$f(R,\ G_{\mu\nu}T^{\mu\nu})$ 修正引力理论的物理方面

Mihai Marciu* 和 Dana Maria Ioan†*Faculty of Physics, University of Bucharest, 405 Atomiştilor,POB MG-11, RO-077125, Bucharest-Măgurele, Romania*

本文通过添加一个新提出的不变量扩展了基本的爱因斯坦–希尔伯特作用量。该不变量由爱因斯坦张量与能量动量张量之间的特定缩并构成，编码了时空几何与物质场之间的非最小耦合。通过考虑一个通用函数 $f(R,\ G_{\mu\nu}T^{\mu\nu})$，基本的爱因斯坦–希尔伯特作用量得以扩展；该函数进一步分解为其主要组成部分：一个取决于标量曲率的几何分量，以及一个体现几何与物质场之间相互作用的第二元素。在背景动力学层面，基于物质能动张量与爱因斯坦张量之间的特定耦合，建立了具体的宇宙学模型。在推导出相应的场方程后，本文采用动力系统分析研究了不同耦合函数下宇宙学模型的物理方面。研究表明，当前模型与我们宇宙演化过程中的不同阶段相容，并可能解释晚期历史演化中的各个阶段。

arXiv:2302.04186v1 [gr-qc] 8 Feb 2023

I. 引言

近年来，宇宙学理论在各种天体物理探针的推动下得到了深入发展[1, 2], ，为现代物理学带来了新的有趣问题。在宇宙学理论中，最大的挑战之一与已知宇宙的加速膨胀有关 [3, 4], ，这是一个有趣的现象，与宇宙在大尺度结构上的演化相关 [5–9]。宇宙学中的另一个关键问题与暗物质现象有关 [10–12], ，它在更局域的星系动力学层面有着各种影响。所有这些方面都表明，我们距离理解整个宇宙的本质与演化仍相去甚远，这也为新的理论方向和宇宙学模型敞开了大门 [13]。从天体物理学的角度看，各种观测研究可以探测加速膨胀的本质与性质 [3, 14–19]。这一现象是宇宙基本组成要素中一个颇为奇特的方面 [20], ，并对科学与技术产生了各种影响。

与加速膨胀的起源和特征相关的最简单理论模型是 ΛCDM 情景 [6], ，这一方案无法解释该现象的诸多基本方面[21]。为了解决暗能量问题，各种理论推论应运而生 [22]。在修正引力理论中，基本的爱因斯坦–希尔伯特作用量通过添加可与加速膨胀起源相关联的特定不变量而得到扩展 [23–26]。最早的模型之一是 $f(R)$ 情景 [27], ，这是一个基于标量曲率的理论模型，以更自然的方式扩展了爱因斯坦–希尔伯特作用量 [28]。修正引力理论基于 $f(R)$ 不变量，在过去几十年中得到了深入研究 [28–33]。通过不同的方法，人们提出了各种替代理论，这些理论基于相应作用量中的特定不变量。例如，暗能量现象的另一种起源可能与 $f(G)$ 模型 [34–36],有关，该模型基于高斯–博内不变量。在这些理论中，可以考虑物质拉格朗日量与标量曲率之间的相互作用，并采用特定的作用量 $f(R,\ L_m)$ [37, 38]。通过考虑基于 $f(R,\ T)$ [39],的情景，可以进一步推广这一特定模型，其中 T 表示物质能动量张量的迹 [40]。在后一种理论中，我们可以将物质与几何置于同等地位，这种特定的相互作用能够触发加速膨胀 [39]。近年来，所有这些理论都得到了详尽研究 [41–49], ，显示出相较于 ΛCDM 情景 [50] 的特定优势。暗能量现象也可以由嵌入作用量中的标量场触发 [6, 51], ，该标量场可以以精质[52], 、幻影场 [53], 或精灵暗能量情景 [54–60]的形式与其他场发生最小耦合或非最小耦合 [21]。在修正引力理论中，人们考虑了一种基于物质能动量张量与里奇张量之间缩并的特定不变量 $R_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$，并将时空几何与物质成分的基本特征之间可能存在的相互作用纳入考量，而后者被嵌入能动量张量的特定形式中。从理论角度来看，这种方法是可行的，并且能够产生不同的效应 [62–71]。由此，自然可以将其扩展为一种基于爱因斯坦张量与能动量张量之间相互作用的不变量 [72]，并可导出一种可行的修正引力理论。

在一项近期研究中 [72], ，作者探讨了爱因斯坦张量与物质能动张量之间可能存在的相互作用，并考虑了导数的若干特定缩并。该研究通过

* mihai.marciu@drd.unibuc.ro
† idana91@yahoo.com

在所提出的作用量中采用线性模型进行微扰分析，证明了此类模型的可行性。考虑到物质能动张量与爱因斯坦张量之间可能存在的耦合，我们进一步扩展了相应模型，在拉格朗日量中加入了一个取决于物质与几何相互作用的一般函数。为使模型更具一般性，我们还推广了基本几何部分，将一个进一步依赖于标量曲率的特定分量纳入其中。因此，当前模型进一步分解为两部分：一部分是仅依赖于标量曲率的纯几何部分，另一部分则依赖于基于物质与几何相互作用的新不变量，并包含能动量张量与爱因斯坦张量之间的缩并。

本文组织如下：在第二节中，我们简要描述宇宙学模型及其相应的场方程。随后，在第三节中，通过采用动力系统分析，我们研究同时考虑曲率与物质同爱因斯坦张量耦合的通用模型。此外，在第四节中，我们研究一个特定的子类，其中 $f(R)$ 部分对应于基本的爱因斯坦–希尔伯特项。在第五节中，我们研究最后提出的模型，其中物质-几何函数由指数模型表示。最后，在第六节中，我们总结最重要的结果，并简要给出结论性评述。

II. 作用量及相应的场方程

在本节中，我们将简要讨论与当前模型对应的主要要素，并在宇宙学背景下推导引力场方程。下文中，我们将提出一个由以下作用量描述的模型:

$$S = S_m + \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\big[f(R) + g(\phi)\big], \tag{1}$$

其中，我们在 $f(R)$ 部分中加入了 [73] 一个新的通用函数，该函数进一步基于爱因斯坦张量与能动量张量之间的特定缩并 [72],

$$\phi = G_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \tag{2}$$

这里的能动量张量按通常方式定义,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}}\frac{\delta(\sqrt{-\tilde{g}}L_m)}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}, \tag{3}$$

其中 L_m 为物质扇区的拉格朗日量。在推导爱因斯坦场方程之前，我们先引入一些后文将要考虑的新要素。能动量张量的迹定义为 : $T = T^{\mu\nu}\tilde{g}_{\mu\nu}$。能动量张量关于逆度规的变分满足以下关系 [72]:

$$\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{\delta\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}L_m + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\alpha\beta}L_m\tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\alpha\beta}T_{\mu\nu} - 2\frac{\partial^2 L_m}{\partial\tilde{g}^{\mu\nu}\partial\tilde{g}^{\alpha\beta}}. \tag{4}$$

接下来，在计算中我们将考虑以下缩并 [72]:

$$\Sigma_{\mu\nu} = G^{\alpha\beta}\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = -G_{\mu\nu}L_m + \frac{1}{2}G^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{g}_{\mu\nu}L_m - T_{\mu\nu}) - 2G^{\alpha\beta}\frac{\delta^2 L_m}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}\delta\tilde{g}^{\alpha\beta}}. \tag{5}$$

对于 $f(R)$ 部分，对应作用量关于逆度规的变分给出了相应的能动量张量 [73],

$$T^{f(R)}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}f(R) - 2R_{\mu\nu}f_R + 2\nabla_\mu\nabla_\nu f_R - 2\tilde{g}_{\mu\nu}\Box f_R, \tag{6}$$

其中，我们引入了关于标量曲率的导数， $f_R = \frac{\partial f_{(R)}}{\partial R}$ 。对于$g(\phi)$分量，我们得到了以下能动量张量 [72],

$$T^{g(\phi)}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}g(\phi) + g_{,\phi}TR_{\mu\nu} - 2g_{,\phi}G^\beta_\nu T_{\mu\beta} - 2g_{,\phi}G^\alpha_\mu T_{\nu\alpha} - g_{,\phi}RT_{\mu\nu} - \Box(g_{,\phi}T_{\mu\nu}) + \nabla_\alpha\nabla_\mu(g_{,\phi}T^\alpha_\nu) + \nabla_\alpha\nabla_\nu(g_{,\phi}T^\alpha_\mu) - \tilde{g_{\mu\nu}}\nabla_\alpha\nabla_\beta(g_{,\phi}T^{\alpha\beta}) + \tilde{g_{\mu\nu}}\Box(g_{,\phi}T) - \nabla_\mu\nabla_\nu(g_{,\phi}T) - 2g_{,\phi}\Sigma_{\mu\nu}, \tag{7}$$

其中 $g_{,\phi}$ 是关于 ϕ 不变量的导数，即

$$g_{,\phi} = \frac{dg(\phi)}{d\phi}. \tag{8}$$

若进一步应用最小作用量原理，我们便得到最终的类爱因斯坦方程 [73],

$$T^{f(R)}_{\mu\nu} + T^{g(\phi)}_{\mu\nu} + T^m_{\mu\nu} = 0, \tag{9}$$

这将导出守恒关系,

$$\nabla^\mu\big[T^{f(R)}_{\mu\nu} + T^{g(\phi)}_{\mu\nu} + T^m_{\mu\nu}\big] = 0, \tag{10}$$

也称为连续性方程。

接下来，我们将考虑与由该度规描述的 FLRW 模型相关的以下宇宙学背景:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\delta_{ij}dx^i dx^j, i, j = 1, 2, 3. \tag{11}$$

在这种情况下，我们考虑一个随宇宙时间变化的普适尺度因子a 。然后，按照通常的方式定义哈勃参数 $H = \frac{\dot{a}}{a}$ ，其中点表示对宇宙时间求导。斜压物质流体的能量动量张量如下:

$$T_{\mu\nu} = (\rho_m + p_m)u_\mu u_\nu + p_m g_{\mu\nu}, \tag{12}$$

其中 ρ_m 为密度， p_m 为压力，两者通过如下形式的正压状态方程相联系： $p_m = w_m \rho_m$。在能动量张量的表达式中，我们引入了四速度 $u_\mu = \delta^0_\mu$。此外，在计算中我们将考虑 $L_m = p_m$。下文中，我们将忽略物质扇区的压力，考虑一种对应于无压力非相对论流体的理论情形。在这一宇宙学背景下，我们得到如下修正的弗里德曼关系 [72]:

$$f(R) - 6f_R(\dot{H} + H^2) + 6H\dot{f_R} = \rho_m - g(\phi) - 6\rho_m g_{,\phi}\dot{H}, \tag{13}$$

$$f(R) - 2f_R(\dot{H} + 3H^2) + 2\ddot{f_R} + 4H\dot{f_R} = -p_\phi, \tag{14}$$

$$p_\phi = g(\phi) - 2g_{,\phi}(\rho_m(3H^2 + \dot{H}) + H\dot{\rho_m}) - 6H^2\rho_m\big[2\rho_m\dot{H} + H\dot{\rho_m}\big]g_{,\phi\phi}. \tag{15}$$

于是，我们可以将有效（总）状态方程定义为:

$$w_{tot} = -1 - \frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2}. \tag{16}$$

对于无压力的 FLRW 模型，物质–几何不变量取得如下值:

ϕ = $3H^2\rho_m$ R = , $6\ \dot{H} + 2H^2$

而标量曲率等于（ ）。正如预期的那样，当 g（ϕ） $=0$且 f（R） $= \frac{R}{2}$时，所得场方程将化为基本的爱因斯坦方程。同样地，在物质能动量张量与爱因斯坦张量之间不存在相互作用的情况下，该模型描述了 f（R）引力理论 [73] 。最后，我们注意到，在g（ϕ） $= g_0\phi$的线性阶，方程将化为参考文献 [72]中所给出的关系式。如前所述，本文提出的作用量为参考文献 [72], 中分析的推广，以一般方式扩展了场方程。

III. 一般耦合函数的相空间分析

本节将讨论耦合函数如下时的物理特征:

$$f(R) = f_0 R^n, \tag{17}$$

and

$$g(\phi) = g_0\phi^m, \tag{18}$$

其中 f_0， g_0， n， m 为常数参数。为了研究宇宙学模型，我们需要引入以下无量纲变量:

$$x = \frac{\dot{f_R}}{f_R H}, \tag{19}$$

$$z = \frac{R}{6H^2}, \tag{20}$$

$$s = \frac{\rho_m}{6f_R H^2}, \tag{21}$$

$$u = \frac{g(\phi)}{6f_R H^2}. \tag{22}$$

此外，我们将使用以下非独立变量:

$$\varsigma = \frac{\ddot{R}}{H^4}, \tag{23}$$

$$\Delta = \frac{\dot{\rho_m}}{f(R)H}. \tag{24}$$

根据上述定义，我们可以将弗里德曼约束方程（13）改写如下:

$$z(\frac{1}{n} - 1) + 1 + x = s - u - 2umz + 4um, \tag{25}$$

使自治系统的维数减少一个单位。因此，我们得到以下自治系统 $\{z, s, u\}$。考虑到向倍增数 $N = log(a)$ 的变换，我们可以在线性阶近似宇宙系统的动力学，

$$\frac{dz}{dN} = z\left(\frac{x}{n-1} - 2z + 4\right), \tag{26}$$

$$\frac{ds}{du} = \frac{\Delta z}{n} + s(-x) - 2sz + 4s, \tag{27}$$

$$\frac{du}{dN} = u\left(\frac{\Delta mz}{ns} + 2(m-1)(z-2) - x\right). \tag{28}$$

加速度方程 (14) 可表示为:

$$\Delta = \frac{s\left(6nz\left((2m(4m-5)+3)(n-1)u+(n-2)x^2+2(n-1)x-n+1\right)-6(n-1)z^2(2m(2m-1)nu+n-3)+n(n-1)^2\varsigma\right)}{12m^2(n-1)uz^2}, \tag{29}$$

从而得到 Δ 和 ς 之间的直接关系。通过直接对弗里德曼约束方程 (13) 求导，可得到这两个非独立变量之间的另一关系，即

$$\begin{aligned}\frac{n(6z((n-2)x^2-nx+2(n-1)(z-2)+x)+(n-1)^2\varsigma)}{6(n-1)z^2} \\ = \Delta + mu(-\frac{2n(z-2)(2m(z-2)-2z+1)}{z} \\ + \frac{\Delta(-2m(z-2)-1)}{s} - \frac{2nx}{n-1}).\end{aligned} \tag{30}$$

采用这种方法，我们可以封闭自治方程组，得到非独立变量 ς 和 Δ 的具体关系。自治系统的最终形式如下：

$$\frac{dz}{dN} = -\frac{z\left(nu(2mz-4m+1)+2n^2z-4n^2-ns-3nz+5n+z\right)}{(n-1)n}, \tag{31}$$

$$\frac{ds}{du} = s(2muz-4mu+\frac{z}{n}-s+u-3z+5+\frac{A}{B}), \tag{32}$$

$$A = ns(2muz-3n+3)-2mu(z^2(2mnu-(n-1)(2(m-1)n+1))+nz(6mn-4mu-6m-7n+u+8)-(4m-3)(n-1)n), \tag{33}$$

$$B = (n-1)n(mu(-2mz+2m-1)+s), \tag{34}$$

$$\frac{du}{dN} = u(2muz-4mu+2(m-1)(z-2)+\frac{z}{n}-s+u-z+1+\frac{C}{D}), \tag{35}$$

$$C = m(ns(2muz-3n+3)-2mu(z^2(2mnu-(n-1)(2(m-1)n+1))+nz(6mn-4mu-6m-7n+u+8)-(4m-3)(n-1)n)) \tag{36}$$

$$D = (n-1)n(mu(-2mz+2m-1)+s). \tag{37}$$

通过令方程 (26)–(28) 右端为零，可得到自治系统的临界点。在本例中，我们得到了以下临界点，它们对应于不同的宇宙学解，并与宇宙演化过程中的各个时期相关联。

本分析研究的第一个临界点在相空间结构中的坐标如下：

$$\mathcal{Q}_1 = \left[z=0, s=2, u=0\right], \tag{38}$$

描述一个辐射时代（$w_{tot}=\frac{1}{3}$），其中动力学主要通过 s 变量受到物质成分的影响。相应的特征值为

如下：

$$\left[-2, 3-7m, \frac{4n-3}{n-1}\right]. \tag{39}$$

可以看出，根据耦合参数 n 和 m 的不同，这一时期既可能是稳定的，也可能是鞍点。

第二个临界点的坐标如下：

$$\mathcal{Q}_2 = \left[z=2-\frac{3}{2n}, s=\frac{(13-8n)n-3}{2n^2}, u=0\right], \tag{40}$$

受曲率耦合取值的影响，而不受物质–几何相互作用的影响。总状态方程（$w_{tot}=\frac{1}{n}-1$）可以

通过精细调节曲率耦合参数 n 的取值来模拟加速膨胀时期。从动力学角度来看，我们得到了以下特征值:

$$\big[3-\frac{3m(n+1)}{n},\\ \frac{\pm\sqrt{256n^4-864n^3+1025n^2-498n+81}-3n+3}{4(n-1)n}\big]. \tag{41}$$

从物理角度看，有效物质密度参数的值应为实数且为正，$s>0$。我们在图 1 中展示了一个特定区域，其中 $\mathcal{Q}_2$ 是一个稳定节点，所有特征值的实部均为负，且有效物质密度参数被限制在 $[0,1]$ 区间内。从图 2 可以看出，总状态方程的值取决于标量曲率耦合参数。我们注意到，临界点 $\mathcal{Q}_1$ 和$\mathcal{Q}_2$ 的主要物理特征不受物质–几何不变量影响；这些解可见于早期的不同研究中，是作用量 [21] 中 $f(R)$分量的特有解。对于这些解，物质–几何不变量通过动力学影响其物理特征，进而影响相应特征值的取值。

第三个临界点表示一个几何暗能量解，其动力学主要由物质–几何耦合不变量驱动，

$$\mathcal{Q}_3=\big[z=0,s=0,u=\frac{8m-5}{8m^2-6m+1}\big]. \tag{42}$$

该解对应于一个辐射时期（$w_{tot}=\frac{1}{3}$），其特征值如下:

$$\big[\frac{6-10m}{1-2m},\frac{5-8m}{2m-1},\frac{m(8n-2)-4n}{(2m-1)(n-1)}\big]. \tag{43}$$

通过适当的精细调节，我们可以为常数参数获得可行的限制条件，使该解具有鞍点动力学。例如，若考虑以下限制条件，

$$m<\frac{1}{2}\vee m>\frac{5}{8}, \tag{44}$$

我们将获得与辐射时代相关的鞍点行为。

接下来，可以在相空间结构中以下列坐标找到解 $\mathcal{Q}_4$：

$$\mathcal{Q}_4=\big[z=0,s=-\frac{2m(5m-3)(9m-5)}{(m-1)(m(18m-13)+3)},\\ u=\frac{27m-9}{m(18m-13)+3}+\frac{2}{m-1}\big], \tag{45}$$

其行为与 $\mathcal{Q}_3$ ($w_{tot}=\frac{1}{3}$) 相似。在这种情况下，有效物质密度参数会受到物质–几何相互作用的影响，而不受曲率耦合的影响。我们得到了以下特定特征值:

$$\big[-\frac{2\left(35m^2-36m+9\right)}{14m^2-23m+9},\frac{5-9m}{m-1},\frac{4(mn+m-n)}{(m-1)(n-1)}\big]. \tag{46}$$

与前一种情况一样，通过适当的精细调节，我们可以确定一些特定区域，其行为对应于鞍点动力学，与已知的宇宙演化历史相符。图 3 绘出了不同 m 取值下物质密度参数的变化；该辅助变量与物质和几何之间的相互作用有关。

对于临界点 $\mathcal{Q}_5$，其坐标如下:

$$\mathcal{Q}_5=\big[z=2,s=-\frac{2m(n-2)}{(2m-1)n},u=-\frac{2-n}{n-2mn}\big], \tag{47}$$

一个对应于德西特时期的特定解，此时动力学对应于宇宙学常数（$w_{tot}=-1$）。与特征值相关的公式过于复杂，无法在手稿中展示。作为替代，我们在图 4 中展示了一个感兴趣的特定区域；考虑到以下限制条件:
$s\in[0,1]$，该区域中的宇宙学解稳定且物理上可行。趋向于 $\mathcal{Q}_5$ 解的数值演化见图 5，体现了解析分析与数值方法之间的一致性（$m=1,\ n=1.7$）。

最后一类临界点可由以下坐标给出:

$$\mathcal{Q}_6^{\pm}=\big[z=\frac{\pm\sqrt{4m^2+4(1-4m)mn+(2mn+n)^2}+m(6n-2)-n}{4mn},s=0,\\ u=\frac{-28m^2n^2\mp\left(2m(n-2)+2n^2-3n+1\right)\sqrt{4m^2((n-4)n+1)+4mn(n+1)+n^2}+\mathcal{R}}{8m^2n(3m-n-1)}\big], \tag{48}$$

其中 $\mathcal{R}=40m^2n-4m^2+4mn^3-8mn+2m+2n^3-3n^2+n$。由于这两个解非常相似，我们只讨论 $\mathcal{Q}_6^+$ 情形。可以看出，物质–几何耦合和标量曲率分量会影响相空间结构中临界点的位置

曲率及其相应的动力学特征。这个时期可以视为曲率–物质–几何解，其中从有效密度参数来看，几何–物质组分完全占主导地位。对于这个点，我们得到了以下总状态方程，

$$w_{tot} = \frac{-\sqrt{4m^2 + 4(1-4m)mn + (2mn+n)^2} - 4mn + 2m + n}{6mn}, \tag{49}$$

其分别受到标量曲率耦合和物质–几何不变量的影响。通过精细调节这些参数，我们可以得到不同类别的宇宙学时代。例如，若设定$m = 1$ 和 $n = \frac{2}{3}$，则可得到物质主导时期；而对于 $m = 2$ 和 $n = \frac{1}{3}$，则会呈现辐射行为。在图 6 中，我们绘制了总状态方程随 m 和 n 参数取值变化的情况。可以看到，通过精细调节，我们能够得到不同的取值，分别对应德西特、精质和幻影状态。相应特征值的最终解析表达式十分冗长，因此未在手稿中列出。我们转而在图 7 中展示一个非唯一的可能区间，在该区间内，宇宙学解由一个鞍点临界点表示。

IV. 幂律表示的相空间分析

接下来，我们研究几何耦合函数扩展基本的爱因斯坦–希尔伯特作用量 $f(R,\ \phi) = \frac{R}{2} + g_0\phi^\alpha$ 时的相空间结构，并考虑物质–几何不变量的幂律表示。在这种情况下，需要引入以下无量纲变量：

$$s = \frac{\rho_m}{3H^2}, \tag{50}$$

$$x = \frac{g(\phi)}{3H^2}, \tag{51}$$

$$y = \frac{\dot{H}}{H^2}. \tag{52}$$

用无量纲变量表示，弗里德曼约束方程（13）变为：

$$-1 + s - x(2\alpha y + 1) = 0, \tag{53}$$

使相空间的维数减少一个单位。因此，最终的独立无量纲变量为：$\{s, x\}$。于是，相关动力学方程具有如下形式：

$$\frac{ds}{dN} = -2sy + \mathcal{L}, \tag{54}$$

$$\frac{dx}{dN} = \frac{\alpha x \mathcal{L}}{s} + 2\alpha xy - 2xy, \tag{55}$$

其中，非独立变量定义为 $\mathcal{L} = \frac{\rho_m'}{3H^3}$。利用加速度方程（14）的具体形式，可以提取出该非独立变量，

$$\mathcal{L} = -\frac{s((2\alpha-1)x(2\alpha y+3) - 2y - 3)}{2\alpha^2 x}. \tag{56}$$

因此，我们得到自治系统的最终形式：

$$\frac{ds}{dN} = \frac{s\left(x\left(4\alpha^2 + 2\alpha + (1-4\alpha)\alpha s - 1\right) + s - 2(\alpha-1)\alpha x^2 - 1\right)}{2\alpha^3 x^2}, \tag{57}$$

$$\frac{dx}{dN} = \frac{-x(-4\alpha + \alpha s + 1) + s + 2\alpha(2-3\alpha)x^2 - 1}{2\alpha^2 x}. \tag{58}$$

与前一种情况一样，通过分析自治系统的右端项，我们确定了以下临界点。

第一个临界点位于以下坐标：

$$\mathcal{U}_1 = \left[s = \frac{2\alpha}{2\alpha-1}, x = \frac{1}{2\alpha-1}\right], \tag{59}$$

表示一个具有以下特征值的德西特时期（$w_{tot} = -1$）：

$$\left[\frac{2\alpha(4-7\alpha) \pm \sqrt{4(\alpha-1)\alpha((\alpha-7)\alpha+4)+1} - 1}{4\alpha^2}\right]. \tag{60}$$

对于这一点，我们在图 8 中展示了

s 变量在 α 为负的情况下的取值。 s 变量表示物质密度参数，从物理角度来看必须为正。如图所示，这个临界点对应于几何耦合函数表现为宇宙学常数的时期。从动力学角度来看，当 α为负时，该点是一个吸引子，其特征值为负。

第二个临界点代表相空间中位于以下位置的一个时期：

$$\mathcal{U}_2^{\pm} = \left[s = 0, x = \frac{\pm\sqrt{-8\alpha^2+8\alpha+1} - 4\alpha + 1}{8\alpha - 12\alpha^2} \right], \quad (61)$$

其有效状态方程为：

$$w_{tot} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{1-8(\alpha-1)\alpha}+1}{6\alpha}, \quad (62)$$

该点对几何耦合参数 α 的取值敏感。我们注意到，物质密度参数的值为零，这一特征表明几何—物质耦合在背景层面的有效动力学中发挥着根本作用。接下来，我们简要描述 $\mathcal{U}_2^+$ 解。耦合参数 α 取不同值时，特定区域内的动力学如图 9 所示。可以看出，通过精细调节，该临界点能够解释宇宙历史上的多个阶段：超加速、辐射（$\alpha = \frac{2}{3}$）和物质主导（$\alpha = 1$）。加速膨胀（$w_{tot} < -\frac{1}{3}$）出现在以下区间内：$\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{6}\right) \leq \alpha < 0\right)$。从动力学角度来看，对于 $\mathcal{U}_2^+$ 解，我们得到以下特征值：

能够描述加速膨胀的时期

$$\left[\frac{2(3\alpha-2)\left(8\alpha^2+4\left(\sqrt{-8\alpha^2+8\alpha+1}-2\right)\alpha - \sqrt{-8\alpha^2+8\alpha+1}-1\right)}{\alpha\left(\sqrt{-8\alpha^2+8\alpha+1}-4\alpha+1\right)^2}, \right.$$
$$\left. \frac{2(2\alpha-1)\left(24\alpha^3-6\left(\sqrt{-8\alpha^2+8\alpha+1}+3\right)\alpha^2+\sqrt{-8\alpha^2+8\alpha+1}+4\alpha+1\right)}{\alpha^2\left(\sqrt{-8\alpha^2+8\alpha+1}-4\alpha+1\right)^2} \right]. \quad (63)$$

根据对前述特征值的解析分析， $\mathcal{U}_2^+$ 解在以下区间内为稳定节点（特征值为实数且为负）：$\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{6}\right) < \alpha < 0$。最后，我们发现，后一种解能够解释多种宇宙学时代，其对几何—物质耦合取值高度敏感，该耦合体现在 α 系数中。对于$\mathcal{U}_2^-$解，我们观察到类似的行为；值得注意的是， $\mathcal{U}_2^-$无法解释物质时代和辐射时期，而加速膨胀现象则更易出现。

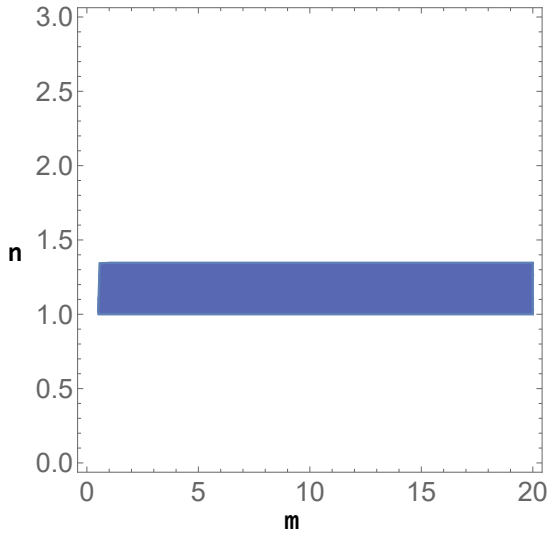


图 1. 临界点 $\mathcal{Q}_2$ 稳定且在物理上可行的特定区域，其中 $s \in [0,1]$。

V. 指数模型的相空间分析

本节将考虑以下列方式定义的函数子类：

$$f(R,\phi) = \frac{R}{2} + g_0 e^{\alpha\phi}, \quad (64)$$

其中 f_0 和 α 为常数参数。可以看出，该作用量基于基本的爱因斯坦—希尔伯特作用量中为物质–几何分量引入了指数函数表示。对于这一特定模型，我们需要引入以下辅助变量：

$$s = \frac{\rho_m}{3H^2}, \quad (65)$$

$$x = \frac{g(\phi)}{3H^2}, \quad (66)$$

$$y = H^2\dot{H}, \quad (67)$$

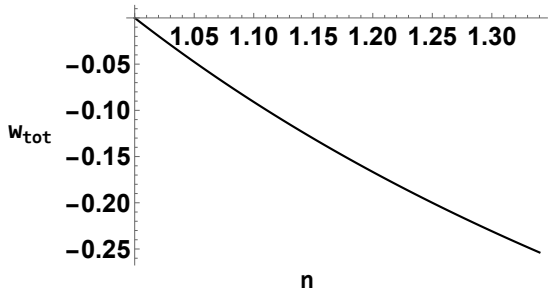


图 2. 临界点 $\mathcal{Q}_2$处总状态方程的变化。

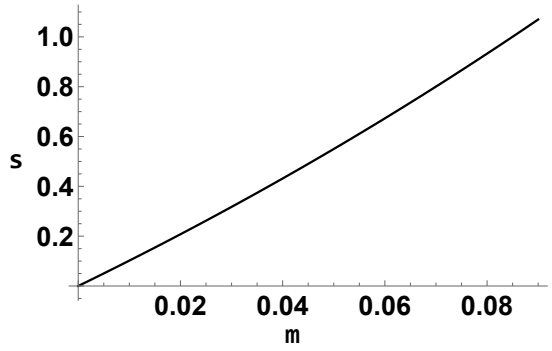


图 3. 宇宙学解 $\mathcal{Q}_4$中 s 变量的变化。

$$z = \frac{1}{H^2}. \tag{68}$$

此外，我们还添加以下非独立变

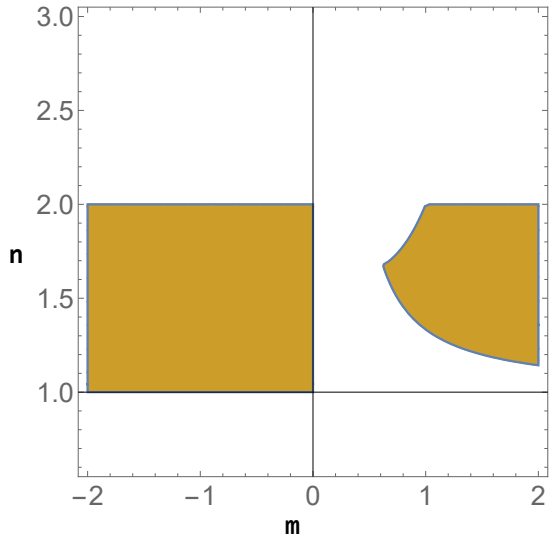


图 4. 宇宙学解 $\mathcal{Q}_5$ 在物理上可行且稳定的区域 $s \in [0, 1]$。

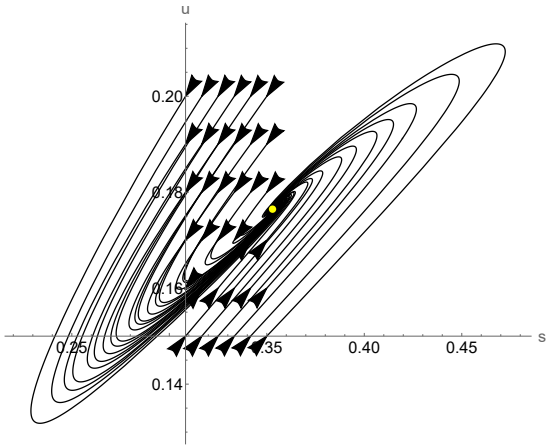


图 5. 对吸引子盆地中不同初始条件，沿相空间向 de–Sitter 解 $\mathcal{Q}_5$ 的演化。

able

$$\mathcal{L} = H\dot{\rho_m}, \tag{69}$$

该变量将用于构成自治系统。在这些变量下，弗里德曼约束方程（13）化简为以下关系：

$$1 + x + s(-1 + 18\alpha xy) = 0. \tag{70}$$

于是，自治系统变为：

$$\frac{ds}{dN} = \frac{z^2\mathcal{L}}{3} - 2syz^2, \tag{71}$$

$$\frac{dx}{dN} = 18\alpha sxy - 2xyz^2 + 3\alpha x\mathcal{L}, \tag{72}$$

$$\frac{dz}{dN} = -2yz^3, \tag{73}$$

而加速度方程 (14) 等于：

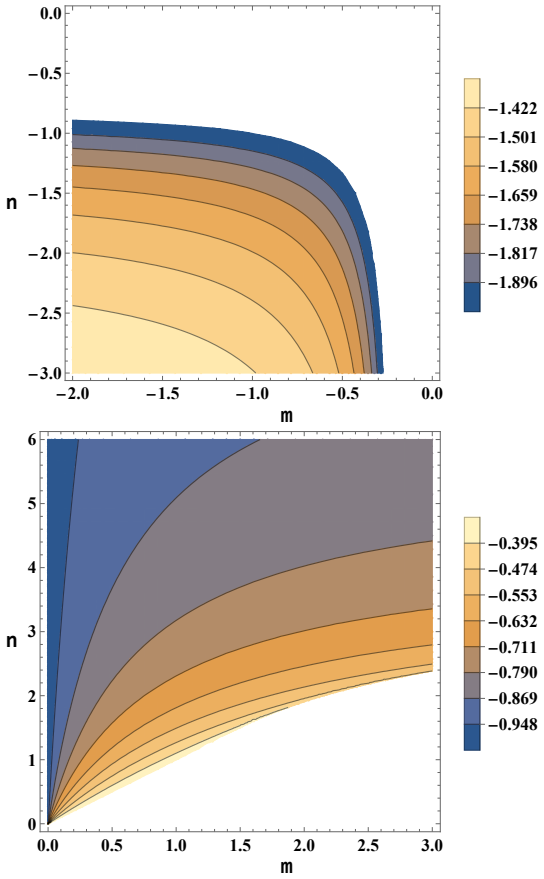


图6. $\mathcal{Q}_6^+$ 曲率–物质–几何解的总状态方程变化。

$$\frac{3x\left(108\alpha^2 s^2 y+6\alpha s\left(yz^2+3\alpha\mathcal{L}+3\right)+z^2(2\alpha\mathcal{L}-1)\right)}{z^3}=2yz+\frac{3}{z} \tag{74}$$

由于加速度方程 (14) 的具体形式，我们可以消去 $\mathcal{L}$ 变量，从而得到一个三维动力系统 $\{s,x,z\}$。与前面的情况一样，我们通过分析自治微分方程组的右端，确定相应的临界点。对于最后一种耦合函数由指数函数表示的物理模型，我们仅识别出一类宇宙学解，其在相空间结构中的坐标如下：

$$\Xi_1=\left[s=\frac{18\alpha+z^2}{18\alpha},x=\frac{z^2}{18\alpha}\right]. \tag{75}$$

临界线对应一个德西特解（$w_{tot}=-1$），描述了这样一个时期：几何与物质相互作用所引发的动力学表现出类似宇宙学常数的行为。在图10中，我们绘制了 $\{z,\alpha\}$ 空间中的一个特定区域；考虑到存在条件，临界线 Ξ_1 在该区域内是可行的。

对于这个宇宙学解，我们得到了以下特征值：

$$\left[0,-\frac{2268\alpha^3+11\alpha z^4+360\alpha^2z^2\pm\sqrt{\alpha^2\left(104976\alpha^4-23z^8-720\alpha z^6-7128\alpha^2z^4-46656\alpha^3z^2\right)}}{648\alpha^3+6\alpha z^4+144\alpha^2z^2}\right], \tag{76}$$

这描述了一个非双曲解，该解可能是鞍点——在某些特定区间内可行。例如，如果我们考虑

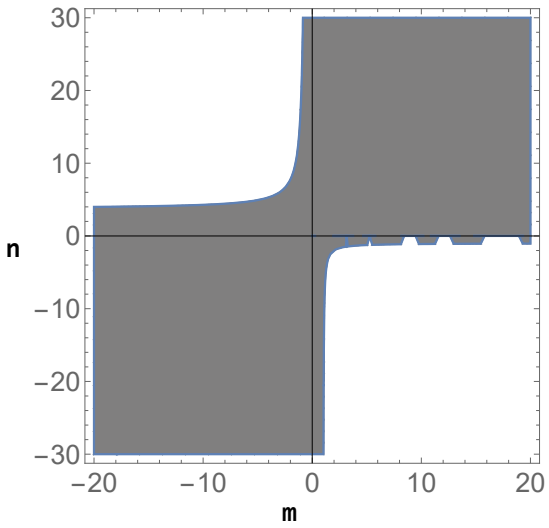


图 7. 宇宙学解 $\mathcal{Q}_6^+$ 呈现鞍点动力学行为的区域。

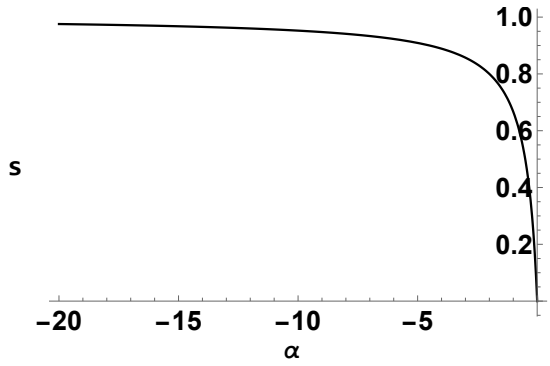


图 8. 德西特临界点 $\mathcal{U}_1$对应的物质密度参数值。

以下限制条件，

$$z \in \mathbb{R} \wedge z \neq 0 \wedge -\frac{z^2}{6} < \alpha < -\frac{z^2}{18}, \tag{77}$$

我们得到一个具有鞍点行为的德西特时代，其动力学对应于在爱因斯坦场方程中加入宇宙学常数。

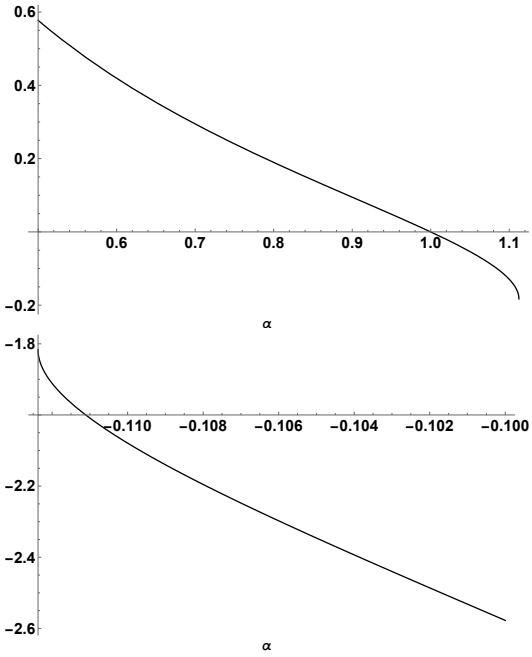


图 9. $\mathcal{U}_2^+$ 临界点的总状态方程。

VI. 结论

本文研究了基于物质能动量张量与由爱因斯坦张量表征的几何部分之间特定耦合关系的新宇宙学模型。在推导出物质成分由无压力正压流体描述时的场方程后，我们采用线性稳定性理论，研究了相应动力学的物理方面。线性稳定性理论是一种特定的数学方法，与全局动力学相关，可在相空间结构中确定宇宙可能的演化。我们研究的第一个理论模型与以下类型的一般函数有关： $f(R, \phi) = f_0 R^n + g_0 \phi^m$，其中 f_0，g_0，n，m 为常数参数。在这种情况下，相空间由一个三维系统描述，其中包含多个临界点，它们对应于与宇宙晚期演化相容的不同时代。对于该模型，我们得到了以下几类宇宙学时代：德西特时代、辐射时代，以及取决于耦合参数 n 和 m 的特定解。这些解可以描述宇宙中的加速时代和晚期动力学。对于每一类宇宙学解，我们都从动力学角度得到了模型参数可能受到的约束，这些约束由特定取值所表征相应的特征值。

第二个宇宙学模型对应于以下耦合函数， $f(R, \phi) = \frac{R}{2} + g_0 \phi^\alpha$。该模型通过幂律形式扩展了基本的爱因斯坦–希尔伯特作用量，其中包含物质–几何相互作用所产生的非最小效应。在第二种情形下，相空间复杂度有所降低，对应于一个二阶动力系统。所得到的宇宙学解

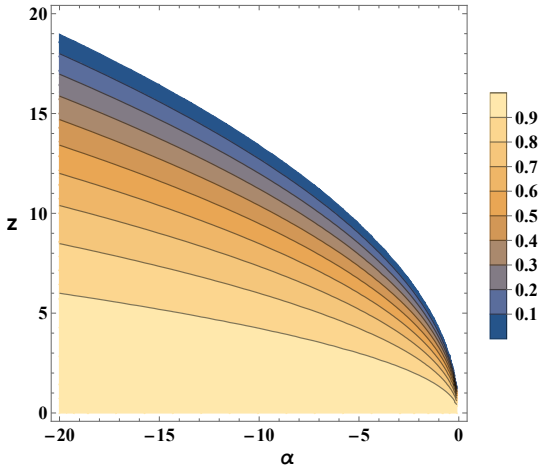


图10. 该图展示了一个特定区域，在此区域内，德西特临界点 Ξ_1 是可行的，且物质密度参数处于 $[0,1]$ 区间。

可以描述德西特时期和晚期加速。此外，对于耦合参数的不同取值，我们可以得到不同的宇宙学解，例如辐射演化或精质/幻影场型动力学。与前一种情形一样，对于每一类宇宙学解，我们都得到了可能的动力学约束。

最后一个宇宙学模型由以下耦合函数描述： $f(R, \phi) = \frac{R}{2} + g_0 e^{\alpha\phi}$，其中 g_0，α为常数参数。可以看出，这个特定的宇宙学系统通过一个一般的指数函数扩展了基本的爱因斯坦–希尔伯特项，在其中编码了物质能量动量张量与爱因斯坦张量之间的特定缩并。相应的相空间为三维，其中只有一条与德西特时期相关的临界线，这解释了宇宙中的晚期加速膨胀；其动力学与在爱因斯坦–希尔伯特项中加入宇宙学常数所诱导的动力学十分相似。从动力学角度看，这个特定模型只能解释加速膨胀和晚期演化。因此，在这个特定模型中，早期演化只能通过精细调节来解释。

可以看出，这种基于物质与几何相互作用的宇宙学模型能够解释宇宙演化过程中的各种动力学效应，是修正引力理论中一种颇具意义且可行的方法。通过采用不同的理论方法，可以进一步研究当前模型。例如，原则上可以开展观测研究，为本文分析的特定一般函数添加具体约束。在这些方法中，原则上可以应用特定的重构方法，从而在晚期演化过程中得到不同的物理效应。所有这些方面都能展现当前宇宙学方法的可行性与局限性。

七、致谢

对于本项目，我们使用 **Wolfram Mathematica** [74]–**xAct** [75]进行了各种解析计算。

[1] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. Banday, R. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak 等，《天文学与天体物理学》**641**, A6 (2020). [2] Y. Akrami, F. Arroja, M. Ashdown, J. Au mont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak 等，《天文学与天体物理学》**641**, A10 (2020). [3] J. A. Frieman, M. S. Turner 和 D. Huterer，《天文学与天体物理学年度评论》**46**, 385 (2008). [4] J. Yoo 和 Y. Watanabe，《现代物理学国际期刊 D》**21**, 1230002 (2012). [5] M. Li, X.-D. Li, S. Wang 和 Y. Wang，《物理学前沿（北京）》**8**, 828 (2013), 1209.0922. [6] E. J. Copeland, M. Sami 和 S. Tsujikawa，《现代物理学国际期刊D》**15**, 1753 (2006), hep-th/0603057. [7] K. Arun, S. Gudennavar 和 C. Sivaram，《空间研究进展》**60**, 166 (2017). [8] P. Brax，《物理学进展报告》**81**, 016902 (2017). [9] P. J. E. Peebles 和 B. Ratra，《现代物理评论》**75**, 559 (2003).

[10] G. Bertone 和 D. Hooper，《现代物理评论》**90**, 045002 (2018). [11] K. Garrett 和 G. Duda，《天文学进展》**2011**, 1 2011( ). [12] K. Freese，《现代物理学国际期刊D》**26**, 1730012 2017( ). [13] J. L. Cervantes-Cota 和 G. Smoot，载于 *AIP Conference Proceedings* 2011 (美国物理联合会,)，第 1396 卷，第 28–52 页。[14] D. Huterer 和 D. L. Shafer，《物理学进展报告》**81**, 016901 (2017). [15] A. Albrecht 和 G. Bernstein，Physical Review D **75**, 103003 2007( ). [16] D. Huterer 和 M. S. Turner, Physical Review D **64**, 123527 2001( ). [17] T. Abbott, A. Alarcon, S. Allam, P. Andersen, F. Andrade-Oliveira, J. Annis, J. Asorey, S. Avila, D. Ba- con, N. Banik 等，《物理评论快报》**122**, 171301 (2019). [18] W. J. Wolf 和 M. Lagos，《物理评论快报》**124**, 061101 2020( ). [19] J. Elvin-Poole, M. Crocce, A. Ross, T. Giannantonio, E. Rozo, E. Rykoff, S. Avila, N. Banik, J. Blazek, S. Bri-

dle 等，Physical Review D 98, 042006 (2018). [20] 暗能量巡天合作组：T. Abbott, F. Abdalla, J. Aleksi´c, S. Allam, A. Amara, D. Bacon, E. Balbinot, M. Banerji, K. Bechtol 等，皇家天文学会月刊 460, 1270 (2016). [21] S. Bahamonde, C. G. B¨ohmer, S. Carloni, E. J. Copeland, W. Fang 和 N. Tamanini，《物理学报告》775-777, 1 (2018), 1712.03107. [22] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，现代物理几何方法国际期刊 4, 115 (2007). [23] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，天体物理学与空间科学 342, 155 (2012). [24] M. Marciu，Eur. Phys. J. C 81, 1084 (2021), 2103.08420. [25] M. Marciu，Phys. Rev. D 101, 103534 (2020), 2003.06403.[26] S. Bahamonde, M. Marciu 和 P. Rudra, Phys. Rev. D 100, 083511 (2019), 1906.00027. [27] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，Physical Review D 74, 086005 2006( ). [28] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，《物理学报告》505, 59 (2011). [29] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，Physical Review D 77, 026007 2008( ). [30] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov 和 S. Zerbini，宇宙学与天体粒子物理学杂志 2005, 010 (2005). [31] A. De Felice 和 S. Tsujikawa, Living Reviews in Relativity 13, 1 (2010). [32] T. P. Sotiriou 和 V. Faraoni，《现代物理评论》82, 451 (2010). [33] L. Sebastiani 和 R. Myrzakulov，现代物理几何方法国际期刊 12, 1530003 (2015). [34] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，物理快报B 631, 1 (2005). [35] A. De Felice 和 S. Tsujikawa，物理快报B 675, 1 (2009). [36] S. Nojiri, S. Odintsov 和 V. Oikonomou，Physics Re- ports 692, 1 (2017). [37] J. Wang 和 K. Liao，经典与量子引力 29, 215016 (2012). [38] T. Harko 和 F. S. Lobo，《欧洲物理学杂志C》70, 373 (2010). [39] T. Harko, F. S. Lobo, S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，Physical Review D 84, 024020 (2011). [40] F. Alvarenga, A. De La Cruz-Dombriz, M. Houndjo, M. Rodrigues 和 D. S´aez-G´omez，Physical review D 87, 103526 (2013). [41] P. Moraes 和 P. Sahoo，Physical Review D 96, 044038 (2017). [42] M. Sharif 和 M. Zubair，宇宙学与天体粒子物理学杂志 2012, 028 (2012). [43] S. D. Odintsov 和 D. S´aez-G´omez，物理快报B 725, 437 (2013). [44] P. Moraes 和 P. Sahoo，《欧洲物理学杂志C》77, 1 (2017). [45] H. Shabani 和 M. Farhoudi，Physical Review D 90, 044031 2014( ). [46] M. Zubair, S. Waheed 和 Y. Ahmad，《欧洲物理学杂志C》76, 1 (2016). [47] H. S habani 和 M. Farhoudi，Physical Review D 88, 044048 2013( ). [48] J. L. Rosa，Physical Review D 103, 104069 (2021).

[49] R. Zaregonbadi、M. Farhoudi 和 N. Riazi，《物理评论D》94, 084052（2016年）。[50] M. Houndjo，《现代物理学国际期刊D》21，1250003（2012年）。[51] J. Sola、A. G´omez-Valent 和 J. de Cruz P´erez，《现代物理学快报A》32，1750054（2017年）。[52] S. Dutta、E. N. Saridakis 和 R. J. Scherrer，《物理评论D》79, 103005（2009年），网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.103005。[53] R. R. Caldwell、M. Kamionkowski 和 N. N. Weinberg，《物理评论快报》91, 071301（2003年），网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.071301。[54] Y.-F. Cai、E. N. Saridakis、M. R. Setare 和 J.- Q. Xia，《物理学报告》493，1（2010年），ISSN 0370- 1573，网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157310000943。[55] M. Marciu，《物理评论D》99，043508（2019年）。[56] M. Marciu、D. M. Ioan 和 F. V. Iancu，《现代物理学国际期刊D》28，1950018（2018年）。[57] M. Marciu，《物理评论D》93，123006（2016年）。[58] M. Marciu、F. V. Iancu、D. M. Ioan 和 V. Baran，《罗马尼亚物理学杂志》65，115（2020年）。[59] M. Marciu，《欧洲物理学杂志C》80，1（2020年）。[60] M. Marciu，《加拿大物理学杂志》99, 281（2021年）。[61] Z. Haghani、T. Harko、F. S. Lobo、H. R. Sepangi 和 S. Shahidi，Physical Review D 88，044023（2013年）。[62] T. Naseer 和 M. Sharif，《宇宙》8（2022年），ISSN 2218-1997，网址：https://www.mdpi.com/2218-1997/8/2/62。[63] Z. Yousaf、M. Bhatti 和 H. Asad，《暗宇宙物理学》28，100527（2020年），ISSN 2212- 6864，网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686420300844。[64] M. S. Fox，《物理评论D》99, 124027（2019年），网址：https: //link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.124027。[65] M. Sharif 和 A. Waseem，《欧洲物理学杂志Plus》133，136（2018年）。[66] M. A. Abchouyeh、B. Mirza、P. Shahidi 和 F. Oboudiat，《国际几何方法现代物理学杂志》17，2050008 2020 2004 01265 ( ), . . [67] M. Sharif 和 A. Waseem，《现代物理学国际期刊D》27，1950007 2018 1812 11037 ( ), . . [68] M. Sharif 和 T. Naseer，《中华物理学刊》73，179（2021年），ISSN 0577-9073，网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0577907321001362。[69] Z. Yousaf、M. Bhatti、T. Naseer 和 I. Ahmad，《暗宇宙物理学》29，100581（2020年），ISSN 2212-6864，网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686420301412。[70] I. Ayuso、J. Beltr´an Jim´enez 和 A. de la Cruz-Dombriz，《物理评论D》91，104003（2015年），网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.104003。[71] A. Z. Kaczmarek 和 D. Szczesniak，《科学报告》11（2021年），网址：https://doi.org/10.1038/ s41598-021-97907-y。[72] P. Asimakis、S. Basilakos、A. Lymperis、M. Petronikolou 和 E. N. Saridakis, *Modified gravity and cosmology with nonminimal (derivative) coupling between matter and the einstein tensor*（2022年），网址：https://arxiv.org/abs/2212.03821。[73]T. P. Sotiriou 和 V. Faraoni，《现代物理学评论》82，451（2010年），网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.451。

Wolfram Research, Inc., *Mathematica, Version 12*, 美国伊利诺伊州尚佩恩，2019年，网址：https://www.wolfram.com/ mathematica。

[75]J. M. Martin-Garcia, *xAct: Efficient tensor computer algebra for the Wolfram Language*, 网址 http://www. xact.es。