我们证明，我们的(-1)-枚举也可以表示为某些（可能带装饰的）Gelfand-Tsetlin 图样的加权计数，其中权重取正权重。第一个命题涉及定理(-1)-枚举中的1。

命题 3. 具有给定底行 $k_1 \le \dots \le k_n$ 且关于符号的带箭头的盖尔范德–策特林图样的（-1）-枚举

$$(-1)^{\#\textit{special little triangles}+\#\bowtie}$$

是底行为 $k_1 \le \dots \le k_n$ 的 Gelfand-Tsetlin 图样的加权计数，其中只有底行可以包含三个相等的项，权重为 2^r，其中 r 是 Gelfand-Tsetlin 图样中不同时等于其 $\nwarrow$-邻项和 $\nearrow$-邻项的项数。

请注意，在这个命题中，我们使用的带箭头的 Gelfand-Tsetlin 图样的符号定义不同于 $\operatorname{sgn}(A)$。

证明。我们首先在某一行至少有四个相等项的带箭头 Gelfand-Tsetlin 图样上定义一个反号对合。选取一行中最靠上的、最靠左的四个相等项，并从左到右将它们记为 a_1、a_2、a_3、a_4。它们彼此相邻；a_1 的 $\nwarrow$-邻项严格小于 a_1，而 a_4 的 $\nearrow$-邻项严格大于 a_4，否则 a_1、a_2、a_3、a_4 就不是最靠上的四个相等项。若 a_1、a_2 属于同一个特殊小三角形，则可将 a_1 的装饰从 $\nearrow$ 改为 $\nwarrow\nearrow$，或反之，构成一个反号对合。a_3 和 a_4 的情况类似。因此我们可以假设 a_1 没有装饰或带有 $\nwarrow$ 装饰，而 a_4 没有装饰或带有 $\nearrow$ 装饰。于是，a_2 没有装饰或带有 $\nearrow$ 装饰，而 a_3 没有装饰或带有 $\nwarrow$ 装饰。更确切地说，a_2 带有 $\nearrow$ 装饰，当且仅当 a_3 带有 $\nwarrow$ 装饰。因此，我们可以通过将 a_2 和 a_3 上的无装饰状态改为在 a_2 上添加 $\nearrow$ 装饰、在 a_3 上添加 $\nwarrow$ 装饰，得到一个反号对合，因为在第二种情况下，a_2 和 a_3 属于同一个特殊小三角形，而在第一种情况下则不然。从现在起，我们可以假设每一行中至多有三个相等项。

接下来，假设某一行中从左到右有三个相等的项 a_1、a_2、a_3，且它们不在底行中；在这种情况下，我们也将构造一个反号对合。我们假设 a_1、a_2、a_3 是某一行中三个相等项最上方且最左侧的出现位置，

令 b_1、b_2 为下一行中的项，使得 a_1 是 b_1 的 ↖-邻项，而 b_2 是 b_1 的右邻项。我们证明，b_1 的左邻项不同于 b_1，且 b_2 的右邻项不同于 b_2。由于一行中不存在四个相等的项，因此不可能两侧同时相等。不妨假设 b_2 的右邻项 b_3 等于 b_2。我们定义一个带箭头的盖尔范德–策特林图样的反号对合，使得 b_2 和 b_3 包含在同一个特殊小三角形中：将 b_3 的装饰从 ↖ 改为 ↖↗，反之亦然。之所以可行，是因为 b_3 的 ↗-邻项 a_4 不同于 b_3；否则一行中将有四个相等的项，即 a_1、a_2、a_3、a_4。这意味着 b_2 要么没有装饰，要么带有 ↖ 装饰。现在，由于 b_1 的左邻项不同于 b_1，且 b_1 等于其 ↖-邻项，b_1 要么没有装饰，要么带有 ↗ 装饰，因为一行中不存在四个相等的项。此外，当且仅当 b_2 带有 ↖ 装饰时，b_1 带有 ↗ 装饰；于是，通过将 b_1 和 b_2 的这一装饰改为无装饰，反之亦然，我们得到一个反号对合。由此可知，我们可以将范围限制在这样的 Gelfand–Tsetlin 图样上：三个相等的项只能出现在底行中。

现在假设我们有一个特殊小三角形，并令 a_1, a_2 为它的两个底部元素。那么，a_1 的 ↖-邻项要么不同于 a_1，要么 a_2 的 ↗-邻项不同于 a_2，否则在 a_1, a_2 所在行的上一行中就会有三个相等的元素。不失一般性，我们可以假设 a_1 与其 ↖-邻项不同，并通过将 a_1 的装饰从 ↖ 改为 ↖↗，反之亦然，得到一个反号对合。从现在起，我们可以假设不存在特殊小三角形。

由此可知，特化给出了带装饰的 Gelfand-Tsetlin 图样的带符号计数，其中只有底行可以包含三个相等的元素，且元素可以带有 {↖, ↗, ↖↗} 中的装饰；如果元素 a 等于其 ↗-邻项（分别为 ↖-邻项），则 a 不得带有装饰 ↗ 或 ↖↗（分别为 ↖ 或 ↖↗）。符号为 $(-1)^{\#\nwarrow}$。

一个数值同时等于其↖-邻项和↗-邻项的项不能被装饰（因为不存在特殊小三角形），因此我们可以认为这样的项的权重为 1（这对应于没有装饰）。一个数值等于其↖-邻项但不等于其↗-邻项（若存在）的项，只能用↗装饰或不装饰，因此其权重为 2。同样，一个数值等于其↗-邻项但不等于其↖-邻项（若存在）的项，只能用↖装饰或不装饰，因此其权重也为 2。对于所有其他项，所有装饰方式皆可；并且由于在我们的特化下 $t + u + v + w = 2$，它们的权重也为 2。□

请注意，在定理1的应用中，我们有 $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ 因此我们考虑每行至多有两个相等项的 Gelfand-Tsetlin 图样。

现在我们转向定理 (-1)-枚举。2。

命题 4. 对于底行为 $k_1 \le \ldots \le k_n$、没有任何条目带有 ↖↗ 装饰的带箭头的盖尔范德–策特林图样，其 (-1)-枚举等于满足以下条件的 Gelfand-Tsetlin 图样的生成函数：底行为 $k_1 \le \ldots \le k_n$，每一行中的每个条目至多出现两次，且条目可以带有 {↖,↗} 中的装饰。

- 若条目 a 等于其 ↗-邻项（分别为 ↖-邻项），则 a 不得带有 ↗（分别为 ↖）装饰；并且
- 如果 a、b 是同一行中的两个相等项，那么 a 和 b 中至少有一个必须加上装饰。

证明。令 $w=0$ 表示排除装饰 ↖↗。设 a_1、a_2、a_3 是一行中三个相等项最靠上且最靠左的出现位置。由此可知，a_1 的 ↖-邻项不可能等于 a_1，且 a_3 的 ↗-邻项不可能等于 a_3，因为否则 a_1、a_2、a_3 就不会是三个相等项最靠上的出现位置。a_1、a_2、a_3 有以下八种可能的装饰：

$$(\varnothing,\varnothing,\varnothing),(\varnothing,\varnothing,\nearrow),(\varnothing,\nearrow,\nwarrow),(\nwarrow,\varnothing,\varnothing),(\nwarrow,\varnothing,\nearrow),(\nwarrow,\nearrow,\nwarrow),(\nearrow,\nwarrow,\varnothing),(\nearrow,\nwarrow,\nearrow)$$

它们所贡献的符号依次为 $+,+,-,+,+,-,-,-$，由此得到一个反号对合。因此，我们可以假设每一行中相同整数最多出现两次。

在剩余的带箭头 Gelfand–Tsetlin 模式中，若某个模式包含特殊小三角形，或同一行中有两个相等的项且二者都未加装饰，则可得到另一个反号对合，具体如下：找到这两种局部构型中最靠上且最靠左的一处，并将一种构型变换为另一种。□

3. Preliminaries for the proof

本节总结证明中将用到的其他论文中的结果。为便于阅读，我们尽可能省略求和范围，也就是说，当被加数在参数较小时和较大时均为零，因而求和可以扩展至 $\mathbb{Z}$。特别地，所有求和实际上都是有限的；对所有 $i\in\mathbb{Z}$ 求和$_i$时，我们写作 $\sum$。

由[FSA23，定理 3，2] 以及与[FSA23，等式（7.2）]中的推导类似的计算可得，具有 n 行且数值至多为 m 的带箭头 Gelfand-Tsetlin 模式的生成函数为

$$\frac{1}{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(X_j-X_i)}\mathbf{ASym}_{X_1,\dots,X_n}\left[\prod_{1\le i\le j\le n}(1+wX_i+X_j+X_iX_j)\sum_{0\le k_1<k_2<\dots<k_n\le m}X_1^{k_1-1}X_2^{k_2-1}\cdots X_n^{k_n-1}\right],$$

其中，反对称化算子 ASym 定义为

$$\mathbf{ASym}_{X_1,\dots,X_n}f(X_1,\dots,X_n)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot f(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}),$$

另见[Fis22，等式（3.5）]。接着，在 [Fis22，推论 12],中证明了这等于

$$\prod_{i=1}^{n}(X_i^{-1}+1+w+X_i)\times\frac{\det_{1\le i,j\le n}\left(X_i^{j-1}(1+X_i)^{j-1}(1+wX_i)^{n-j}-X_i^{m+2n-j}(1+X_i^{-1})^{j-1}(1+wX_i^{-1})^{n-j}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-X_i)\prod\limits_{1\le i<j\le n}(1-X_iX_j)(X_j-X_i)}.\tag{3}$$

在那篇论文中，我们还给出了一个用完全齐次对称多项式表示的公式 h_k。为了表述该公式，我们需要将 h_k 扩展到负的 k，如下所示。我们定义 $h_k(X_1,\dots,X_n)=0$，其中 $k=-1,-2,\dots,-n+1$，并且

$$h_k(X_1,\dots,X_n)=(-1)^{n+1}X_1^{-1}\dots X_n^{-1}h_{-k-n}(X_1^{-1},\dots,X_n^{-1})$$

对于 $k\le -n$。由此定义可知，后一关系对任意 k 都成立。对于用完全对称函数表示的公式，我们需要区分

以下情形： m 为奇数，且 m 为偶数。在本节末尾，我们将说明为何对于我们的结果，只需考虑 m 为奇数的情形。现在，对于 $m = 2l + 1$，(3) 等于

$$(4)\quad (-1)^{\binom{n+1}{2}} \prod_{i=1}^{n} X_i^l (X_i^{-1} + 1 + w + X_i)(1 + X_i) \times \det_{1\le i,j\le n} \left(\sum_{p,q} \binom{j-1}{p} \binom{n-j}{q} w^{n-j-q} h_{p-q-l-1-i}(X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_i, X_i^{-1}) \right),$$

（参见 [Fis22，(4.9)]）。构成行列式底层元素的求和有自然的界限：这是因为二项式系数在 p 或 q 为负数，或 $p > j - 1$，或 $q > n - j$时为零。

We a在将 $(X_1, \ldots, X_n)$ 专门化为 $=(1, \ldots, 1)$ 时。为此，请注意 t

$$h_k(X_1, \ldots, X_n)|_{(X_1,\ldots,X_n)=(1,\ldots,1)} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

对于 $k \ge 0$，并且二项式系数的恒等式 $\binom{p}{q} = (-1)^q \binom{q-p-1}{q}$ 表明，该公式对于 $k < 0$ 也成立，其中我们使用 $\binom{p}{q} = {}^{p}_{(p-1)\ldots(p-q+1)\ q!}$。对于 $m = 2l + 1$的情形，我们得到如下特化式

$$(5)\qquad (3 + w)^n 2^n \det_{1\le i,j\le n} \left(\sum_{p,q} w^{n-j-q} (-1)^j \binom{j-1}{p} \binom{n-j}{q} \binom{p-q-l+i-2}{2i-1} \right).$$

情形 m 为偶数。 接下来我们将说明，只需对 1 和 2的奇数值证明定理 m。

定理 3.2 来自 [FSA23]，它表明底行为 $k_1, \ldots, k_n$ 的带箭头的 Gelfand-Tsetlin 模式的生成函数为

$$(6)\quad \prod_{i=1}^{n} (t + uX_i + vX_i^{-1} + w) \prod_{1\le p<q\le n} (t + u\mathrm{E}_{k_p} + v\mathrm{E}_{k_q}^{-1} + w\mathrm{E}_{k_p}\mathrm{E}_{k_q}^{-1}) s_{(k_n, k_{n-1}, \ldots, k_1)}(X_1, \ldots, X_n),$$

其中 $s_{(k_n,k_{n-1},\ldots,k_1)}(X_1, \ldots, X_n)$ 表示扩展舒尔多项式，即

$$s_{(k_n,\ldots,k_1)}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\det_{1\le i,j\le n}(X_i^{k_j+j-1})}{\prod_{1\le i<j\le n}(X_j - X_i)}$$

而 E_x 表示前向平移算子，即 $\mathrm{E}_x p(x) = p(x+1)$。该公式应作如下理解：首先将 k_i 视为变量，并将平移算子中的多项式作用于扩展舒尔多项式。由此得到舒尔多项式的线性组合，然后才对 k_i 进行特化。

令 $X_i = 1$ 在 $s_{(k_n,k_{n-1},\ldots,k_1)}(X_1, \ldots, X_n)$ 可得 $\prod_{1\le i<j\le n} \frac{k_j - k_i + j - i}{j-i}$。对于 $0 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_n$，这可由 [Sta99，第 375 页，式 (7.105)]推出。现在，为证明任意 k_i的情形，注意若存在 i, j 使得 $1 \le i \ne j \le n$， $k_i + i = k_j + j$则两个表达式都为零。否则，存在一个置换 σ 使得

$$k_{\sigma(1)} + \sigma(1) < k_{\sigma(2)} + \sigma(2) < \ldots < k_{\sigma(n)} + \sigma(n)$$

以及一个整数 p满足 $k_1 + \sigma(1) - 1 + p \ge 0$，并且我们有

$$s_{(k_n,\ldots,k_1)}(X_1, \ldots, X_n) = \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} X_i^{-p} \times s_{(k_{\sigma(n)}+\sigma(n)-n+p, \ldots, k_{\sigma(2)}+\sigma(2)-2+p, k_{\sigma(1)}+\sigma(1)-1+p)}(X_1, \ldots, X_n),$$

这就将其化简为前一种情形。因此，在 (6) 中令 $(X_1, \dots, X_n) = (1, \dots, 1)$，并令 $t = u = v = 1$，可得一个关于 k_i 的 $\mathbb{Q}[w]$ 上的多项式。对所有满足 $0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_n \le m$ 的 $k_1, \dots, k_n$ 求和后，得到一个关于 m 的 $\mathbb{Q}[w]$ 上的多项式。这可由以下事实归纳得出：对于多项式 $p(x)$，$\sum_{x=0}^{y} p(x)$ 是关于 y 的多项式函数。

令 $l = \frac{m-1}{2}$ 取（5）中的值，我们得到一个关于 m 的多项式（固定 n时），并且已知它等于以不大于 m 的元素组成的带箭头的单调三角形的加权计数，权重为

$$(-1)^{\#\text{special little triangles}} w^{\#\bowtie}.$$

因此，它必须在 m的所有整数值上都相等。定理 1 和 2中的公式显然是关于 m的有理函数。在接下来的两节中，我们将证明，当 5）中的行列式内的 $l = \frac{m-1}{2}$ 替换为 m 时，若 $w = -1$ 和 $w = 0$分别为奇数，这些有理函数与（5）相等。由于这些有理函数在无穷多个取值（奇整数）上与多项式相等，因此它们本身必为多项式，因而对于 m的所有取值，也必与（5）相等。

4. Proof of Theorem 1

4.1. LU 分解。 当5）中矩阵的元素进一步修改时，我们从$w = -1$开始：

$$\sum_{p,q} (-1)^{n+q} \binom{j-1}{p} \binom{n-j}{q} \binom{p-q-l+i-2}{2i-1} = \sum_{p,q} (-1)^{n+q+1} \binom{j-1}{p} \binom{n-j}{q} \binom{l-p+q+i}{2i-1},$$

其中，最后一个二项式系数用到了 $\binom{p}{q} = (-1)^q \binom{q-p-1}{q}$。由于这是关于 l 的多项式，因此可以假设 l 足够大，从而利用二项式系数的对称性。我们还利用 Chu-Vandermonde 求和得到以下结果。

$$\begin{aligned}
&\sum_{p,q} (-1)^{n+q+1} \binom{j-1}{p} \binom{n-j}{q} \binom{l-p+q+i}{l-p+q-i+1} \\
&\qquad = \sum_{p,q} (-1)^{i+l+n+p} \binom{j-1}{p} \binom{n-j}{n-j-q} \binom{-2i}{l-p+q-i+1} \\
&\qquad = \sum_{p} (-1)^{i+l+n+p} \binom{j-1}{p} \binom{n-2i-j}{n-j+l-p-i+1} \\
&\qquad = (-1)^{j+1} \sum_{p} \binom{j-1}{p} \binom{l-p+i}{n-j+l-p-i+1} = (-1)^{j+1} \sum_{p} \binom{j-1}{p} \binom{l-p+i}{2i+j-n-1}
\end{aligned}$$

由于最后一个表达式仍然是关于 l 的多项式，且当 l 足够大时它与原表达式相等，因此对所有 l 都必然相等。现在，由于这是我们要计算其行列式的矩阵中的一个元素，我们也可以将 j 替换为 $n+1-j$，并考虑符号 $(-1)^{\binom{n}{2}}$。总之，我们要计算

$$2^{2n} \det_{1 \le i,j \le n} \left(\sum_{p} \binom{n-j}{p} \binom{l-p+i}{2i-j} \right). \tag{7}$$

我们定义

$$a_{i,j} = \sum_{p} \binom{n-j}{p} \binom{l-p+i}{2i-j}$$

and
(8)

$$x_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+1} \dfrac{(j)_j}{(2l-n+3j+2)_{j-1}(2l-n+i+2)_j} \\ \times \sum_t 2^{2i-4t-n} \dfrac{(i-j-2t+1)_{2t}(i-2j+1)_{j-1-t}(l-n/2+j/2+t+3/2)_{i-2t-1}}{(1)_t(1)_{i-2t-1}} & i \le j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

使用扩展的波赫默记号

$$(a)_k = \begin{cases} a(a+1)\dots(a+k-1), & k>0 \\ 1, & k=0 \\ \frac{1}{(a-1)(a-2)\cdots(a+k)}, & k<0 \end{cases}.$$

本节余下部分将用于证明以下引理。

引理5. 设 n 为正整数，则乘积 $(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\cdot(x_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ 是一个主对角线上元素均为 1 的下三角矩阵，即

(9)
$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_{k,j} = \begin{cases} 1 & i=j, \\ 0 & i<j. \end{cases}$$

于是该引理推出

$$\det_{1\le i,j\le n}\left(\sum_p \binom{n-j}{p}\binom{l-p+i}{2i-j}\right) = \left[\det_{1\le i,j\le n}(x_{i,j})\right]^{-1},$$

并且不难看出 $2^{2n}\left[\det_{1\le i,j\le n}(x_{i,j})\right]^{-1}$ 是在定理 1 中令$m=2l+1$ 时的表达式。

下面概述引理 5 的证明步骤。

- 在第 4.2 节中，我们使用超几何变换公式将 (9) 化为 (12) 中的三重求和恒等式。
- 在第 4.3 节中，我们证明 $j\ge 2i$ 的情形下的 (12)。这将作为第 4.5 节末尾归纳法的基础情形。
- 在第 4.4 节中，我们计算一个辅助二重和，最后一节也需要用到它。
- 在第 4.5 节中，我们首先为 (12) 中三重求和的被加数建立递推关系，由此得到该求和本身的递推关系。随后，我们利用第 4.4 节中的计算对递推关系进行简化，再用归纳法证明该断言。

还要注意，下文我们将对项 $x_{i,\ j}$ 使用超几何变换公式，将其化为另一个超几何和；我们本可以直接将 $x_{i,\ j}$ 定义为变换后的结果。然而，按照这里的定义，$x_{i,\ j}$ 是猜测过程的结果，因此保留这个表达式或许有一定价值。

4.2. 一些超几何变换公式的应用。我们首先利用一个超几何级数变换公式来改写条目 $\sum_p \binom{n-j}{p}\binom{l-p+i}{2i-j}$。我们采用标准的超几何记号，即

$${}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_p \\ b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_q \end{matrix}; z\right] = \sum_k \frac{(a_1)_k(a_2)_k\dots(a_p)_k}{(b_1)_k(b_2)_k\dots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}.$$

在对超几何级数进行变换时，我们使用了 Krattenthaler 的 Mathematica 程序包 HYP[Kra95]。

现在可以验证

$$\sum_p \binom{n-j}{p}\binom{l-p+i}{2i-j} = \frac{(1-i+j+l)_{2i-j}}{(1)_{2i-j}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} i-j-l,\ j-n \\ -i-l \end{matrix};-1\right]. \tag{10}$$

使用以下变换公式 [Sla66, (1.8.10)]

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} a,\ -n \\ c \end{matrix};z\right] = (1-z)^n \frac{(a)_n}{(c)_n}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} -n,\ c-a \\ 1-a-n \end{matrix};\frac{1}{1-z}\right],$$

其中 n 是一个非负整数，(10) 变为

$$\begin{aligned} &2^{-j+n}\frac{(1-i+j+l)_{2i-j}(i-j-l)_{n-j}}{(1)_{2i-j}(-i-l)_{n-j}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} -2i+j,\ j-n \\ 1-i+2j+l-n \end{matrix};\frac{1}{2}\right] \\ &\qquad = 2^{-j+n}\frac{(1-i+2j+l-n)_{2i-j}}{(1)_{2i-j}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} -2i+j,\ j-n \\ 1-i+2j+l-n \end{matrix};\frac{1}{2}\right] \\ &\qquad\qquad = \sum_s (-1)^s 2^{-j+n-s}\frac{(j-n)_s(1-i+2j+l-n+s)_{2i-j-s}}{(1)_s(1)_{2i-j-s}}, \end{aligned}$$

其中 $n-j$ 作为非负整数，且在最后两步中合并了波赫哈默符号。根据上述内容，(9) 等价于

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{s,t \\ 1\le k\le j}} \frac{(1-i+2k+l-n+s)_{2i-k-s}(l-n/2+j/2+t+3/2)_{k-2t-1}}{(2l-n+3j+2)_{j-1}(2l-n+k+2)_j} \\ &\qquad \times (-1)^{k+s+1}2^{k-s-4t}\frac{(k-n)_s(j)_j(k-j-2t+1)_{2t}(k-2j+1)_{j-1-t}}{(1)_s(1)_{2i-k-s}(1)_t(1)_{k-2t-1}} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i<j. \end{cases} \end{aligned}$$

我们将这个恒等式乘以 $(2l-n+3)2^{j-1}(2l-n+3j+2)_{j-1}(j)_j$，并将 l 替换为 $(n-r-3)/2$。

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{s,t \\ 1\le k\le j}} (-r)_{k-1}(-1+j+k-r)_{j-k}\,(-1/2-i+2k-n/2-r/2+s)_{2i-k-s}\,(j/2-r/2+t)_{k-2t-1} \\ &\qquad \times (-1)^{k+s+1}2^{k-s-4t}\frac{(k-n)_s(k-j-2t+1)_{2t}(k-2j+1)_{j-1-t}}{(1)_s(1)_{2i-k-s}(1)_t(1)_{k-2t-1}} \\ &\qquad\qquad = \begin{cases} \frac{(-r)_{2j-1}(-1+3j-r)_{j-1}}{(j)_j}, & i=j, \\ 0, & i<j. \end{cases} \end{aligned}$$

我们的目标是对关于 t 的求和应用一条变换规则。为此，只需考虑仅依赖于 t 的被加数部分。

$$\begin{aligned} &\sum_t 2^{-4t}\frac{(j/2-r/2+t)_{k-2t-1}(k-j-2t+1)_{2t}(k-2j+1)_{j-1-t}}{(1)_t(1)_{k-2t-1}} \\ &\qquad = \frac{(1-2j+k)_{j-1}\left(\frac{j}{2}-\frac{r}{2}\right)_{k-1}}{(1)_{k-1}}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac12-\frac{k}{2},\ 1-\frac{k}{2},\ \frac{j}{2}-\frac{k}{2},\ \frac12+\frac{j}{2}-\frac{k}{2} \\ 1+j-k,\ 2-\frac{j}{2}-k+\frac{r}{2},\ \frac{j}{2}-\frac{r}{2} \end{matrix};1\right] \end{aligned} \tag{11}$$

我们应用

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a,\ b,\ c,\ -n \\ e,\ f,\ 1+a+b+c-e-f-n \end{matrix};1\right]
= \frac{(-a+e)_n(-a+f)_n}{(e)_n(f)_n}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix} -n,\ a,\ 1+a+c-e-f-n,\ 1+a+b-e-f-n \\ 1+a+b+c-e-f-n,\ 1+a-e-n,\ 1+a-f-n \end{matrix};1\right],
$$

其中 n 是一个非负整数，参见 [Sla66，（4.3.5.1）], 并得到

$$
\frac{(1-2j+k)_{j-1}\left(\frac{j}{2}-\frac{r}{2}\right)_{k-1}}{(1)_{k-1}}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac12-\frac{k}{2},\ 1-\frac{k}{2},\ -\frac12+\frac{k}{2}-\frac{r}{2},\ \frac{k}{2}-\frac{r}{2} \\ \frac{j}{2}-\frac{r}{2},\ \frac12+\frac{j}{2}-\frac{r}{2},\ \frac32-j \end{matrix};1\right]
\times \frac{(1/2+j-k/2)_{k/2-1}(3/2-j/2-k/2+r/2)_{k/2-1}}{(1+j-k)_{k/2-1}(2-j/2-k+r/2)_{k/2-1}}
$$

若 k 为偶数且

$$
\frac{(1-2j+k)_{j-1}\left(\frac{j}{2}-\frac{r}{2}\right)_{k-1}}{(1)_{k-1}}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac12-\frac{k}{2},\ 1-\frac{k}{2},\ -\frac12+\frac{k}{2}-\frac{r}{2},\ \frac{k}{2}-\frac{r}{2} \\ \frac{j}{2}-\frac{r}{2},\ \frac12+\frac{j}{2}-\frac{r}{2},\ \frac32-j \end{matrix};1\right]
\times \frac{(j-k/2)_{k/2-1/2}(1-j/2-k/2+r/2)_{k/2-1/2}}{(1+j-k)_{k/2-1/2}(2-j/2-k+r/2)_{k/2-1/2}}
$$

若 k 为奇数。结合这两种情况，我们看到（11）等于

$$
\sum_t (-1)^{j+k+t}2^{-2k+2}\frac{(1-k)_{2t}(-1+k-r)_{2t}(j-t)_{j-k+t}}{(1)_{k-1}(1)_t(1-2j+k)_{1-k+2t}(-1+j+k-r)_{1-k+2t}}.
$$

因此，总而言之，（9）等价于

$$
\begin{aligned}
(12)\quad &\sum_{\substack{s,t\\ 1\le k\le j}} (-1)^{1+k+s+t}2^{2-k-s} \\
&\times \frac{(k-n)_s(-r)_{k-1+2t}(-1/2-i+2k-n/2-r/2+s)_{2i-k-s}(2-2j+r)_{j-1-2t}(j-t)_{j-t-1}}{(1)_{2i-k-s}(1)_s(1)_{k-1-2t}(1)_t} \\
&= \begin{cases} \frac{(-r)_{2j-1}(-1+3j-r)_{j-1}}{(j)_j}, & 0<i=j, \\ 0, & 0<i<j \end{cases}
\end{aligned}
$$

在寻找这个三重求和的证明时，我们也得到了 Wegschaider 和 Riese 的 MultiSum 软件包的帮助 [WR], 该软件包可在以下网址获取 https://www3.risc.jku.at/research/combinat/software它有助于求出若干被加数的递推关系。该软件包找到的所有递推关系都在论文中得到了证明，因为这些证明并不复杂。

4.3. $j \ge 2i$ 情形。我们首先考虑 $j \ge 2i$ 情形，该情形作为第 4.5 节末尾归纳法的基础情形。在此情形下，我们可以将求和范围扩展到所有 $k \in \mathbb{Z}$。事实上，对于 $k<1$，要么因子 $1/(1)_{k-1-2t}$ 在 $t \ge 0$ 时为零，要么 $1/(1)_t$ 在 $t<0$ 时为零；对于 $k>j\ge 2i$，要么 $1/(1)_{2i-k-s}$ 在 $s \ge 0$ 时为零，要么 $1/(1)_s$ 在 $s<0$ 时为零。

事实证明，在这种情况下，对 k,s 的二重和已经为零。忽略 (12) 中所有与 k 和 s 无关的因子，只需证明

$$
(13)\qquad \sum_{k,s}(-1)^{k+s}2^{-k-s}\frac{(k-n)_s(-r)_{k-1+2t}(-1/2-i+2k-n/2-r/2+s)_{2i-k-s}}{(1)_{2i-k-s}(1)_s(1)_{k-1-2t}} = 0
$$

对于所有整数 i,t，以及多项式参数 n 和有理函数参数 r。我们用 13) 中的被加数表示为 $f_1(n,r,i,k,s,t)$，并通过简单计算观察到

$$f_1(n+6,r+12,i+3,k+6,s,t+3)=\frac{(1+r)_{12}}{64}f_1(n,r,i,k,s,t). \tag{14}$$

令 $g_1(n,\ r,\ i,\ t)$ 表示 (13) 的左侧。对 (14) 求和，可得 t

$$g_1(n+6,r+12,i+3,t+3)=\frac{(1+r)_{12}}{64}g_1(n,r,i,t). \tag{15}$$

假设我们已经证明了对于所有整数 i,t，且将 n 视为变量时，$g_1(n,0,i,t)=0$。那么由 (15) 可推出，$g_1(n,0,i,t)=g_1(n,12,i,t)=g_1(n,24,i,t)=g_1(n,36,i,t)=\ldots=0$。并且，由于对于固定的整数 n,i,t，$g_1(n,r,i,t)$ 是关于 r 的有理函数，这将证明对于所有整数 n,i,t，$g_1(n,r,i,t)=0$。根据关于 n 的多项式性，这也意味着 $g_1(n,r,i,t)=0$ 是零多项式。

在本小节余下部分，我们证明 $g_1(n、0、i、t)=0$。将 $r=0$ 置于（13）左端后，我们得到

$$\sum_{k,s}(-1)^{k+s}2^{-k-s}\frac{(k-n)_s(0)_{k-1+2t}(-1/2-i+2k-n/2+s)_{2i-k-s}}{(1)_{2i-k-s}(1)_s(1)_{k-1-2t}}$$
$$=\sum_{k,s}(-1)^{1+s}2^{-k-s}\frac{(k-n)_s(-1/2-i+2k-n/2+s)_{2i-k-s}}{(1)_{2i-k-s}(1)_s(1)_{k-1-2t}(1)_{1-2t-k}}.$$

为了证明该和的值为 0，我们使用 Koutschan 的 Mathematica 软件包 Holo- nomicFunctions [Kou、KK09],，该软件包可从以下地址获取：https://www3.risc.jku.at/research/combinat/soft
将 $f_2(n,i,k,s,t)$ 记为被加数。应用命令

```
FindCreativeTelescoping[f2[n,i,k,s,t],{S[k]-1,S[s]-1},{S[n],S[i],S[t]}]
```

返回五个多项式 p_h、$1\le h\le 5$，软件包为它们提供了如下恒等式

$$\begin{aligned}p_1(n,i,t)f_2(n,i+1,k,s,t)+p_2(n,i,t)f_2(n,i,k,s,t+1)+p_3(n,i,t)f_2(n,i,k,s,t)\\+\Delta_k\left[\frac{p_4(n,i,k,s,t)}{(1+2i-n)}\cdot\frac{f_2(n,i,k,s,t)}{(2+2i-k-s)}\right]\\+\Delta_s\left[\frac{p_5(n,i,k,s,t)}{(1+2i-n)(n-k)}\cdot\frac{f_2(n,i,k,s,t)}{(1+2i-k-s)(2+2i-k-s)}\right]=0,\end{aligned} \tag{16}$$

其中，Δ_x 表示前向差分，即 $\Delta_x d(x)=d(x+1)-d(x)$，并且

$$\begin{aligned}p_1(n,i,t)&=4(2i+n-1)(2i-2t+1)\left(4i^2+4in+32it+8i+n^2-16nt-8n+8t+3\right),\\p_2(n,i,t)&=-64,\\p_3(n,i,t)&=(2i-n+4t+1)\left(8i^3+12i^2n+32i^2t+12i^2+6in^2-32int-12in-128it^2-48it-2i\right.\\&\quad\left.+n^3-24n^2t-9n^2+64nt^2+72nt+11n+256t^3+192t^2+16t-3\right),\end{aligned}$$

而 p_4、p_5 分别是含有 750 个和 1168 个单项式的多项式，可在随附的 Mathematica 文件 `companion.nb` 中找到。该文件可从作者网页获取。它还会用 Mathematica 检验该恒等式。

注释 6. 恒等式 (16) 的证明在概念上很简单，基本步骤如下。我们可以使用波赫哈默符号的两个标准恒等式

$$(a)_n = a(a+1)_{n-1} \quad and \quad (a)_n = (a)_{n-1}(a+n-1) \tag{17}$$

将 $f(n,i,k,s,t)$ 的“移位”之商（例如 $f(n,i+1,k,s,t)$）表示为 $f(n,i,k,s,t)$ 本身乘以适当的有理因子。这便将问题归结为证明某个有理函数恒等式。

然而，应用（17）可能会带来问题，因为它可能导致除零。举例来说，注意到第二个恒等式会推出 $1 = (1)_0 = (1)_{-1}0 = \frac{0}{0}$，接下来需要正确解释 $\frac{0}{0}$。在论证如何避免除零之前，我们先举例说明可能遇到的困难。

考虑 $(n+1)_n$，那么我们可以两次使用第二个恒等式，得到 $(n+1)_n = (n+1)_{n-2}(2n-1)(2n)$。另一方面，根据第一个恒等式，$(n)_{n-1} = n(n+1)_{n-2}$，因此我们可能会想当然地得出 $(n+1)_n = 2(2n-1)n(n+1)_{n-2} = 2(2n-1)(n)_{n-1}$。然而，对于 $n=0$，$(n+1)_n = 2(2n-1)(n)_{n-1}$ 根本不成立，因为 $(1)_0 = 1$，而 $(0)_{-1} = -1$。这是因为（17）的应用存在问题：$(n+1)_n = (n+1)_{n-1}(2n)$ 和 $(n)_{n-1} = n(n+1)_{n-2}$ 在 $n=0$ 的情况下，会导致右侧出现 0 0 形式的未定式。

我们可以通过考虑极限 $(a)_m = \lim_{\epsilon\to 0}(a+\epsilon)_m$ 来规避这类问题。在我们的例子中，这会得到如下结果。

$$(n+1)_n = \lim_{\epsilon\to 0}(n+\epsilon)_{n-1}\frac{(n+1+\epsilon)_n}{(n+\epsilon)_{n-1}} = \lim_{\epsilon\to 0}(n+\epsilon)_{n-1}\frac{(2n-1+\epsilon)(2n+\epsilon)}{n+\epsilon}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}(n+\epsilon)_{n-1}\frac{(2n-1+\epsilon)(2n+\epsilon)}{n+\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}(n+\epsilon)_{n-1}(2n-1+\epsilon)\frac{2n+\epsilon}{n+\epsilon} = (n)_{n-1}(2n-1)\lim_{\epsilon\to 0}\frac{2n+\epsilon}{n+\epsilon}.$$

现在注意到

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{2n+\epsilon}{n+\epsilon} = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n\neq 0 \end{cases},$$

因此，$(n+1)_n = (1+[n\neq 0])(2n-1)(n)_{n-1}$，其中使用了 Iverson 括号，其定义为[若命题为真，则取命题本身] = 1；否则取 [命题本身] = 0。

假设我们需要证明一个恒等式，例如 (16) 并且希望通过乘以一个有理函数，将被加数的移位形式与未移位形式联系起来。为此，对于单个波赫哈默符号，我们在被加数中得到如下形式 $(a)_m$

$$(a+s)_{m+t} = \lim_{\epsilon\to 0}(a+\epsilon+s)_{m+t} = \lim_{\epsilon\to 0}(a+\epsilon)_m\frac{(a+\epsilon+s)_{m+t}}{(a+\epsilon)_m} = \lim_{\epsilon\to 0}(a+\epsilon)_m\frac{(a+\epsilon+m)_{s+t}}{(a+\epsilon)_s},$$

其中 s、t 是绝对值较小的固定整数（它们来自参数的移位）。注意，利用 $1/(a)_{-m} = (a-m)_m$，这也处理了分母中的波赫哈默符号。

现在可能会遇到一些困难：由于分母中的某些线性因子 $a+j$ $(a+m)_{s+t}$ $(a)_s$ 在某些参数取值下会消失，因此我们无法轻易地消去极限。~~不过，~~ 由于我们假设被加数对所有参数取值都有定义，这些奇点总是可去奇点。更具体地说，假设被加数为

$$f(a_1,\dots,a_n;m_1,\dots,m_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i)_{m_i},$$

那么我们希望将移位后的被加数 $f(a_1+s_1,\dots,a_n+s_n;\, m_1+t_1,\dots,m_n+t_n)$ 替换为

(18)
$$\lim_{\epsilon\to 0}\prod_{i=1}^{n}(a_i+\epsilon)_{m_i}\frac{(a_i+\epsilon+m_i)_{s_i+t_i}}{(a_i+\epsilon)_{s_i}}=\lim_{\epsilon\to 0}f(a_1+\epsilon,\dots,a_n+\epsilon;m_1,\dots,m_n)\prod_{i=1}^{n}\frac{(a_i+\epsilon+m_i)_{s_i+t_i}}{(a_i+\epsilon)_{s_i}}.$$

下文中，我们假设对所有 i， $s_i\geq 0$ 和 $s_i+t_i\geq 0$，但其他情形的论证也类似。

那么，有理函数右侧的分母中的奇点 a_i+j 显然只能因以下两种原因之一而是可去的：要么是由于 $f(a_1+\epsilon,\dots,a_n+\epsilon;m_1,\dots,m_n)$ 而可去，要么是由于 $\prod_{i=1}^{n}(a_i+\epsilon+m_i)_{s_i+t_i}$而可去。第一种情况在 (1) 中处理，第二种情况则在 (2) 中处理。

(1) 因子 a_i+j 与 $f(a_1,\dots,a_n;\, m_1,\dots,m_n)$“抵消”，也就是说，若 $a_i+j=0$，则 $f(a_1,\dots,a_n;\, m_1,\dots,m_n)=0$ 也成立。于是，只需将有理函数恒等式乘以所有这类线性因子，就能得到一个对所有参数取值都成立的有理函数恒等式。这样的乘法是合理的，因为该线性因子作为被加数中的波赫哈默符号的一部分出现。

(2) 第二种情况是，因子 a_i+j 与某个 $(a_k+m_k)_{s_k+t_k}$ 中的因子相消。这正是可能用到艾弗森记号的情形。具体来说，可能存在一个 $k\in\{1,2,\dots,n\}$ 和一个整数 l，使得

(19)
$$a_i+j=0\Rightarrow a_k+m_k+l=0.$$

在本文中， a_i和 m_i通常是参数的整数仿射组合。在这种情况下，(19) 成立当且仅当存在一个有理数 q 满足 $q(a_k+m_k+l)=a_i+j$。容易验证，本文的应用中不会出现这第二种情况。

另请注意以下微妙之处：根据我们的假设， a_i 和 m_i 是参数的仿射组合，因此 $a_i+j=0$ 是这些参数的一个仿射超平面。原则上，对于不同的参数取值，我们可能分别处于情形 (1) 或情形 (2)。此外，在情形 (2) 中，对于不同的参数取值，我们甚至可能需要考虑不同的项a_k+m_k+l。然而，这实际上不可能发生，因为分子中导致零点可去的项也会确定仿射超平面，而一个仿射超平面 H 永远不会包含在有限个与 H 不同的仿射超平面的并集中。

最后请注意，所有这些讨论都可以轻易推广到形如$\prod_{i=1}^{k}z_i^{l_i}\prod_{i=1}^{n}(a_i)_{m_i}$的被加数，其中 z_i 是整数，而 l_i 也是关于参数的仿射线性组合，取值范围为 $\mathbb{Z}$。

现在我们对所有 k、 s、 $t\in\mathbb{Z}$将（16）求和。再次说明，由于我们将 n 视为变量，分子中的因子 $1+2i-n$ 和 $n-k$ 导致的奇点不会造成任何问题。至于 $1+2i-k-s$和 $2+2i-k-s$，注意到当$1+2i-k-s=0$ 和 $2+2i-k-s=0$时， $f_2(n,i,k,s,t)$为零，这是由于因子$1/(1)_{2i-k-s}$所致，因此这些奇点也是可去的。

由（16）中前向差分项的望远镜效应，我们可以得出

(20)
$$p_1(n,i,t)g_1(n,0,i+1,t)+p_2(n,i,t)g_1(n,0,i,t+1)+p_3(n,i,t)g_1(n,0,i,t)=0.$$

现在我们可以对 $i-t$ 使用归纳法来证明 $g_1(n,0,i,t)=0$。由于 $f_2(n,i,k,s,t)$ 仅在 $1+2t\le k\le 1-2t$ 和 $0\le s\le 2i-k$ 时非零，我们可以得出，对于 $i\le t$，$g_1(n,0,i,t)=0$。根据归纳假设，我们假设 $g_1(n,0,i,t+1)=0$ 且 $g_1(n,0,i,t)=0$，因此，由（20）可得 $p_1(n,i,t)g_1(n,0,i+1,t)=0$。现在我们需要说明 $p_1(n,i,t)$ 非零。对于整数 i,t，$p_1(n,i,t)$ 中的三个因子都是关于 n 的非零多项式，因为它们的常数项都是奇数。

4.4. 一个辅助二重和。令 $f_3(n,\ r,\ i,\ j,\ k,\ s,\ t)$ 表示式（12）中的三重求和的被加数，即

$$f_3(n,r,i,j,k,s,t)=(-1)^{1+k+s+t}2^{2-k-s}\times\frac{(k-n)_s(-r)_{k-1+2t}(-1/2-i+2k-n/2-r/2+s)_{2i-k-s}(2-2j+r)_{j-1-2t}(j-t)_{j-t-1}}{(1)_{2i-k-s}(1)_s(1)_{k-1-2t}(1)_t}.$$

本小节的目的是证明

$$\sum_{s,t}f_3(n,r,i,j,j+1,s,t)=0, \tag{21}$$

其中，n 视为多项式参数，r 视为有理函数参数，而 i 是非负整数，$j\ge 2$ 是整数。我们证明，事实上，（21）中对 t 求和的内层和等于零。忽略所有不依赖于 t的项后，我们需要证明

$$\sum_t(-1)^t\frac{(-r)_{j+2t}(2-2j+r)_{j-1-2t}(j-t)_{j-t-1}}{(1)_{j-2t}(1)_t}=0.$$

改写成超几何级数记号后，得到

$$\frac{(j)_{j-1}(-r)_j(2-2j+r)_{j-1}}{(1)_j}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{j}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{j}{2}\\ \frac{3}{2}-j\end{matrix};1\right]=0. \tag{22}$$

现在使用 Chu-Vandermonde 求和公式 [Sla66，(1.7.7)；附录 (III.4)]，

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\ -n\\ c\end{matrix};1\right]=\frac{(c-a)_n}{(c)_n}, \tag{23}$$

其中 n 是一个非负整数，而在我们的应用中，需要区分 j为偶数和 j为奇数的情形。也就是说，对于 $j=2a$ 和 $j=2a+1$，相应求和中的项 $(c-a)_n$ 分别变为 $(1-a)_a$，其值为 0，因此可推出（21）。

4.5. （(12)）的证明。回顾一下，我们将（12）中的被加数记作 $f_3(n,r,i,j,k,s,t)$。我们将证明该被加数满足以下递推关系，除非 $j=t$。

$$\begin{aligned}(3j-r-2)(r+1)_4f_3(n,r,i,j,k,s,t)=\\ 2(2j+1)(2-2j+r)_2f_3(n+2,r+4,i+1,j+1,k+2,s,t+1)\\ +(j-r-3)f_3(n+2,r+4,i+1,j+2,k+2,s,t+1)\end{aligned} \tag{24}$$

在我们的应用中，这种例外并不是问题，因为我们可以假设 $t<j$ as $t\le(k-1)/2$（否则，由于因子 $1/(1)_{k-1-2t}$，被加数会消失），并且我们有如下条件

$k \le j$ 来自我们的求和范围（12）。事实上，

$$\begin{aligned}(3j-r-2)(r+1)_4 f_3(n,r,i,j,k,s,t) &= (3j-r-2)(r+1)_4(-1)^{1+k+s+t}2^{2-k-s}\\ &\times \frac{(k-n)_s(-r)_{k-1+2t}(-1/2-i+2k-n/2-r/2+s)_{2i-k-s}(2-2j+r)_{j-1-2t}(j-t)_{j-t-1}}{(1)_{2i-k-s}(1)_s(1)_{k-1-2t}(1)_t}\\ &= -4\frac{(3j-r-2)(t+1)(2-2j+r)_2}{(r+1-j-2t)} f_3(n+2,r+4,i+1,j+1,k+2,s,t+1),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(j-r-3)f_3(n+2,r+4,i+1,j+2,k+2,s,t+1) &= (j-r-3)(-1)^{k+s+t}2^{-k-s}\\ &\times \frac{(k-n)_s(-r-4)_{k+3+2t}(-1/2-i+2k-n/2-r/2+s)_{2i-k-s}(2-2j+r)_{j-1-2t}(j-t+1)_{j-t}}{(1)_{2i-k-s}(1)_s(1)_{k-1-2t}(1)_{t+1}}\\ &= \frac{(j-r-3)(2-2j+r)_2(2j-2t)(2j-2t-1)}{(r+1-j-2t)(j-t)} f_3(n+2,r+4,i+1,j+1,k+2,s,t+1)\\ &= \frac{2(j-r-3)(2-2j+r)_2(2j-2t-1)}{(r+1-j-2t)} f_3(n+2,r+4,i+1,j+1,k+2,s,t+1),\end{aligned}$$

其中最后一步需要假设 $j \neq t$。现在

$$\begin{aligned}&2(2j+1)(2-2j+r)_2 f_3(n+2,r+4,i+1,j+1,k+2,s,t+1)\\ &\qquad + (j-r-3)f_3(n+2,r+4,i+1,j+2,k+2,s,t+1)\\ &= -4\frac{(3j-r-2)(t+1)(2-2j+r)_2}{(r+1-j-2t)} f_3(n+2,r+4,i+1,j+1,k+2,s,t+1)\\ &= (3j-r-2)(r+1)_4 f_3(n,r,i,j,k,s,t).\end{aligned}$$

我们对所有（24 s） $t \in \mathbb{Z}$的递推关系求和。令

$$g_3(n,r,i,j,k) = \sum_{s,t} f_3(n,r,i,j,k,s,t),$$

我们有

$$\begin{aligned}&(3j-r-2)(r+1)_4 g_3(n,r,i,j,k) =\\ &2(2j+1)(2j-r-3)_2 g_3(n+2,r+4,i+1,j+1,k+2) + (j-r-3)g_3(n+2,r+4,i+1,j+2,k+2).\end{aligned}$$

现在对所有 $k \le j$ 求和，并令

$$h_3(n,r,i,j) = \sum_{k \le j} g_3(n,r,i,j,k).$$

我们得到

$$\begin{aligned}&(3j-r-2)(r+1)_4 h_3(n,r,i,j) =\\ &\quad 2(2j+1)(2j-r-3)_2\Big[h_3(n+2,r+4,i+1,j+1) - g_3(n+2,r+4,i+1,j+1,j+2)\Big]\\ &\qquad + (j-r-3)h_3(n+2,r+4,i+1,j+2).\end{aligned}$$

假设 $j \geq 1$，辅助双重求和求值（21）表明 $g_3(n+2,\ r+4,\ i+1,\ j+1,\ j+2) = 0$ 因此我们有

$$(3j-r-2)(r+1)_4 h_3(n,r,i,j) = \\ 2(2j+1)(2j-r-3)_2 h_3(n+2,r+4,i+1,j+1) + (j-r-3)h_3(n+2,r+4,i+1,j+2).$$

现在，我们通过关于 i 的归纳法，计算 $h_3(n,r,i,j)$（针对 $i<j$）。基础情形 $i=1$ 可由第4.3节立即得出，因为 $2i = 2 \leq j$。在归纳步骤中，我们针对 $j-i$ 使用第二重归纳，从较大的 $j-i$ 递减到较小的值。基础情形 $2i \leq j$ 同样可由第4.3节得出。对于归纳步骤，我们可以假设 $h_3(n,r,i,j) = 0$ （根据第一重归纳的归纳假设），并且 $h_3(n+2,r+4,i+1,j+2) = 0$ （根据第二重归纳的归纳假设）。因此，我们有 $2(2j+1)(2j-r-3)_2 h_3(n+2,r+4,i+1,j+1) = 0$，这意味着 $h_3(n+2,r+4,i+1,j+1) = 0$，因为我们将 r 视为变量。对于 $i = j$，上述递推关系简化为

$$(3i-r-2)(r+1)_4 h_3(n,r,i,i) = 2(2i+1)(2i-r-3)_2 h_3(n+2,r+4,i+1,i+1).$$

再次对 i使用归纳法。容易验证基础情形 $i = 1$ ，因为$f_3(n,r,1,1,k,s,t) = 0$，除非 s,t 为非负数且满足 $k+s \leq 2$ 和 $2t+1 \leq k$。在归纳步骤中，我们使用上述递推关系。

这就完成了引理5的证明，从而也完成了定理1的证明。

5. Proof of Theorem 2

5.1. LU 分解。 将 $w=0$ 代入（5）后，我们得到如下结果。

$$6^n \det_{1\leq i,j\leq n}\left(\sum_{p,q} 0^{n-j-q}(-1)^j \binom{j-1}{p}\binom{n-j}{q}\binom{p-q-l+i-2}{2i-1}\right),$$

由于 $0^{n-j-q} = 0$ （除非 $q = n-j$），上式可简化为

$$6^n \det_{1\leq i,j\leq n}\left(\sum_{p}(-1)^j \binom{j-1}{p}\binom{p-n+j-l+i-2}{2i-1}\right).$$

我们定义

$$b_{i,j} = \sum_{p}(-1)^j \binom{j-1}{p}\binom{p-n+j-l+i-2}{2i-1}.$$

这里我们也成功猜出了 LU 分解。具体而言，令

$$y_{i,j} = \sum_{t} 2(-1)^{t+j}3^{1-j}\frac{(j)_j}{(1)_{j-t}(1)_{t-i}(3-i+2n+2l-2t)_i}.$$

本节余下部分将用于证明以下引理。

引理 7. 设 n 为正整数，则 $(b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\cdot(y_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ 是一个主对角线上元素均为 1 的下三角矩阵，也就是说

$$\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}y_{k,j} = \begin{cases} 1 & i=j, \\ 0 & i<j. \end{cases} \tag{25}$$

该引理意味着

$$\det_{1\leq i,j\leq n}\left(\sum_{p}(-1)^j \binom{j-1}{p}\binom{p-n+j-l+i-2}{2i-1}\right) = \left[\det_{1\leq i,j\leq n}(y_{i,j})\right]^{-1}$$

并且不难看出 $6^n\left[\det_{1\le i,\ j\le n}\left(y_{i,\ j}\right)\right]^{-1}$ 是在定理 2 中令$m=2l+1$ 所得的表达式。

注意到（25）中的左侧是关于 l、 n的有理函数，事实上，它是关于 $l+n$的有理函数，因此只需考虑 $l=0$的情形，也就是说，我们需要证明

$$\sum_{k\ge 1,s,t}\frac{(-1)^{k+s+t}(1-k)_s(-i+k-n+s)_{2i-1}}{(1)_s(1)_{j-t}(1)_{t-k}(3-k+2n-2t)_k}=\begin{cases}\frac{1}{2}(-1)^j3^{j-1}(1)_{j-1} & 1\le i=j\\ 0 & 1\le i<j\end{cases}, \tag{26}$$

其中，我们将等式两边分别乘以 $(-1)^j3^{j-1}(1)_{2i-1}(j)_j$ ，并将求和参数 p替换为 s。

5.2. 情形 $i=j$。 记 $f_4(n、\ i、\ j、\ k、\ s、\ t)$ 为（26）左侧的被加数。我们再次使用 Koutschan 的 Mathematica 程序包 HolonomicFunctions。应用命令

```
FindCreativeTelescoping[f4[n,i,i,k,s,t],{S[k]-1,S[s]-1,S[t]-1},{S[i],S[n]}]
```

返回七个多项式 p_h, $1\le h\le 7$，其中前四个不依赖于 k,s,t，该程序包给出了以下恒等式

$$\begin{aligned}&p_1f_4(n+1,i+1,i+1,k,s,t)+p_2f_4(n+1,i,i,k,s,t)+p_3f_4(n,i+1,i+1,k,s,t)+p_4f_4(n,i,i,k,s,t)\\&+\Delta_k\left[\frac{(k-s-1)\,p_5}{(1+i-t)}\cdot\frac{f_4(n,i,i,k,s,t)}{2q(-2+i+k-n+s)}\right]+\Delta_s\left[\frac{s\cdot p_6}{(1+i-t)}\cdot\frac{f_4(n,i,i,k,s,t)}{2q(-2+i+k-n+s)}\right]\\&+\Delta_t\left[\frac{(k-t)(k-2n+2t-3)\,p_7}{(1+i-t)}\cdot\frac{f_4(n,i,i,k,s,t)}{q}\right]=0,\end{aligned} \tag{27}$$

其中 $q=2i(-9+8i+i^2-8n-2in+n^2)(3+2n-2t)(2+n-t)$，并且

$$\begin{aligned}p_1&=-6i+14i^2+3n-24in+7n^2,\\p_2&=2i(-1+7i-3n)(i-n),\\p_3&=-(-1+3i-2n)(3i-2n),\\p_4&=i(-7i+i^2+n-16in+3n^2),\end{aligned}$$

且 p_5,p_6,p_7 是多项式，分别含有 1031、1031 和 312 个单项式，可在随附的 Mathematica 文件 companion.nb 中找到。

记 $g_4(n,i,j)$ 为 $=\sum_{k\ge1}\sum_{s,t}f_4(n,i,j,k,s,t)$。由于 n 是多项式变量，含有 n 的项所导致的奇点均为可去奇点。对于 $(1+i-t)$，注意到当 $1+i-t=0$ 时， $f_4(n,i,i,k,s,t)$ 为零，这是由因子 $1/(1)_{i-t}$ 所致。

As 由 s、 t 和 k 中的望远镜求和可知，上述递推关系意味着 es

$$\begin{aligned}&p_1g_4(n+1,i+1,i+1)+p_2g_4(n+1,i,i)+p_3g_4(n,i+1,i+1)+p_4g_4(n,i,i)\\&=\left[\sum_{s,t}\frac{(-s)p_5|_{k=1}}{(1+i-t)}\cdot\frac{f_4(n,i,i,1,s,t)}{2q(-1+i-n+s)}\right].\end{aligned}$$

根据定义，除非 $s=0$，否则 $g_4(n,i,i,1,s,t)=0$。因此，上述递推关系可简化为

$$p_1g_4(n+1,i+1,i+1)+p_2g_4(n+1,i,i)+p_3g_4(n,i+1,i+1)+p_4g_4(n,i,i)=0. \tag{28}$$

我们通过对 i 使用归纳法，证明 $g_4(n,i,i)=\frac{1}{2}(-1)^i3^{i-1}(i-1)!$ 从而完成 $i=j$情形下的证明。基础情形是 $i=1$。显然，除非$t=k=1$且 $s=0$，否则 $f_4(n,1,1,k,s,t)=0$。因此 $g_4(n,1,1)=f_4(n,1,1,1,0,1)=-\frac{1}{2}$。

在归纳步骤中，我们首先证明 $g_4(n,i+1,i+1)$ 与 n 无关。根据定义，g_4 是关于 n 的有理函数，即 $g_4(n,i+1,i+1) = a(n)/b(n)$，其中 $a(n)$ $b(n)$ 可视为关于 n 的多项式，且没有公因子。由 (28) 和归纳假设可得

$$p_1a(n+1)b(n)+p_3a(n)b(n+1)=\frac{1}{2}(-3)^i i!b(n)b(n+1)(3i-5i^2-n+12in-3n^2). \tag{29}$$

因此，$b(n)$整除 $p_3b(n+1) = -(2n-3i)(2n-3i+1)b(n+1)$。不难看出，$g_4$的定义中的求和遍历了所有 $1 \le s+1 \le k \le t \le i$。因此，$b(n)$的可能因子为$(2n-3i+3)$、$(2n-3i+4)$.....、$(2n)$，这意味着 $b(n)$和 p_3不可能具有公因子。因此，$b(n)$整除 $b(n+1)$，从而推出 $b(n) = 1$。通过比较(29)两边的次数，并将 p_1 和 p_3作为关于 n 的多项式的首项系数纳入考虑，我们看到 $a(n)$必定是 n 中次数为 0 的多项式，即 $a(n) = a(n+1)$。由(28)立即得到所述结论；在此我们还利用了 p_1+p_3 非零这一事实，因为作为关于 n 的多项式，其常数项对于 $i \ge 1$为正。

5.3. $i < j$ 的情形。和之前一样，我们使用命令

```
FindCreativeTelescoping[f4[n,i,j,k,s,t],{S[k]-1,S[s]-1,S[t]-1},{S[i],S[j],S[n]}]
```

并得到七个多项式 $p_h(n,i,j,k,s,t)$，$1 \le h \le 7$，其中前四个不依赖于 k,s,t；该程序包给出了以下恒等式

$$\begin{aligned}
&p_1f_4(n+1,i,j+1,k,s,t)+p_2f_4(n+1,i,j,k,s,t)+p_3f_4(n,i,j+1,k,s,t)+p_4f_4(n,i,j,k,s,t)\\
&\quad+\Delta_k\left[\frac{p_5}{(-1-j+t)}\cdot\frac{f_4(n,i,j,k,s,t)}{2(-2+i+k-n+s)(3+2n-2t)(2+n-t)}\right]\\
&\quad+\Delta_s\left[\frac{s\cdot p_6}{2(k-s)(-1-j+t)}\cdot\frac{f_4(n,i,j,k,s,t)}{(3+2n-2t)}\right]\\
&\quad+\Delta_t\left[\frac{(k-t)(-3+k-2n+2t)\,p_7}{(k-s)(-1-j+t)}\cdot\frac{f_4(n,i,j,k,s,t)}{2(-i+k-n+s)(3+2n-2t)(2+n-t)}\right]=0,
\end{aligned} \tag{30}$$

其中

$$\begin{aligned}
p_1&=3i-i^2-10ij+2i^2j+6ij^2-n+9in-i^2n+6jn-12ijn-6j^2n-2n^2+6in^2+6jn^2-n^3,\\
p_2&=-2(-2i+i^2+3ij-3in-3jn),\\
p_3&=(-1+3j-2n)(3j-2n)(i-2j+n),\\
p_4&=2i-i^2-6j-9ij+18j^2+3in-15jn.
\end{aligned}$$

而 p_5,p_6,p_7 分别是含有 484、124 和 173 个单项式的多项式，可在随附的 Mathematica 文件 `companion.nb` 中找到。

与前文一样，上述递推关系意味着

$$\begin{aligned}
&p_1g_4(n+1,i,j+1)+p_2g_4(n+1,i,j)+p_3g_4(n,i,j+1)+p_4g_4(n,i,j)\\
&\qquad=\left[\sum_{s,t}\frac{p_5|_{k=1}}{(-1-j+t)}\cdot\frac{f_4(n,i,j,1,s,t)}{2(-1+i-n+s)(3+2n-2t)(2+n-t)}\right].
\end{aligned} \tag{31}$$

显然，$f_4(n,i,j,1,s,t) = 0$，除非 $s = 0$。因此，右侧可以改写为

$$\sum_{r=1}^{3} \frac{c_r(n,i,j)(-i+1-n)_{2i-1}}{4(n+1-i)} \sum_t \frac{(-1)^{t+1}}{(1)_{j-t+1}(1)_{t-r}(1+n-t)(2+n-t)},$$

其中，$c_r(n,i,j)$ 通过 $p_5|_{k=1}(3+2n-2t) = c_1(n,i,j) + (t-1)c_2(n,i,j) + (t-1)(t-2)c_3(n,i,j)$ 定义。将关于 t 的求和改写为超几何记号，并使用 Chu-Vandermonde 求和公式（见（23）），可得

$$\sum_t \frac{(-1)^{t+1}}{(1)_{j-t+1}(1)_{t-r}(1+n-t)(2+n-t)}$$
$$= \frac{(-1)^{r+1}}{(1+n-r)(2+n-r)(1)_{j+1-r}} {}_2F_1\left[\begin{matrix}-2-n-r, & -1-j+r \\ & -n+r\end{matrix}; 1\right] = \frac{(-1)^{r+1}(2+j-r)}{(-n+r-2)_{j+3-r}},$$

其中我们假设 $j+1-r \geq 0$，由于 $j \geq 2$ 和 $r \leq 3$，该条件始终成立。利用 $c_i(n,i,t)$ 的显式值

$$c_1(n,i,j) = -2(i+n)(-2-i+i^2+6j-5n-2in-3n^2),$$
$$c_2(n,i,j) = -2(i+n)(-i+i^2-ij+i^2j+3n+2in-2i^2n-13jn+9n^2+4in^2-jn^2+6n^3),$$
$$c_3(n,i,j) = -2(1+n)(i+n)(ij-i^2j-2n-in+i^2n+7jn-5n^2-2in^2+jn^2-3n^3),$$

我们得到

$$\sum_{r=1}^{3} \frac{(-1)^{r+1}c_r(n,i,j)(-i+1-n)_{2i-1}(2+j-r)}{4(n+1-i)(-n+r-2)_{j+3-r}} = 0.$$

因此（31）可化简为

$$p_1 g_4(n+1,i,j+1) + p_2 g_4(n+1,i,j) + p_3 g_4(n,i,j+1) + p_4 g_4(n,i,j) = 0 \tag{32}$$

最后，我们对 j 使用归纳法，证明当 $i < j$ 时，$g_4(n,i,j) = 0$。

对于归纳法的基础情形 $j = i+1$，注意到我们得到

$$p_1 g_4(n+1,i,i+1) = -p_3 g_4(n,i,i+1)$$

在假设 $i = j$ 下将（32）中的 $p_2 + p_4 = 0$ 设为该值时。归纳步骤中，对于 $j > i+1$，我们将采用类似的递推关系，因此也可以将 $j = i+1$ 这一情形留待归纳步骤进一步处理。

对于归纳步骤，假设 $g_4(n,i,j) = 0$，则上述递推关系可化简为

$$p_1 g_4(n+1,i,j+1) = -p_3 g_4(n,i,j+1). \tag{33}$$

固定 i 和 j 后，根据定义可知，$g_4(n,i,j+1)$ 是关于 n 的有理函数，即

$$g_4(n,i,j+1) = \frac{a(n)}{b(n)},$$

存在一些多项式 $a(n)$ $b(n)$。我们可以假设 $b(n)$ 是首一的，并将 $a(n)$ 的首项系数记为 α。将（33）两边乘以 $b(n)b(n+1)$，得到

$$p_1 a(n+1)b(n) = -p_3 a(n)b(n+1).$$

现在，左侧的首项系数为 $-\alpha$，而右侧为 -4α，因此 $a(n)$ 必须是零多项式，于是我们得到 $g_4(n,i,j+1) = 0$，这就证明了该结论。

6. Acknowledgements

我们感谢 Christoph Koutschan 和 Carsten Schneider 分享了有益的讨论。特别是，Carsten Schneider 还向我们演示了如何利用他的 Mathematica 程序包 Sigma 证明（26）[Sch，Sch07], 该程序包可从以下网址获取：
https://www3.risc.jku.at/research/combinat/softw

References

[Bre99] D. Bressoud。《证明与确认：交错符号矩阵猜想的故事》。MAA Spectrum。美国数学协会与剑桥大学出版社，华盛顿特区和剑桥，1999年。[DF21] P. Di Francesco。阿兹特克三角形的二十顶点模型与多米诺骨牌铺砌。《组合学电子期刊》，28(4)：第4.38号论文，50页，2021年。[Fis22] I. Fischer。与交错符号矩阵相关的有界 Littlewood 恒等式。arXiv:2301.00175，2022年。[FSA23] I. Fischer和F. Schreier-Aigner。交错符号矩阵与下降平面分拆之间的关系： $n+3$ 对等价统计量。《Adv. Math.》，413：108831，47页，2023年。[KK09] M. Kauers和C. Koutschan。用于 q全纯序列和幂级数的 Mathematica 程序包。《Ramanujan 期刊》，19(2)：137–150，2009年。[Kou] C. Koutschan。Holonomicfunctions：用于处理多元全纯函数的 Mathematica 程序包，包括闭包性质、求和与积分。林茨约翰·开普勒大学 RISC。¨at Linz.[KKS24]C. Koutschan、C. Krattenthaler和M. Schlosser。受 Di Francesco 关于二十顶点构型的行列式启发的行列式求值。arXiv:2401.08481，2024年。[Kra95] C. Krattenthaler。HYP 和 HYPQ：分别用于操作二项式和与超几何级数的 Mathematica 程序包，以及 q二项式和与基本超几何级数。第20卷，第737–744页。1995年。《组合学中的符号计算》 Δ_1 （纽约州伊萨卡，1993年）。[Sch] C. Schneider。求和程序包 Sigma。林茨约翰·开普勒大学 RISC。¨at Linz.[Sch07] C. Schneider。符号求和助力组合学。S ´em. Lothar. Combin.，56：第B56b号文章，36页，2006/07年。[Sla66] L. J. Slater。广义超几何函数。剑桥大学出版社，剑桥，1966年。[Sta99] R. Stanley。枚举组合学。第2卷。剑桥高等数学研究丛书第62卷。剑桥大学出版社，剑桥，1999年。[WR] K. Wegschaider和A. Riese。Multisum：用于证明超几何多重和恒等式的 Mathematica 程序包。林茨约翰·开普勒大学 RISC。¨at Linz.