arXiv:2302.04193v2 [math.CA] 8 Mar 2023

拟正交 Meixner 多项式的零点

A.S. Jooste[a], K. Jordaan[b,*]

[a]数学与应用数学系，比勒陀利亚大学，比勒陀利亚 0002，南非[b]决策科学系，南非大学，比勒陀利亚 0002，南非

摘要

对于 β 取值范围为 $-2 < \beta < -1$ 且 $0 < c < 1$的每个固定值，我们研究 $M_n(x; \beta, c)$ 和 $M_k(x, \beta + t, c)$ 中次数连续的多项式的零点交错性质，其中 $k \in \{n-1、n、n+1\}$ 且 $t \in \{0, 1, 2\}$。我们证明了[9] 中关于一阶拟正交多项式 $M_n(x; \beta + 1, c)$ 的第一个正零点下界的猜想，并确定了二阶拟正交 Meixner 多项式 $M_n(x; \beta, c)$前几个零点的上界和下界。我们证明，对于 $-2 < \beta < -1$ 且 $0 < c < 1$的迈克纳多项式序列 $\{M_n(x; \beta, c)\}_{n=3}^{\infty}$，不可能存在任何正测度使其正交；这是通过证明对任意 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，$M_{n-1}(x; \beta, c)$ 与 $M_n(x; \beta, c)$ 的零点不交错得出的。

关键词：正交多项式、拟正交多项式、Meixner 多项式、零点交错、零点的界
2010年数学学科分类：33C05、33C45、42C05

1. 引言

考虑一列首一正交多项式 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$，其零点为 $x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n}$，满足三项递推关系

$$p_n(x) = (x - B_n)p_{n-1}(x) - C_n p_{n-2}(x), \tag{1}$$

其中 B_n 和 $C_n > 0$ 与 x、$p_{-1} \equiv 0$ 和 $p_0 \equiv 1$无关。正交性的一个推论是，每个多项式 $p_n(x)$ 在 (a, b) 内有 n 个实且互异的零点，并且 p_n 和 p_{n-1} 的零点按如下方式交错

$$x_{1,n} < x_{1,n-1} < x_{2,n} < \cdots < x_{n-1,n} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n}.$$

此外，p_n 与 q_m的零点交错（$m \leq n-2$）称为斯蒂尔切斯交错，意指存在 m 个开区间，其端点为 p_n的相邻零点，且每个区间内恰有一个 q_m的零点。

*通讯作者 电子邮箱：alta.jooste@up.ac.za（A.S. Jooste）、jordakh@unisa.ac.za（K. Jordaan）

预印本提交至 2023年3月9日

为了满足正交条件，我们通常需要对经典正交多项式的参数加以限制；当参数以有序的方式偏离这些受限值时，零点可能以可预测的方式偏离正交区间。这一现象可以用拟正交性的概念来解释。多项式序列 $\{Q_n\}_{n=r+1}^{N}$（其中每个多项式 Q_n 的次数恰为 n，且 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$）关于权函数 $w(x) > 0$（定义在 [a,b] 上）是 $r \in \mathbb{N}$阶离散拟正交的，其中 $0 \le r < n$，当且仅当（参见 [6]）

$$\sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^m q_n(x_i) w(x_i) \begin{cases} = 0, & \text{for } m \in \{0, 1, \ldots, n-r-1\}, \\ \neq 0, & \text{for } m = n-r. \end{cases} \tag{2}$$

注意，拟正交多项式 Q_n 仅在 $n \in \{r+1, r+2, \ldots\}$ 时才有定义。显然，当 $r = 0$ 属于 (2) 时，序列 $\{Q_n\}_{n\ge 0}$ 关于 $w(x)$ 在 $[a,b]$ 上是离散正交的。

Riesz [28], 最早研究了拟正交性，随后是 Fej´er [14], Shohat [29], Chihara[5], Dickinson [7], Draux [8], Maroni [26] 和 Joulak [20]。文献 [1], 讨论了 Jacobi、Gegenbauer 和 Laguerre 序列的拟正交性；文献 [18] 研究了 Meixner 序列的拟正交性；文献 [17]则研究了 Meixner-Pollaczek、Hahn、Dual-Hahn 和 Continuous Dual-Hahn 序列的拟正交性。文献 [19] 讨论了伪 Jacobi 多项式的拟正交性，而[30] 则研究了某些超几何多项式和 q-超几何多项式的拟正交性。

拟正交多项式具有以下特征性质：

引理 1（[1, 5]）。设 $\{P_n\}_{n\ge 0}$ 是关于权函数 $w(x) > 0$ 在 [a, b] 上的一族正交多项式。对于次数为 n 的多项式 $Q_{n,k}$，其关于 w 在 [a, b], 上为 k 阶拟正交（$\le n-1$）的充要条件是

$$Q_{n,k}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i} P_{n-i}(x), \; a_{n,0} a_{n,k} \neq 0.$$

已知，对于一个具有 n 个互异实根的 k 阶拟正交多项式，存在一个求积公式，以这些零点为节点，对所有次数为 $\le 2n-k-1$ 的多项式均成立，前提是该求积公式中的权重不为零（例如，参见 [15, 27, 31]）。当其余节点为一列拟正交多项式中次数为 n 的多项式的零点时，带有一个或两个固定节点的 n 点求积公式可达到最高精度阶（参见 [2, 3, 4]）。文献 [25] 利用连续次数多项式零点的交错性质，为求积恒等式的推广给出了大幅缩短的证明。

下列各类经典拟正交多项式的零点交错性质已得到研究：[13], 中的拟正交一阶 Gegenbauer 多项式，[12], 中的 Laguerre 多项式，[10], 中的 Jacobi 多项式，[9], 中的 Meixner 多项式，[19], 中的伪 Jacobi 多项式，[21] 中的 q-Laguerre 多项式，[22], 中的 little q-Jacobi 多项式，以及 [11]中的拟正交二阶 Jacobi 多项式。

本文研究拟正交 Meixner 多项式的零点，尤其关注零点的界及其交错性质。首一 Meixner 多项式可以

用 ${}_2F_1$ 超几何级数定义（参见 [23, (9.10.1)]）

$$M_n(x;\beta,c) = \left(\frac{c}{c-1}\right)^n (\beta)_n \ {}_2F_1\left(-n,-x;\beta;1-\frac{1}{c}\right) \tag{3}$$
$$= \left(\frac{c}{c-1}\right)^n (\beta)_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(-x)_k(1-\frac{1}{c})^k}{(\beta)_k k!},\ \beta,c\in\mathbb{R},\ \beta\neq -1,-2,\ldots,-n+1,\ c\neq 0$$

其中，$_n$ 是由下式定义的 Pochhammer符号

$$\begin{aligned}(\alpha)_n &= (\alpha)(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) \text{ for } n\geq 1\\ (\alpha)_0 &= 1 \text{ when } \alpha\neq 0.\end{aligned}$$

三　　项递推关系由首一 Meixner 多项式[23, (9.10.4)] 满足，形式为

$$M_n(x;\beta,c) = \left(x+\frac{\beta c+cn-c+n-1}{c-1}\right)M_{n-1}(x;\beta,c) - \frac{c(n-1)(\beta+n-2)}{(c-1)^2}M_{n-2}(x;\beta,c) \tag{4}$$

初始条件为 $M_{-1}(x;\beta,c) = 0$ 和 $M_0(x;\beta,c) = 1$。[18]讨论了各种参数取值下的 Meixner 多项式，包括 Krawtchouk多项式对应的情形。

在第 2 节中，我们简要回顾并扩展了 $\beta>0$ 且 $c\in(0,1)$ 时 Meixner多项式的零点的一些结果。在第 3 节中，我们重点研究参数范围 $-\beta$，$c\in(0,1)$，此时 Meixner 多项式是离散拟正交的一阶拟正交，并解决了 [9] 中提出的一个猜想。我们在第 $\beta\in(-2,-1)$ 且 $c\in(0,1)$ 的情况下研究 Meixner 多项式为离散拟正交的 2 阶拟正交的情形，详见第 4 节。

2. Meixner 多项式 $M_n(x;\beta,c)$, $\beta>0, 0<c<1$

权函数

$$w(x) = \frac{c^x(\beta)_x}{x!} \tag{5}$$

在 $\beta,c>0$ 时为正，并且根据比值判别法，与权函数（5）相关的矩在 $c\in[0,1)$ 时存在。

序　　列 $\{M_n(x;\beta,c)\}^{\infty}{}_{n=0}$ 满足离散正交关系（参见 [23, (9.10.2)]）

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{c^x(\beta)_x}{x!}M_m(x;\beta,c)M_n(x;\beta,c) = \frac{c^{-n}n!}{(\beta)_n(1-c)^{\beta}}\delta_{mn}$$

当 $\beta>0$ 且 $c\in(0,1)$ 时。对于 $0<c<1$ 和 $\beta>0$，零点均互异、为正，且随着 β 增大而单调递增（参见 [16, 定理 7.1.2]）。此外，任意两个相邻零点之间都存在一个测度支撑点。Meixner 多项式相邻零点之间的最小距离大于 1 [24,定理 1]。

下面的引理将用于证明我们的一个结果。

引理 2. 设 $c \in (0,1)$, $\beta > 0$ 且 $n \in \mathbb{N}$。记 $M_n(x;\beta,c)$ 的零点为 $0 < y_{1,n} < y_{2,n} < \cdots < y_{n,n}$，则

(i) $y_{1,1} = \frac{\beta}{c} \le \beta$ 当 $c \in (0,0.5]$;

(ii) $y_{1,n} < 1 < y_{2,n}$ 当 $n \ge \frac{\beta}{c} + 1 - c$。

证明。（i）利用（3）或（4）进行简单计算可得，$M_1(x;\beta,c) = x + \frac{\beta}{c} + c - 1$，因此 $y_{1,1} = \frac{\beta}{c} \le \beta$ 当 $c \in (0, 0.5]$。

（ii）对于 $0 < c < 1$ 和 $\beta > 0$，我们有 $M_n'(1;\beta,c) - M_n(0;\beta,c) = \beta + c n - n \beta c \le 0$，当 $n \ge \frac{\beta}{c} + 1 - c$。参见 [24,注 2，第 127 页和第 131] 页，另有一种利用该多项式满足的差分方程给出的证明。

□

3. Meixner 多项式 $M_n(x;\beta,c)$, $-1 < \beta < 0, 0 < c < 1$

由超几何函数的邻接关系 [18, 式 (20)] 可知，首一 Meixner 多项式满足

$$M_n(x;\beta,c) = M_n(x;\beta+1,c) - \frac{nc}{c-1} M_{n-1}(x;\beta+1,c) \tag{6}$$

因此，对于 $-1 < \beta < 0$，序列 $\{M_n(x;\beta,c)\}_{n=2}^{\infty}$ 是 r 阶拟正交多项式 $= 1$（由引理 1 可知）。对于 $n \ge 2, 0 < c < 1$ 和 $-1 < \beta < 0$，$M_n(x;\beta,c)$ 的零点互不相同，最小零点始终为负，其余 $(n-1)$ 个零点均为正（参见[9, 定理 2.1(i)]）。

文献[9] 讨论了由 $-\beta, c \in (0,1)$ 表征的拟正交 1 阶 Meixner 多项式序列 $\{M_n(x;\beta,c)\}_{n=2}^{\infty}$ 中各多项式零点的交错情况，也讨论了拟正交 Meixner 多项式 $M_n(x;\beta,c)$ 的零点与其最近的正交对应多项式 $M_l(x;\beta+k,c)$ 的零点之间的交错情况，其中 $l, n \in \mathbb{N}, k \in \{1,2\}$。Driver 和 Jooste [9] 猜想，若 $z_{1,n} < 0 < z_{2,n} < \cdots < z_{n,n}$ 是拟正交 1 阶 $M_n(x;\beta,c)$ 的零点，则 $z_{2,n} > 1$。

命题 3. 假设 $\{M_n(x;\beta,c)\}_{n\ge 2}$ 是一列 1 阶拟正交迈克斯纳多项式，其中 $-\beta, c \in (0,1)$。将 $M_n(x;\beta,c)$ 的零点记为 $\{z_{i,n}\}_{i=1}^{n}$，并按升序排列，则

$$z_{1,n} < 0 < 1 < z_{2,n}.$$

证明。设 $-\beta, c \in (0,1)$，则 $M_n'(1;\beta,c) - M_n(0;\beta,c) = \beta + c n - n \beta c > 0$，对 $n > \frac{\beta}{c} + 1 - c$ 成立。由于当 $-\beta, c \in (0,1)$ 时，$\frac{\beta}{c} + 1 - c < 0$，因此对于所有 $n \ge 0$，多项式 $M_n(x;\beta,c)$ 在 $(0,1)$ 中要么没有零点，要么有偶数个零点。由 [9, 定理 2.1(i)], $z_{1,n} < 0$（对所有 n），并根据 [9, 注释 (2)，p.482], $z_{3,n} > 1$。因此，$M_n(x;\beta,c)$ 不可能在 $(0,1)$ 中有偶数个零点，由此可知 $M_n(x;\beta,c)$ 在 $(0,1)$ 中没有零点。因此 $z_{1,n} < 0 < 1 < z_{2,n}$，这就证明了 [9,猜想 I]。

□

以下结果是对 [9] 中结果的细化；那些结果以猜想为假设。我们在此陈述这些结果，但不提供证明。

定理 4.（参见 *[9, 定理 2.2]*）固定 n、β 和 c，其中 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ 且 $-\beta$，$c \in (0,1)$，则 $xM_{n-1}(x;\beta,c)$ 和 $M_n(x;\beta,c)$ 的零点交错。

推论 5.（参见 *[9, 推论 2.3]*）设 $-\beta$，$c \in (0,1)$，且 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$。那么，若 $z_{1,n} < 0 < z_{2,n} < \cdots < z_{n,n}$ 表示 $M_n(x;\beta,c)$ 的零点，则 $M_n(x;\beta,c)$ 的负零点随 n 增大。此外，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$z_{1,1} = \beta c - 1 - c$ 是 $M_n(x;\beta,c)$ 的负零点的一个下界。

定理 6.（参见 *[9, 定理 2.4]*）固定 n、β 和 c，其中 $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$，$-\beta$，$c \in (0,1)$。假设 $M_n(x;\beta,c)$ 和 $M_{n-2}(x;\beta,c)$ 没有公共零点，即 $M_n\left(\frac{\beta c+(c+1)(n-1)}{1-c};\beta,c\right) \neq 0$（或者等价地，$M_{n-2}\left(\frac{\beta c+(c+1)(n-1)}{1-c};\beta,c\right) \neq 0$）。那么，$\left(x - \frac{\beta c+(c+1)(n-1)}{1-c}\right) M_{n-2}(x;\beta,c)$ 的正零点与 $M_n(x;\beta,c)$ 的正零点交错。

定理 7。（参见 *[9, 定理 3.1]*）固定 n、β 和 c，其中 $n \in \mathbb{N}$ 且 $-\beta$，$c \in (0,1)$。假设 $M_n(x;\beta,c)$ 和 $M_{n-2}(x;\beta+1,c)$ 没有公共零点，即 $M_n\left(\frac{\beta c+n-1}{1-c};\beta,c\right) \neq 0$（或等价地，$M_{n-2}\left(\frac{\beta c+n-1}{1-c};\beta,c\right) \neq 0$）。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，$\left(x - \frac{\beta c+n-1}{1-c}\right) M_{n-2}(x;\beta+1,c)$ 的零点与 $M_n(x;\beta,c)$ 的（$n-1$）个正零点交错。

本节最后的结果讨论了 [9]，中未涉及的一种情形，即次数和 β 都在增加。

定理 8. 设 $\{M_n(x;\beta,c)\}_{n\geq 2}$ 是一列拟正交阶为 1 的 Meixner 多项式，且 $-\beta, c \in (0,1)$。令 $C_n = -\beta + \frac{(n+1)c}{1-c}$，并假设 $M_n(C_n;\beta,c) \neq 0$，则 $(x - C_n)M_n(x;\beta,c)$ 的 $(n+1)$ 个零点与 $M_{n+1}(x;\beta+1,c)$ 的 $(n+1)$ 个零点交错。

证明. 固定 $-\beta, c \in (0,1)$。注意，对于这些 β 和 c 的取值，$C_n > -\beta$；此外，对于所有 n，$z_{1,n} < 0 < 1 < z_{2,n}$。考虑方程

$$\frac{\beta+n}{1-c} M_n(x;\beta,c) = (x - C_n)\, M_n(x;\beta+1,c) - M_{n+1}(x;\beta+1,c), \tag{7}$$

通过比较 x^n 的系数即可验证。由于 $M_n(x;\beta+1,c)$ 和 $M_{n+1}(x;\beta+1,c)$ 是正交序列中次数连续的多项式，因此它们的零点交错，且没有公共零点。由（7）可知，$M_n(x;\beta,c)$ 和 $M_{n+1}(x;\beta+1,c)$ 至多有一个公共零点，即 $x = C_n$。若它们没有公共零点，即 $M_n(C_n;\beta,c) \neq 0$（等价地，$M_{n+1}(C_n;\beta+1,c) \neq 0$），则在 $y_{k,n+1}$ 和 $y_{k+1,n+1}$ 处对（7）求值，其中 $k \in \{1,2,\ldots,n\}$，它们是 $M_{n+1}(x;\beta+1,c)$ 的两个相邻零点，由此得到

$$\frac{\left(\frac{\beta+n}{1-c}\right)^2}{M_n(y_{k,n+1};\beta+1,c)M_n(y_{k+1,n+1};\beta+1,c)} = \frac{(y_{k,n+1}-C_n)(y_{k+1,n+1}-C_n)}{M_n(y_{k,n+1};\beta,c)M_n(y_{k+1,n+1};\beta,c)}. \tag{8}$$

正交序列中的多项式的零点彼此交错，因此，在 $M_{n+1}(x;\beta+1,c)$ 的零点处，$M_n(x;\beta+1,c)$ 的符号与 $M_n(y_{k,n+1};\beta+1,c)M_n(y_{k+1,n+1};\beta+1,c) < 0$ 不同。因此，(8) 式左侧为负。

假设对某个 $k \in \{1, 2, , k = \ldots, n\}$，有 $C_n \in (y_{k,n+1}, y_{k+1,n+1})$。那么，在包含 C_n 的这个区间内，我们有 $(y_{k,n+1} - C_n)(y_{k+1,n+1} - C_n) < 0$；要使 (8) 式右侧为负，$M_n(y_{k,n+1}; \beta, c)M_n(y_{k+1,n+1}; \beta, c) > 0$，由此可推知，在包含 C_n 的这个区间内，$M_n(x; \beta, c)$ 没有零点。在其余不包含 C_n 的 (n-1) 个区间 $(y_{k,n+1}, y_{k+1,n+1})$ 中，对 $k \in \{1, 2, , k = \ldots, n\}$，每个区间内都有一个 $M_n(x; \beta, c)$ 的零点。

点 C_n 不能位于 y_1 的左侧，$_{n+1}$，因为当 $-\beta$ 时，$c \in (0,1)$ 时，有 $y_{1,1} = \frac{(\beta+1)c}{1-c}$（见引理2），并且

$$\frac{C_n}{y_{1,1}} = \frac{\frac{c(n+1)}{1-c} - \beta}{\frac{(\beta+1)c}{1-c}} > 1,$$

当 $n > \frac{\beta}{c}$ 时，但 $\frac{\beta}{c} < 0$，因此 $C_n > y_{1,1} > y_{1,n} > y_{1,n+1}$ 对所有 $n \geq 1$ 均成立，这意味着 $C_n \notin (0, y_{1,n+1})$。假设 $C_n > y_{n+1,n+1}$。那么 $(y_{k,n+1} - C_n)(y_{k+1,n+1} - C_n) > 0$ 对每个 $k \in \{1, 2, 。 \ldots, n\}$ 都成立；要使 (8) 的右侧为负，我们需要对每个 $k \in \{1, 2, 。 \ldots, n\}$，$M_n(y_{k,n+1}; \beta, c)M_n(y_{k+1,n+1}; \beta, c) < 0$，而这只有在 $M_n(x; \beta, c)$ 的每个零点都位于由 $M_{n+1}(x; \beta + 1, c)$ 的 $(n + 1)$ 个零点作为端点的 n 个区间之一时才可能成立。这会导致矛盾，因为 $M_n(x; \beta, c)$ 有 n 个零点，其中第一个为负数，这意味着 $M_n(x; \beta, c)$ 只有 $(n - 1)$ 个零点可用于填满 $M_{n+1}(x; \beta + 1, c)$ 的 $(n + 1)$ 个正零点之间的 n 个间隙。因此，$C_n < y_{n+1,n+1}$，且 C_n 填入第 n 个间隙。□

4. Meixner 多项式 $M_n(x; \beta, c)$, $-2 < \beta < -1, 0 < c < 1$

对式（6）进行迭代，可知首一 Meixner 多项式满足 [18, 定理 7]

$$M_n(x; \beta, c) = M_n(x; \beta + 2, c) + 2n\frac{c}{1-c}M_{n-1}(x; \beta + 2, c) + n(n-1)\left(\frac{c}{c-1}\right)^2 M_{n-2}(x; \beta + 2, c).$$

这意味着，对于 $\beta \in (-2, -1)$，右端是正交多项式序列中三个项的线性组合，由引理 1 可知，当 $c \in (0,1)$ 且 $\beta \in (-2, -1)$ 时，序列 $\{M_n(x; \beta, c)\}_{n=3}^{\infty}$ 是 $r = 2$ 阶拟正交的。

下文中，我们假设 $-2 < \beta < -1, 0 < c < 1$，并采用以下记号：对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 且 $-2 < \beta < -1$，在 $c < 1$ 固定时，我们将二阶拟正交多项式 $M_n(x; \beta, c)$ 的零点记为 $x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n}$；将一阶拟正交多项式 $M_n(x; \beta + 1, c)$ 的零点记为 $z_{1,n} < z_{2,n} < \cdots < z_{n,n}$；将正交多项式 $M_n(x; \beta + 2, c)$ 的零点记为 $y_{1,n} < y_{2,n} < \cdots < y_{n,n}$。由正交性可得

$$y_{1,n} < y_{1,n-1} < y_{1,n-2} < \cdots < y_{1,1} = \left(\frac{c}{1-c}\right)(\beta + 2)$$

并且，如果 $c \in (0, 0。5]$, 由引理 2（i）可知

$$y_{1,n} < y_{1,n-1} < \cdots < y_{1,1} \leq \beta + 2 < 1.$$

引理 9. 假设 $\{M_n(x; \beta, c)\}_{n=3}^{\infty}$ 是一列二阶拟正交 Meixner 多项式，且 $\beta \in (-2, -1)$，$c \in (0, 1)$。设 $\{x_{i,n}\}_{i=1}^{n}$ 表示 $M_n(x; \beta, c)$ 的零点，$\{y_{i,n}\}_{i=1}^{n}$ 表示

$M_n(x;\beta+2,c)$ 的零点，并按递增顺序排列。若 $n > \frac{\beta}{c-1}$，则 $M_n(x;\beta,c)$ 的零点均为互异正数，并与 $M_{n-1}(x;\beta+2,c)$ 的 $(n-1)$ 个零点交错如下：

$$x_{1,n} < y_{1,n-1} < x_{2,n} < \cdots < y_{n-1,n-1} < x_{n,n}.$$

证明。对于 $n > \frac{\beta}{c-1}$，$M_n(x;\beta,c)$ 的零点为单且为正，这一事实已在 [18,定理 7] 中利用[20, 定理 8 和 9] 证明；但由 Xu 的早期结果也可推出（参见 [31, 定理 5.1 和 5.3]）。$M_n(x;\beta,c)$ 与 $M_{n-1}(x;\beta+2,c)$ 的零点交错，是[20, 定理 10]的直接推论。 □

注10。 引理 9 适用于 $n \geq 3$，而 $n = 1$ 的情形已在引理 2中讨论。对于 $n = 2$，我们有

$$M_2(x;\beta,c) = x^2 + \frac{1+c+2\beta c}{c-1}x + \frac{\beta(\beta+1)c^2}{(c-1)^2}$$

其零点为 $x = \frac{2\beta c + c + 1 \pm \sqrt{\quad}}{4\beta + \quad + 1\ ^2 c\,(c)\,(c)}$。

2 1(i) 当 $\beta = -\frac{(c+1)^2}{4}c$ 时，$M_2(x;\beta,c)$ 将有一个重根 $x = \frac{2\beta}{c} + 1\,c(c)$；若 $\beta \in (-2,-1)$，则这意味着 $c \in \left(3-2\sqrt{2},1\right)$。

(ii) 当 $\beta > -\frac{(c+1)^2}{4}c$ 时，$M_2(x;\beta,c)$ 将有两个互异根。由于对于所有 $c \in (0,1)$，$-\frac{(c+1\ ^2)}{c} < -1$，需要考虑两种情况。当 $-2 < -\frac{(c+1)^2}{4}c$ 时，当 $c \in \left(3-2\sqrt{2},1\right)$ 且 $-2 < -\frac{(c+1)^2}{4}c < \beta < -1$ 时，我们将有 2 个互异根；而当 $-\frac{(c+1)^2}{4}c < -2$ 时，当 $c \in \left(0,3-2\sqrt{2}\right)$ 且 $\beta \in (-2,-1)$ 时，我们将有两个互异实根。

(iii) 当 $\beta < -\frac{(c+1)^2}{4}c$ 时，$M_2(x;\beta,c)$ 将有两个纯虚根，即当 $c \in \left(3-2\sqrt{2},1\right)$且 $-2 < \beta < -\frac{(c+1)^2}{4}c < -1$ 时。

接下来，我们给出二阶拟正交迈克纳多项式前三个零点的上界和下界，这些结果是证明主要结论所必需的。

引理 11. 设 $\{M_n(x;\beta,c)\}_{n=3}^{\infty}$ 是一列二阶拟正交迈克纳多项式，满足 $\beta \in (-2,-1)$，且 $c \in (0,1)$。若 $n > \frac{\beta}{c-1}$，并且 $\{x_{i,n}\}_{i=1}^{n}$ 表示 $M_n(x;\beta,c)$ 的零点，则

$$0 < x_{1,n} < -\beta - 1 < x_{2,n} < 1 < -\beta < 2 < x_{3,n}.$$

证明. 固定 $\beta \in (-2,-1)$ 和 $c \in (0,1)$，并设 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ 且 $n > \frac{\beta}{c-1}$。则 $-\beta$ 和 $-\beta-1$ 不是 $M_n(x;\beta,c)$ 的零点，因为仅当 $n = \frac{\beta}{c-1}$ 时，$M_n(-\beta-1;\beta,c) = \left(\frac{1}{c-1}\right)^n(\beta - cn + n)\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma} \leftarrow \beta+1) = 0$，并且 $M_n(-\beta;\beta,c) = \left(\frac{1}{c-1}\right)^n(\beta)_n$，0。

令 $y_{1,n} < y_{2,n} < \cdots < y_{n,n}$ 表示 $M_n(x;\ \beta+2,\ c)$ 的零点。由引理 9，我们知道 $x_{1,n} < y_{1,n-1}$。由引理 2(ii)，我们知道 $y_{1,n} < 1$ 对所有 $n > (\beta+2)c\,1-c$ 都成立，这意味着 $y_{1,n-1} < 1$

当 $n > \frac{(\beta+2)c}{1-c} + 1 = \frac{\beta c+c+1}{1-c}$。由于

$$\frac{\frac{\beta c+c+1}{1-c}}{\frac{\beta}{c-1}} = -\frac{\beta c + c + 1}{\beta} < 1$$

对所有 $\beta \in (-2,-1)$ 及 $c > -1$，即使 $c \in (0,1)$ 也成立，我们有 $\frac{\beta c+c+1}{1-c} < \frac{\beta}{c-1}$ 对所有 $\beta \in (-2,-1)$ 及 $c \in (0,1)$ 均成立。因此，当 $n > \frac{\beta}{c-1}$ 时，$x_{1,n} < y_{1,n-1} < 1$。此外，由于

$$\frac{M_n(1;\beta,c)}{M_n(0;\beta,c)} = \frac{\beta c + cn - n}{\beta c} > 0$$

当 $n > \frac{\beta}{c-1}$ 时，多项式 $M_n(x;\beta,c)$ 在 $(0,1)$ 中要么没有零点，要么有偶数个零点；这对所有 $n \geq 0$ 都成立，因为 $\frac{\beta}{c-1} < 0$ 如果 $0 < c < 1$ 且 $-2 < \beta < -1$。因此，当 $M_n(x;\beta,c)$ 的所有零点均为实数时，即 $n > \frac{\beta}{c-1}$ 时，我们有 $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < 1$。

现在，对于 $0 < c < 1, -2 < \beta < -1$ 且 $n > \frac{\beta}{c-1}$，考虑

$$\frac{M_n(-\beta-1;\beta,c)}{M_n(0;\beta,c)} = \frac{n+\beta-cn}{\beta c^n} < 0$$

and

$$\frac{M_n(-\beta-1;\beta,c)}{M_n(-\beta;\beta,c)} = \frac{n+\beta-cn}{\beta} < 0.$$

因此，多项式 $M_n(x;\beta,c)$ 在区间 $(0,-\beta-1)$ 和 $(-\beta-1,-\beta)$ 内各有奇数个零点，因此我们有

$$0 < x_{1,n} < -\beta-1 < x_{2,n} < 1 < -\beta < 2.$$

由引理 9 中证明的交错性可知，对于所有 $n > \frac{\beta}{c-1}$，

$$x_{2,n} < y_{2,n-1} < x_{3,n} < y_{3,n-1} < x_{4,n}. \tag{9}$$

由于此处 Meixner 多项式的零点 $y_{2,n-1}$ 和 $y_{3,n-1}$ 之间的距离大于 1，因此显然 $M_n(x;\beta,c)$ 在区间 $(-\beta-1,-\beta)$ 内不可能有 3 个零点，所以 $x_{3,n} > -\beta$，我们得到如下配置

$$0 < x_{1,n} < -\beta-1 < x_{2,n} < 1 < -\beta < x_{3,n}.$$

最后，我们证明 $x_{3,n} > 2$。由 (9) 以及 Meixner 多项式的零点之间距离大于 1 这一事实可知，对于 $n > \frac{\beta}{c-1}$，有 $x_{4,n} > y_{3,n-1} > 2$。

考虑

$$\frac{M_n(2;\beta,c)}{M_n(-\beta;\beta,c)} = c^{n-2}\,\frac{\beta(\beta+1)c^2 + n(c-1)\left[n(c-1)+2\beta c+c+1\right]}{\beta(\beta+1)}.$$

当 $-2 < \beta < -1$ 时，分母以及分子中的第一项均为正。由于 $n > \frac{\beta}{c-1}$ 且 $0 < c < 1$，因此 $n(c-1) < \beta < -1$ 且

$$n(c-1) + 2\beta c + c + 1 < (2\beta + 1)c < -c.$$

因此，当 $n > \frac{\beta}{c-1}$, $0 < c < 1$ and $-2 < \beta < -1$ and 时，表达式 $n(c-1)(n(c-1) + 2\beta c + c + 1)$ 为正，故 $M^n(2; \beta, c)\, M_n(-\beta; \beta, c) > 0$。这意味着 $M_n(x; \beta, c)$ 在区间 $(-\beta, 2)$ 内要么没有零点，要么有偶数个零点。不等式 $x_{2,n} < 1$, $x_{3,n} > -\beta$ and $x_{4,n} > 2$ 意味着 $M_n(x; \beta, c)$ 在 $(-\beta, 2)$ 内不可能有零点，因此 $x_{3,n} > 2$。 □

引理中的结果11 见表 1。

表 1：对于不同的 β 和 c 值，$x_{1,10}, x_{2,10}$ and $x_{3,10}$ 的取值；每种情况下 $n > \frac{\beta}{c-1}$。

$-\beta$	c	$\frac{\beta}{c-1}$	$x_{1,10}$	$x_{2,10}$	$x_{3,10}$
1.99	0.1	2.21	$3.549 * 10^{-14}$	0.999999999987	2.0000000038
1.99	0.5	3.98	$1.351 * 10^{-6}$	0.999961	2.00059
1.99	0.8	9.5	0.001545	0.990203	2.02091
1.5	0.1	1.67	$1.953 * 10^{-12}$	0.99999999904	2.00000054
1.5	0.5	3	0.0000535	0.9982	2.0474
1.5	0.8	7.5	0.0405146	0.811339	2.93765
1.01	0.1	1.12	$1.230 * 10^{-13}$	0.999999999911	2.0000024
1.01	0.5	2.02	$2.418 * 10^{-6}$	0.999893	2.1284
1.01	0.8	5.05	0.000973697	0.994013	3.8303

定理 12. 设 $\{M_n(x; \beta, c)\}_{n=3}^{\infty}$ 是一列阶为 2 的 Meixner 拟正交多项式，满足 $\beta \in (-2, -1)$，且 $c \in (0, 1)$。设 $\{x_{i,n}\}_{i=1}^{n}$ 为 $M_n(x; \beta, c)$ 的零点，$\{y_{i,n}\}_{i=1}^{n}$ 为 $M_n(x; \beta + 2, c)$ 的零点，按升序排列，且 $A_n = \frac{\beta}{c-1} - \beta - n - 1$。

(a) 如果 $n \geq \frac{\beta}{c-1} - (\beta+1)$，那么 $A_n \leq 0$，且 $M_n(x; \beta, c)$ 和 $M_n(x; \beta+2, c)$ 的零点交错：

$$x_{1,n} < y_{1,n} < x_{2,n} < y_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < y_{n,n}. \tag{10}$$

(b) 至多存在一个整数 n^*，使得 $\frac{\beta}{c-1} - (\beta+2) < n^* < \frac{\beta}{c-1} - (\beta+1)$ 且 $0 < A_{n^*} < 1$。当 $n^* \in \left(\frac{\beta}{c-1}, \frac{\beta}{c-1} - (\beta+1)\right)$ 时，$M_{n^*}(x; \beta, c)$ 和 $M_{n^*}(x; \beta+2, c)$ 的零点按式 (*10*) 交错，当且仅当 $A_{n^*} < y_{1,n^*}$。

证明。固定 $c \in (0, 1)$ 和 $\beta \in (-2, -1)$。由于 $M_{n-1}(x, \beta+2, c)$ 和 $M_n(x; \beta+2, c)$ 是正交序列中的连续次数多项式，它们的零点交错，且没有公共零点。考虑

$$\left(\frac{\beta}{n} + 1\right) M_n(x; \beta, c) = \left(\frac{\beta}{n} + 1 - c\right) M_n(x; \beta+2, c) + c\,(x - A_n)\, M_{n-1}(x; \beta+2, c), \tag{11}$$

通过比较 的系数即可验证 x^n。由（11）可知，$M_n(x;\beta,c)$ 和 $M_n(x;\beta+2,c)$ 在 $x = A_n$ 处至多有一个公共零点。在 $y_{k,n}$ 和 $y_{k+1,n}$ 处对（11）求值，其中 $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$，这些是 $M_n(x;\beta+2,c)$ 的相邻零点，可得

$$\frac{\left(\frac{\beta}{n}+1\right)^2/c^2}{M_{n-1}(y_{k,n};\beta+2,c)M_{n-1}(y_{k+1,n};\beta+2,c)} = \frac{(y_{k,n}-A_n)(y_{k+1,n}-A_n)}{M_n(y_{k,n};\beta,c)M_n(y_{k+1,n};\beta,c)}. \tag{12}$$

多项式 $M_n(x;\beta+2,c)$ 属于一个正交序列。由于属于同一正交序列且次数相邻的两个多项式的零点交错，对于每个 $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$，$M_{n-1}(x;\beta+2,c)$ 在 $M_n(x;\beta+2,c)$ 的两个相邻零点 $y_{k,n}$ 和 $y_{k+1,n}$ 处的符号不同，即 $M_{n-1}(y_{k,n};\beta+2,c)M_{n-1}(y_{k+1,n};\beta+2,c) < 0$，因此 (12) 的左端为负。

(a) 假设 $n \geq \frac{\beta}{c-1} - (\beta+1)$。显然 $A_n \leq 0$（反之亦然）。此外，由于 $\beta \in (-2,-1)$，我们还有 $n \geq \frac{\beta}{c-1} - (\beta+1) > \frac{\beta}{c-1}$，由引理 9 可知，$M_n(x;\beta,c)$ 的零点为正且为单零点。由于 $M_n(x;\beta,c)$ 和 $M_n(x;\beta+2,c)$ 的零点均为正，且 A_n 是唯一可能的公共零点，而它是负数，因此这两个多项式在此情况下没有公共零点。此外，对每个 $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$，$A_n \notin (y_{k,n}, y_{k+1,n})$，这意味着 (12) 右端的分子为正。由于 (12) 右端的商必为负，因此对每个 $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$，$M_n(y_{k,n};\beta,c)M_n(y_{k+1,n};\beta,c) < 0$；也就是说，多项式 $M_n(x;\beta,c)$ 在 $M_n(x;\beta+2,c)$ 的零点处符号不同，因此 $M_n(x;\beta,c)$ 和 $M_n(x;\beta+2,c)$ 的零点交错。由于当 $c \in (0,1)$ 且 $\beta \in (-2,-1)$ 时，$n \geq \frac{\beta}{c-1} - (\beta+1) > (\beta+2)c_{1-c}$，满足引理 2(ii) 的条件，因此有 $\overline{y_{2,n}} > 1$。利用引理 11，我们推得零点如下交错：

$$0 < x_{1,n} < y_{1,n} < x_{2,n} < 1 < y_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < y_{n,n}.$$

(b) $\frac{\beta}{c-1} - (\beta+2) < n < \frac{\beta}{c-1} - (\beta+1)$ 当且仅当 $0 < A_n < 1$，且因为

$$\frac{\beta}{c-1} - (\beta+1) - \left(\frac{\beta}{c-1} - (\beta+2)\right) = 1,$$

n 位于长度为 1 的区间内，并且至多有一个 n 值，记作 n^*，使得 $0 < A_{n^*} < 1$。当 $n^* \in \left(\frac{\beta}{c-1} - (\beta+1)\right)$ 时，$M_n(x;\beta,c)$ 的所有零点都是正的且为单零点。如果 $M_{n^*}(x;\beta,c)$ 和 $M_{n^*}(x;\beta+2,c)$ 在 A_{n^*} 处有公共零点，即 $M_{n^*}(A_{n^*};\beta,c) = M_{n^*}(A_{n^*};\beta+2,c) = 0$，则 $M_{n^*}(x;\beta,c)$ 和 $M_{n^*}(x;\beta+2,c)$ 的零点显然不交错。假设 $A_{n^*} < y_{1,n^*}$，则根据与 (a) 中相同的论证，零点如 (10) 所示交错。另一方面，假设零点如 (10) 所示交错。由于 $0 < A_{n^*} < 1$，唯一的可能是 $A_{n^*} < y_{1,n^*}$。

□

注 13。在少数情况下，当 $n \leq \frac{\beta}{c-1} - (\beta+2)$ 时，$M_n(x;\beta,c)$ 的两个最小零点为复数；数值示例表明，其余 $(n-2)$ 个实零点与正交多项式 $M_n(x;\beta+2,c)$ 的最大 $(n-2)$ 个零点交错。

接下来，我们证明，若 $0 < c < 1$ 和 $-2 < \beta < -1$ 固定，则对于任意 $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$，$M_{n-1}(x; \beta, c)$ 的 $(n-1)$ 个零点不会与 $M_n(x; \beta, c)$ 的 n 个零点交错。

定理 14. 假设 $\{M_n(x; \beta, c)\}_{n=3}^{\infty}$ 是一列阶为 2 的拟正交 Meixner 多项式，满足 $\beta \in (-2, -1)$，且 $c \in (0, 1)$。假设 β、c 和 n 满足条件，使得 $M_n(x; \beta, c)$ 和 $M_{n-1}(x; \beta, c)$ 没有公共零点。当 $n - 1 > \frac{\beta}{c-1}$ 时，若 $\{x_{i,n}\}_{i=1}^{n}$ 是 $M_n(x; \beta, c)$ 按递增顺序排列的零点，则 $(x+\beta)M_{n-1}(x; \beta, c)$ 的 n 个零点与 $(x+1)M_n(x; \beta, c)$ 的 $(n+1)$ 个零点如下交错：

$$\begin{aligned} 0 < x_{1,n} < x_{1,n-1} < -\beta - 1 < x_{2,n-1} < x_{2,n} < -\beta < x_{3,n} < x_{3,n-1} < x_{4,n} < \cdots \\ < x_{n-1,n} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n}. \end{aligned} \tag{13}$$

证明。令 $n - 1 > \frac{\beta}{c-1}$, $-2 < \beta < -1$ 且 $0 < c < 1$。代入混合递推关系 n

$$\left(x + \frac{\beta(c-2)}{c-1} + n\right) M_n(x; \beta, c) = -\frac{(\beta + n - 1)(\beta - cn + n)}{(c-1)^2} M_{n-1}(x; \beta, c) + (\beta + x)_2 M_{n-1}(x; \beta + 2, c), \tag{14}$$

在 $M_n(x; \beta, c)$ 的零点 $x_{i,n}$ 和 $x_{i+1,n}$，$i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ 处，我们得到

$$\frac{\left(\frac{(\beta+n-1)(\beta-cn+n)}{(c-1)^2}\right)^2}{M_{n-1}(x_{i,n}; \beta + 2, c) M_{n-1}(x_{i+1,n}; \beta + 2, c)} = \frac{(x_{i,n} + \beta)(x_{i,n} + \beta + 1)(x_{i+1,n} + \beta)(x_{i+1,n} + \beta + 1)}{M_{n-1}(x_{i,n}; \beta, c) M_{n-1}(x_{i+1,n}; \beta, c)}. \tag{15}$$

由引理 9 可知，对于 $n > \frac{\beta}{c-1}$，$M_n(x; \beta, c)$ 的零点与 $M_{n-1}(x; \beta + 2, c)$ 的 $(n-1)$ 个零点交错，因此，对于 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$，$M_{n-1}(x_{i,n}; \beta + 2, c) M_{n-1}(x_{i+1,n}; \beta + 2, c) < 0$，且 (15) 式左端为负。

对于每个 $i \in \{3, 4, \ldots, n\}$，由引理 11 可知，因 $x_{i,n} > -\beta$，(15) 式右端的分子为正，因此 $M_{n-1}(x_{i,n}; \beta, c) M_{n-1}(x_{i+1,n}; \beta, c) < 0$，这意味着每个区间 $(x_{i,n}, x_{i+1,n})$，$i \in \{3, 4, \ldots, n-1\}$，都包含 $M_{n-1}(x; \beta, c)$ 的奇数个零点。将引理 11 中的 n 替换为 $n-1$，可推出对于 $n - 1 > \frac{\beta}{c-1}$，$x_{1,n-1} < x_{2,n-1} < -\beta$；由此可见，$M_{n-1}(x; \beta, c)$ 剩余的 $(n-3)$ 个零点中，每个 $(n-3)$ 个区间 $(x_{i,n}, x_{i+1,n})$，$i \in \{3, 4, \ldots, n-1\}$，恰有一个零点，即

$$0 < x_{1,n-1} < -\beta - 1 < x_{2,n-1} < 1 < -\beta < x_{3,n} < x_{3,n-1} < x_{4,n} < \cdots < x_{n,n-1} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n} \tag{16}$$

为了确定 $M_{n-1}(x; \beta, c)$ 的两个最小零点相对于 $M_n(x; \beta, c)$ 的两个最小零点的位置关系，考虑 $i \in \{1, 2\}$ 时的 (15)。将引理 11 应用于 $M_n(x; \beta, c)$ 的零点，可知 (15) 右端的分子在每种情况下均为负。因此，$M_{n-1}(x_{1,n}; \beta, c) M_{n-1}(x_{2,n}; \beta, c) > 0$ 且 $M_{n-1}(x_{2,n}; \beta, c) M_{n-1}(x_{3,n}; \beta, c) > 0$，这意味着 $M_{n-1}(x; \beta, c)$ 在区间 $(x_{1,n}, x_{2,n})$ 和 $(x_{2,n}, x_{3,n})$ 中各自要么没有零点，要么有偶数个零点。结合 (16)，并注意到根据引理 11，$x_{1,n} < -\beta - 1 < x_{2,n} < 1 < -\beta < x_{3,n}$，可知零点唯一可能的排列方式就是 (13) 所述的排列。

□

注 15。

(i) 由于两个相邻次数的二阶拟正交 Meixner 多项式的零点不会彼此分离，因此，Meixner 多项式序列 $\{M_n(x;\beta,c)\}_{n=3}^{\infty}$（其中 $-2<\beta<-1$ 且 $c\in(0,1)$）不关于任何正测度正交。

(ii) 尽管当 $c\in(0,1)$ 且 $\beta>0$时，正交 Meixner 多项式的零点会随着 β 增大而单调递增（参见 *[16,* 定理 7.1.*2]*），但 1 阶和 2 阶准正交 Meixner 多项式的零点通常不会随着 β 增大而单调递增。例如，当 $-1<\beta<0$时，最小零点始终为负；而当 $-2<\beta<-1$ 且 $n>\frac{\beta}{c-1}$时，最小零点为正。表 *2*展示了固定 n 和 $c\in(0,1)$ 时，取 $-2<\beta<-1$的两个不同值所得的 $M_n(x;\beta,c)$ 的零点，清楚地说明了 $x_{2,n}$ 会随着 β增大而减小。

表 2：$c=0.2$ 且 β取两个不同值时，$x_{1,5}$、$x_{2,5}$、$x_{3,5}$、$x_{4,5}$ 和 $x_{5,5}$ 的值。

β	$x_{1,5}$	$x_{2,5}$	$x_{3,5}$	$x_{4,5}$	$x_{5,5}$
−1.9	0.000000904	0.999651	2.006685	3.445917	6.1727379
−1.8	0.0000169239	0.999321	2.0144	3.48815	6.24811

5. 致谢

作者感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。KJ 的研究得到了英国皇家学会牛顿高级奖学金 NAF\R2\180669 的资助。AJ 和 KJ 感谢各自所在机构批准他们休研究与发展假期。

参考文献

[1] C. Brezinski、K.A. Driver 和 M. Redivo-Zaglia，拟正交性及其在若干经典正交多项式族中的应用，《应用数值数学》48 (2004)，157–168。[2] B. Beckermann、J. Bustamante、R. Martínez-Cruz 和 J.M. Quesada，具有指定横坐标的高斯、Lobatto 和 Radau 正求积公式，Calcolo. 51 (2) (2014)，319–328。[3] A. Bultheel、R. Cruz-Barroso 和 M. Van Barel，关于在实轴上任意指定节点的高斯型求积公式，Calcolo. 47 (2010)，21–48。[4] A. Bultheel、R. Cruz-Barroso 和 M. Van Barel，关于《在实轴上任意指定节点的高斯型求积公式》的勘误，Calcolo. 50 (2) (2013)，163–164。[5] T.S. Chihara，关于拟正交多项式，《美国数学会会刊》8 (1957)，765–767。[6] T.S. Chihara，《正交多项式导论》，Gordon and Breach，1978。[7] D. Dickinson，关于拟正交多项式，《美国数学会会刊》12 (1961)，185–194。[8] A. Draux，关于拟正交多项式，《逼近理论杂志》62 (1990)，1–14。[9] K. Driver 和 A. Jooste，拟正交 Meixner 多项式，Quaest. Math. 40 (4) (2017)，477-490。[10] K. Driver 和 K. Jordaan，拟正交雅可比多项式的零点，SIGMA 12 (2016)，042，13页。[11] K. Driver 和 K. Jordaan，雅可比多项式 $P_n^{(\alpha,\beta)}$, $-2<\alpha,\beta<-1$ 的零点，《数值算法》79 (2018)，1075–1085。[12] K. Driver 和 M.E. Muldoon，若干拟正交拉盖尔多项式零点的交错性质与界，《计算方法与函数理论》15 (2015)，645–654。[13] K. Driver 和 M.E. Muldoon，拟正交超球面多项式极端零点的界，《经典分析杂志》9 (2016)，69–78。

[14] L. Fej´er，具有正柯特斯数的机械求积，《数学杂志》37 (1933)，287–309。[15] G. Freud，《正交多项式》，培格曼出版社，牛津，1971。[16] M.E.H. Ismail，《单变量经典与量子正交多项式》，剑桥大学出版社，剑桥，2005。[17] S.J. Johnston、A. Jooste 和 K. Jordaan，若干超几何多项式的拟正交性，《积分变换与特殊函数》27 (2) (2016)，111–125。[18] A. Jooste、K. Jordaan 和 F. To´okos，关于 Meixner 多项式的零点，《数值数学》124 (1) (2013)，57–71。[19] K. Jordaan 和 F. To´okos，非经典参数下伪 Jacobi 多项式的正交性与渐近性质，《逼近理论杂志》178 (2014)，1–12。[20] H. Joulak，对拟正交多项式和伴随多项式的贡献，《应用数值数学》54(1) (2005)，65–78。[21] P. Kar 和 P. Gochhayat，拟正交 q-拉盖尔多项式的零点，《数学分析与应用杂志》506(1) (2022)，125605。[22] P. Kar 和 P. Gochhayat，拟正交小q-雅可比多项式零点的交错性质与界，《数值算法》，2022年12月14日在线发表。（DOI:10.1007/s11075-022-01460-2）[23] R. Koekoek、P.A. Lesky 和 R.F. Swarttouw，《超几何正交多项式及其q类比》，施普林格数学专著，施普林格出版社，柏林、海德堡，2010。[24] I. Krasikov 和 A. Zarkh，关于离散正交多项式的零点，《逼近理论杂志》156 (2009)，121–141。[25] D. Lubinsky，关于交错多项式和正交多项式的求积恒等式，《美国数学会会刊》144(11) (2016)，4819–4829。[26] P. Maroni，一种正交多项式的代数理论。对半经典正交多项式的应用´。´正交多项式的一种代数理论。对半经典正交多项式的应用 [。载于：Brezinski C、Gori L、Ronveaux A 编，《正交多项式及其应用：第三届国际研讨会论文集》；1990年6月1日至8日；埃里切。《IMACS计算与应用数学年刊》9 (1991)，95–130。巴塞尔：JC Baltzer股份公司。]C.A. Micchelli 和 T.J. Rivlin，接近高斯求积的数值积分公式，《以色列数学杂志》16 (1973)，287–299。[27] M. Riesz，关于矩问题 III，《数学、天文学与物理学档案》17(16) (1923)，1–52。[28] J.A. Shohat，论机械求积，特别是具有正系数的求积，《美国数学会汇刊》42 (1937)，461–496。`D.D. Tcheutia、A.S. Jooste 和 W. Koepf，若干超几何多项式和q-超几何多项式的拟正交性，SIGMA 14，051 (2018)，26页。[29] Y. Xu，拟正交多项式、求积与插值，《数学分析与应用杂志》182(3) (1994)，779–799。