arXiv:2302.04198v2 [math.DS] 7 Sep 2023

前馈网络对周期信号的稳定同步传播

Ian Stewart和 David
Wood 数学研究所 华威大学
考文垂 CV4 7AL 英国

2023年9月8日

摘要

我们分析一类网络的动力学：其中，中枢模式发生器（CPG）以同步或相位同步的方式，沿一条或多条前馈链传递时间周期信号。这类传播信号在生物学中十分常见，尤其与运动和蠕动有关，也受到连续体机器人的研究者关注。我们将这类网络构造为 CPG 的前馈提升。如果 CPG 动力学是周期的，那么提升动力学也是周期的。与 CPG 同步表现为驻波，而规则相位模式则形成行波。我们讨论提升后的周期轨道的李雅普诺夫稳定性、渐近稳定性和 Floquet 稳定性，并引入这些条件的横向版本，以推导信号沿任意长链传播时的稳定性。我们将这些概念与一个更简单的条件进行比较，即同步子空间的横向稳定性；当节点为一维时，该条件等价于 Floquet 稳定性。

1 引言

动物生理学的许多方面都涉及节律性时间周期模式的纵向传播，其中神经元线性链同步振荡或以特定的相位关系振荡。这两种行为类型分别可解释为驻波和行波。此类传播链的一种常见机制涉及一个神经元网络，通常称为中枢模式发生器（CPG），它负责产生基本节律。该网络位于前馈网络的起始处，CPG 信号沿着该网络传播。蛇形机器人也利用类似的运动波进行探索（包括探索其他行星） [74]；此外还有许多医学应用，参见 [55, 88, 101] 及其中引用的文献。“连续体机器人”领域正在迅速发展，相关文献数量庞大。

这两类应用都可以用耦合动力系统网络来建模。我们采用 [40, 44, 95], 见第2节中的一般形式体系。我们称两个

节点若其波形（时间序列）完全相同，则称为同步。更一般地，若两个节点的波形（时间序列）除相位平移（时间平移）外完全相同，则称为相位同步。这些定义是理想化的，但由此引出的数学方法十分有力，并具有重要意义。真实系统可以视为理想化系统受到扰动后的结果，而且许多有趣的结构仍能以适当的近似形式保留下来。

本文的主要目标是描述一种构建网络的通用方法，使指定 CPG 的周期动力学沿着前馈链、树或任何其他前馈结构同步传播，或以相位同步的方式传播，并呈现规则的相位移。（为简便起见，我们经常使用“链”这一术语，但并不意味着线性拓扑结构。）实现这一目标的方法是将网络的其余部分构建为 CPG 的前馈提升 。

当然，利用链传播信号并不是一个新想法，即使粗略浏览相关文献也能看出这一点。事实上，这可以说是最简单、最自然、也最直观的方法。然而，我们进行分析时所采用的形式化框架，使我们能够证明一些一般性的稳定性结果，并有助于统一这一领域。

稳定性

一个关键问题是确保这些传播状态是稳定的。“稳定性”这一术语在技术上有许多不同的含义，参见 [13] 和第4节。近来，混沌动力学进一步扩展了其含义的多样性。对于Kuramoto模型等特殊模型，同步状态的稳定性已经得到了广泛研究 [63, 71]。其他方法及相关结果可见 [14, 79, 85], ，而针对随机动力系统的一个版本则在 [50]中进行了分析。

我们考虑平衡点和周期轨道的几种稳定性概念，重点讨论周期情形。粗略来说，李雅普诺夫稳定性意味着初始条件受到微小扰动时，轨道受到的影响也很小；渐近稳定性意味着状态受到微小扰动后会收敛到该轨道；而指数稳定性则意味着这种收敛具有指数界。对于平衡点，指数稳定性等价于线性稳定性；对于周期轨道，它等价于 Floquet 意义下的稳定性 [49], ，为简便起见，我们称之为“Floquet 稳定性”。形式化定义及进一步讨论见第4节。

横向稳定性

前馈结构意味着，对于给定的稳定性概念，如果提升后的周期轨道稳定，那么 CPG 轨道也必定稳定。然而，这一条件并不足以保证提升后的周期轨道稳定，因为横向于同步子空间的扰动可能破坏同步，也就是说，破坏同步的扰动可能破坏同步。本文的主要目标是找出提升状态在上述三种意义下稳定的充要条件。为此，我们定义了相应的“横向”李雅普诺夫稳定性、渐近稳定性以及线性/Floquet 稳定性。

对于三种稳定性概念中的每一种 $\mathcal{S}$，我们都证明提升的周期状态

$\mathcal{S}$稳定，当且仅当 CPG 周期轨道在 CPG 状态空间上是 $\mathcal{S}$稳定的，并且该轨道在链的每个节点处都具有横向 $\mathcal{S}$稳定性。定理 5.4 陈述并证明了 Floquet 稳定性方面的这些结果，定理 5.10则针对李雅普诺夫稳定性给出了相应结果。渐近稳定性也有一个对应版本；由于其证明与李雅普诺夫稳定性的证明类似且更简单，我们省略其陈述和证明。定理 7.1 将 Floquet 稳定性结果推广到按照指定相位模式传播的信号。

一个相关且更简单的概念是同步子空间的横向稳定性。直观而言，这表示在同步子空间上的每一点，向量场都将状态吸引至该子空间。严格来说，这意味着在同步子空间上的任意一点（或者更一般地，在 CPG 周期轨道的某个邻域内），对于横向于同步子空间的特征向量，雅可比矩阵的所有特征值都具有负实部。如果 CPG 的状态是弗洛凯稳定的，且节点空间是一维的，那么这一条件意味着提升状态具有 Floquet 稳定性。对于维数为 2 或更高的节点空间，这一推论对于平衡点仍然显然成立，但对于周期轨道则可能失效，著名的 Markus-Yamabe反例（例 6.3）便说明了这一点。尽管如此，同步子空间的横向稳定性仍具有一定的启发价值，有时也能得到严格论证。因此，值得独立考察这一概念，而不论它与整体稳定性的关系如何。

前馈提升的一个重要特征是，横向Floquet稳定性由与CPG各个节点相关的动力学决定。因此，我们的结果表明，如果传播信号沿链向前一步时具有Floquet稳定性，那么无论链有多长，或链分支成树状结构，它都将保持Floquet稳定。该特征的一个副作用是，除非链极短，否则即使整体网络没有对称性，也通常会出现多个Floquet乘子。这种重数对所有形式的横向稳定性都有利，但若临界特征值出现重数，则可能给分岔分析带来问题。

关于横向李雅普诺夫稳定性，也有类似的结论，但此时必须考虑充分接近周期状态的状态，而不能只考虑周期状态本身。我们计划在未来的论文中讨论这一点。

部分结果可推广至非周期信号的传播，尤其是涉及李雅普诺夫稳定性的结果：见第6.4节。为简便起见，我们聚焦于时间周期情形，此时可采用更强的Floquet稳定性概念。在这一情形下，我们还讨论相位相关信号的传播，其中某些节点具有相同的波形，但存在规律的相位移。这类信号可以视为行波。

1.1 生物学动机

作为引入，我们先来看生物系统中传播的相位同步信号的两个例子：肠道蠕动，以及果蝇幼虫爬行运动中的蠕动波。其他例子还包括医用水蛭的心跳[21, 22, 23]，腿式运动 [19, 12, 27, 28, 41, 42, 83, 93]，以及线虫秀丽隐杆线虫的运动 [17, 53, 76, 86]。这些网络与前馈提升相似，但并不完全相同；在此仅将其作为引出讨论的例子。

例 1.1. 肠道蠕动是一种肌肉收缩行波，由肠神经系统控制。肠神经系统包含数百万个神经元，主要聚集成两种类型的神经节：肌间神经丛和黏膜下神经丛。相邻神经节彼此相连，每种类型的整体拓扑结构都是一条链。黏膜下神经节的间距比肌间神经节更小。

一般信息见 [34, 46]。 [26], 综述了肠神经运动模式的数学模型，其中数学细节不多，但参考文献丰富。我们还提及了 [25] 关于肠道分节模型的研究，以及 [98]关于循环兴奋性网络模型的研究，这两项研究都以豚鼠为对象。图1展示了 [61]中的一个模块化前馈结构示意网络。

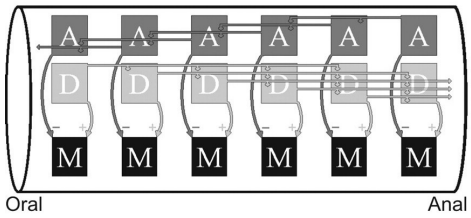


图1： [61]模型的示意“卡通图”。每个模块（数量不限）都包含上行中间神经元及其相关运动神经元（A）、下行中间神经元及其相关运动神经元（D），以及环形肌（M）。灰色小箭头表示突触耦合。

例1.2. Gjorgjieva等人 [36] 研究了果蝇幼虫爬行运动的神经网络。该运动由从后端向前端传播的蠕动波驱动。图2（上）展示了幼虫的这些压缩状态，图像每隔200毫秒拍摄一次；A1–A8/9表示体节；箭头表示相邻体节同时压缩；横跨幼虫的线条表示齿状带，可近似表示体节边界。图2（下）展示了该论文研究的模型网络。其动力学方程属于Wilson–Cowan（率模型）类型[32, 99]。各体节通过最近邻兴奋性连接（三角形箭头）和抑制性连接（带横杠的箭头）相连。通过向A8体节的兴奋性神经元群提供随时间变化的外部输入 P_{ext} ，可引发前向波。当 P_{ext} 为振幅适当的短脉冲时，会激发单个波；较长的脉冲则会激发更多波。

文献中的许多网络都具有类似的重复性前馈结构；例如，参见 [70, 89]。这些生物学实例基于由神经元构成的网络，这些神经元控制着肌群，但一般理论的适用范围更广。一种标准的进化路径是复制现有结构多次，再通过适应不同环境来调整所得结果。

1.2 前馈传播

一般来说，如果每个神经元都向下一个神经元发送兴奋性信号，放电信号就能沿着神经元链自然传播。然而，这些信号可能会失去同步，

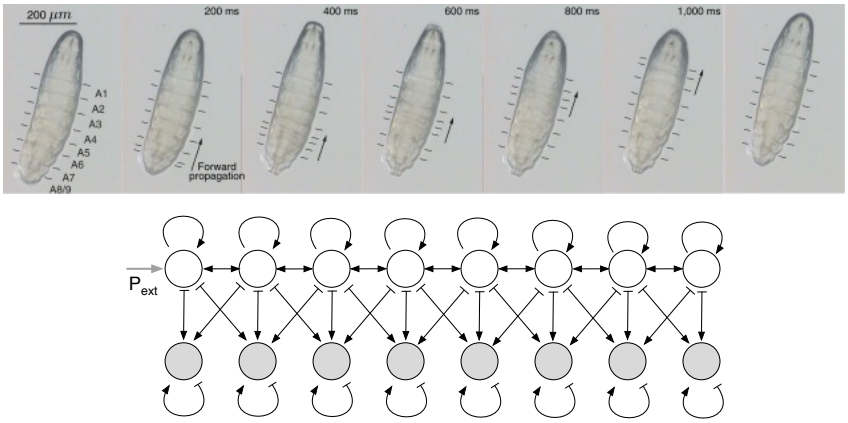


图2：上图：果蝇 幼虫一龄期向前爬行时的蠕动压缩波，承蒙 Gjorgjieva 等人 [36]提供。下图 模型网络。

彼此之间的相位关系也可能发生变化，这是由于随机的时间延迟，或不同链之间不断累积的其他差异所致。类似的情况也适用于其他应用领域。对于一般网络而言，采用更稳健的方式传播动态模式具有其优势。

为了建立这样一种传播方法，我们采用 [44, 95]，中介绍的网络动力学通用框架，并对其作少许修改，见 [40]，。该框架为分析耦合动力系统（常微分方程）网络提供了形式化基础。这些网络可视为有向网络，其中节点和有向边（“箭头”）均标有“类型”。同一类型的节点具有相同的状态空间，同一类型的箭头则表示相同类型的耦合。若节点的输入箭头集合彼此同构，那么在对应的耦合相同的情况下，它们遵循相同的常微分方程。我们将在第2节概述这一形式体系。

本文的主要目标是运用这一形式体系，为任意小型 CPG 网络构造一个更大的网络，使 CPG 的动力学能够沿着模块链、树或其他前馈级联同步传递。将相同的构造应用于具有循环群对称性的 CPG，可实现信号的稳定传播，并形成“相位同步”——波形完全相同，仅存在规律的相位移。我们将这种行为称为相位模式。循环群对称性与这类模式密切相关 [38, 94, 96]和 [40, 第 17]章；参见第7.1节。在由连续节点构成的链中，这类状态可视为行波。

在这一构造中，模块的节点与 CPG 的节点（或更一般地说，CPG 的某个子集中的节点）相对应，且类型相同。此外，CPG 上任意指定的同步或相位模式都可以扩展到这些新模块。它们的输入也与 CPG 内的输入箭头相对应，不同之处在于，某个箭头的箭头尾节点可以是 CPG 中对应尾节点的任意副本，只要该副本位于前馈级联中更靠后的位置。这种结构意味着，可以通过要求对应节点同步，将 CPG（或其子集）的任意动力学状态“提升”到整个级联中。也就是说，按照 [40, 44, 95] 的定义，CPG 是该级联的一个商网络。反过来，该级联是 CPG 的一个提升，因此 CPG 的动力学会提升到前馈网络中，而各模块则复制 CPG 动力学。

1.3 论文总结

第2节概述了本文所采用的网络动力学形式体系中的基本概念和定理，特别着重于平衡着色、商网络及相关的提升。我们将介绍一个贯穿全文的示例：一个7节点网络，其中一个由3个节点组成的有向环向前馈入一个4节点链，如第2.4节的图3所示。（选择3和4这两个数字只是为了方便；类似论述适用于任意两个正整数。）

第 3 节定义了前馈提升并阐述其主要性质，尤其是在构造同步模式方面。我们证明，雅可比矩阵（导数）具有分块三角形式，并通过 7 节点示例说明这一结果。

第4节回顾了平衡点和周期轨道的各种稳定性概念及其相互关系。我们尤其讨论李雅普诺夫稳定性、渐近稳定性、线性稳定性、双曲性以及周期轨道的弗洛凯理论。我们还讨论了网络动力学中范数的一种便捷选取方式。

第5节探讨了CPG网络 $\mathcal{G}$ 上的周期轨道 $\{a(t)\}$ 所受破坏同步扰动对应的类似“横向”稳定性概念，这些扰动会在前馈提升 $\mathcal{G}$上产生提升的周期~轨道 $\{\tilde{a}(t)\}$ 。在定理 5.4 中，我们利用前馈提升的块三角结构，给出提升的周期状态满足弗洛凯稳定、进而满足渐近稳定性的充要条件。该条件以“横向弗洛凯乘子”表述，它们类似于基于各个节点内部动力学的小型动力系统的弗洛凯乘子。此外，我们只需考虑CPG的节点。定理5.10给出了横向李雅普诺夫稳定性的类似结果。

第6节定义了同步子空间的一个类似但不同的条件——“横向稳定性”，并将其与 CPG 的雅可比矩阵对角元联系起来。定理 6.4 表明，对于平衡点，横向稳定性意味着 Floquet 稳定性；对于周期轨道，当节点空间是一维时也成立。 [69] 的一个著名例子表明，当节点空间的维数大于 1 时，这一结论对周期情形可能不成立。我们简要讨论了避免这一问题的附加条件，以及一个相关问题：混沌态的同步。这涉及一个更一般的概念：“平均横向稳定性”。当节点空间是一维时，这一概念同样更令人满意；即便如此，仍有一些方面只是猜想。

第7节利用一个 CPG 具有循环群对称性 $\mathbb{Z}_k$ 的前馈提升，将横向 Floquet 稳定性条件推广到相位同步行波。网络动力学的一般结果表明，这样的网络可以支持具有相位同步的状态，其中相位移是 T/k 的整数倍，而 T 是整体周期 [39, 章 3]。在前馈提升中，这些状态可以视为行波。

最后，我们在第8节总结主要结论。

2 网络与容许常微分方程

我们简要回顾网络动力学的形式体系 [44, 95], ，其中考虑了专著 [40]中引入的小幅改进。

一个网络是一个有向图，其节点和有向边（“箭头”）被划分为不同类型。每个节点都被赋予一个节点空间——通常是一个有限维实向量空间——从而定义一个节点变量，该变量可以是多维的。该网络于是编码了一类容许常微分方程，其耦合方式遵循网络拓扑以及节点类型和边类型。我们将在第2.4节给出一个示例，并在第2.5节给出精确定义。

节点（此前称为“细胞”，但由于可能与生物细胞混淆，我们避免使用该术语）构成一个（通常为有限的）集合 $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, n\}$，并由一组 $\mathcal{E}$箭头连接。每个箭头 e 都有一个箭头头节点 $\mathcal{H}$（e）和一个箭头尾节点 $\mathcal{T}$（e）。节点被划分为不同的节点类型，而在相关的容许常微分方程中，相同类型的节点具有相同的内部动力学。它们也具有相同的状态空间，但最好借助状态类型这一概念分别处理这一性质， [40, 第9节。3]箭头也被划分为不同的箭头类型，相同类型的箭头决定相同的耦合结构。

注释 2.1. 与某些应用领域中存在标准模型常微分方程的惯例不同，网络图并不编码某个特定的常微分方程（或许还需指定反应速率等参数），单个节点和箭头也不对应模型常微分方程中的特定项。相反，网络图编码的是所有其耦合用于建模网络架构的常微分方程所构成的类。采用这一惯例是出于数学上的考虑，尤其是为了保持一般性 *[40,* 第*8*节*.10]*。

2.1 网络图

网络可以用图形方式表示为其图示，它是对有向图的扩展。用图论术语来说，它是一个有色有向图，节点和边的颜色用于表示其节点类型，但我们以不同的方式使用颜色，因此避免采用这一术语。相反，节点画成点、圆、正方形、六边形等，每种类型使用不同的符号；箭头也以类似方式加以区分，例如使用点线或波浪线、不同形状的箭头头端等。每个箭头 e 从箭头尾节点 $\mathcal{T}$(*e*)指向箭头头节点 $\mathcal{H}$(*e*)。

一条箭头的头端和尾端可以是同一个节点，从而形成自环。（对应的生物学术语是“自调节”。）两条不同的箭头可以有相同的头端和尾端，从而在两个节点之间形成多重箭头 。这种约定源于一些应用以及一种与同步相关的基本理论构造——“商网络”；参见第2.7节。

网络 $\mathcal{G}'$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个子网络 ，当且仅当 $\mathcal{G}'$ 的节点是 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ 的子集，且 $\mathcal{G}'$ 的箭头恰好是 $\mathcal{G}$ 中头端和尾端都位于 $\mathcal{C}'$内的那些箭头。

2.2 状态空间

为了建立常微分方程，我们必须选择它的变量，以及决定这些变量导数的函数。在动力系统理论中，变量决定了系统状态空间 或相空间 中的点，而该空间通常是一个流形，或更一般地说，是一个度量空间。由于“相位”一词在动力学中另有含义，我们更倾向于使用前一个术语。对于每个节点 $c \in \mathcal{C}$，选取一个节点（状态）空间 P_c。一般而言，它可以是一个光滑流形；在此背景下，可容许常微分方程和商网络的基本理论仍然成立 [3, 4]。为求简便，我们遵循 [40, 44, 95]，并假设 $P_c = \mathbb{R}^{n_c}$ 是一个实向量空间。（即使节点空间是流形，这一假设也足以用于局部分岔分析。）由相位振子 组成的系统 [58, 59, 60, 63],是另一种标准选择，对应于 $P_c = \mathbb{S}^1$，即圆。

同步等现象需要比较不同的节点变量，而只有当相应的状态空间相等时，这种比较才有意义。状态类型编码了这一信息：如果节点 c, d 状态等价，那么我们要求 $P_c = P_d$。网络的总状态空间 是直和

$$P = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}} P_c$$

而一个状态由向量表示

$$x = (x_c)_{c \in \mathcal{C}}$$

当 $n_c > 1$ 时， x_c 中的各项本身也是向量。

2.3 输入集

节点的动力学取决于其输入的动力学。因此，我们将节点 c 的输入集 定义为集合 $I(c)$，其中包含所有满足 $\mathcal{H}(e) = c$ 的箭头 e。这里使用箭头，是因为网络中可能存在自环和多重箭头，因此仅指定头端和尾端并不能唯一确定一个输入箭头。

一个输入同构 $\beta : I(c) \to I(d)$是其输入集之间的一一对应，并保持箭头类型。也就是说，对于所有β 以及所有 $e \in I(c)$ 节点 c， d， e 与 $\beta(e)$具有相同的箭头类型。若存在输入同构$\beta : I(c) \to I(d)$，则输入同构。等价地， c 和 d 具有相同的节点类型，并且每种箭头类型的输入箭头数量相同。

2.4 容许映射：示例

对于每个网络 $\mathcal{G}$ 和节点空间的选择 $P_c = \mathbb{R}^{n_c}$，我们都关联一个与该网络架构相容的常微分方程类。这类常微分方程称为网络常微分方程 （以前称为耦合细胞系统）。它们由可容许向量场空间决定。当所有 P_c 都是实向量空间时，我们将其称为容许映射。为简便起见，全文都在 C^∞ 范畴中进行讨论，但大多数结果也适用于 C^r 与$r \geq 1$。

例 2.2。 我们介绍一个示例，后文会出于不同目的多次重新讨论。图3是一个7节点网络，构成一条前馈链，并有一条从节点3指向节点1的反馈连接。（稍后，节点 $\{1,2,3\}$ 及连接箭头将被解释为具有 $\mathbb{Z}_3$ 对称性的CPG，而网络其余部分则是一个前馈提升。）网络只有一种状态类型（所有节点具有相同的节点空间）、一种节点类型（所有节点具有相同类型的内部动力学）和一种箭头类型（所有耦合形式相同，但连接的节点对不同）。节点的"颜色"（白色、灰色、黑色）将在第 2.6 节中解释，此处可以忽略。

数字 3 和 7 仅用于举例，除方便起见外并无特殊意义。对于任意正整数$p < q$，都可以构造类似的例子。

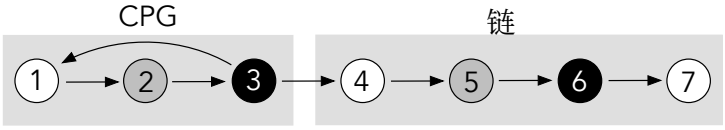


图3：一个含有 7 个节点、单一节点类型和单一箭头类型的前馈链。颜色表示一种同步模式。

该网络的可容许常微分方程具有以下形式：

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f(x_1, x_3) \\
\dot{x}_2 &= f(x_2, x_1) \\
\dot{x}_3 &= f(x_3, x_2) \\
\dot{x}_4 &= f(x_4, x_3) \\
\dot{x}_5 &= f(x_5, x_4) \\
\dot{x}_6 &= f(x_6, x_5) \\
\dot{x}_7 &= f(x_7, x_6)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

所有分量都使用同一个函数 f，因为所有节点具有相同的节点类型，且所有箭头具有相同的箭头类型。 x_c 对于 $1 \le c \le 7$ 都属于同一个节点空间 $\mathbb{R}^k$，因为所有节点具有相同的状态类型。（事实上，要始终使用同一个f，就要求所有节点空间都相同。）节点 c 对应的分量为$f(x_c,\ x_{i(c)})$，其中 $i(c)$是指向 c的输入箭头（此处只有一个）的尾端。如此一来，可容许常微分方程恰好是那些尊重网络结构的方程，包括保持节点类型和箭头类型。

2.5 容许映射：一般情形

现在，我们非正式地描述一种为一般网络写出容许映射的步骤。形式化定义见 [40, 第 9 节4]和 [44, 第 3]节。

为每个节点 c 选择 节点坐标 x_c 于 P_c 上。同一状态类型的节点具有相同的坐标系。一般而言， x_c 可以是多维的（$n_c > 1$）。令 $P = \oplus_c P_c$ 为总状态空间。映射 $f = (f_1、\ldots、f_n)$ 从 P映射到其自身，其分量为

$$f_c : P \to P_c \qquad 1 \le c \le n$$

为保证可容许性，我们对 f_c 施加反映网络架构的额外条件，如下：

定义 2.3. 设 $\mathcal{G}$ 是一个网络。映射 $f\colon P \to P$ 是 $\mathcal{G}$-可容许的，如果 :

(1) 定义域条件：对于每个节点 c，分量 f_c 只依赖于节点变量 x_c 以及输入变量 $x_{\mathcal{T}(e)}$，其中 $e \in I(c)$。(2) 对称性条件：如果 c 是一个节点，那么 f_c 在所有等价输入箭头对应的尾节点坐标置换下保持不变。(3) 拉回条件：如果节点 $c \neq d$ 输入同构，那么分量 f_c，f_d 作为函数是相同的。它们所作用的变量在某个（因而由条件 (2) 可知，也在任意）输入同构下相对应。

严格来说，条件 (2) 和 (3) 合并为一个拉回条件，适用于任意一对节点 c，d，无论它们相同与否 [44, 备注 9.20]。

每个可容许映射 f 都确定一个可容许常微分方程

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.2}$$

其中点表示时间导数。如果 f 还依赖于参数 λ（可能是多维的），并且对于任意固定的 λ，它作为 x 的函数是可容许的，那么我们就得到由映射 $f(x,\ \lambda)$ 和常微分方程 $\dot{x} = f(x,\ \lambda)$ 构成的一个可容许族。这类族在分岔理论中出现。

2.6 同步与平衡着色

若在可容许常微分方程的一个解 $x(t)$ 上，节点 c, d 同步，则

$$x_c(t) \equiv x_d(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

只有当 $P_c = P_d$ 时，这个方程才有意义；也就是说，c 和 d 具有相同的状态类型。对于给定网络，任何可容许常微分方程自然且稳健地产生的同步模式，都由一种称为平衡的性质刻画。下面给出定义。

定义 2.4。(a) 网络 $\mathcal{G}$ 的一个着色是一个映射 $\kappa : \mathcal{C} \to \mathcal{K}$，其中 $\mathcal{K}$ 是一个有限的颜色集合。

(b) 节点 c、d 具有相同的颜色当且仅当 $\kappa(c) = \kappa(d)$.

(c) 若对于任意两个颜色相同的节点，都存在一个保色的输入同构，则着色 κ 是平衡的。也就是说，只要节点 c, d 具有相同的颜色，就存在一个输入同构 $\beta\colon I(c) \to I(d)$，使得对于所有箭头 $e \in I(c)$，$\mathcal{T}(e)$ 和 $\mathcal{T}(\beta(e))$ 具有相同的颜色。用符号表示，$\kappa(\mathcal{T}(e)) = \kappa(\mathcal{T}(\beta(e)))$.

特别地，该定义要求相同颜色的节点具有输入同构关系。然而，输入同构关系不一定是平衡的。

定义 2.5。 由 $\mathcal{G}$ 的着色 κ 定义的同步子空间是向量子空间

$$\Delta_\kappa = \{x \in P : \kappa(c) = \kappa(d) \implies x_c = x_d\}$$

也就是说，对于 $x \in \Delta$，具有相同颜色的节点是同步的。

例 2.6。 接续例 2.2，我们再次考虑图3中的 7 节点链。图3所示的着色 κ 有三种颜色 $\mathcal{K} = \{$B、G、W$\}$，分别取自黑色、灰色和白色的首字母。我们有

$$\kappa(1) = \kappa(4) = \kappa(7) = \mathrm{W} \qquad \kappa(2) = \kappa(5) = \mathrm{G} \qquad \kappa(3) = \kappa(6) = \mathrm{B}$$

所有节点具有相同的节点类型和一个输入箭头，且所有箭头具有相同的箭头类型，因此这些节点是输入同构的。该着色是平衡的，因为：

$$\begin{array}{l}\text{Every B node has a single input from a G node.}\\ \text{Every G node has a single input from a W node.}\\ \text{Every W node has a single input from a B node.}\end{array} \tag{2.3}$$

所有节点具有相同的状态类型，因此 $P_1 = \ldots = P_7$。同步子空间为

$$\Delta_\kappa = \{(x, y, z, x, y, z, x) : x, y, z \in P_1\} \tag{2.4}$$

关于平衡着色和流不变性的基本定理是：

定理 2.7。 子空间 $V \subseteq P$ 在每个容许映射下都保持不变，当且仅当 V 是一个同步空间 Δ_κ，其中 κ是平衡的。

证明。 参见 [40, 定理 10.21]。 □

定理 2.7 表明，当 κ 是平衡的时，具有由 κ 定义的同步模式的初始条件（即，位于 Δ_κ中）会产生具有相同同步模式的解。然而，该结果并不能保证同步模式是稳定的：破坏同步的扰动可能导致轨道偏离 Δ_κ。这种稳定性取决于所涉及的可容许映射和轨道。

2.7 商网络与提升

平衡着色带来了一种重要的构造，在该构造中，同步节点被标识为簇 （或同步类 或颜色类）。

定义 2.8。 设 κ 是网络 $\mathcal{G}$ 上的一个平衡着色，其颜色集为 $\mathcal{K}$。商网络 $\mathcal{G}_\kappa$ 以 $\mathcal{K}$ 为其节点集（即每种颜色对应一个节点）。

节点 $i \in \mathcal{K}$ 的节点类型与满足 $\kappa(c) = i$的任意节点 $c \in \mathcal{C}$ 的节点类型相同。

$I(i)$ 中 $\mathcal{G}_\kappa$ 的箭头，是通过复制任意颜色为 i 的节点 c 的输入集 $I(c)$ 中的每个箭头 e 得到的；复制后生成一个头端为 $\kappa(\mathcal{H}(e))$、尾端为 $\kappa(\mathcal{T}(e))$ 且类型与 e 相同的箭头。

$\mathcal{G}_\kappa$ 的箭头集是 $\mathcal{K}$遍历 i 时各个 $I(i)$ 的并集。

例2.9。 图3中平衡着色 κ 对应的商网络有三个节点 {B、G、W}。所有节点的节点类型都相同。根据（2.3），只有一种箭头类型，箭头分别从B指向W、从W指向G、从G指向B。换言之，这个商网络是一个 $\mathbb{Z}_3$-对称的单向环，见图4。在这种情况下，它与子网络 $\mathcal{G}$ 同构，该子网络的节点为 $\{1,2,3\}$，并包含连接这些节点的箭头。一般而言，商网络不一定是子网络。

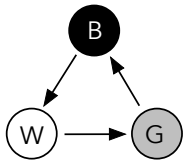


图4：图3中平衡着色对应的商网络是一个单向环，具有 $\mathbb{Z}_3$ 对称性，可对节点和箭头进行循环置换。

商网络的状态空间 P_κ 与 Δ_κ并不相同，但可以通过映射将二者自然地对应起来

$$\nu : \Delta_\kappa \to P_\kappa \qquad \nu(x)_{\kappa(c)} = x_c \tag{2.5}$$

该映射定义良好。例如，在 (2.3) 中，$\nu(x,\ y,\ z,\ x,\ y,\ z,\ x) = (x,\ y,\ z)$。对于任意可容许常微分方程，投影$\nu$ 都保持同步动力学。

定理2.10。 设 $\mathcal{G}$的一个平衡着色为 κ。那么

(1) 任意 $\mathcal{G}$-容许映射在 Δ_κ 上的限制都是 $\mathcal{G}_\kappa$-容许的。

(2) 每个 $\mathcal{G}_\kappa$-容许映射都是某个 $\mathcal{G}$-容许映射在 Δ_κ 上的限制 $p.$

换句话说，(2) 表示每个定义在 Δ_κ 上的 -可容许映射都可提升为定义在 P上的 $\mathcal{G}$-可容许映射。

如果 f 是 $\mathcal{G}$-可容许的，那么受限映射 $f|_{\Delta_\kappa}$ 决定了在 f 作用下由着色 κ所确定的同步簇的动力学。

即使原网络没有自环和多重箭头，商网络也可能包含自环和多重箭头。要证明性质 (2)，就需要这一特性；参见 [40, 第8节。10]。

例2.11。 再次考虑图3中的平衡着色 κ。根据例2.9，商网络有三个节点 {B、G、W}，构成一个 $\mathbb{Z}_3$-对称环。我们可以将相应的坐标分别写作 $x,\ y,\ z$。按照式（2.4），将这些坐标代入可容许常微分方程（2.1）：

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& f(x,z) \\ \dot{y} &=& f(y,x) \\ \dot{z} &=& f(z,y) \\ \dot{x} &=& f(x,z) \\ \dot{y} &=& f(y,x) \\ \dot{z} &=& f(z,y) \\ \dot{x} &=& f(x,z) \end{array} \tag{2.6}$$

这组方程看起来是超定的，因为关于 x有三个方程，而关于 $\dot{y}$ 和 z各有两个方程。然而，这些方程只是将同一个方程重复了三次或两次。（这恰恰是因为着色是平衡的。如果不是平衡的，有些方程就会彼此不一致。）因此，动力学可约化为一个常微分方程，其中每个坐标对应一个方程：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,z) \\ \dot{y} &= f(y,x) \\ \dot{z} &= f(z,y) \end{aligned} \tag{2.7}$$

这是商网络上最一般的可容许常微分方程，符合提升性质。

3 前馈提升

本节定义前馈提升。我们注意到（众所周知）任何容许映射的雅可比矩阵都是块三角形的，其中一个块对应 CPG，其余各块分别对应链中的每个节点。我们讨论如何构造给定 CPG 的前馈提升。（另一种说法是 [15, 30, 73]：CPG 是基底，属于图纤维化，其纤维 是节点的同步类；“前馈”意味着基底不接收来自有向图其余部分的输入。）

我们首先总结前馈网络的一些标准结果；证明见 [40,第 4] 章。“前馈”在图论中的常用术语是无环：不存在闭合有向路径。在动力学中，“前馈”一词更为常用。

在网络中，路径是指有向路径。在这样的路径中，每个节点都向下一个节点输入信号，因此信号会沿路径传播，但通常不会以同步或相位同步的方式传播。

定义3.1。(a) 如果存在一条从 p 到q的路径，则节点 q 位于节点 p 的下游。

(b) 如果 q 位于 p的下游，则节点 p 位于节点 q 的上游。

(c) 如果节点 p 既位于节点 q的上游，又位于其下游，则节点 p 和 q 是路径等价的。也就是说，存在一条从 p 到 q的有向路径，以及一条从 q 到p的有向路径。

(d) 网络的路径分量（或强连通分量，或传递分量）是节点关于路径等价关系所构成的一个等价类。它是满足以下条件的极大节点子集：该子集中的任意节点到子集中的任意其他节点之间都存在一条有向路径。每个网络都是其路径分量的不交并。对于通过包含该等价类中节点之间的所有箭头而得到的子网络，我们也使用相同的术语。

(e) 如果存在节点$p \in P$ 和节点 $q \in Q$ ，使得 q 位于 p的下游，则路径分量 Q 位于路径分量 P 的下游。如果 Q 位于 P的下游，则路径分量 P 位于分量 Q 的上游。

(f) 所有分量的集合可以构成一个有向图，其节点对应于各个分量；若存在从分量 C_1 指向分量

C_2 的箭头，当且仅当存在 $c_1 \in C_1, c_2 \in C_2$，且有一条从 c_1 指向 c_2 的箭头。这个图称为原网络的分支图或凝缩图，Eppstein [31]。

关于分支图前馈结构的以下结果在有向图理论中广为人知 [87]。

定理 3.2。 路径分量以一种前馈方式相连；也就是说，分支图是无环的。此外，节点上存在一个与前馈结构相容的全序。

证明。 这是一个简单的归纳法。参见例如 [40, 定理 4.11]。 □

对于节点上的一个相容次序，任意容许映射的雅可比矩阵都是分块下三角的，其分块由路径分量确定：

命题 3.3。 任意容许映射在任意点 x 处的雅可比矩阵都是分块下三角的，形式如下

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ * & J_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ * & * & J_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots * & J_m \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

其中， J_j 是 f 在第 j个路径分量上的雅可比矩阵，而每个**0** 都是大小适当的零矩阵块。

证明。 i_j为到节点c的输入箭头的尾端时， f_c(x_c， x_{i_1}，……， x_{i_l}) 的值与所有满足 $d > c$ 的 x_d 无关。 □

(3.8) 的三角形形式意味着，雅可比矩阵的特征值（包括重数）由对角块 J_j 决定。约当标准形也同样如此。

定义 3.4。 设 $\mathcal{G}$ 是一个网络，其节点集为 $\mathcal{C}$，且具有平衡着色 κ。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\mathcal{G}$ 的一个 前馈提升 是一个网络 $\mathcal{G}$，其节点为 $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}$，并具有平衡着色 $\tilde{\kappa}$，满足：

$\widetilde{\ }$(a) $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{G}$ 的子网络。$\widetilde{\ }$(b) 每个节点 $d \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}$ 都从某个节点 $c \in \mathcal{C}$ 下游可达。$\widetilde{\ }$(c) $\mathcal{G}$ 的唯一环是位于 $\mathcal{G}$ 中的环。$\widetilde{\ }$(d) $\mathcal{G}$ 上的着色 $\tilde{\kappa}$ 与 κ 具有相同的颜色集，并且在 $\mathcal{G}$ 上限制为 κ。

例 3.5. 再次考虑图3中的7 节点链，其中一个具有$\mathbb{Z}_3$ 对称性的 CPG 前馈连接到另外四个节点。设 $\mathcal{G}$ 为其节点 $\{1, 2, 3\}$ 以及连接这些节点的箭头所组成的子网络。设 κ 为给这些节点分别赋予不同$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$颜色的着色。设 $\mathcal{G}$ 为完整的7节点网络。那么，对于图示的着色 $\tilde{\kappa}$， $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{G}$ 的前馈提升。很容易验证性质 (a–d)。

网络 $\mathcal{G}$上总是至少存在一种平衡着色，即平凡着色，其中所有节点的颜色都各不相同。

容易看出的前馈提升，且着色 κ 是平凡的，那么商网络 $\mathcal{G}_\kappa$ 与 $\mathcal{G}$同构。

命题 3.6。(a) 每个针对 $\mathcal{G}$ 的可容许映射 f 都可提升为针对 $\mathcal{G}$的可容许映射 $\tilde{f}$。(b)映射 $\tilde{f}$ 使 $\tilde{\kappa}$ 的同步子空间保持不变。(c)商网络 $\mathcal{G}_{\tilde{\kappa}}$ 与商网络 $\mathcal{G}_\kappa$同构。(d) 设 λ 是 $\mathcal{G}$ 的任意一个平衡着色，且比 κ 更粗（这意味着 $\kappa(c) = \kappa(d) \Rightarrow \lambda(c) = \lambda(d)$），并设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{G}$的一个前馈提升。那么 λ 可提升为 $\mathcal{G}$ 的一个平衡着色 $\tilde{\lambda}$，其颜色集合相同，且该着色比 $\tilde{\kappa}$更粗。

证明。这些是提升的一般性质；见 [40, 定理 10.27、命题 10.38]。

□

我们将任何这样的 $\tilde{f}$ 一个同步提升 称为 f 具有同步模式 $\tilde{\kappa}$的提升。根据构造，与唯一的节点着色 $\tilde{\kappa}$ 具有相同的颜色的每个节点 i 我们将该节点记为 $[i]_{\tilde{\kappa}}$。

3.1 前馈提升的路径分量

回顾一下，有向图的“路径分量”也称为“传递”或“强连通”分量，它由一个节点集构成，并且该节点集对于以下性质是极大的：任意两个节点 c，d 之间都存在一条由箭头构成的有向路径，从 c 通往 d。特别地，也存在一条（可能不同的）从 d 通往 c的路径。

引理 3.7. $\mathcal{G}$ 的每个路径分量，要么是 $\mathcal{G}$ 的路径分量，要么是 $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}$中的一个单独的节点。

证明。 节点 c，d 路径等价，当且仅当它们位于某个闭环上。所有此类环都位于 $\mathcal{G}$中。

□

将函数 F 关于（多维）变量 x_c 的偏导数记为 $\mathrm{D}_c F$。有：

推论 3.8. 设 f 对于 $\mathcal{G}$ 是可容许的，且 $\tilde{f}$ 是 f 到 $\mathcal{G}$的一个提升。按照与分支图上的偏序相容的方式排列节点，其中节点 $1, \ldots, m$ 属于 $\mathcal{C}$，节点 $m+1, \ldots, n$ 属于 $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}$。设 J 为 $f = (f_1, \ldots, f_m)$ 在 $P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$ 上的雅可比矩阵。那么在任意给定点处，$\tilde{f}$的雅可比矩阵 $\tilde{J}$均为分块下三角矩阵，其形式为

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ * & \mathrm{D}_{m+1} f_{m+1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ * & * & \mathrm{D}_{m+2} f_{m+2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & \mathrm{D}_n f_n \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

在该点处求值。

推论 3.9. (a) P 中任意一点处的 J 特征值，是 J 的特征值与 $\mathrm{D}_c f_c$ 的特征值的并集，其中 $m+1 \le c \le n$。

(b) 在同步空间 Δ_κ 中的任意一点，对于 $m+1 \le c \le n$，我们有

$$\mathrm{D}_c f_c = \mathrm{D}_{[c]} f_{[c]} \tag{3.10}$$

其中，$[c]$ 是唯一满足 $\kappa(c) = \kappa([c])$ 的节点 $c \in \mathcal{G}$。特别地，在同一点处取值时，$\mathrm{D}_c f_c$ 的特征值与 $\mathrm{D}_{[c]} f_{[c]}$ 的特征值相同。

证明。(a) 这由块三角结构直接得出。

(b) 拉回条件以及由 κ 诱导的同步模式很容易推出 $\mathrm{D}_c f_c = \mathrm{D}_{[c]} f_{[c]}$。

□

注释 3.10。关于自环，有一个小小的复杂之处。我们假设 *CPG* 的所有自环都提升为 $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}$中的前馈箭头。因此，矩阵 $\mathrm{D}_c f_c$ 是节点 c上内部动力学的雅可比矩阵，不考虑来自其他节点的所有输入，也不考虑 c 上的所有自环（如果存在）。现在，J 的特征值由 J 的特征值以及 J每个对角块内部部分的特征值组成。

例 3.11。图3所示的 7 节点链的任意可容许映射 $F(x)$ 都具有形式 (2.1)。因此，在一般点 $u = (u_1, \dots, u_7) \in \mathbb{R}^{7k}$ 处，雅可比矩阵具有分块形式

$$\widetilde{J}|_u = \left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} f_1(u_1,\ u_3) & 0 & f_2(u_1,\ u_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2(u_2, u_1) & f_1(u_2, u_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2(u_3,\ u_2) & f_1(u_3, u_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & f_2(u_4, u_3) & f_1(u_4, u_3) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & f_2(u_5, u_4) & f_1(u_5, u_4) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & f_2(u_6, u_5) & f_1(u_6,\ u_5) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2(u_7,\ u_6) & f_1(u_7,\ u_6) \end{array}\right] \tag{3.11}$$

这里我们将 f_1，f_2 记作 f 关于其第一和第二个变量的偏导数。按照通常的记号，对于 $i = 1, 2$，我们写作 $f_i = \mathrm{D}_i f$。这些线表示分块三角结构，左上方有一个 3×3 块，我们将其识别为 F 限制在 $\mathcal{G}$上的雅可比矩阵，此外还有一系列四个块 f_1。这些块在 u 处求值，彼此不必相等；但在 Δ_κ 中的某一点处求值时，根据（3.10），对于颜色相同的节点，它们是相等的。

3.2 前馈提升的构造

给定网络 $\mathcal{G}$ 的前馈提升很容易构造。非正式地说，逐个添加新节点，并从 CPG 中选择一种颜色。复制 CPG 中具有该颜色的节点的输入箭头集，将每条输入箭头连接起来，使其头端为新节点，而尾端为 $\mathcal{G}$中颜色与对应箭头尾端相同的任意旧节点。重复此过程。

更正式地说，设 $\mathcal{G}$ 是一个节点为 $\mathcal{C}=\{1,\dots,m\}$的网络。为其所有节点分别着上不同的颜色，这样我们就可以将颜色集 $\mathcal{K}$ 与 $\{1,\dots,m\}$对应起来。构造 CPG 为 $\mathcal{G}$ 的前馈提升简单而直接。可以通过归纳法逐次添加一个新节点来描述这一构造。设 $\mathcal{G}_0=\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{C}_0=\mathcal{C}$。这是 $\mathcal{G}$ 的一个平凡前馈提升，不含额外节点，并由此开始归纳过程。

假设已添加 k 个额外节点，从而得到 $\mathcal{G}$ 的前馈提升 $\mathcal{G}_k$，其节点为 $\mathcal{C}_k=\{1,\dots,m+k\}$。

添加一个新节点 $m+k+1$以得到 $\mathcal{C}_{k+1}$。将该节点赋予与某个节点$d\in\mathcal{C}_0$相同的颜色。接下来需要定义节点 $m+k+1$ 的输入箭头，使着色达到平衡。为此，通过输入同构 β复制输入集 $I(d)$，并将所有这些箭头的新头端节点指定为 $m+k+1$。现在，$I(m+k+1)=\beta(I(d))$。重新连接每个箭头 $\beta(e)\in I(m+k+1)$的尾端节点，使其尾端 $\mathcal{T}(\beta(e))$成为 $\mathcal{C}_k$ 中与 $\mathcal{T}(e)$具有相同颜色的任意节点。（该节点可以是其自身，即 $\mathcal{T}(e)$，但为了获得短距离连接，也可以使用链上更远处的、具有所需颜色的任意节点。）然后，β是从 $I(d)$ 到 $I(m+k+1)$ 的保色输入同构。由于所有新箭头的尾端节点都位于 $\mathcal{C}_k$中，所得网络 $\mathcal{G}_{k+1}$ 是 $\mathcal{G}$的前馈提升。

例如，在图3中，我们有 $\mathcal{C}_0=\{1,2,3\}$，而 $\mathcal{G}_0$ 是这些节点上的 $\mathbb{Z}_3$-对称环。我们希望得到颜色类为 $\{1,4,7\}$，$\{2,5\}$，$\{3,6\}$ 的着色。要得到 $\mathcal{G}_1$，我们添加节点 4，其颜色与节点 1 相同。节点 1 有一条输入箭头，尾端是节点 3；复制这条箭头，使其头端位于节点 4，而尾端仍位于节点 3，因为在排序中，只有节点 3 既早于节点 4，颜色也符合要求。要得到 $\mathcal{G}_2$，添加节点 5，并复制指向节点 2 的输入箭头。这次尾端节点有两种选择：节点 1 或节点 4。图中选择了节点 4。要得到 $\mathcal{G}_3$，我们需要一条头端为节点 6、尾端为节点 2 或节点 5 的箭头；$\mathcal{G}_4$ 也同理。选择其中一组这样的箭头（使其作用范围尽可能短），即可得到图3所示的着色。

注释 3。 12. (a) 正如这一描述所表明的，前馈提升并不唯一。

(b) 当 $\mathcal{G}$ 具有非平凡的平衡着色κ时，也可以采用类似的构造。其描述基本相同，因为唯一的变化是 κ。现在，κ提升为具有相同颜色集合的平衡着色 $\tilde{\kappa}$。这是着色 [40, 的一个一般性质，见命题 10。38]。

3.3 前馈提升的记号

我们采用以下记号表示前馈提升。我们选取一个固定的（但任意的）~平衡着色 κ，并用它从一个 CPG $\mathcal{G}$构造前馈提升 $\mathcal{G}$。

一般而言，给定一个表示由 $\mathcal{G}$定义的对象的符号 s，我们用 $\tilde{s}$ 表示其提升，并在适当情况下用 s^*表示其补对象。

因此，我们将 CPG网络记为 $\mathcal{G}$，其节点为 $\mathcal{C}=\{1,\dots,m\}$。前馈~ ~提升记为 $\mathcal{G}$，其节点为 $\mathcal{C}=\{1,\dots,n\}$，其中 $n>m$。我们将 $\mathcal{C}^*=\{m+1,\dots,n\}$ 记为前馈链的节点。

~ ~ ~将 $\mathcal{G}$的总状态空间记为 P，将 $\mathcal{G}$的总状态空间记为 P。对于任意子集 $\mathcal{Q}\subseteq\mathcal{C}$，令 $P_{\mathcal{Q}}=\oplus_{c\in\mathcal{Q}}P_c$。

~特别地，对所有 $c \in \mathcal{C}$，将节点 c 的节点空间记为 P_c，因为这不会造成歧义。类似地，$P = P_{\mathcal{C}}$ 的坐标记为（x_1，…，x_m），~$P = P_{\tilde{\mathcal{C}}}$ 上的坐标记为（x_1，…，x_n），而 $P^* = P_{\mathcal{C}^*}$ 上的坐标记为（x_{m+1}，…，x_n）。

~ ~ ~如果 $f\colon P \to P$ 对 $\mathcal{G}$ 是可容许的，则其提升记为 $f\colon P \to P$。如果 $x(t)$ 是定义在 P 上的常微分方程 $\dot{x} = f(x)$ 的一个解~，那么其提升为 $\tilde{x}(t)$，且这是定义在 P 上的常微分方程 $\dot{x} = f(x)$~的一个解。

将 $\mathcal{C}$ 的所有节点着以不同颜色，并令相应的同步子空间为 Δ。对于所选的节点排序，(2.5) 中将 Δ 自然识别为 $P_{\mathcal{C}}$ 的映射 ν 满足

$$\nu(v) = (v_1, \ldots, v_m) \quad v \in \Delta$$

其逆映射为 $\nu^{-1}(v_1, \ldots, v_m) = V$，其中 $V_c = v_{[c]}$。前馈结构结合平衡条件意味着，Δ 上的商动力学可与定义在 $P_{\mathcal{C}}$ 上的 CPG $\mathcal{G}$ 的动力学相识别。也就是说，Δ 上 $f|_\Delta$ 的动力学通过识别映射 ν 与 $P_{\mathcal{C}}$ 上 $f_{\mathcal{C}}$ 的动力学共轭。

4 稳定性背景

动力系统状态的稳定性由 Liapunov 于 1892–93 年定义并分析；参见 [67]。[13] 系统地分析了度量空间上连续流的几种不同稳定性概念。现代研究主要关注光滑（大多为紧）流形上的流和微分同胚；这项研究由 Smale [92] 和 Arnold [8], 开创，并由他们的学生及其他学者深入发展。

我们回顾一些与稳定性相关的基本概念；例如参见 [52]。我们仅讨论平衡点和周期轨道。

4.1 平衡点

首先，我们回顾平衡点的四种稳定性概念，其中两种是等价的。更多信息请参见 [75, 第 4]章和 [65, 66, 67]。设 x^* 是常微分方程的一个平衡点

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.12}$$

其中 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是光滑的（通常我们认为这意味着 C^∞，但对于 $r \geq 1$，常常 C^r 就足够了）。

平衡点的稳定性概念

李雅普诺夫稳定性 李雅普诺夫稳定性的概念可追溯至李雅普诺夫 [67]，也是 [66]的核心主题。如果对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得只要 $\|x(0) - x^*\| < \delta$，那么对于所有 $t > 0$，$\|x(t) - x^*\| < \varepsilon$，则平衡点 x^* 是**李雅普诺夫稳定**。如果存在平衡点，这一概念同样适用于非自治常微分方程。

渐近稳定性 若平衡点 x^* 是李雅普诺夫稳定的，并且可以选择 δ 使得 $\|x(t) - x^*\| \to 0$ 当 $t \to +\infty$ 时，则称其为**渐近稳定**。

指数稳定性 若存在 x^*的一个邻域 V以及常数 $K, \alpha > 0$，使得对所有 $x(0) \in V$，都有 $\|x(t) - x^*\| < Ke^{-\alpha t}$，则称平衡点 x^* 为指数稳定 。（对于某个范数（不一定是欧几里得范数），我们可以假设 $K = 1$。）

线性稳定性 当在 x^* 处计算雅可比矩阵 $\mathrm{D}f$ 时，其所有特征值均具有负实部，平衡点 x^* 被称为线性稳定 。

指数稳定性蕴含渐近稳定性，而渐近稳定性又蕴含李雅普诺夫稳定性。反之一般不成立。线性稳定性等价于指数稳定性。

稳定流形与不稳定流形 在非线性动力学中，人们特别关注双曲性的概念。当 $\mathrm{D}f|_{x^*}$ 的所有特征值都不具有零实部时，平衡点 x^* 被称为双曲的 。状态空间 P 分解为直和 $P = E^s \oplus E^u$，其中稳定子空间 E^s 是所有具有负实部特征值所对应的广义特征子空间之和，而不稳定子空间 E^u 是所有具有正实部特征值所对应的广义特征子空间之和。在 x^* 附近存在一个光滑的稳定流形 W^s和一个不稳定流形 W^u，分别与 E^s 和 E^u 相切。这些流形是唯一的。如果 A 不是双曲的，则还存在一个中心子空间 E^c 及与之相切的中心流形 W^c；一般而言，它不是唯一的，并且只有 C^k 光滑。

4.2 周期轨道

周期轨道的理论与此类似，但存在一些细微的复杂之处。考虑某个初始条件 $a(0)$ 所对应的周期轨道 $A = \{a(t)\}$ 。周期轨道的稳定性概念通常通过考虑一个与轨道横截的 庞加莱 ′截面 Σ 来获得，因此轨道在点 $a(0)$ 处与 Σ 相交。相应的 庞加莱 ′映射或 首次$\widetilde{\quad}$返回$\widetilde{\quad}$映射 σ 为：$\Sigma \to \Sigma$。这里，Σ 是 $a(0)$ 的一个邻域，且满足 $\sigma(\Sigma) \subseteq \Sigma$。现在，$a(0)$ 是 σ 的不动点，我们可以将 σ 视为一个由 Σ 构成的离散动力系统。

特别地，若对应于该轨道的不动点处的庞加莱映射导数在单位圆上没有特征值，则周期轨道 A 是双曲的。（相应的弗洛凯算子有一个特征值 1，对应于轨道的切向方向，但庞加莱映射会使维数减少 1。）一般而言，存在稳定子空间和不稳定子空间，并与相应的光滑切流形相关联。中心流形的光滑性性质则更为技术性 [57]。

弗洛凯理论

传统上，周期轨道 $A = \{a(t)\}$ 的主要稳定性概念是通过弗洛凯理论 [49, 第 1 章第 4] 节来定义的。围绕周期轨道 A 对常微分方程进行线性化，得到一个时变常微分方程

$$\dot{y} = M(t)y \tag{4.13}$$

其中 $M(t) = \mathrm{D}_y f|_{a(t)}$是 T周期的。Floquet定理 [33]指出，存在一个基本矩阵 $Y(t)$，使得对于常向量 v，任意解 $y(t)$ 都满足 $= Y(t)v$ 。

此外，存在一个 T周期矩阵函数 $P(t)$ 和一个常矩阵 B，使得每个基本矩阵都具有如下形式

$$Y(t) = P(t)\mathrm{e}^{Bt} \tag{4.14}$$

参见 [49, 第39]页。

β_i 的特征值是*Floquet* 指数，e^{BT} 的特征值是*Floquet*乘子。矩阵 e^{BT} 由 $M(t)$唯一确定，因此 ρ_i 是唯一的。 β_i 的实部是唯一的，但其虚部仅在模 $2\pi/T$意义下唯一；参见 [49, 注 2，第40]页。稳定性条件是，除由轨道本身给出的单个特征值 0 外，所有 β_i 都具有负实部；等价地，除单个特征值 1 外，所有 ρ_i 都严格位于单位圆内。缺乏唯一性并不影响这些结论。

在较现代的处理方法中，矩阵 e^{BT} 本质上是庞加莱映射在对应于周期轨道的不动点处的雅可比矩阵，并通过降一维来排除沿周期轨道的特征值 1。

这种意义下的稳定性蕴含渐近稳定性。现在令 $A = \{a(t)\}$ 对应某个初始条件 $a(0)$；那么存在一个邻域 $U \supseteq A$，使得若 $x(0) \in U$，其轨道为 $\{x(t)\}$，则

$$\lim_{t\to\infty} d(x(t), A) = 0 \tag{4.15}$$

其中 $d(x, A)) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$。同样，收敛是指数级的。此外，对于每个 $x(0) \in U$，都存在一个依赖于 $x(0)$ 的 $\theta \in \mathbb{R}$，使得

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - a(t + \theta)\| = 0 \tag{4.16}$$

且收敛是指数级的。参见 [49, 定理 (3) 第42]页。此时称该周期轨道具有渐近相位。为后文使用，给出如下定义：

定义4.1. 趋向于给定渐近相位 θ 的初始条件所构成的子流形称为等时线 [29, 47]。这些等时线铺满稳定周期轨道的一个邻域。

注4.2. 每个 *Floquet* 稳定周期轨道都是双曲的。根据 *[51, 定理4.1(f)],*，这意味着对常微分方程施加任意充分小的 C^1 扰动（无论是否可容许），该轨道都会持续存在，即存在一个靠近原轨道的唯一周期轨道。（该定理针对离散动力系统给出了证明，但证明末尾指出，结论对连续动力系统也成立。）这表明，从理想化模型推导出的周期轨道的存在性和稳定性，在理想假设仅近似成立时仍会保持——前提是近似足够精确。在实践中，即使扰动相当大，周期轨道的存在性和稳定性往往仍能保持；参见*[97]* 关于前馈提升的一些数值实验。

李雅普诺夫稳定性

李雅普诺夫稳定性的概念可通过庞加莱映射推广到周期轨道 $\{a(t)\}$。更一般地，对于任意轨道 $\{a(t)\}$，定义 $y(t) = x(t) - a(t)$。那么，非自治

常微分方程（称为偏差系统）

$$\dot{y} = f(y + a(t)) - \dot{a}(t)$$

在 $y = 0$ 处有一个平衡点。若该平衡点是李雅普诺夫稳定的，则称轨道 $a(t)$是李雅普诺夫稳定的。由于 $y(t) = x(t) - a(t)$，我们可以展开这个定义：

定义4.3。 若对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得只要 $\|x(0) - a(0)\| < \delta$，就有 $\|x(t) - a(t)\| < \varepsilon$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立，则称轨道 $a(t)$李雅普诺夫稳定 。

4.3 关于范数的说明

$\mathbb{R}^n$ 上的所有范数都等价，因此第4.1节中的稳定性概念不取决于~范数的选择。在网络动力学中， P 上的一个方便范数为

$$\|x\| = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| \tag{4.17}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是（例如） P_c 上的欧几里得范数，这与（4.18）一致。在下一节中，我们将使用子空间 $\mathcal{X}$ $\mathcal{Y}$ 的直和 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$，并定义范数，使得若 $\mathcal{Z} = (X,\ Y) \in \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$，则

$$\|Z\| = \|X\| + \|Y\| \tag{4.18}$$

当 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是节点空间之和时，该定义与 (4.17) 一致。

5 前馈提升的横向稳定性

现在我们进入本文的核心结果。我们将表明，如果 CPG 上的节点动力学具有模型中常见的某些特征，这种类型的前馈同步可以非常稳健。它不仅在动力学上稳定，而且在结构上稳定：当连接强度、耦合形式以及节点的动力学方程发生微小扰动时，它仍能保持不变。

5.1 受迫系统的弗洛凯指数

我们从一个一般性结果开始。该结果想必众所周知，但为完整起见，我们给出证明。

设 $P = \mathbb{R}^k$，$Q = \mathbb{R}^l$，并在 $P \oplus Q$ 上考虑一个受迫常微分方程（斜积）：

$$\dot{X} = F(X) \tag{5.19}$$

$$\dot{Y} = G(X, Y) \tag{5.20}$$

具有周期为 T 的周期轨道 $(X(t)\ Y(t)) = (a(t)\ b(t))$。

T该轨道附近的线性化常微分方程（即弗洛凯方程）为 n

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 F|_{(a(t),b(t))} & 0 \\ \mathrm{D}_1 G|_{(a(t),b(t))} & \mathrm{D}_2 G|_{(a(t),b(t))} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \qquad U \in P, V \in Q \tag{5.21}$$

其中，记号 $\mathrm{D}_k H|_{c(t)}$ 表示 H 关于第 k 个变量的偏导数，并将 $c(t)$视为参数。

引理 5.1。 采用上述记号，$a(t)$ $b(t))$ 在 $P \oplus Q$ 上的 ***Floquet*** 乘子，与 $a(t)$ 在 P 上的 ***Floquet*** 乘子相同，此外还包括下列时变常微分方程的 ***Floquet*** 乘子

$$\dot{V} = \mathrm{D}_2 G|_{(a(t),b(t))} V \tag{5.22}$$

证明。 根据前馈结构， $a(t)$ 是方程 (5.19) 的 T-周期轨道，而这正是 P 上 $a(t)$ 的弗洛凯方程。方程 (5.19) 的解给出了 P 上 $a(t)$ 的 Floquet 乘子。

子空间 $0 \oplus Q$ 在方程 (5.21) 的流下是不变的，将 (5.21) 限制在该子空间上便得到 (5.22)。由于 $0 \oplus Q$ 是 P 的补空间，该方程的解给出了 $P \oplus Q$ 上 $a(t)$ 的其余 Floquet 乘子。

□

5.2 横向弗洛凯乘子与指数

引理 5.1 表明，对于任意一个固定的中央模式发生器的前馈提升，只要该提升向包含任意数量节点的链进行前馈，Floquet 乘子的计算就可以简化为仅涉及 CPG 的简单计算。事实上，网络的其余部分不必是链：同样的结论适用于任意前馈提升。

这种简化有两个原因。首先，前馈提升中涉及的平衡着色会使弗洛凯算子具有多个特征值。其次， $\mathcal{G}$ 的 ~前馈结构会在雅可比矩阵上形成块三角结构 (3.9)，进而使弗洛凯方程也具有这种结构。这种结构贯穿整个动力学过程。

具体而言，我们首先需要：

定义 5.2。 (a) 使用上述记号，节点$c \in \mathcal{C}^*$ 的横向弗洛凯方程 为

$$\dot{y}_c = \mathrm{D}_{[c]} f_{[c]}|_{a(t)} y_c \tag{5.23}$$

其中 D[c] 表示关于 $x_{[c]}$的偏导数。注意，这只取决于 CPG 的常微分方程以及这些方程的周期轨道。

根据弗洛凯理论，(5.23) 的每个解都具有如下形式

$$y_c(t) = P_c(t) \mathrm{e}^{B_c t} v$$

其中 v是一个常向量。这里， $P_c(t)$ 是 T-周期的，而 B_c 是一个常矩阵。于是：

(b) 矩阵 $M_c = \mathrm{e}^{B_c T}$ 是节点 c的横向弗洛凯矩阵。(c) 矩阵 B_c 是节点 c的横向弗洛凯指数矩阵。(d) 若节点 c 处的周期轨道 $A = \{a(t)\}$ 满足 M_c 的所有特征值的绝对值均为 < 1，则该轨道在此处横向弗洛凯稳定。

等价地， B_c 的所有特征值实部均为负。

(e) M_c 的特征值是节点 c的横向弗洛凯乘子。

(f) B_c 的特征值是节点 c的横向弗洛凯指数。

(尽管这些矩阵并不唯一，我们仍在 (b,c) 中使用“the”一词，因为 (d,e,f) 中的特征值是唯一的。)

例5.3。 我们求出图3所示网络的横向弗洛凯方程，该网络由采用电压耦合的FitzHugh–Nagumo神经元组成。CPG中的节点为 $\{1, 2, 3\}$，所关注的节点为 $\mathcal{C}^* = \{4, 5, 6, 7\}$中的节点。

方程为:

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= V_c(a-V_c)(V_c-1)-W_c+I+\mu V_{c-1}\\ \dot{W}_c &= bV_c-\gamma W_c\end{aligned}$$

对于 $4 \le c \le 7$。这里 μ 是耦合强度。相应的雅可比矩阵对角块为

$$J_c(t)=\begin{bmatrix} -3V_c^2+2(a+1)V_c-a & -1\\ b & -\gamma\end{bmatrix}$$

在 $a(t) = (\alpha(t)\ \beta(t))$ 处求值后，这些项变为

$$J_c(t)|_{a(t)}=\begin{bmatrix} -3\alpha_{[c]}(t)^2+2(a+1)\alpha_{[c]}(t)-a & -1\\ b & -\gamma\end{bmatrix}$$

它与 β 无关。令 $y_c = (v_c,\ w_c)$，横向弗洛凯方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_c\\ \dot{w}_c\end{bmatrix}=J_c(t)|_{a(t)}\begin{bmatrix}v_c\\ w_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-3\alpha_{[c]}(t)^2+2(a+1)\alpha_{[c]}(t)c-a)v_c-w_c\\ bv_c-\gamma w_c\end{bmatrix}$$

尽管 μ 没有显式出现，但它会影响周期轨道 A，因此也会影响横向弗洛凯方程。

5.3 前馈提升的稳定性定理

现在，我们可以给出一个充分条件，使平衡点或周期轨道的前馈提升在完整状态空间中弗洛凯稳定；也就是说，它对破坏同步的扰动以及保持同步的扰动都稳定。

定理 *5.4.* 设 $\{\tilde{a}(t)\}$ 是周期轨道 $\{a(t)\}$ 在 $P_{\mathcal{C}}$ 上的前馈提升。那么：*(a)* $\{\tilde{a}(t)\}$ 的 *Floquet* 乘子是 $a(t)$ 的 *Floquet* 乘子与所有 $c \in \mathcal{C}^*$ 的横向弗洛凯乘子。*(b)* $c \in \mathcal{C}^*$ 的横向弗洛凯乘子与 $[c] \in \mathcal{C}$ 的相同。*(c)* $\{\tilde{a}(t)\}$ 在 P 上稳定，当且仅当 $\{a(t)\}$ 在 $P_{\mathcal{C}}$ 上稳定，并且对于 $\mathcal{C}$ 中的所有节点，所有横向弗洛凯乘子的绝对值均为 < 1。

证明。 将节点排序，使 CPG 包含节点 $\mathcal{C} = \{1, \dots, m\}$，网络的其余部分包含节点 $\mathcal{C}^* = \{m+1, \dots, n\}$。设 $\mathcal{G}_k$ 是由节点 $\{1, \dots, m+k\}$ 以及连接这些节点的所有箭头构成的子网络。那么， $\mathcal{G}_{k+1}$ 是 $0 \le k \le n-m$ 的 $\mathcal{G}_k$ 的前馈提升。

为证明 (a)，我们对 k 进行归纳法。对于 $k = 0$，该陈述显然成立。从 k 到 $k+1$ 的步骤由引理 5.1 得出，同时注意到当 $c \in \mathcal{C}^*$ 时， f_c 的定义域是 $P_1 \oplus \cdots \oplus P_c$ 的子空间，因此与时间相关的参数 $a(t)$ 限制在该子空间上。

为证明 (b)，注意到由于状态 $\tilde{a}(t)$ 是 $a(t)$ 的提升，当 $x \in \Delta$ 时，函数 $f_c(x)$ 和 $f_{[c]}(x)$ 相等。对于它们在点 $a(t) \in \Delta$ 处的导数，同样成立。

(c) 部分现由 (a) 和 (b) 得出。 □

该定理表明，提升的周期状态的稳定性只取决于 CPG 的常微分方程，与 $\mathcal{C}^*$中的节点数无关。粗略地说，CPG 的完整方程决定了 CPG 的 Floquet 乘子，而其对角项决定了所有横向弗洛凯乘子，因为这些乘子与相应颜色的 $\mathcal{C}$ 中节点的乘子相同。

定理还意味着，当前馈链 $\mathcal{C}^*$ 中的两个节点同步时，它们的横向特征值相等。换言之，即使网络没有对称性，在网络容许常微分方程的范畴中，Floquet矩阵一般也可以有多个相同的特征值。这种现象在稳态中广为人知（事实上，它出现在7节点网络中）；前馈提升为周期轨道提供了丰富多样的实例。

当前馈链 $\mathcal{C}^*$ 中的两个节点相位同步时，情况也相同，因为 Floquet 乘子在相位平移下保持不变；见下文定理 7.1。

5.4 等时线

回顾等时线的定义，即定义4.1。

容易看出，当 A 稳定时， P 中的 A 对应的等时线 I_θ 可以自然地扩展为 P中的 A 对应的等时线 I_θ~~~

定义 5.6. 轨道 $R(t)$ 在 $\mathcal{Z}$ 上是李雅普诺夫稳定 的：对于任意 $\varepsilon > 0$，均存在$\delta > 0$，使得：

$$\|Z(0) - R(0)\| < \delta \implies \|Z(t) - R(t)\| < \varepsilon \qquad (t > 0)$$

定义 5.7。 轨道 $R(t) = (P(t)\ Q(t))$ 在 $\mathcal{Y}$ 上是横向李雅普诺夫稳定 的，当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得

$$\begin{aligned} \|X(0) - P(0)\| &< \delta \quad \text{and} && (5.27)\\ \|Y(0) - Q(0)\| &< \delta \quad \text{imply} && (5.28)\\ \|Y(t) - Q(t)\| &< \varepsilon \qquad (t > 0) && (5.29) \end{aligned}$$

现在我们来讨论本节的主定理：

定理 5.8。
轨道 $R(t)$ 在 $\mathcal{Z}$ 上李雅普诺夫稳定，当且仅当以下两个条件成立：

(a) 轨道 $P(t)$ 在 $\mathcal{X}$ 上李雅普诺夫稳定，且(b)轨道 $R(t)$
在 $\mathcal{Y}$ 上横向李雅普诺夫稳定。

Proof. First，假设 that $R(t)$ is Lyapunov stable on $\mathcal{Z}$. We prove that (a) and (b) hold。为证明 (a)，令 $\varepsilon > 0$。轨道 $X(t)$ 根据前馈结构独立于 $Y(0)$。因此，我们可以选择初始条件，使得 $Y(0) = Q(0)$，而不影响$X(t)$。接着

$$\|Z(0) - R(0)\| = \|X(0) - P(0)\| + \|Y(0) - Q(0)\| = \|X(0) - P(0)\|$$

因此

$$\begin{aligned} \|X(0) - P(0)\| < \delta &\implies \|Z(0) - R(0)\| < \delta \\ &\implies \|Z(t) - R(t)\| < \varepsilon \qquad (t > 0) \\ &\implies \|X(t) - P(t)\| + \|Y(t) - Q(t)\| < \varepsilon \quad (t > 0) \text{ by } (4.18) \\ &\implies \|X(t) - P(t)\| < \varepsilon \qquad (t > 0) \end{aligned}$$

这就是 (a)。

现在证明 (b)。在此情形下， Y 的动力学取决于 X，因此我们无法选择初始条件。

再次令 $\varepsilon > 0$。由于 $R(t)$ 在 $\mathcal{Z}$ 上是李雅普诺夫稳定的，存在 $\delta_1 > 0$ 使得

$$\|Z(0) - R(0)\| < \delta_1 \implies \|Z(t) - R(t)\| < \varepsilon \qquad (t > 0)$$

由 (a) 可知，存在 δ_2 使得

$$\|X(0) - P(0)\| < \delta_2 \implies \|X(t) - P(t)\| < \varepsilon \qquad (t > 0)$$

令 $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_1, \delta_2)$。

假设

$$\begin{aligned} \|X(0) - P(0)\| &< \delta \\ \|Y(0) - Q(0)\| &< \delta \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \|X(0) - P(0)\| &< \delta_2 \\ \|Y(0) - Q(0)\| &< \delta_1 \\ \|Z(0) - R(0)\| &< 2\delta \le \delta_1 \end{aligned}$$

因此

$$\|Z(t) - R(t)\| < \varepsilon \qquad (t > 0)$$

但根据 (4.18),

$$\|X(t) - P(t)\| + \|Y(t) - Q(t)\| = \|Z(t) - R(t)\| < \varepsilon$$

so

$$\|Y(t) - Q(t)\| \le \|Z(t) - R(t)\| < \varepsilon \qquad (t > 0)$$

这就证明了 (b)。

反过来，假设条件 (a) 和 (b) 成立。我们必须证明 $R(t)$在 $\mathcal{Z}$ 上是李雅普诺夫稳定的。

令 $\varepsilon > 0$。根据 (a)，存在 $\delta_1 > 0$ 使得

$$\|X(0) - P(0)\| < \delta_1 \implies \|X(t) - P(t)\| < \varepsilon/2 \qquad (t > 0)$$

根据 (b)，存在 $\delta_2 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \|X(0) - P(0)\| &< \delta_2 \quad \text{and} \\ \|Y(0) - Q(0)\| &< \delta_2 \quad \text{imply} \\ \|Y(t) - Q(t)\| &< \varepsilon/2 \qquad (t > 0) \end{aligned}$$

令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$。那么，根据 (4.18),

$$\|Z(0) - R(0)\| = \|X(0) - P(0)\| + \|Y(0) - Q(0)\|$$

so

$$\begin{aligned} \|X(0) - P(0)\| &\le \|Z(0) - R(0)\| \\ \|Y(0) - Q(0)\| &\le \|Z(0) - R(0)\| \end{aligned}$$

因此，若 $\|Z(0) = P(0)\| < \delta$，则 $\|X(0) - P(0)\| < \delta_1$，且 $\|Y(0) - Q(0)\| < \delta_2$。因此

$$\begin{aligned} \|X(t) - P(t)\| &< \varepsilon/2 \qquad (t > 0) \\ \|Y(t) - Q(t)\| &< \varepsilon/2 \qquad (t > 0) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|Z(t) - R(t)\| &= \|X(t) - P(t)\| + \|Y(t) - Q(t)\| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

因此， $R(t)$ 在 $\mathcal{Z}$ 上是李雅普诺夫稳定的。

□

5.6 前馈提升的横向李雅普诺夫稳定性

现在考虑一个带有 CPG $\mathcal{G}$ 的前馈提升，其中节点 $\mathcal{C}$ 为 $\{1,\dots,m\}$，且链$\mathcal{C}^*=\{m+1,\dots,n\}$。选择编号，使得所有位于 $m+k$ 上游的节点都属于 $\mathcal{G}_{k-1}$。（见 [40, 定理 4.11]。）

对于 $0\le k\le n-m$，定义子网络 $\mathcal{G}_k$，其节点为 $\mathcal{C}_k=\{1,\dots,m+k\}$ 和 ˜，并包含 $\mathcal{G}$ 中连接它们的所有箭头。特别地，$\mathcal{G}_0=\mathcal{G}$。所有位于 $\mathcal{G}_k$ 上游的节点都属于 $\mathcal{G}_{k-1}$，其中 $k\ge 1$。

定义

$$\tilde{a}^k(t)=(\tilde{a}_1(t),\dots,\tilde{a}_{m+k}(t))$$

现在我们为前馈提升定义横向李雅普诺夫稳定性:

定义 5.9。提升后的周期轨道 $\tilde{a}(t)$ 在节点 $m+k\in\mathcal{C}^*=\{m+1,\dots,n\}$ 处是横向李雅普诺夫稳定的，如果 $\tilde{a}^k(t)$ 对于分解而言是横向李雅普诺夫稳定的

$$\mathcal{X}=P_{\mathcal{G}_{k-1}}\qquad \mathcal{Y}=P_{m+k}$$

由于 $\tilde{a}_c(t)\equiv a_{[c]}(t)$，我们可以将其明确写为：对于所有 $\varepsilon>0$，存在 δ_{m+k}，使得

$$\begin{aligned}&\|x_{\mathcal{C}_{k-1}}(0)-a_{\mathcal{C}_{k-1}}(0)\|<\delta_{m+k}\quad\text{and}\quad\|\tilde{x}_k(0)-a_{[k]}(0)\|<\delta_{m+k}\\&\qquad\Longrightarrow\ \|\tilde{x}_k(t)-a_{[k]}(t)\|<\varepsilon\quad(t>0)\end{aligned}\tag{5.30}$$

如果在 $\mathcal{C}^*$ 中的每个节点处都横向李雅普诺夫稳定，则提升后的周期轨道 $\tilde{a}(t)$ 是 横向李雅普诺夫稳定的。

定理5.10。 提升后的周期轨道 $\tilde{a}(t)$ 李雅普诺夫稳定，当且仅当 $a(t)$ 在 $P_{\mathcal{G}}$ 上李雅普诺夫稳定，并且 $\tilde{a}(t)$ 在 $\mathcal{C}^*$ 的每个节点处都横向李雅普诺夫稳定。

证明。 对 $n-m$ 使用归纳法，并应用定理5.8。 □

5.7 与应用的相关性

我们计划在后续的两篇论文中讨论本文方法的应用：一篇探讨标准模型神经元链，另一篇探讨四足动物运动。由于篇幅所限，这些应用无法在此纳入，但我们将对一个由此引出的重要问题作简要说明。本文仅作简要概述；详情将在后续论文中给出。

令 κ 为用于构造前馈提升的平衡着色。与横向 Floquet 稳定性不同，当 $\kappa(c)=\kappa(d)$ 时，节点 c 处的横向李雅普诺夫稳定性条件不一定与节点 d 处的相同。这种差异源于式（5.30）在节点 c 处涉及 $\tilde{x}_{\mathcal{C}_{c-1}}$，但在节点 d处涉及 $\tilde{x}_{\mathcal{C}_{d-1}}$。二者不一定相等。不过，在归纳论证中，我们假设:

$$\begin{aligned}&\tilde{x}_{c-1}(t)\text{ is close to }\tilde{a}_{c-1}(t)=a_{[c-1]}(t)\\&\tilde{x}_{d-1}(t)\text{ is close to }\tilde{a}_{d-1}(t)=a_{[d-1]}(t)\end{aligned}$$

在动力系统理论中，通常使用李雅普诺夫函数 [48, 66, 67] 来确立李雅普诺夫稳定性。在前馈提升的语境下，有一个与之非常类似的

概念，即“横向李雅普诺夫函数”。在应用中，有时可以通过在P_c上构造合适的横向李雅普诺夫函数，来证明横向李雅普诺夫稳定性。证明该函数具有所需性质，依赖于对 $\|a_{[c]}(t)\|$ 上确界的估计，因为通常无法显式求得这个函数。对于任何接近 $a_{[c]}(t)$ 的轨迹 $\tilde{x}_c(t)$，这些估计仍然成立。因此，同一个横向李雅普诺夫函数可以用于不同的节点 c 和 d，只要满足 $\kappa(c) = \kappa(d)$。因此在实践中，可以用同一套论证处理节点 c 和 d。

5.8 横向渐近稳定性

存在一个类似的横向渐近稳定性概念，只需在定义中将“李雅普诺夫”替换为“渐近”即可。这将导出一个类似于定理 5.10 的结果。证明沿用相似的思路，但更为简单，因此略去。

6 与横向雅可比矩阵的关系

应用定理 5.4 时，主要困难在于计算 Floquet 指数。如第 1 节所述，这些指数必须通过数值方法计算。当然，对于 CPG 动力学本身，情况仍然如此；但有一个用于判断该定理的条件 (b) 是否成立的一般判据是有益的，即使它只能作为启发式判据。现在我们讨论这一问题的一种处理方法。我们采用第 3.3 节中的记号。

定义 6.1。 若对于所有 $c \in \mathcal{C}$和所有 $x \in \Delta_\kappa$，每个对角偏导数 $\mathrm{D}_c f_c|_x$ 的所有特征值在所有时刻 t均具有负实部，则同步子空间 Δ_κ 是**全局横向稳定** 的。

提升的周期状态 若对所有 $c \in \widetilde{\mathcal{C}}$，每个对角偏导数 $\mathrm{D}_c f_c|_{a_c(t)}$ 的所有特征值在所有时刻 t 都具有负实部，则称其为**横向稳定** 。

若构造提升时使自环变为前馈，则对角块 $\mathrm{D}_c f_c|_x$ 仅指节点 c的“内部动力学”。参见注释 3.10。我们只需考虑 $\mathcal{C}$ 中的节点，因为在 Δ_κ上，所有其他节点都通过平衡着色 κ与$\mathcal{C}$ 中的节点同步。因此， f_c 在 Δ_κ上与 $f_{[c]}$ 相同。

6.1 反例

定义 6.1 的动机来自（3.9）的形式。从历史上看，人们曾有一段时间猜想，对于稳定周期轨道，横向稳定性意味着通常 Floquet 意义下的稳定性；参见 [2, 5]。然而，尽管术语如此，这个猜想一般并不成立。原因在于，虽然所有特征值均具有负实部的矩阵在某个范数下是压缩 [52, 第 9.1 节定理（a）], ，但相关范数可能沿周期轨道发生变化。在某些情况下，这会产生一个位于单位圆之外的 Floquet 乘子。下面给出这一现象的两个例子。

示例 6.2。 一个具体实例是著名的 *Markus–Yamabe* 反例[69, 示例 p.310]。考虑常微分方程 $\dot{x} = A(t)x$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上，其中

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{bmatrix}$$

对于任意 t， $A(t)$ 的迹为 $-\frac{1}{2}$，行列式为 $\frac{1}{2}$，因此特征值的实部为负。事实上，对于任意 t，它们为 $\frac{1}{4}(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7})$。然而，一个解是

$$x(t) = \mathrm{e}^{t/2} \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

因此，零解（显然是周期的）是不稳定的。

例 6.3。 一个更简单的反例使用了映射 $M(t)$ 的不连续族。随后可以对这个族进行平滑处理，而不改变主要结论。关于这类“切换”或“混合”系统的文献十分丰富：例如参见 [68]。

设 A, B 为两个常矩阵。定义

$$M(t) = \begin{cases} B & \text{if} \quad 0 \le t < 1 \\ A & \text{if} \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$$

并将其按周期 $T = 2$ 周期性延拓为一个矩阵族。

于是，方程 (4.13) 在 $[0, 2]$ 上的解为

$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{Bt}x(0) & \text{if} \quad 0 \le t < 1 \\ \mathrm{e}^{A(t-1)}\mathrm{e}^{BT}x(0) & \text{if} \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$$

因此，弗洛凯算子为 $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$。

当维数为 1 时，这等于 e^{A+B}；但当维数为 2 或更高，且 A 与 B 不对易时，该表达式不再成立。此时应改用 Campbell–Hausdorff 公式 [54, V.5 命题 1] 。

Let

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 2 & -0.7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 0 & -0.7 \end{bmatrix} = A^{\mathrm{T}}$$

A 和 B 都具有特征值 $-0.5,\ -0.7 < 0$。数值上，

$$\mathrm{e}^A = \begin{bmatrix} 0.606 & 0 \\ 1.099 & 0.496 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{e}^B = \begin{bmatrix} 0.606 & 1.099 \\ 0 & 0.496 \end{bmatrix}$$

Now

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \begin{bmatrix} 0.367 & 0.666 \\ 0.666 & 1.455 \end{bmatrix}$$

其特征值为 1。772，0。051。其中第一个特征值位于单位圆之外。

通过在任意短的时间间隔内将 A 的非对角项减小至零，然后增大 B的非对角项，可以使此例变得光滑。特征值只发生任意小的变化，因此周期状态仍然是不稳定的。

从直观上看，这种现象的产生是因为， A 附近的流大致平行于 A，同时在局部某种范数下朝 A 收缩。然而，这种“平行”流会改变发生收缩时所对应的局部范数。A附近的收缩会减慢，而平行于 A 的流大致保持不变，这可能会阻止整体收缩。

使流成为压缩流所需的范数变化，主要是由横向线性化流的（广义）特征向量变化引起的。这就是特征值无法反映这种变化的原因。

6.2 平衡点与一维节点

这种现象不会出现在平衡点的情形中。如果节点空间是一维的，在前馈提升的情形下也可以避免这种现象。在本定理的表述中，「稳定」在周期情形下指 Floquet 稳定性。

定理 6.4。 设 $\mathcal{G}$ 是网络 $\mathcal{G}$ 的前馈提升。设 f 是 $\mathcal{G}$ 的一个可容许映射。设 A 是平衡点（节点空间维数任意），或是节点空间维数为 1 的周期轨道。假设 A 在 $P_{\mathcal{C}}$ 中稳定。设 f 是通过提升 f 而得到的 $\mathcal{G}$ 的可容许映射，其提升后的周期轨道为 A。如果 A 横向稳定，那么 A 对于 $P_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ 中的 f 是稳定的。

证明。 平衡点的情形显然成立，因为横向特征值就是平衡点处雅可比矩阵的特征值。

周期情形可直接由定理 5.4(b) 得出。众所周知，对于一维空间，弗洛凯方程可以解析求解；事实上，唯一的 Floquet 指数等于沿周期轨道对横向指数取时间平均。论证非常简单，因此我们在此给出。

考虑齐次线性方程 $\dot{y} = M(t)y$，其中 $M\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 T-周期的。给定 $y(0)$，其解可用分离变量法求得，结果为

$$y(t) = \left(\exp \int_0^t M(t)\mathrm{d}t\right) y(0)$$

由于对所有 t， $M(t) < 0$，因此有 $\int_0^T M(t)\mathrm{d}t < 0$。故横向 Floquet 指数为负。

□

6.3 高维节点

例 6.3 可以较为容易地在前馈提升中实现。它表明，当节点空间的维数大于 1 时，横向稳定性并不一定意味着 Floquet 稳定性（因而也不一定意味着渐近稳定性）。此时情况更加微妙。由于横向稳定性通常可以通过解析方法处理，我们在此简要讨论这些问题。

有时可以利用附加假设来确立稳定性。一种极端情况是，所有雅可比矩阵 $\mathrm{D}f|_{a(t)}$ 都具有相同的特征子空间。此时，我们可以按特征子空间进行分解，并在每个特征子空间上使用一致估计，从而证明流在某个合适的范数下是一致指数收缩的。更一般地，如果

雅可比矩阵 $\mathrm{D}f|_{a(t)}$ 具有近似相同的特征子空间（以某种合理的意义而言），那么，只要近似程度足够高，横向稳定性就应当意味着提升状态稳定。

根据 [49,注 3，第41]页，横向稳定性意味着 Floquet矩阵的迹为负。等价地，Floquet 乘子（CPG 和横向乘子）的乘积位于单位圆内。如果 CPG 是弗洛凯稳定的，那么横向弗洛凯乘子的乘积也位于单位圆内。

6.4 混沌信号的同步

我们暂且离题，讨论当平衡点或周期轨道 A 被混沌吸引子取代时的类似问题；这一情形广泛应用于混沌信号同步研究。关于这一主题的文献浩如烟海，部分原因在于其在安全通信中的应用。一般性参考资料包括 [14, 45, 82]。理论结果见 [18, 78, 79, 80]。通信方面的应用包括 [24, 77, 81]中的内容。

对于混沌态，稳定性的概念有很多，相关数学也要艰深得多。稳定的混沌态是一个吸引子，但这一概念有许多不同的定义 [72]。混沌同步动力学的横向稳定性也依赖于某些在一定程度上仍属推测性的观点，例如 Sinai-Bowen-Ruelle（SBR 或 SRB）测度的存在性 [16, 56]。 [10, 11]讨论了离散动力学中的一些相关问题。这里我们采用启发式的描述，因为混沌情形对本文而言只是一个旁支问题——尽管它很有趣。

假设 S 是一个不变子流形， $A \subseteq S$，并且对于 S 中的 $f|_S$， A 是一个吸引子（无论采用何种合理的“吸引子”定义）。设 μ 是 A 上的不变测度。那么，只要满足

$$\int_{u \in A} \mathrm{D}_c f_c|_u \, d\mu < 0$$

对所有 $c \in \mathcal{C}$ 都成立。也就是说，在 A 附近，横向流平均而言是吸引的。我们希望任何局部扩张都会很快受到压缩的抵消，并且平均而言压缩占上风。

然而，余维大于 1 的不变流形也会遇到同样的问题。此外，更糟的是，可能存在许多不同的不变测度，其中包括支撑在 A 内不稳定周期轨道上的狄拉克测度。稳定性也可以有多种定义方式。如果 μ 是一个 SBR 测度，那么就存在一个具有正勒贝格测度的点集，其中各点的时间平均由该 SBR 测度决定。因此，我们预期， A 附近几乎所有（按勒贝格测度而言）初始点都会被吸引到 A。某些邻近点可能会受到排斥，但在吸引子附近，这些点构成的集合测度趋于零。这类行为包括开关间歇性 [84] 和气泡现象 [10, 11]。与这一设定相关的还有镶嵌盆地[6]这一概念。 [10, 11], 对这些思想作了严格讨论，但仅限于离散动力学和余维为 1 的不变子流形。甚至 SBR 测度的存在本身也大多仍属猜想，主要只对 Smale [92] 意义下的 Axiom A 系统以及一些较新的推广情形 [100], 得到了证明；不过，大量数值证据表明，其他动力系统中也存在这类测度。

7 行波的传播

现在，我们将图3中的设定推广，使定理5.4和6.4适用于具有循环群对称性的 CPG 中某些一般离散旋转波类。正如前文所述，这种对称性会使提升状态呈现出类似行波的形态。此外，充分条件只需应用于 CPG 中的一组轨道代表元，从而简化相关计算。

7.1 刚性相位模式与循环群对称性

网络动力学中周期状态的相位关系模式，与网络本身或其平衡着色商网络的循环群对称性密切相关。这个主题起源于等变动力学 [43]；较新的网络类比问题已在 [40, 第 17] 章中全面讨论。特别是，有充分理由认为，在满足某些技术条件的前提下，同步商网络必须具有循环群对称性，才能以结构稳定的方式支持离散旋转波 [38, 94, 96] 。

我们总结一些相关结果。

假设 CPG $\mathcal{G}$ 具有循环对称群 $\mathbb{Z}_n$。那么 H/K 定理[20, 39, 40] 意味着，存在一些可容许常微分方程 $\dot{x} = f(x)$，其解中包含一个离散旋转波，其时空对称性由 $\mathbb{Z}_n$诱导。这类状态具有如下形式的“相移对称性”

$$x_{\alpha(i)}(t) = x_i(t + kT/n)$$

其中， T 是周期， α 是 $\mathbb{Z}_n$的生成元，并且 $0 \leq k < n$。

当这样的状态被提升到 $\mathcal{G}'$ 时，旋转波结构更接近行波，因为沿提升后的链，相邻节点的动力学完全相同，只有固定的相位平移 kT/n不同。

定理5.4和6.4的稳定性结果尤其适用于这类行波。此外，我们需要检验横向弗洛凯指数和横向特征值的节点，可以缩减为 $\mathbb{Z}_k$-作用下单个轨道代表元集合中的节点。

7.2 示例

~考虑图3中的7 节点链 $\mathcal{G}$。所有节点的状态类型相同：设所有节点空间均为 $P_c = \mathbb{R}$，因此节点变量 x_c 是一维的。该网络除从节点3指向节点1的反向箭头外，均为前馈结构。由节点$\{1, 2, 3\}$ 以及连接这些节点的所有箭头组成的子网络 $\mathcal{G}$ 可视为具有 $\mathbb{Z}_3$对称性的CPG，并以前馈方式连接到链 $\{4, 5, 6, 7\}$。

容许常微分方程采用形式 (2.1)，且任意点 $u = (u_1, \ldots, u_7)$ 处的雅可比矩阵 $\in \mathbb{R}^7$ 具有块形式 (3.11)。

For 合适的 f 该 CPG $\mathcal{G}$ 支持如下形式的 T-周期的 $\mathbb{Z}_3$ 旋转波

$$U(t) = (u(t), u(t + T/3), u(t + 2T/3))$$

（或其反向形式，可通过将 T 替换为 $-T$得到）。将此周期状态提升至 $\mathcal{G}'$；如前所述，这可视为如下形式的行波

$$(u(t), u(t+T/3), u(t+2T/3), u(t), u(t+T/3), u(t+2T/3), u(t))$$

因此，最后四个对角块为

$$\begin{aligned} B_4(t) &= \mathrm{D}_1 f|_{(u(t),u(t+2T/3))} \\ B_5(t) &= \mathrm{D}_1 f|_{(u(t+T/3),u(t))} \\ B_6(t) &= \mathrm{D}_1 f|_{(u(t+2T/3),u(t+T/3))} \\ B_7(t) &= \mathrm{D}_1 f|_{(u(t),u(t+2T/3))} \end{aligned}$$

当 t 遍历 $[0,T]$时，这些都是 B_4的相移版本。事实上，$B_5(t) = B_4(t+T/3)$ $B_6(t) = B_4(t+2T/3)$ $B_7(t) = B_4(t)$。

特别地，如果 $B_4(t)$ 的所有特征值在周期轨道 $\{u(t)\}$ 上都具有负实部，那么 $B_5(t)$ $B_6(t)$ 和 $B_7(t)$ 也满足这一条件。由定理 6.4 可知，只要旋转波 $\{U(t)\}$ 在 $\mathcal{G}$ 上于 $P_1 \times P_2 \times P_3$ 稳定，且 $B_4(t) = \mathrm{D}_1 f|_{(u(t),u(t+2T/3))}$ 的所有特征值都具有负实部，提升的周期状态就是稳定的。因此，横向特征值（由于节点是一维的，这里它们决定稳定性）仅取决于单个节点的内部动力学。

这个想法推广为下面的定理 7.1。

7.3 构造示意图

图 5 示意说明了如何通过四个步骤，从旋转波状态构造沿链传播的行波的前馈提升。

(a) 考虑一个具有 $\mathbb{Z}_k$ 对称性的 CPG $\mathcal{G}$，它由双射 $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 生成。（此处 $k = 3$。）为简单起见，假设 α 是由长度相同的循环 k 构成的乘积，且每个节点都属于其中一个循环。因此，集合 $\mathcal{C}$ 可划分为 k 个不相交的子集，并由 $\mathbb{Z}_k$ 在这些子集中循环置换。我们将任意一个这样的子集称为 模块，因为相同的“模块化”结构在每个 $\mathbb{Z}_k$-轨道上重复出现，从而模拟第 1.1 节和第 1.2 节中的结构。设 f 是一个可容许的映射，使得常微分方程 $\dot{x} = f(x)$ 具有一个满足相位关系的离散旋转波状态 $u(t)$

$$\alpha u(t) = u(t + T/k) \tag{7.31}$$

（节点符号内标注了相对相位。）

（b）考虑一个模块 $\mathcal{M}$；也就是说，一个节点集，其中每个 $\mathbb{Z}_k$-轨道各包含一个代表节点。

为这些节点赋予相位 0，使其他 $\mathbb{Z}_k$-轨道对应于相位移T/k，$2T/k$，……，$(k-1)T/k$。复制该模块（以及头端和尾端均位于模块中的任何箭头），得到 $\mathcal{M}_{k+1}$，$\mathcal{M}_{k+2}$，……，$\mathcal{M}_l$。（此处 $l = 7$。）

(c) 为 $\mathcal{M}_{k+1}$、$\mathcal{M}_{k+2}$、……、$\mathcal{M}_l$ 中的节点指定相位 0、T/k、……、$(l-k)T/k$。为这些节点分配输入箭头，同时保持箭头类型以及 $\mathcal{G}$中的相位关系。分配方式应使所有新箭头均为前馈。

(d) 对 $\mathcal{M}_{k+1}$、$\mathcal{M}_{k+2}$、……、$\mathcal{M}_l$ 中的内部箭头重新连接，同时保持箭头类型以及 $\mathcal{G}$ 中的相位关系。重新连接的方式应使所有箭头均为前馈。（此步骤为可选步骤：它能简化雅可比矩阵的计算，但在生物学上可能不太现实。例如，如果模块对应生物体的体节，那么各体节内的神经元连接很可能相同。）

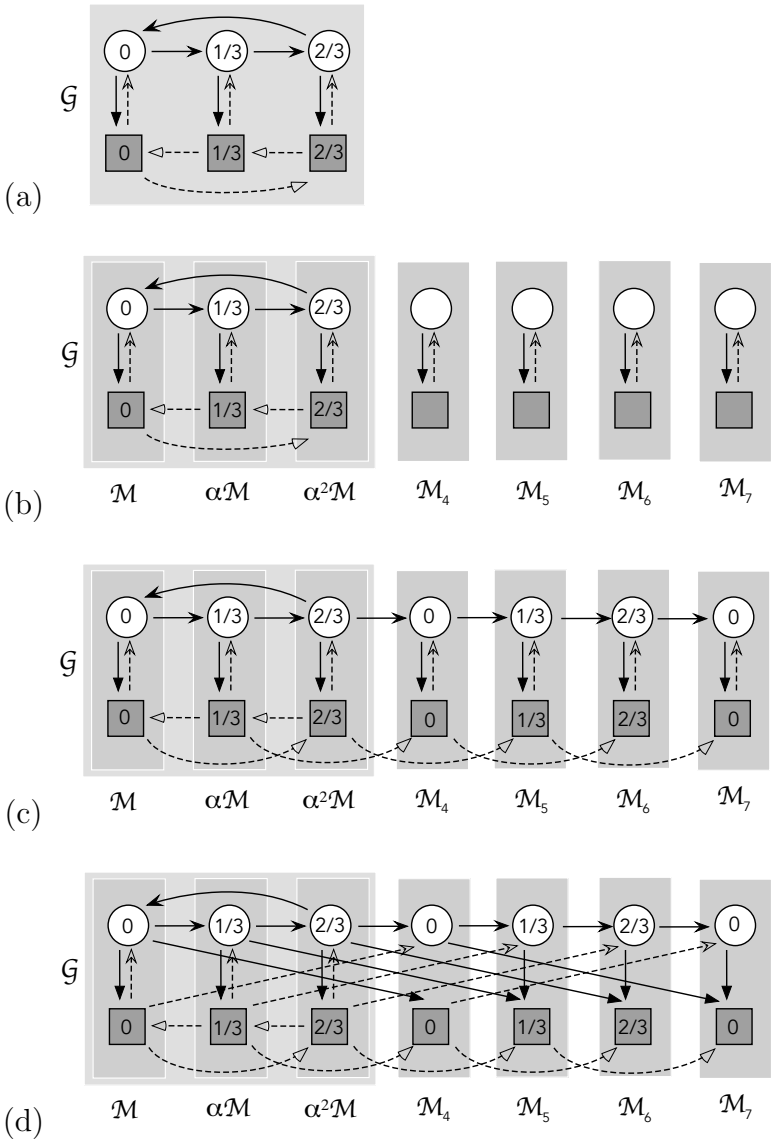


图 5：为具有循环对称性、支持具有旋转波相位模式的周期轨道的 CPG 构造前馈提升的四个步骤。（a）具有 $\mathbb{Z}_k$ 对称性的初始中央模式发生器 $\mathcal{G}$（此处为 $k=3$）。分数 0，$1/3$，$2/3$ 表示相对相位。（b）模块 $\mathcal{M}$、其在生成元 α 作用下的像，以及副本 $\mathcal{M}_4$ – $\mathcal{M}_7$。（c）指向 $\mathcal{M}_4$ – $\mathcal{M}_7$ 的前馈输入。（d）重新布线 $\mathcal{M}_4$ – $\mathcal{M}_7$，使所有输入均为前馈输入。

7.4 一般定理

现在我们陈述一个关于此类构造的一般定理，并证明横向特征值仅取决于一个模块的内部动力学。

定理 7.1. 假设 $\mathcal{G}$ 有节点 $\mathcal{C} = \{1, \dots, m\}$，其循环自同构群为 $\mathbb{Z}_k = \langle\alpha\rangle$，且 $n = mk$ 和 α 在 $\mathcal{G}$ 上的所有轨道上都像循环 $(1\,2\,\dots\,k)$ 那样作用。设 $u(t)$ 是一个可容许常微分方程的 T-周期解，具有离散旋转波相位模式 (7.31)。选取一个由轨道代表元组成的模块 $\mathcal{M}$。按照第 7.3 节所述，通过提升该模块经 $\mathbb{Z}_k$ 平移后的适当副本，得到 $\mathcal{G}$。则

(a) $\mathcal{G}$ 上的周期状态 $u(t)$ 可提升为一个 T-周期行波状态 $\tilde{u}(t)$，其 $\mathcal{G}$ 的相位对应于 $\mathcal{M}$ 的额外副本 $\mathcal{M}_{k+1}, \mathcal{M}_{k+2}, \dots, \mathcal{M}_l$。

(b) （在任意点计算的）*Floquet* 指数是模块 $\mathcal{M}$ 上的指数，加上 $\mathcal{M}$ 的横向弗洛凯指数。

(c) 如果 $\mathcal{M}$ 上的 *Floquet* 指数和横向弗洛凯指数的实部均为负，则 $\tilde{u}(t)$ 是稳定的。

证明。(a) 这是因为 $\mathcal{G}'$ 是 $\mathcal{G}$ 的提升。

(b) 是 $\tilde{f}$ 的提升。要应用定理 5.4，横向弗洛凯指数的实部必须为负。Floquet矩阵 e^{BT} 与所选流周期的起始时间无关，因此无论相位如何平移，其特征值都相同。因此，相位同步节点具有相同的横向弗洛凯指数。

(c) 这由定理 5.4 得出。 □

根据定理 6.4 及上述内容，我们立即得到：

推论 7.2。（a）横向特征值（在任意点处计算）与 $J^{\mathcal{M}}$ 模块 $\mathcal{M}$ 上雅可比矩阵的特征值相同，其中仅包括头端和尾端位于 $\mathcal{M}$ 中的箭头（在同一点处计算）。

（b）如果 $J^{\mathcal{M}}$ 的所有特征值在 $\{u(t)\}$ 上计算时均具有负实部，那么 $\tilde{u}(t)$ 是全局横向稳定的。

（c）如果 $u(t)$ 在 $P^{\mathcal{G}}$ 上稳定，节点是 1 维的，并且 $J^{\mathcal{M}}$ 的所有特征值在 $\{u(t)\}$ 上计算时均具有负实部，那么 $\tilde{u}(t)$ 在 $P^{\mathcal{G}}$ 上稳定。 □

我们再次强调，这种意义下的横向稳定性适用于同步子空间 Δ，并不保证 Floquet 意义下的稳定性，除非节点是 1 维的，或者状态是一个平衡点。

对于 $\mathbb{Z}_k$ 在 $\mathcal{G}$ 上的其他作用，例如那些导致多重节律 [37, 40]的作用，也可以推导出同类的更一般结果。在每种情况下，提升中的连接都必须根据相关周期状态的相位关系进行定制。我们不陈述这些推广，但原则上同样的思路适用。

第6.3节中的类似说明同样适用于相位同步情形。

对于李雅普诺夫稳定性，也存在一个与定理7.1(c)自然对应的类似结论，并且可用相同的方法证明。此处不予陈述。第5.7节中的注释适用于相移周期状态的横向李雅普诺夫稳定性。

8 结论

同步状态或相位同步状态沿线性链的传播，在生物学、医学和机器人学等应用领域中具有重要意义。

本文建立了前馈提升理论。前馈提升为以稳定方式传播具有特定同步和相位模式的信号提供了一种简单、有效且稳健的方法，即使用 CPG 生成底层模式，并沿前馈链传播这些模式。经过适当构造，这种前馈提升能够在信号传播过程中保持其波形。

由于篇幅所限，本文不涉及该理论的应用。我们计划在后续的两篇论文中讨论这些应用：一篇关于标准模型神经元链，另一篇关于四足动物运动。

传播信号的稳定性是一个重要问题。具体而言，保持同步或相位模式需要系统对破坏同步的扰动具有稳定性，即横向稳定性。我们给出了一个关于稳定性（在 Floquet 意义下）的充要条件，该条件仅取决于 CPG 节点的内部动力学。这意味着，如果添加一个 CPG 副本能够产生稳定的周期轨道，那么该链就可以任意延伸，甚至分支成一棵树，同时提升后的轨道仍保持稳定。当提升中的节点同步、而 CPG 中的节点不同步时，提升后的周期轨道的横向 Floquet 乘子通常会出现重数。对于李雅普诺夫稳定性，也有类似结果。

一个更简单的条件——“同步子空间的横向稳定性”——意味着平衡点的线性稳定性；当节点是一维时，也意味着周期轨道的 Floquet 稳定性。后一种推论对于高维节点可能不成立，但仍具有一定的启发价值。

这些结果可以直接推广到传播相位模式：此时，CPG 是由相同模块构成的对称环，并生成相位平移间隔均匀的旋转波。提升后的周期轨道可视为沿链传播的行波。同样，只需验证链中单个模块的横向稳定性。

最后，再提出一个更具推测性的看法：前馈提升具有简单的模块化结构，能够生成具有特定相位模式的稳定传播信号。重复模块与可能有用的动力学模式相结合，可以从更简单的结构自然演化而来，尤其是在由神经元网络驱动肌群的情形下。这或许是这类架构在生物体中普遍存在的原因之一。

致谢

我们感谢 Peter Ashwin、Marty Golubitsky 和 John Guckenheimer 的有益讨论；感谢两位匿名审稿人提出意见，极大地改进了本文；还要感谢 Eddie Nijholt 指正了几处排版错误，并指出定理 5.10 的证明需要采用比我们最初使用的定义稍强一些的横向李雅普诺夫稳定性定义。

参考文献

[1] R. Abraham 和 J.E. Marsden。《力学基础》，Benjamin/Cummings，纽约，1978年。[2] S. Addas-Zanata 和 B. Gomes。《广义 Markus-Yamabe 示例的马蹄》，《动力系统定性理论》10（2011）327–332。[3] N. Agarwal 和 M.J. Field。《耦合动力系统网络架构的动力学等价 I：非对称输入》，《非线性》23（2010）1245–1268。[4] N. Agarwal 和 M.J. Field。《耦合动力系统网络架构的动力学等价 II：一般情形》，《非线性》23（2010）1269–1289。[5] M. Aizerman。《关于动力系统大范围稳定性的一个问题》，Uspekhi Mat. Nauk 4（1949）187–188。[6] J.C. Alexander、J.A. Yorke、Z. You 和 I. Kan。《缠绕吸引域》，《国际分岔与混沌杂志》2（1992）795–813。[7] T.M. Apostol。《数学分析》，Addison-Wesley，Reading MA，1957年。[8] V.I. Arnold。《经典力学的数学方法》，施普林格，柏林，1989年。[9] D.K. Arrowsmith 和 C.M. Place。《动力系统导论》，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[10] P. Ashwin、J. Buescu 和 I. Stewart。《吸引子的冒泡与混沌振子的同步》，Phys. Lett. A 193（1994）126–139。[11] P. Ashwin、J. Buescu 和 I. Stewart。《从吸引子到混沌鞍：横向不稳定性的故事》，《非线性》9（1996）703–737。[12]A. Berkowitz。《拓展视野：复杂活动序列背景下的中枢模式生成》，J. Exp. Biol. 222（2019）192054；doi: 10.1242/jeb.192054。[13] N.P. Bhati 和 G.P. Szeg¨o。《动力系统稳定性理论》，Grundlehren 161，施普林格，柏林，1970年。[14] S. Boccaletti、L.M. Pecora 和 A. Pelaez。《耦合动力系统同步的统一框架》，Phys. Rev E 63（2001）066219。[15] P. Boldi 和 S. Vigna。《图的纤维化》，Discrete Math. 243（2002）21–66。[16] R. Bowen。《Axiom A 微分同胚的周期点》，Trans. Amer. Math. Soc. 154（1971）377–397。[17]J.H. Boyle、S. Berri 和 N. Cohen。《秀丽隐杆线虫的步态调节：一种整合神经机械模型》，《计算神经科学前沿》6（2012）；doi: 10.3389/fn-com.2012.00010。

[18]R. Brown 和 N.F. Rulkov. 混沌系统的同步：不变流形中轨迹的横向稳定性, Chaos 7 (1997) 395–413；doi: 10.1063/1.166213.[19] P.-L. Buono. 四足动物运动的中央模式发生器模型：II. 次级步态, 《数学生物学杂志》42 (2001) 327–346.[20] P.-L. Buono 和 M. Golubitsky. 四足动物运动的中央模式发生器模型：I. 初级步态, 《数学生物学杂志》42 (2001) 291–326.[21] P.-L. Buono 和 A. Palacios. 医用水蛭心跳中的运动神经元动力学数学模型，物理学D 188 (2004) 292–313.[22] R.L. Calabrese 和 E. Peterson. 医用水蛭 Hirudo medicinalis 的心跳神经控制，载于：《节律运动的神经起源》（编者：A. Roberts 和 B. Roberts），Symp. Soc. Exp. Biol. 37 (1983) 195–221.[23] R.L. Calabrese、F. Nadim 和 Ø.H. Olsen. 医用水蛭的心跳控制：理解节律性运动模式起源、协调与调节的模型系统, 《神经生物学杂志》27 (1995) 390–402.[24] T.L. Carroll. 利用滤波后的同步混沌信号进行通信，IEEE Trans. Circuits Syst. 42 (1995) 105–.[25] J.D. Chambers、J.C. Bornstein 和 E.A. Thomas. 豚鼠肠道分节机制的见解：结合计算建模与体外研究, 《美国生理学杂志：胃肠与肝脏生理学》295 (2008) G534–541.[26] J.D. Chambers、E.A. Thomas 和 C. Bornstein. 肠神经运动模式的数学建模，Proc. Austral. Physiol. Soc. (2013) 44 75–84 .[27] J.J. Collins 和 I. Stewart. 六足步态与耦合非线性振荡器模型，生物控制论 68 (1993) 287–298.[28] J.J. Collins 和 I. Stewart. 耦合非线性振荡器与动物步态的对称性, 非线性科学杂志 3 (1993) 349–392.[29] S.M. Cox 和 A.J. Roberts. 动力系统模型的初始条件，物理学D 85 (1995) 126–141.[30] L. DeVille 和 E. Lerman. 网络上的模块化动力系统，J. Eur. Math. Soc. 17 (2013)；doi: 10.4171/JEMS/577.[31] D. Eppstein. 《算法设计与分析》，CS/CSE 161，加州大学欧文分校，2016年.[32] B. Ermentrout 和 D. Terman. 《神经科学的数学基础》，施普林格，纽约，2010年。

[33] G. Floquet. 关于具有周期系数的线性微分方程，Ann. ´Ecole Norm. Sup. Paris 12 (1883) 47–89.[34] J.B. Furness. 《肠神经系统》，Blackwell，牛津，2008年.[35] J.-M. Ginoux. 慢快动力系统的慢不变流形，国际分岔与混沌杂志 31 (2021) 2150112；arXiv:2012.06770.[36] J. Gjorgjieva、J. Berni、J.F. Evers 和 S.J. Egle. 爬行果蝇幼虫蠕动波传播的神经回路：分析与建模，计算神经科学前沿 7 (2013)；doi: 10.3389/fncom.2013.00024.[37] M. Golubitsky、M. Nicol 和 I. Stewart. 耦合细胞网络中的一些奇特现象，非线性科学杂志 14 (2004) 207–236.[38] M. Golubitsky、D. Romano 和 Y. Wang. 网络周期解：相移同步模式，非线性 25 (2012) 1045–1074.[39] M. Golubitsky 和 I. Stewart. 《对称性视角》，数学进展 200，Birkh¨äuser，巴塞尔，2002年.[40]M. Golubitsky 和 I. Stewart. 《网络中的动力学与分岔》，工业与应用数学学会，费城，即将于2023年出版.[41] M. Golubitsky、I. Stewart、P.-L. Buono 和 J.J. Collins. 用于腿式运动的模块化网络，物理学D 115 (1998) 56–72.[42] M. Golubitsky、I. Stewart、J.J. Collins 和 P.-L. Buono. 运动中枢模式发生器与动物步态中的对称性，《自然》401 (1999) 693–695.[43] M. Golubitsky、I. Stewart 和 D.G. Schaeffer. 《奇点与群：分岔理论 II》，应用数学丛书 69，施普林格，纽约，1988年.[44] M. Golubitsky、I. Stewart 和 A. T¨or¨ok. 带有多重箭头的耦合细胞网络中的同步模式，SIAM应用动力系统杂志 4 (2005) 78–100.[45] J.M. Gonz´alez-Miranda. 《混沌的同步与控制：科学家和工程师导论》，帝国理工学院出版社，伦敦，2004年.[46] H. Gregersen. 《胃肠道生物力学》，施普林格，伦敦，2003年.[47] J. Guckenheimer. 等时线与无相位集，《数学生物学杂志》1 (1975) 259–273.[48] J. Guckenheimer 和 P. Holmes. 《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》，施普林格，纽约，1983年.[49] B.D. Hassard、N.D. Kazarinoff 和 Y.-H. Wan. 《Hopf分岔理论及其应用》，伦敦数学会讲义 41，剑桥大学出版社，剑桥，1981年。

[50] X. He、W. Lu 和 T. Chen. 随机动力系统的横向稳定性，《离散与连续动力系统》33 (2013) 701-721。[51] M.W. Hirsch、C.C. Pugh 和 M. Shub.《不变流形》，《数学讲义》583，施普林格，纽约，1977。[52] M.W. Hirsch 和 S. Smale.《微分方程、动力系统与线性代数》，学术出版社，纽约，1974。[53] E.J. Izquierdo 和 R.D. Beer. 从头端到尾端：秀丽隐杆线虫向前运动的神经机械模型，《伦敦皇家学会哲学汇刊B辑》373 (2018)；doi: 10.1098/rstb.2017.0374。[54] N. Jacobson.《李代数》，威利，纽约，1962。[55] M. Jha 和 N.R. Chauhan. 用于医疗手术的蛇形连续体机器人综述，《IOP会议系列：材料科学与工程》691 (2019) 012093。[56] A. Katok 和 B. Hasselblatt.《现代动力系统理论导论》，剑桥大学出版社，剑桥，1995。[57] A. Kelley. 稳定、中心稳定、中心、中心不稳定和不稳定流形，《微分方程杂志》3 (1967) 546–570。[58] N. Kopell. 迈向中枢模式发生器建模理论，载于：《脊椎动物节律运动的神经控制》（编者：A.H. Cohen、S. Rossignol 和 S. Grillner），威利，纽约，1988。[59] N. Kopell 和 G.B. Ermentrout. 耦合振荡器与中枢模式发生器的设计，《数学生物科学》89 (1988) 14–23。[60] N. Kopell 和 G.B. Ermentrout. 振荡器链中的相变及其他现象，《工业与应用数学学会应用数学杂志》50 (1990) 1014–1052。[61] W.A. Kunze 和 J.B. Furness. 肠神经系统与肠道运动调节，《生理学年评》61 (1999) 117–42。[62] I. Kupka. 对一般场论的贡献，微分方程贡献集 2 (1963) 457–484；3 (1964) 411–420。[63] Y. Kuramoto.《化学振荡、波与湍流》，施普林格，柏林，1984。[64] C.R. Laing 和 C.C. Chow. 一种用于双眼竞争的脉冲神经元模型，《计算神经科学杂志》12 (2002) 39–53。[65] J.P. LaSalle. 李雅普诺夫稳定性理论的最新进展，《工业与应用数学学会评论》6 (1964) 1–11。[66] J.P. LaSalle 和 S. Lefschetz.《李雅普诺夫第二方法及其应用的稳定性》，学术出版社，纽约，1961。

[67] A.M. Liapunov.《运动稳定性的一般问题》，哈尔科夫，1892，以及《哈尔科夫数学学会通讯》3 (1893) 265–272；法文译本：《运动稳定性的一般问题》，《图卢兹科学学院年刊》9 (1907) 203–474；后再版为《数学研究年刊》17，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1947；英文译本：《运动稳定性》，学术出版社，纽约，1966。[68] D. Liberzon.《系统与控制中的切换》，施普林格，纽约，2003。[69] L. Markus 和 H. Yamabe. 微分系统的全局稳定性判据，《大阪数学杂志》12 (1960) 305–317。[70] C. Mehring、U. Hehl、M. Kubo、M. Diesmann 和 A. Aertsen. 局部连接随机网络中的活动动力学与同步尖峰传播，《生物控制论》88 (2003) 395–408。[71]T. Menara、G. Baggio、D.S. Bassett 和 F. Pasqualetti. 异质 Kuramoto 振子网络中簇同步的稳定性条件，arXiv:1806.06083v2 (2019)。[72] J. Milnor. 关于吸引子概念，《数学物理通讯》99 (1985) 177–195。[73] F. Morone、I. Leifer 和 H.A. Makse. 纤维化对称性揭示生物网络的构建模块，《美国国家科学院院刊》117 (2020) 8306–8314。[74] Z. Mu、H. Wang、W. Xu、T. Liu 和 H. Wang. 用于复杂环境探索的两种蛇形机器人：设计、开发与实验，《先进机械工程》9 (2017)；doi: 10.1177/1687814017721。[75] R.M. Murray、Z. Li 和 S.S. Sastry.《机器人操作的数学导论》，CRC出版社，博卡拉顿，1993。[76] E. Olivares、E.J. Izquierdo 和 R. D. Beer. 一种用于秀丽隐杆线虫向前运动的多网络节律模式发生器神经机械模型，《计算神经科学前沿》18 (2021)；doi: 10.3380/fncom.2021.572339。[77] U. Parlitz、L.O. Chua、L. Kocarev、K.S. Halle 和 A. Shang. 通过混沌同步传输数字信号，《国际分岔与混沌杂志》2 (1992) 973–977。[78] L.M. Pecora 和 T.L. Carroll. 混沌系统中的同步，《物理评论快报》64 (1990) 821–825。[79] L.M. Pecora 和 T.L. Carroll. 同步耦合系统的主稳定函数，《物理评论快报》80 (1998) 2109–2112。[80] L.M. Pecora、T.L. Carroll、G.A. Johnson 和 D.J. Mar. 混沌系统、概念与应用中的同步基础，Chaos 7 (1997) 520；doi: 10.1063/1.166278。[81] G. Pérez 和 H. A. Cerderia. 提取被混沌掩蔽的信息，《物理评论快报》74 (1995) 1970–。

[82] A. Pikovsky、M. Rosenblum 和 J. Kurths。《同步：非线性科学中的普遍概念》，剑桥大学出版社，剑桥，2001年。[83] C.A. Pinto 和 M. Golubitsky。用于双足运动的中央模式发生器，《数学生物学杂志》53 (2006) 474–489。[84] N. Platt、E. A. Spiegel 和 C. Tresser。开关间歇性：一种爆发机制，《物理评论快报》70 (1993) 279–282。[85] B.T. Polyak 和 Ya.I. Kvinto。振荡器的稳定性与同步：新的李雅普诺夫函数，《自动化与遥控》78 (2017) 1234–1242；俄文原文刊于 Avtomatika i Telemekhanika 7 (2017) 76–85。[86] K. Sakamoto、Z. Soh、M. Suzuki、Y. Iino 和 T. Tsuji。基于连接组的模型仿真所产生的秀丽隐杆线虫前向和后向运动模式，《自然》科学报告 11 (2021) 13737；doi: 10.1038/s41598-021-92690-2。[87] B.S.W. Schr¨oder。《有序集：导论》，Birkh¨auser，波士顿，2002年。[88] S. Seok、C. D. Onal、R. Wood、D. Rus 和 S. Kim。软体机器人学中利用拮抗式执行器实现蠕动运动。2010 IEEE机器人与自动化国际会议 (2010) 1228–1233；doi: 10.1109/ROBOT.2010.5509542。[89] H. Setareh、M. Deger 和 W. Gerstner。具有适应性的可兴奋神经元集群：脑回路的构建模块，用于速度控制的信号传播，《公共科学图书馆·计算生物学》14 (2018) e1006216；doi: 0.1371/journal.pcbi.1006216。[90] A. Shpiro、R. Curtu、J. Rinzel 和 N. Rubin。神经元竞争模型共有的动力学特征，《神经生理学杂志》97 (2007) 462–473。[91]S. Smale。微分方程与微分同胚的稳定流形，《比萨高等师范学校年刊》17 (1963) 97–116。[92] S. Smale。可微动力系统，《美国数学会通报》73 (1967) 747–817。[93] I. Stewart。双足运动中枢模式发生器率模型的对称性破缺，《对称性》6 (2014) 23–66。[94] I. Stewart。网络动力学中的超定常微分方程与刚性周期态，《葡萄牙数学》，即将发表；arxiv.org/abs/2112.15415 (2022)。[95] I. Stewart、M. Golubitsky 和 M. Pivato。耦合细胞网络中的对称群胚与同步模式，SIAM应用动力系统杂志 2 (2003) 609–646。[96] I. Stewart 和 M. Parker。耦合细胞网络的周期动力学 II：循环对称性，《动力系统》23 (2008) 17–41。[97] I. Stewart 和 D. Wood。前馈网络对信号的稳定同步传播：示例与应用，准备中，2023年。

[98] E.A. Thomas、P.P. Bertrand 和 J.C. Bornstein。豚鼠肠道感觉神经元复发性兴奋网络的计算机模拟。《神经科学快报》**287** (2000) 137–140。[99] H.R. Wilson 和 J.D. Cowan。模型神经元局部群体中的兴奋性和抑制性相互作用，《生物物理学杂志》**12** (1972) 1–24。[100] L.-S. Young。什么是SRB测度，哪些动力系统具有SRB测度?《统计物理学杂志》**108** (2002) 733–754。[101] Y. Zhong、L. Hu 和 Y. Xu。用于医学应用的连续体机器人设计与驱动最新进展，《驱动器》**9** (2020) 142；doi: 10.3390/act9040142。