arXiv:2302.04199v2 [math.GT] 5 Jun 2023

普遍紧致透镜空间中的 Legendrian 负环面纽结

Han Zhang，电子邮箱：
1901110026@pku.edu.cn；
De北京大学数学科学学院，中国北京市100871

2023年6月6日

摘要

主定理刻画了普遍紧致透镜空间中所有 Legendrian 负环面纽结的粗等价类。结合 Onaran 关于 Legendrian 正环面结的结果，普遍紧致透镜空间中的所有 Legendrian 环面结均得到分类。主要方法是通过凸亨盖分解将 $L(p,\ q)$分开。

关键词：勒让德环面结，普遍紧，透镜空间

1 引言

在接触三维流形中，勒让德结 是处处与接触平面相切的光滑结。对于一个（有理）零调和勒让德结，有三个经典不变量：其定向结型、（有理）瑟斯顿–本尼昆不变量（记作$\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}$）以及（有理）旋转数（记作$\mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}$）。

针对某个定向结型对勒让德结进行分类非常重要。人们想知道，所有勒让德结是否都由其在（S^3,ξ_{st}）中的经典不变量决定。遗憾的是，答案是否定的。Chekanov 在其论文 [C]中列出了（S^3,ξ_{st}）中的两个勒让德结。这两个结具有相同的经典不变量，但它们并不同伦。由此引出一个有趣的问题：对于哪种定向结型，在（S^3,ξ_{st}）中，经典不变量足以将勒让德结确定到勒让德同痕？更一般地说，勒让德链环又如何？任意接触流形中的勒让德结又如何?

关于这个问题已经取得了一些进展。Eliashberg 和 Fraser 证明，在标准紧致三维球面中，勒让德平凡结在 Legendrian 同痕意义下由其瑟斯顿–本尼昆不变量和旋转数决定 [EF]。随后，Etnyre 和 Honda 在论文 [EH]中对紧接触结构三维球面中的所有勒让德环面结和八字结进行了分类。他们的论文 [EH] 为我们提供了两种研究勒让德结分类问题的方法。一种是通过凸亨盖分解将接触流形分割开来；另一种是研究结补空间上的接触结构。本文采用第一种方法，因为沿着结所嵌入的海加德环面分割 $L(p,q)$ 是自然的。

另一方面，对（S^3,ξ_{st}）中勒让德链环的研究比对结的研究少得多。（S^3,ξ_{st}）中勒让德链环的首批分类结果由 Ding 和 Geiges 在 [DG1]中给出。他们证明，由一个平凡结及其缆结组成的勒让德链环，可由其定向链环型和经典不变量分类。他们还证明了这一结果对于带有标准紧接触结构的一阶喷射空间 $J^1(S^1)$ 中的环面纽结也成立。2021年，Dalton、Etnyre 和 Traynor 在 [DET],中对勒让德环面链环进行了分类；此外，他们还对结类型一致厚且勒让德简单的勒让德缆链环和横截缆链环进行了分类。

关于透镜空间的研究已有如下进展。在 [DG2], Ding 和 Geiges 对 ($L(0,\ 1)$ ξ_{st}) 的接触映射类群给出了明确描述（即$S^1\times S^2$）。随后，Chen、Ding 和 Li 在论文 [CDL] 中，将 ($L(0,\ 1)$ ξ_{st}) 中的所有勒让德环面纽结按 Legendrian 同痕进行了分类。根据 [O], 的第 2 节，透镜空间中的海加德环面在光滑同痕意义下唯一。这一事实使我们能够在任意透镜空间 $L(p,q)$ 中定义环面纽结。Onaran 在 [O] 的定理 2.3 中给出了定向结型。在该文第 4 节中，Onaran 按接触同胚对透镜空间的普遍紧接触结构中的所有勒让德正环面结进行了分类。最近，Min H. 在其论文 [M] 中求出了普遍紧致透镜空间的接触映射类群。他的工作刻画了上述接触同胚。

本文始终假设透镜空间配备了普遍紧接触结构 ξ_{ut}，并给出其中勒让德负环面纽结的分类。这里，“分类”是指按 粗等价 对勒让德结进行分类。

定义 1.1。 两个勒让德结 K 和 K' 当且仅当存在一个与恒等映射光滑同伦的接触同胚，将 K 映到 K'时，称它们是粗等价的 。

主要思想是模仿 Etnyre 和 Honda 在其论文 [EH]中的方法。

策略 1.2。 给定透镜空间中的一个定向结型 $\mathcal{K}$ ：

- 找出结型 $\mathcal{K}$的最大有理 *Thurston–Bennequin* 不变量（记为 $\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}$）。然后计算所有相应的有理旋转数（$\mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}$）。对具有最大有理 *Thurston–Bennequin* 不变量的结型 $\mathcal{K}$ 的所有勒让德环面结进行分类。
- 每当勒让德环面结 K 未达到其最大有理 *Thurston–Bennequin* 数时，证明 K可以去稳定化。
- 如果 K、 K' 是实现相同定向结型且具有相同最大 $\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}$的两个结。然后研究它们的稳定化之间的关系。

按照上述步骤，我们证明

定理 1.3 (主定理**)**。在透镜空间$(L(p,q)\ \xi_{ut})$ 上的普遍紧接触结构中，若 $p>q\geq 1$，则两个 *Legendrian* 负环面纽结粗等价，当且仅当它们的定向结型、有理瑟斯顿–本尼昆不变量和有理旋转数均相同。

结合 Onaran 的结果（参见 [O] 的定理 4.4），普遍紧致透镜空间中的所有 Legendrian 环面纽结均已分类。事实上，根据 [M], 的推论 1.4，“粗等价”可以替换为 Legendrian 同痕，参见7.3。作为主定理证明的副产品，可以轻松得到每种定向环面结型的山脉图。

接触拓扑中的另一个重要概念是横截结。横截结是处处横截于接触平面的光滑结。对于（有理）零同调横截结，有两个经典不变量：其定向结型和（有理）自链接数。作为1.3的推论，我们得到：

定理 1.4. 在透镜空间上的普遍紧接触结构中，两个横截负环面纽结粗等价，当且仅当它们的定向结类型和有理自链接数相同。

为了全面理解本文，读者应熟悉 [H], 第4节[EH] 以及 [O]的第2、3、4节。作为准备，第2节不会涵盖本文中用到的所有内容。准备工作之后，我们将分别在第3、4、5、6节证明主定理。在最后一节，我们将讨论基于 Min 的工作 [M]取得的最新进展。

2 准备

2.1 透镜空间

定义 2.1. 设 p、 $q(p>q>0)$ 是两个互素整数。设 V_1 和 V_2 是两个实心环面 $V_i=D^2\times S^1$，其中 $i=1,\ 2$。V_i 的子午线和经线记作$(\mu_i,\ \lambda_i)$。按照 *Heegaard* 分解的定义，透镜空间 $L(p,\ q)$ 可由 $V_1\cup_\phi V_2$ 描述。粘合映射 ϕ： $\partial V_2\to\partial V_1$ 是一个反定向微分同胚，在环面的标准子午线-经线坐标下由以下矩阵给出

$$[\phi]=\begin{pmatrix}-q & q'\\ p & -p'\end{pmatrix}.$$

其中， $[\phi]$ 的行列式为 -1 ，且 p' 和 q' 为整数。

特别地， $\phi(\mu_2)=-q\mu_1+p\lambda_1$。这一事实说明

$$\pi_1(L(p,q))=H_1(L(p,q))=\langle\lambda_1|\ p\lambda_1=1\rangle.$$

注2.2。根据 *[H],* ，存在唯一的(p',q') 使得

$$\begin{cases} p > p' > 0, \\ q \geq q' > 0, \\ pq' - p'q = 1. \end{cases}$$

在本文中，将这种矩阵 $[\phi]$ 称为粘合映射 ϕ的标准矩阵表示 。在下文中，我们总是假设 $[\phi]$具有这种形式。

命题 2.3 ([H]的命题 4.17)。 上的紧接触结构 $L(p,q)$ 由其中的特征加厚环面唯一确定。该特征加厚环面由两个凸海加德环面围成： T_1 和T_2 满足

$$\begin{cases} \#\Gamma_{T_1} = \#\Gamma_{T_2} = 2, \\ \Gamma_{T_2} \textit{ has homotopy type } \lambda_2 = q'\mu_1 - p'\lambda_1, \\ \Gamma_{T_1} \textit{ has homotopy type } \mu_1 - \lambda_1, \\ \textit{the tight contact structure of this thickened torus is min twist.} \end{cases}$$

这里，$\#\Gamma_{T_i}$ 是 Γ_{T_i}的分支数。其接触结构可由相对欧拉类描述。

可以得 出这个命题的结论：凸海加德环面的斜率取值范围为（$-\frac{p}{q}$，0） - .

命题 2.4 ([H]的命题 5.1)。 若 $q \neq p-1$，则 上恰有两种普遍紧接触结构 $L(p,q)$。若 $q = p-1$，则恰有一种。假设 T_1 和 T_2 的特征叶状结构为标准形式，则特征加厚环面的相对欧拉类为 $\pm P.D.((-q',p') - (-1,1))$。这里， $P.D.$ 表示庞加莱对偶。

注记 2.5。本文选择 ξ_{ut} 为由特征加厚环面的相对欧拉类 $P.D.((-q',p') - (-1,1))$所确定的类。特征加厚环面的定向由 $L(p,q)$诱导。特征加厚环面的上边界 T_2 由 ∂V_1 定向，而下边界 T_1 则由 ∂V_1的反向定向。

注记 2.6。为方便起见，始终假设凸海加德环面带有标准叶状结构（即线性叶状结构），并由 ∂V_1的坐标 (μ_1, λ_1) 描述。

2.2 透镜空间中的环面纽结

定义 2.7。定向结型 $\mathbf{K^{(a,b)}}$ 由 $L(p,q)$ 中的海加德环面上的一个环面纽结表示，其同伦类型为

$$[K_{(a,b)}] = a\mu_1 + b\lambda_1 \in H_1(\partial V_1).$$

注意，万有覆盖 π： $S^3 \to L(p,q)$ 保持海加德分解，因为 $\pi^{-1}(\partial V_1)$ 是 S^3中一个平凡结的管状邻域的边界。此外，该实心环面在 S^3中的标准子午线和经线恰好分别是 $L(p,q)$ 中 μ_1–曲线和 μ_2–曲线的提升。令 r 表示 $L(p,q)$的基本群中 $K_{(a,b)}$ 的阶。可以计算得：

$$r[K_{(a,b)}] = (ra + \frac{rbq}{p})\mu_1 + \frac{rb}{p}\mu_2 \in H_1(\partial V_1).$$

(参见 [O]中的引理 2.5）。这表明 $\pi^{-1}(K_{(a,b)})$ 是一个由 $\frac{p}{r}$ 个分支构成的环面链，且每个分支都是一个 $(ra + \frac{rbq}{p}, \frac{rb}{p})$ 环面纽结。我们指出

引理 *2.8*。设 K 是普遍紧致透镜空间（$L(p,q)$ ξ_{ut}）中海加德环面 T 上的勒让德（a,b）环面纽结。此外，假设 K 不是有理平凡结。令 $tw(K, Fr\ T)$ 表示由 T 给定的框架下，接触平面沿 K 的扭转数。我们有 $tw(K, Fr\ T) \leq 0$。根据引理 *2.10*，在固定 K 进行小扰动后，T 是凸的。

证明。 由于 π 是局部接触同胚且是一个 p–覆盖映射，我们有

$$\mathbf{tw}(\pi^{-1}K, \mathbf{Fr}(\pi^{-1}T)) = p\ \mathbf{tw}(K, \mathbf{Fr}\,T).$$

若 K 不是有理平凡结，那么， $\pi^{-1}K$ 就不是平凡结。令 K_i 表示 $\pi^{-1}K$ 的各个分支，其中$i=1$，2，……，$\frac{p}{r}$。由 [EH] 的定理 4.1 和 [DET], 的命题 2.22 可得

$$\mathbf{tw}(\pi^{-1}K,\mathbf{Fr}(\pi^{-1}T))=\sum_{i=1}^{p/r}\mathbf{tw}(K_i,\mathbf{Fr}(\pi^{-1}T))=\frac{p}{r}\mathbf{tw}(K_i,\mathbf{Fr}(\pi^{-1}T))\leq 0,\ \forall i=1,2,\ldots,\frac{p}{r}.$$

因此，$\mathbf{tw}(K,\ \mathbf{Fr}\ T)\leq 0.$ □

注 *2.9.* 对于 $(L(p,q)\ \xi_{ut})$ 中的勒让德有理平凡结 K，$tw(K,\ Fr\ T)\leq 0$ 并非总是成立。假设 K 是海加德环面 T 上的一个勒让德 $(a,\ 1)$ 环面纽结。那么，存在一个包含 K 的海加德环面 T'，使得 K 是 T' 上的一个 $(a+k,\ 1)$ 环面纽结。我们有 $tw(K,\ Fr\ T')\ =\ tw(K,\ Fr\ T)\ -k$。因此，总是存在一个包含 K 的凸海加德环面 T。

引理 *2.10*（[*O*] 的命题 *3.2*）。设 L 是曲面 Σ 上的一个勒让德圆，并令 $tw(L,\ Fr\ \Sigma)$ 表示接触平面沿 L 的扭转，其测量依据是由 Σ 给出的框架。那么，当且仅当 $tw(L,\ Fr\ \Sigma)\leq 0$ 时， Σ 可以在固定 L 的情况下扰动为凸曲线。若 Σ 是一条分割曲线为 Γ 的凸曲面，则

$$\mathbf{tw}(L,\mathbf{Fr}\,\Sigma)=-\frac{1}{2}\#(L\cap\Gamma)$$

其中，$\#(L\cap\Gamma)$ 表示 L 与 Γ的交数的无符号计数。此外，如果 Σ 是单个定向勒让德圆 L的塞弗特曲面，则上述公式计算的是 L的瑟斯顿–本尼昆不变量$\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}(L)$ 。在此情况下， L的旋转数$\mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}(L)$ 为

$$\mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}(L)=\chi(\Sigma^+)-\chi(\Sigma^-).$$

将 (a,b) 环面纽结 K 置于凸海加德环面上，作为勒让德叶状曲线；并将分界曲线的分支数记为 $\#\Gamma_T=2n$，$n\in\mathbb{Z}_{>0}$。T 的斜率记为 $s(T)=-\frac{s}{t}$，其中 s,t是满足 $-\frac{s}{t}\in(-\frac{p}{q},0)$ 的互素正整数。根据引理 2.10，

$$\mathbf{tw}(K,\mathbf{Fr}\,T)=-n|\det\begin{pmatrix}a & t\\ b & -s\end{pmatrix}|=-n|as+bt|$$

结合这一事实

$$\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}\,K=\mathbf{tw}(K,\mathbf{Fr}\,T)+ab+\frac{b^2q}{p},$$

我们推导出，勒让德 (a,b) 环面纽结 K 达到其结型所允许的最大值 $\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}$ ，当且仅当$\mathbf{tw}(K,\mathbf{Fr}\ T)$达到其最大值。为了выяснить

$$\overline{\mathbf{tw}}(K_{(a,b)},\mathbf{Fr}\,T):=\max\{\mathbf{tw}(K,\mathbf{Fr}\,T)|K\text{ is a Legendrian }(a,b)\text{ knot in }(L(p,q),\xi_{ut})\},$$

只需考虑 K 是 T的勒让德叶状曲线或 Legendrian 分界曲线的情形。根据 [EH], 中引理 4.10 后的段落，可以始终假设当 $\Gamma_T=2$ 达到 K 时，$\#\,\mathbf{tw}(K_{(a,b)},\ \mathbf{Fr}\ T)$。更确切地说，只需找出

$$\max\{-|as+bt|:\text{irreducible fraction }-\frac{s}{t}\text{ ranges in }(-\frac{p}{q},0)\}$$

对于固定的数 a 和 b。

为了计算 $\mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}(K)$，Onaran 使用了 [EH] 中提出的方法。定义 $\mathbb{Z}$–线性函数

$$f_T:H_1(T)\to\mathbb{Z}$$

如下：设 v 是 ξ_{ut} 的处处非零截面， w 是 $\xi_{ut}|_T$ 的处处非零截面，使得 w 与 Legendrian 分割曲线相切，并与 Legendrian 直纹曲线横截。对于 T 上的定向闭曲线 γ，令 $f_T(\gamma)$ 表示 w 沿着 γ 相对于 v 的旋转数。设 K 是 T 上阶为 r 的 Legendrian 叶状曲线或分界曲线，则 **旋转数**$\mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}(K)$ 可由下列公式计算：

$$r\,\mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}(K)=f_T(r[K])=(ra+\frac{rbq}{p})f_T(\mu_1)+\frac{rb}{p}f_T(\mu_2).\tag{1}$$

注 2.11. *Onaran* 将环面纽结 $K_{(a,b)}$ 称为正的，若 $a,\ b>0$；若 $a\le 0,\ b\ge 0$则称其为负的。本文始终假设 $-a$ 和 b 是互素的非负整数。为了证明主定理*1.3*，我们将讨论所有情形下的 *Legendrian* 负环面纽结：

- $\frac{b}{a}=0$，$K_{(a,\ b)}$ 是平凡结 $\pm\mu_1$ 其归类于 *[EF]*，
- $\frac{b}{a}\in(-1,\ 0)$，
- $\frac{b}{a}\in[-\frac{p'}{q'},-1]$，
- $\frac{b}{a}\in(-\frac{p}{q},\ -\frac{p'}{q'})$，
- $\frac{b}{a}=-\frac{p}{q}$，$K_{(a,\ b)}$ 是平凡结 $\pm\mu_2$ 其归类于 *[EF]*，
- $\frac{b}{a}\in(-\infty,\ -\frac{p}{q})$，
- $\frac{b}{a}=-\infty$，$K_{(a,\ b)}$ 同伦于 $-K_{(1,\ 1)}$ 其分类见 *[O]*。

然后我们在每种情况下应用策略 *1.2*。

3 对于 $\frac{b}{a}\in[-\frac{p'}{q'},-1]$ 的情况

首先，$\overline{\mathbf{tw}}(K_{(a,b)},\ \mathbf{Fr}\ T)=0$，因为我们可以选择 K 作为斜率为 $s(T)=-\frac{s}{t}=\frac{b}{a}$ 的凸海加德环面 T 上的 Legendrian 分界曲线。也就是说，我们取 $s=b$ 和 $t=-a$。根据前面的假设，$s,\ t$ 是正的互素整数。

现在，假设 K 是线性叶状凸海加德环面 T 上的 Legendrian 分界曲线，且 $\#\Gamma_T=2$，斜率为 $s(T)=-\frac{s}{t}=\frac{b}{a}$。为了计算 $\mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}(K)$，我们首先计算 $i=1,\ 2$ 时的 $f_T(\mu_i)$。实际上，如果 T 具有同伦类型为 μ_i 的 Legendrian 母线曲线，那么 $f_T(\mu_i)$ 正是类型为 μ_i 的闭 Legendrian 叶状曲线的旋转数。

由于“上方”是指 T_1 具有从 V_0 诱导的定向，使得 T 的“上方”方向与 T 的定向共同构成与 L 相同的定向 $(p,\ q)$。类似地，可以找到一个凸海加德环面 T_1，它位于 T 下方，具有两条分界曲线，并且 $s(T_1)=-1$。由 T_1 和 T_2 围成的加厚环面恰好是一个特征加厚环面（记为 N）。令 N_i 为由 T 和 T_i 围成的加厚环面，其中 $i=1,\ 2$。$N,\ N_1,\ N_2$ 的相对欧拉类记为 $e_{N_1},\ e_{N_2}$。根据假设，

$$e_N=P.D.((-q',p')-(-1,1)).$$

因此，N 根据 [H] 的命题 5.1 是普遍紧的，因此 N_1 和 N_2也如此。再结合以下事实：

$$e_N=e_{N_1}+e_{N_2},$$

我们有

$$\begin{cases}e_{N_1}=P.D.((-q',p')-(-t,s)),\\ e_{N_2}=P.D.((-t,s)-(-1,1)).\end{cases}$$

3.1 $f_T(\mu_i)$ 的计算，$i=1,\ 2$

对 T 和 T_1 进行扰动，使其叶状斜率为 0。令 $A_1\cong\gamma\times I$ 为一个凸环带，其勒让德边界适当地嵌入在 $N_1\cong\partial V_1\times I\cong T^2\times I$ 中。这里，假设 $\gamma\times 0$、$\gamma\times 1$ 都是勒让德叶状曲线：$\gamma\times 1=T\cap A_1$ 和 $\gamma\times 0=T_1\cap A_1$。此外，假设 A_1 的定向满足 $\partial A_1=\gamma\times 1-\gamma\times 0$，其中 γ 是一个在环面上同伦类型为 (1, 0) 的定向纽结。也就是说，∂A_1 是 T 上的一条 μ_1-曲线与一条位于 T_1 上的 $(-\mu_1)-$曲线的并。于是，根据 [H]，的命题 4.5，我们有：

$$\chi(A_1^+)-\chi(A_1^-)=\langle e_{N_1},(1,0)\rangle=\det\begin{pmatrix}-t+1 & 1\\ s-1 & 0\end{pmatrix}=1-s$$

其中 $\langle-,\ -\rangle$ 是克罗内克积。利用引理 2.10，我们还可以计算出

$$\Gamma_{A_1}\cap(\gamma\times 1)=-2\,\mathbf{tw}(\gamma\times 1,\mathbf{Fr}\,A_1)=-2\,\mathbf{tw}(\gamma\times 1,\mathbf{Fr}\,T)=\Gamma_T\cap(\gamma\times 1)=2|\det\begin{pmatrix}1 & -t\\ 0 & s\end{pmatrix}|=2s$$

and

$$\Gamma_{A_1} \cap (\gamma \times 0) = -2\,\mathbf{tw}(\gamma \times 0, \mathbf{Fr}\, A_1) = -2\,\mathbf{tw}(\gamma \times 0, \mathbf{Fr}\, T_1) = \Gamma_{T_1} \cap (\gamma \times 0) = 2|\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}| = 2.$$

根据上述计算以及 N_1、 Γ_{A_1} 的紧性，必须如下所示。 Γ_{A_1} 由连接$\gamma \times 1$与 $\gamma \times 0$的两条弧以及沿 $\gamma \times 0$的（$s-1$）边界平行分割曲线组成。下图中的符号 $\pm$是发散符号。

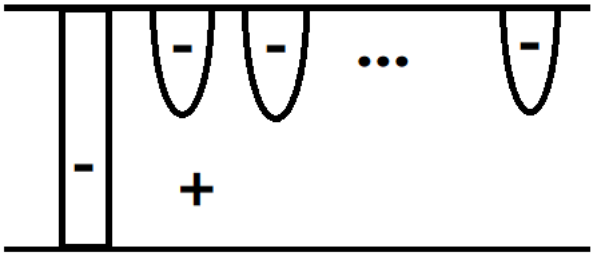


图1：上方的水平直线是 $T \cap A_1$；下方的是 $T_1 \cap A_1$。

$D_{1,0}$是实心环面 V_1 的凸子午圆盘，其边界为 T_1，定向满足$\partial D_{1,0} = \gamma \times 0 \subset \partial A_1$。 V_1 的子午线和经线恰好是 (μ_1, λ_1)。由 $\Gamma_{A_1} \cap (\gamma \times 0)$ 的计算可知，$\Gamma_{D_{1,0}}$ 是 $D_{1,0}$ 的直径。设 $D_1 = A_1 \cup D_{1,0}$ 为由 T 上的曲线 μ_1-围成的较大子午圆盘，则 D_1 的定向与 A_1 和 $D_{1,0}$ 的定向均相容。Γ_{D_1} 恰由 s 条边界平行弧组成。

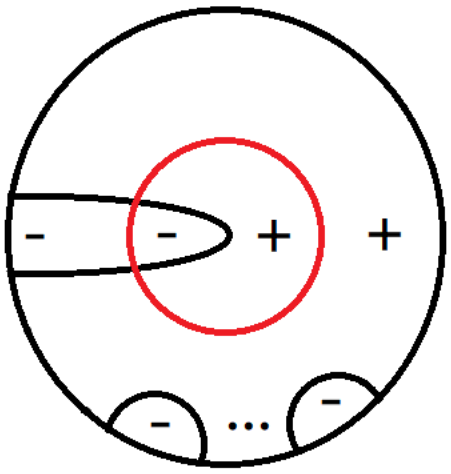


图2：红色部分是 $\gamma \times 0$。红线内侧是 $D_{1,0}$，红线外侧是 A_1 .

因此，我们有：

$$f_T(\mu_1) = \mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}(\gamma \times 1, D_1) = \chi(D_1^+) - \chi(D_1^-) = 1 - s.$$

类似地，为了计算 $f_T(\mu_2)$，应扰动 T 和 T_2，使得它们具有叶状斜率 $-\frac{p}{q}$。令 $A_2 = \delta \times I$ 为一个凸环带，其勒让德边界适当地嵌入于 $N_2 \cong \partial V_1 \times I \cong T^2 \times I$ 中。在此， $\delta \times \{0,1\}$ 的两个分支都是勒让德叶状曲线：$\delta \times 1 = T_2 \cap A_2$ 和 $\delta \times 0 = T \cap A_2$。此外，假设 A_2的定向使得 $\partial A_2 = \delta \times 1 - \delta \times 0$ 和 δ 是环面上同伦类型为 $(-q,\ p)$ 的定向纽结。也就是说， ∂A_2 是 T_2 上的一条 μ_2-曲线与 T 上的一条 $(-\mu_2)-$曲线的并集。

我们可以计算出以下数据：

$$\Gamma_{A_2} \cap (\delta \times 1) = -2\,\mathbf{tw}(\delta \times 1, \mathbf{Fr}\, A_2) = -2\,\mathbf{tw}(\delta \times 1, \mathbf{Fr}\, T_2) = \Gamma_{T_2} \cap (\delta \times 1) = 2|\det \begin{pmatrix} -q' & -q \\ p' & p \end{pmatrix}| = 2,$$

$$\Gamma_{A_2} \cap (\delta \times 0) = -2\,\mathbf{tw}(\delta \times 0, \mathbf{Fr}\, T) = \Gamma_T \cap (\delta \times 0) = 2|\det \begin{pmatrix} -q & -t \\ p & s \end{pmatrix}| = 2(pt - qs) > 0,$$

and

$$\chi(A_2^+) - \chi(A_2^-) = \langle e_{N_2}, (-q, p) \rangle = \det \begin{pmatrix} -q' + t & -q \\ p' - s & p \end{pmatrix} = -1 + pt - qs.$$

由上可知， Γ_{A_2} 必须由两条连接 $\delta \times 1$ 与 $\delta \times 0$ 的弧以及沿着$\delta \times 0 = T \cap A_2$的（$pt - qs - 1$）条边界平行弧组成。

令 $D_{2,\ 0}$ 表示实心环面 V_2 的凸子午圆盘，其边界为 T_2，定向满足 $\partial D_{2,\ 0} = \delta \times 1$。$V_2$ 的子午线和经线恰为 $(\mu_2,\ \lambda_2)$。由 $\Gamma_{A_2} \cap (\delta \times 1)$ 的计算可知，$\Gamma_{D_{2,\ 0}}$ 只是 $D_{2,\ 0}$ 的一条直径。令 $D_2 = (-A_2) \cup D_{2,\ 0}$，则 $\partial D_2 = \delta \times 0 \subset T$是 T上的一条 μ_2–曲线。根据 $\Gamma_{D_2} = \Gamma_{A_2} \cup \Gamma_{D_{2,\ 0}}$，有：

$$f_T(\mu_2) = \mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}(\delta \times 0, D_2) = \chi(D_2^+) - \chi(D_2^-) = 1 - (pt - qs).$$

结合以上内容，我们得出：

定理 3.1. 假设 $-a, b$ 是互素正整数，且 $\frac{b}{a} \in [-\frac{p'}{q'}, -1]$。令 K 为一个勒让德(a, b) 环面纽结，其最大 $\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}$ 数位于$(L(p, q)\ \xi_{ut})$中。这里，ξ_{ut} 由具有标准叶状边界的特征加厚环面的相对欧拉类 $P.D.((-q', p') - (-1, 1))$ 确定。于是

$$\mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}(K) = a + b\frac{1+q}{p}.$$

证明。 这可以通过公式 1的直接计算得到。 □

3.2 本情形下主定理的证明

本情形下的主定理 1.3 可由以下两个引理轻易推出。

引理 3.2。 假设 $-a$、b 是互素正整数，并且 $\frac{b}{a} \in [-\frac{p'}{q'}, -1]$。令 K 和 K' 为两个勒让德 $(a,\ b)$环面纽结，其最大 $\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}$ 数为 $(L(p,\ q)\ \xi_{ut})$。这里，ξ_{ut} 由具有标准叶状边界的特征加厚环面的相对欧拉类 $P.D.((-q',\ p') - (-1,\ 1))$ 确定。于是存在一个接触同胚 ϕ，使得 $\phi(K) = K'$.

证明。 假设 K' 是凸海加德环面 T' 的一条 Legendrian 分界曲线，其中有两条斜率为 s（T'）的分界曲线 $= \frac{b}{a}$。那么，存在一个凸海加德环面 T_2'，其有两条斜率为 $\frac{p'}{q'}$ 的分界曲线，以及一个凸海加德环面 T_1'，其有两条斜率为 -1 的分界曲线。令 N_i' 表示由 T' 和 T_i' 围成的加厚环面。类似地，我们为 K 定义 T、N_i。构造相关层的接触同胚，并将各个部分上的映射拼接在一起。证明完毕。

更准确地说，如果 T_i 和 T_i' 的叶状斜率相同（T 和 T'也相同），则存在一个从N_i到 N_i'的接触同胚。此外，我们可以找到一个从实心环面 V_i到实心环面 V_i'的接触同胚。这里，V_i（相应地，V_i'）是一个实心环面，其子午线为 μ_i，边界为 T_i（相应地，T_i'）。 □

引理 3.3. 假设 $-a, b$ 是互素正整数，且 $\frac{b}{a} \in [-\frac{p'}{q'}, -1]$。令 K' 为一个勒让德(a, b) 环面纽结，它在$\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}$ 数达到最大值$(L(p, q)\ \xi_{ut})$中未达到最大值。这里，ξ_{ut} 由具有标准叶状边界的特征加厚环面的相对欧拉类$P.D.((-q', p') - (-1, 1))$ 确定。则 K' 可以去稳定化。

证明。 设 K' 位于凸海加德环面 T' 上。设凸海加德环面 T 有两条斜率为 $\frac{b}{a}$ 的分界曲线，并设 K 是 T 的一条 Legendrian 分界曲线。该环面 T 可以与 T' 不相交。设 A 是一个凸环带，其中 $\partial A = K \cup K'$ 正则嵌入由 T 和 T' 围成的加厚环面内。注意，

$$\mathbf{tw}(K', \mathbf{Fr}\, A) = \mathbf{tw}(K', \mathbf{Fr}\, T') < 0$$

and

$$\mathbf{tw}(K, \mathbf{Fr}\, A) = \mathbf{tw}(K, \mathbf{Fr}\, T) = 0,$$

因此 Γ_A 沿着 K' 截出一个半圆盘。即，K' 是某个勒让德（a，b）环面纽结的稳定化。 □

注 3.4。 此时的山脉图只有一个顶点。

4 当 $\frac{b}{a} \in (-1,\ 0)$ 时 -

与 $\frac{b}{a} \in [-\frac{p'}{q'}, -1]$ 的情形类似，我们有 $\mathbf{tw}(K_{(a,b)}, \mathbf{Fr}\ T) = 0$，因为可以选择 K 使其成为斜率为 $s(T) = -\frac{s}{t} = \frac{b}{a}$ 的凸海加德环面 T 的 Legendrian 分界曲线。我们仍假设 $s = b$ 和 $t = -a$ 是正整数，其中 s，t 互质。存在唯一的正整数 m，使得 $-\frac{1}{m+1} \geq -\frac{s}{t} > -\frac{1}{m}$。

为了计算 f_T，我们仿照 [EH] 第4.2节中的方法。取前一节中所述的 T_1 和 T_2，它们位于 T 上方。令 $T_{1、m+1}$（相对地，$T_{1、m}$）为一个凸海加德环面，其上有两条斜率为 $-\frac{1}{m+1}$（相对地，$-\frac{1}{m}$）的分界曲线。T 位于 $T_{1、m+1}$ 与 $T_{1、m}$ 之间。仍令 N_1 表示由 T 和 T_1 围成的加厚环面，尽管在此情形下，N_1 位于特征加厚环面 N 之外。令 $N_{1、m+1}$ 为由 T 和 $T_{1、m+1}$ 围成的加厚环面，并令 V_1 为由 T_1 围成的实心环面，其子午线和经线分别为 μ_1、λ_1。

其次，我们来求这些层的相对欧拉类。

命题 4.1（[H]中的命题 4.13）。假设 ξ 是定义在 $M = T^2 \times I$ 上的最小扭转紧接触结构，其边界条件为：

$$\begin{cases} s_1 = the\ slope\ of\ T^2 \times 1 = -1, \\ s_0 = the\ slope\ of\ T^2 \times 0 = -\frac{1}{m}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, \\ \#\Gamma_{T^2 \times i} = 2, i = 0, 1, \\ T^2 \times i = 2 are\ linear\ foliated\ for\ i = 0, 1. \end{cases}$$

那么，ξ 由相对欧拉类 e_M 唯一确定，或者等价地，

$$\langle e_M, A \rangle = \chi(A^+) - \chi(A^-) = \#positive\ half\text{-}disc - \#negative\ half\text{-}disc$$

其中 $A = 0 \times S^1 \times I$ 是一个具有勒让德边界的凸环带，#正/负半圆盘表示被 Γ_A 截出的正/负半圆盘的数量。

证明。对 $T^2 \times I$ 施加由（x，y，t）给出的微分同胚 $\to$（y，x，$1-t$）。于是，ξ 的边界条件与 [H]中的命题 4.12 相同。分界集 Γ_A 如下所示。Γ_A 由两条分界曲线组成，它们分别连接 $0 \times S^1 \times 1$ 与 $0 \times S^1 \times 0$，此外还有沿着 $m-1$ 的边界平行分割曲线 $0 \times S^1 \times 0$。

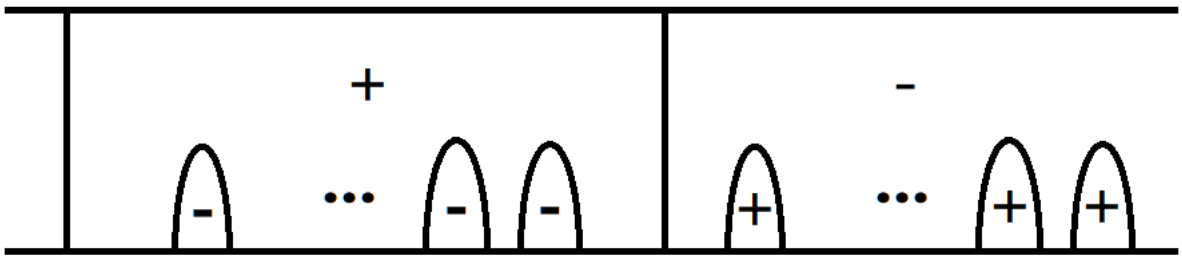


图 3：上方的水平直线是 $0 \times S^1 \times 1$；下方的是 $0 \times S^1 \times 0$。

我们有

$$\#\text{positive half-disc} + \#\text{negative half-disc} = m - 1.$$

因此，$e_M = P.D.(x,\ 0)$，其中 x 取 m 个值：$m-1$，$m-3$，$\ldots$，$-(m-1)$。我们也可以用另一种形式写出 e_M（见 [H] 的命题 4.22）

$$e_M = P.D.\{[(1,-1) - (k,-1)] + [-(k,-1) + (m,-1)]\}$$

or

$$e_M = P.D.\{[-(1,-1) + (k,-1)] + [(k,-1) - (m,-1)]\}$$

其中 k 取值于 1、2、.....、m。根据 [H], $(T^2 \times I, \xi)$ 的引理 4.14，这是将两个普遍紧层粘合在一起得到的接触结构，其相对欧拉类为 $P.D.[(1,-1) - (k,-1)]$ 和 $P.D.[-(k,-1) + (m,-1)]$。或者说，它是先沿 $T^2 \times 0$ 上斜率为 ∞ 的经线附加正（负）旁路，再附加负（正）旁路而得到的。

□

备注 *4.2.* 通过分析 *Legendrian* 圆的标准管状邻域 V_1 及其稳定化，上述所有接触结构都可以嵌入 V_1。回到本文讨论的情形，设 $T_{1,k}$ 为凸海加德环面，其上有两条斜率为 $-\frac{1}{k}$ 的分界曲线。此处， k 在引理 *4.1* 中有描述。不失一般性，假设 T 位于 *4.1* 中描述的普遍紧层内，该层由 $T_{1,k}$ 和 $T_{1,m+1}$ 围成。该普遍紧层的相对欧拉类为 $P.D.[-(k,-1)+(m+1,-1)]$，或为 $P.D.[(k,-1)-(m+1,-1)]$，其中 $(k=1,2,...,m)$。

4.1 $f_T(\mu_i)$ 的计算， $i=1,\ 2$

若 T 位于上述相对欧拉类为 $P.D.[-(k,\ -1)+(m+1,\ -1)]$, 的普遍紧层中，为方便起见，称 T 位于正向普遍紧层中，则有

$$P.D.[-(k,-1)+(m+1,-1)]=P.D.\{[-(k,-1)+(t,-s)]+[-(t,-s)+(m+1,-1)]\}$$

由此可得

$$e_{N_{1,m+1}}=P.D.[-(t,-s)+(m+1,-1)]$$

因为普遍紧加厚环面的子层也是普遍紧的。采用3.1中的类似方法，我们可以计算得

$$f_T(\mu_1)=1-s.$$

为了计算 $f_T(\mu_2)$，我们先计算 $N\cup N_1$ 的相对欧拉类:

$$P.D.e_{N\cup N_1}=[(-q',p')-(-1,1)]+[(1,-1)-(k,-1)]+[-(k,-1)+(t,-s)]=(-q'+t-2k+2,p'-s).$$

第一项对应 N，第二项对应由 T_1 和 $T_{1,\ k}$ 围成的层，第三项对应由 $T_{1,\ k}$ 和 T 围成的层。接着，取一个凸环带 A_2，其勒让德边界适当地嵌入于 $N\cup N_1$ 中，即

$$(N\cup N_1,A_2)\cong(T^2\times I,\gamma\times I)$$

其中， γ 是一条斜率与 μ_2相同的曲线。我们有

$$\chi(A_2^+)-\chi(A_2^-)=\langle e_{N\cup N_1},(-q,p)\rangle=\det\begin{pmatrix}-q'+t-2k+2 & -q\\ p'-s & p\end{pmatrix}=p(t-2k+2)-qs-1.$$

将 A_2 补成一个以 $\gamma\times 0$ 为边界的子午圆盘后，可以得出

$$f_T(\mu_2)=-p(t-2k+2)+qs+1$$

其中 $k=1,2,\ldots,m.$

若 T位于相对欧拉类为 $P.D.[(k,-1)\ -(m+1,-1)]$, 的普遍紧层中，为方便起见，称 T位于一个负向普遍紧层中，则有以下结果:

$$f_T(\mu_1)=s-1$$

而 $N\cup N_1$ 的相对欧拉类为

$$P.D.e_{N\cup N_1}=[(-q',p')-(-1,1)]+[-(1,-1)+(k,-1)]+[+(k,-1)-(t,-s)]=(-q'-t+2k,p'+s-2)$$

因此

$$f_T(\mu_2)=p(t-2k)-q(s-2)+1.$$

将这些数据代入公式1，可得

定理 4.3. 设 $-a,b$ 是互素正整数，且 $\frac{b}{a}\in(-1,0)$。设 m 是满足 $-\frac{1}{m+1}\geq-\frac{s}{t}=\frac{b}{a}>-\frac{1}{m}$ 的唯一正整数。设 K 是具有最大 $\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}$ 数的勒让德 (a,b) 环面纽结，位于 $(L(p,q)\ \xi_{ut})$ 中。这里，ξ_{ut} 由具有标准叶状边界的特征加厚环面的相对欧拉类 $P.D.((-q',p')-(-1,1))$ 确定。于是

$$\mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}(K)=a+b\frac{1+q}{p}+2b(k-1),\ k=1,2,\ldots,m.$$

Or

$$\mathbf{rot}_{\mathbb{Q}}(K)=-a+b\frac{1+q}{p}-2bk,\ k=1,2,\ldots,m.$$

假设 $b\neq 1$，或者等价地， K 不是有理平凡结，则这些 $2m$ 值各不相同，因此分别对应分层的不同情形。

注 4.4。旋转数的第一个公式表示 T 位于正向普遍紧层的情况，旋转数的第二个公式则对应 T 位于负向普遍紧层的情况。

4.2 本情形下主定理的证明

通过以下引理，我们可以在此情形下得出主定理 1.3 。在本小节中，我们仿照 [EH] 第 4.2 节中的方法。

引理 *4.5.* 假设 $-a$、b 是互素正整数，且 $\frac{b}{a} \in (-1,0)$。另外，假设 $b \neq 1$。令 K 和 K' 为两个 a、b 型勒让德环面纽结，其最大 $tb_{\mathbb{Q}}$ 数为且旋转数 $rot_{\mathbb{Q}}$ 相同，均位于 $(L(p,q)\ \xi_{ut})$ 中。这里，ξ_{ut} 由具有标准叶状边界的特征加厚环面的相对欧拉类 $P.D.((-q',p')\ -(-1,1))$ 决定。于是，存在一个接触同胚 ϕ，使得 $\phi(K) = K'$。

证明。 假设 $K(K')$ 位于凸海加德环面 $T(T')$ 上，并以两条分界曲线作为勒让德分界曲线。$T_{1,\ m+1}$ 和 $T'_{1,\ m+1}$ 的定义如上。于是，我们可以逐层构造接触同胚层，并将它们粘合在一起，因为这些层上的接触结构由 $K(K')$ 的旋转数一一确定。 □

引理 *4.6.* 假设 $-a,b$ 是互素正整数，且 $\frac{b}{a} \in (-1,0)$。另外，假设 $b \neq 1$。令 m 和 e 为满足 $|a| = bm + e$ 的正整数，其中 $0 < e < b$。令 K 和 K' 为最大 $tb_{\mathbb{Q}}$ 的勒让德 (a,b) 环面纽结。若旋转数为 r 和 $r-2e$，则 $S^+_e(K')$ 与 $S^-_e(K)$ 彼此接触同胚等价。若旋转数为 r 和 $r-2(b-e)$，则 $S^+{}_{(b-e)}(K')$ 与 $S^-{}_{(b-e)}(K)$ 彼此接触同胚等价。

证明. 令 $\mathrm{rot}_{\mathbb{Q}}(K') = \mathrm{rot}_{\mathbb{Q}}(K) - 2e$。根据上述讨论，可以假设 K' 位于线性叶状凸海加德环面 T' 上，该环面有两条斜率为 $\frac{b}{a}$ 的分界曲线。令 T'_1 为位于 T' 上方、具有两条斜率为 -1 的分界曲线的凸海加德环面；令 $T'_{1,m}$ 为位于 T' 与 T'_1 之间、具有两条斜率为 $-\frac{1}{m}$ 的分界曲线的线性叶状凸海加德环面。由 $T'_{1,m}$ 和 T' 围成的层的相对欧拉类为 $P.D.[-(-a,-b) + (m,-1)]$。由 T'_1 与 $T'_{1,m}$ 围成的层的相对欧拉类为 $P.D.[(1+m-2k,0)]$，其中 $k = 1, 2, \ldots, m$。经过小扰动后，可以假设 $T'_{1,m}$ 的叶状斜率为 $\frac{b}{a}$。令 A 为适当嵌入该层的凸环带，使得 $\partial A = \gamma - K$，其中 γ 是位于 $T'_{1,m}$ 上、作为母线曲线的勒让德 (a,b) 环面纽结。我们有

$$\chi(A^+) - \chi(A^-) = \langle P.D.[-(-a,-b) + (m+1,-1)], (a,b)\rangle = e$$

and

$$\mathbf{tw}(\gamma, \mathbf{Fr}\, A) = |\det \begin{pmatrix} m & a \\ -1 & b \end{pmatrix}| = e.$$

因此，Γ_A 由沿着 γ 的 e 条边界平行弧组成。因此，$\gamma = S^+_e(K')$。

对于结 K，类似地定义 T_1、$T_{1,\ m}$ 和 T。通过同样的方法，读者可以发现，位于 $T_{1,\ m}$ 上、作为母线曲线的勒让德 $(a,\ b)$ 环面纽结 δ 恰好是 $\delta = S^-_e(K)$。由 T_1 和 $T_{1,\ m}$ 围成的接触同胚层的相对欧拉类也是 $P.D.[(1+m-2k,\ 0)]$，这与由 T'_1 和 $T'_{1,\ m}$ 围成的接触同胚层的相对欧拉类相同。因此，可以逐层构造一个接触同胚，将 γ 映射到 δ。也就是说，存在一个接触同胚将 $S^+_e(K')$ 映射到 $S^-_e(K)$。

第二种情况留给读者完成；注意到 K 与位于 $T_{1,\ m+1}$ 上、作为母线曲线的勒让德 $(a,\ b)$ 结之间的关系后，证明并不困难。 □

引理 4.7。 假设 $-a$、b 是互素正整数，且 $\frac{b}{a} \in (-1, 0)$。令 K' 为一个勒让德 (a, b) 环面纽结，其在 $(L(p, q)\ \xi_{ut})$ 中未达到最大的 $\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}$ 数。这里，ξ_{ut} 由具有标准叶状边界的特征加厚环面的相对欧拉类 $P.D.((-q', p') - (-1, 1))$ 确定。因此 K' 可以去稳定化。

证明。 证明与 $\frac{b}{a} \in [-\frac{p'}{q'}, -1]$ 的情形完全相同。 □

读者可以 1.3 在这种情形下，按照上述引理并完全采用 [EH] 中定理 4.13 的方法得出这一结论。这是因为（a、b）型环面纽结在（S^3、ξ_{st}）中具有与（a、b）型环面纽结相同形状的山脉图。因此，主定理 1.3 的证明与 [EH] 中的定理 4.13 没有区别。

5 对于 $\frac{b}{a} \in (-\frac{p}{q}, -\frac{p'}{q'})$ 的情形

注意到，$\lambda_1 - \mu_1$ 是 V_1 最外侧的接触经线，而 λ_2 是 V_2最外侧的接触经线。如果交换 V_1 和 V_2 的位置，并假设它们配备了新的坐标（μ'_i，λ'_i），其中

$i=1,\ 2$，那么（$\mu_i',\ \lambda_i'$）应满足

$$\begin{cases}\mu_1=\mu_1',\\ \mu_2=\mu_2',\\ \lambda_1-\mu_1=\lambda_1',\\ \lambda_2=\lambda_2'-\mu_2'.\end{cases}$$

连同

$$\begin{cases}\mu_1=p'\mu_2+p\lambda_2,\\ \lambda_1=q'\mu_2+q\lambda_2,\end{cases}$$

我们推导出，在新的坐标 (μ_i',λ_i') 下，粘合映射 $\phi^{-1}:\partial V_1\to\partial V_2$ 具有标准矩阵表示：

$$[\phi^{-1}]=\begin{pmatrix}-(p-p') & (p-p')-(q-q')\\ p & -(p-q)\end{pmatrix}.$$

特别地，$\phi^{-1}(\mu_1')=-(p-p')\mu_2'+p\lambda_2'$。因此，$L(p,q)=L(p,p-p')$，而由 $(L(p,q)\ \xi_{ut})$ 诱导出的 $L(p,p-p')$ 上的普遍紧接触结构，由其特征加厚环面的相对欧拉类确定：

$$P.D.\{(-[(p-p')-(q-q')],p-q)-(-1,1)\}.$$

我们还可以求出从坐标 (μ_1,λ_1) 到 (μ_2',λ_2') 的过渡矩阵，其形式为

$$\begin{pmatrix}-(p-p') & -(q-q')\\ p & q\end{pmatrix}.$$

这说明，$L(p,q)$ 中的 (a,b) 环面纽结实际上是 $L(p,p-p')$ 中的 $(\tilde{a},b)$ 环面纽结，其中

$$(\tilde{a},\tilde{b})=(-(p-p')a-(q-q')b,\ pa+qb).$$

一旦 $\frac{b}{a}\in(-\frac{p}{q},-\frac{p'}{q'})$，我们就有 $\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\in(-1,0)$。对 $\tilde{a},\tilde{b}$ 中的环面纽结 $L(p,p-p')$ 应用同样的论证，主定理 1.3 在 $\frac{b}{a}\in(-\frac{p}{q},-\frac{p'}{q'})$ 时也成立。读者可以将本节的正确性作为一道简单的线性代数练习自行验证。

6 对于 $\frac{b}{a}\in(-\infty,-\frac{p}{q})$ 的情形

首先要计算 $\mathbf{tw}(K_{(a,b)},\mathbf{Fr}\ T)$。与之前一样，我们假设 T是一个凸海加德环面，其上有两条斜率为 $-\frac{s}{t}$ 的分界曲线，并且 K是位于 T上的结，作为斜率为 $\frac{b}{a}$ 的勒让德母线曲线。这里，$-a$、b是正互素整数，s 和 t也如此。因此，

$$\mathbf{tw}(K_{(a,b)},\mathbf{Fr}\,T)=-|\det\begin{pmatrix}t & a\\ -s & b\end{pmatrix}|=-\det\begin{pmatrix}t & a\\ -s & b\end{pmatrix}=-(as+bt)$$

，因此只需求 $(as+bt)$ 的最小值，其中 $-\frac{s}{t}\in(-\frac{p}{q},0)$，且 a和 b均为定值。

我们简要回顾一下 Onaran 的结果：

引理 *6.1*（参见 [O]的定理 *4.2*）。设 a 和 b 是互素的非负整数，s 和t也如此。固定 a和 b，令$-\frac{s}{t}$在 $(-\frac{p}{q},0)$ 中取值。若 a和 b为正，则 $|\det\begin{pmatrix}t & a\\ -s & b\end{pmatrix}|$达到其最小值，当且仅当 $s=t=1$。若 $(a,b)=(1,0)$ 或 $(0,1)$，则 $\min|\det\begin{pmatrix}t & a\\ -s & b\end{pmatrix}|=1$。

作为其一个简单应用，我们得到以下推论：

推论 *6.2*. 设 $-\frac{u_1}{v_1},-\frac{u_2}{v_2}$是两个有理数，使得向量对 $(-v_1,u_1)$、$(-v_2,u_2)$ 构成 $\mathbb{Z}^2$ 的正整数基。即 $u_1v_2-u_2v_1=1$。这里，u_i 和 v_i 是 $i=1,2$ 的非负整数。假设 a,b 是固定的互素整数。若 $\frac{b}{a}\in(-\frac{u_1}{v_1},-\frac{u_2}{v_2})$。那么，当既约分数 $-\frac{s}{t}\in(\mathbb{Q}\cup\{\infty\})\setminus(-\frac{u_1}{v_1},-\frac{u_2}{v_2})$ 时，$|\det\begin{pmatrix}t & a\\ -s & b\end{pmatrix}|$ 取最小值，当且仅当 $-\frac{s}{t}=-\frac{u_2-u_1}{v_2-v_1}$。若 $\frac{b}{a}=-\frac{u_i}{v_i}$，$|\det\begin{pmatrix}t & a\\ -s & b\end{pmatrix}|$ 的最小值为 *1*，并且当 $|\det\begin{pmatrix}t & a\\ -s & b\end{pmatrix}|$ 取最小值时，$-\frac{s}{t}=-\frac{u_2-u_1}{v_2-v_1}$ 是一个可能的取值。这里，这些分数允许为 ∞。

证明。 只需考虑一个保向线性映射，它将 $(-v_1, u_1) \mapsto (1,0)$ 且将 $(-v_2, u_2) \mapsto (0,1)$。然后使用上面的引理。 □

注 6.3。 上述推论中的这些分数可以是 ∞。特别地，如果 $-\frac{u_1}{v_1} = \infty$，那么 $-\frac{u_1}{v_1}$ 应被视为 $-\infty = -\frac{1}{0}$。

为方便起见，我们在下面定义几个概念。读者应注意，这些并非正式名称。

定义 6.4。 设 s_0 和 s_1 是标记在镶嵌圆盘边界上的两个有理斜率（包括 ∞）。如果这两个斜率的相关方向构成一个整基，那么镶嵌圆盘中存在一条连接 s_0和 s_1 的连接弧 。

这些连接弧恰当地嵌入该圆盘中，实际上是带有庞加莱度量的双曲圆盘中的测地曲线。此外，所有这些连接弧在该圆盘的内部彼此不相交。在图 4中，连接弧就是圆盘内部的弧。

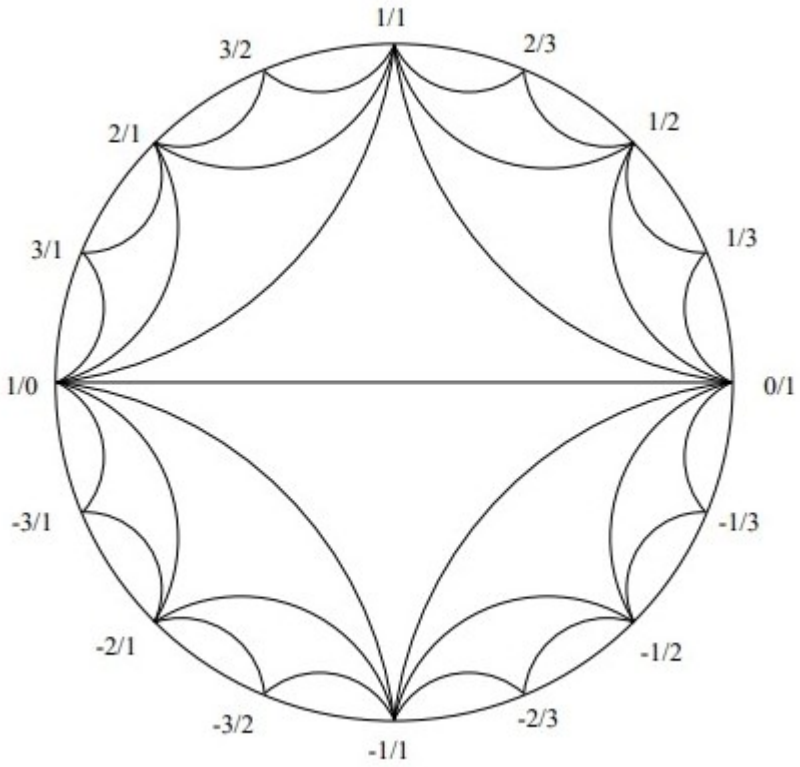


图 4：镶嵌圆盘。此图取自 [H]

为了应用上述推论，我们将区间 $(-\infty, -\frac{p}{q})$ 划分为有限个线段。

定义 6.5。 一个 跳跃序列 是一个斜率序列 s_0、s_1、……、s_n，沿着镶嵌圆盘的边界逆时针排列，并且对于每个 s_{i-1} 到 s_i，都存在一条连接弧相连，其中 $i = 1$，2、……、n。如 *[H]*, 中的引理 *4.12* 所述，这样的序列称为从 s_0 到 s_n的 跳跃序列。

设 $-\infty = -\frac{p_0}{q_0} < -\frac{p_1}{q_1} < \cdots < -\frac{p_n}{q_n} = -\frac{p}{q}$ 是一个跳跃序列，使得对于每个 $i = 0$，1、……、$n-1$，整向量 $(-q_i, p_i)$ 和 $(-q_{i+1}, p_{i+1})$ 构成 $\mathbb{Z}^2$ 的一个整基。此外，对于每个 $i = 0$，1、……、n，假设 q_i 和 p_i 是互素非负整数。

回顾 [H], 的连分数所 $-\frac{p}{q}$ 诱导出的从$-\frac{p}{q}$到 -1的最短跳跃序列。为了找到从 $-\infty$ 到 $-\frac{p}{q}$的跳跃序列，只需找到一个 Φ 镶嵌圆盘的同构，

将边界弧 $[-\infty,-1]$ 映射到 $[-\infty,-1]$ 并反转定向。由于我们可以从 $\Phi(-\frac{p}{q})$ 的连分数中诱导出该跳跃序列。幸运的是，这样的 Φ 存在。

考虑线性映射 $\mathcal{A}: x\in\mathbb{R}^{2\times 1}\mapsto \bar{A}x$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$。将镶嵌圆盘的边界视为 $\mathbb{R}P^1$，$\mathcal{A}$ 给出了镶嵌圆盘的一个同构，记为 $\tilde{\mathcal{A}}$。读者可以验证

$$\begin{cases}\tilde{\mathcal{A}}(-1)=\infty,\\ \tilde{\mathcal{A}}(\infty)=-1,\\ \tilde{\mathcal{A}}([-\infty,-1])=[-\infty,-1],\\ \tilde{\mathcal{A}}(-\frac{p}{q})=-\frac{p}{p-q}.\end{cases}$$

特别地，第一个等式意味着，$\mathcal{A}$ 将斜率为 -1 的直线映射为斜率为 ∞ 的直线。读者也可以~~˜~~验证，$\mathcal{A}$ 的逆映射恰好就是它本身。因此，$\mathcal{A}$ 的逆映射也就是它本身。

假设 $-\frac{p}{p-q}$ ~~—~~有如下连分数展开：

$$-\frac{p}{p-q}=r_1-\cfrac{1}{r_2-\cfrac{1}{r_3-\dots\cfrac{1}{r_m}}}=:\mathbf{cf}(r_1,r_2,\dots,r_m)\tag{2}$$

其中所有 $r_i\in\mathbb{Z}_{\leq -2}$。那么，从 $-\frac{p}{p-q}$ 到 -1 的最短跳跃序~~列~~可以通过将连分数的最后一项~~˜~~减小来得到。将此序列经 $\mathcal{A}$ 映射后，我们得到从 $-\infty$ 到 $-\frac{p}{q}$ 的最短跳跃序列。

例 6.6。设 $(p,q)=(8,5)$，则 $\tilde{\mathcal{A}}(-\frac{8}{5})=-\frac{8}{8-5}=-\frac{8}{3}=-3-\frac{1}{-3}$。从 $-\frac{8}{3}$ 到 -1 的最短跳跃序列为 $-3-\frac{1}{-3}$，$-3-\frac{1}{-2}$，$-3-\frac{1}{-1}$，-1，即 $-\frac{8}{3}<-\frac{5}{2}<-2<-1$。将此序列经 $\tilde{\mathcal{A}}$ 映射后，我们得到 $-\frac{8}{8-3}>-\frac{5}{5-2}>-\frac{2}{2-1}>-\frac{1}{1-1}$。我们有 $-\infty<-2<-\frac{5}{3}<-\frac{8}{5}$ 是从 $-\infty$ 到 $-\frac{8}{5}$ 的最短跳跃序列。

设 $-\infty=-\frac{p_0}{q_0}<-\frac{p_1}{q_1}<\dots<-\frac{p_n}{q_n}=-\frac{p}{q}$ 是上述从 $-\infty$ 到 $-\frac{p}{q}$ 的最短跳跃序列。接下来只需检验，对于每个 $i=1,\ -\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}\in(-\frac{p}{q},0)$ 都成立，其中 $i=1,2,\dots,n$。注意，连分数展开有相应的矩阵表示，其对应的整向量如下所示：

$$\tilde{\mathcal{A}}(-\frac{p}{q})=-\frac{p}{p-q}=\mathbf{cf}(r_1,r_2,\dots,r_m)\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & r_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & r_2\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & r_{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ r_m\end{pmatrix}.$$

这个等式意味着，该整向量的斜率为 $\mathbf{cf}(r_1,\ r_2,\dots,\ r_m)$。因此，

$$\tilde{\mathcal{A}}(-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}})=-\frac{p_i-p_{i-1}}{(p_i-p_{i-1})-(q_i-q_{i-1})}=-\frac{p_i-p_{i-1}}{(p_i-q_i)-(p_{i-1}-q_{i-1})}$$

所对应的整向量形式如下：

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\text{ or }\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & r_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & r_2\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & r_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},k=1,2,\dots,m-1.$$

因此，$\tilde{\mathcal{A}}(-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}})$ 的取值范围为

$$-\infty,\mathbf{cf}(r_1),\mathbf{cf}(r_1,r_2),\dots,\mathbf{cf}(r_1,r_2,\dots,r_{m-1}).$$

读者应注意，若对某个 i 有 $r_i=-2$，则 $\tilde{\mathcal{A}}(-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}})$ 不会取到上述范围内的每个值。此外，由 m 的归纳法可容易验证

$$-\infty<\mathbf{cf}(r_1)<\mathbf{cf}(r_1,r_2)<\dots<\mathbf{cf}(r_1,r_2,\dots,r_{m-1})<\mathbf{cf}(r_1,r_2,\dots,r_m).$$

因此，$-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}$ 的取值范围为

$$-1=\tilde{\mathcal{A}}(-\infty),\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{cf}(r_1)),\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{cf}(r_1,r_2)),\dots,\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{cf}(r_1,r_2,\dots,r_{m-1}))$$

并且有：

$$-1=\tilde{\mathcal{A}}(-\infty)>\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{cf}(r_1))>\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{cf}(r_1,r_2))>\dots>\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{cf}(r_1,r_2,\dots,r_{m-1}))>\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{cf}(r_1,r_2,\dots,r_m))=-\frac{p}{q}$$

也就是说，我们已经证明，对于每个 $i=1,2,\ldots,n$，$-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}\in(-\frac{p}{q},-1]$ 均成立。

更准确地说，对于每个 $i=1,2,\ldots,n$，都有 $-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}\in[-\frac{p'}{q'},-1]$。为方便起见，将斜率 $-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}$（$i=1,2,\ldots,n$）称为跳跃序列 $-\infty=-\frac{p_0}{q_0}<-\frac{p_1}{q_1}<\cdots<-\frac{p_n}{q_n}=-\frac{p}{q}$ 的 delta 斜率。读者可以验证，$0,-\infty=-\frac{p_0}{q_0},-\frac{p_1}{q_1},\ldots,-\frac{p_n}{q_n}\equiv-\frac{p}{q}$ 是从 0 到 $-\frac{p}{q}$ 的最短跳跃序列。这意味着该序列的每一步都是沿逆时针方向，并且在镶嵌圆盘中距离最远。此外，-1 与 $-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}$，$i=1,2,\ldots,n$ 是此跳跃序列的 delta 斜率。通过在新坐标（μ_2'，λ_2'）中考察这些 delta 斜率的方向，这些斜率仍然位于（$-\frac{p}{p-p'}$，$-1]$）中，因为我们可以在 $L(p,p-p')$ 中进行相同的分析，而 $GL_2(\mathbb{Z})$ 的诱导映射保持跳跃序列的 delta 斜率不变。因此，将这些方向映回坐标（μ_1，λ_1）后，对于 $i=1,2,\ldots,n$，我们有 $-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}\in[-\frac{p'}{q'},-1]$。

根据上述讨论，我们有：

定理 6.7. 设 $-\infty=-\frac{p_0}{q_0}<-\frac{p_1}{q_1}<\cdots<-\frac{p_n}{q_n}=-\frac{p}{q}$ 是最短跳跃序列，使得对每个 $i=0,1,\ldots,n$，q_i 和 p_i 都是互素非负整数。设 $\frac{b}{a}\in(-\infty,-\frac{p}{q})$，其中 $-a$ 和 b 是固定的互素非负整数。若对某个 $i=1,2,\ldots,n$，有 $\frac{b}{a}\in(-\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}},-\frac{p_i}{q_i})$，则

$$\overline{\mathbf{tw}}(K_{(a,b)},\mathbf{Fr}\,T)=-|\det\begin{pmatrix}a & -(q_i-q_{i-1})\\ b & p_i-p_{i-1}\end{pmatrix}|$$

当 $\mathbf{tw}(K_{(a,b)},\mathbf{Fr}\,T)$ 达到最大值时，$s(T)$ 唯一可能的取值为 $-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}$。若对某个 $i=1,2,\ldots,n-1$，有 $\frac{b}{a}=-\frac{p_i}{q_i}$，则当 $\mathbf{tw}(K_{(a,b)},\mathbf{Fr}\,T)$ 达到最大值时，$\mathbf{tw}(K_{(a,b)},\mathbf{Fr}\,T)=-1$，$-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}$ 和 $-\frac{p_{i+1}-p_i}{q_{i+1}-q_i}$ 都是 $s(T)$ 可能的取值。

注 *6.8.* 如果对于某个 $i=1,2,\ldots,n-1$，且 $tw(K_{(a,b)},Fr\,T)$ 达到其最大值 $tw(K_{(a,b)},Fr\,T)=-1$，那么 $-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}$ 和 $-\frac{p_{i+1}-p_i}{q_{i+1}-q_i}$ 都是 $s(T)$ 的可能取值，但未必是 $s(T)$ 的全部可能取值。见下文引理 *6.10* 的证明。

与之前一样，此情形下的主定理可由以下两个引理轻易得出。

引理 6.9. 假设 $-a$、b 是互素正整数，且 $\frac{b}{a}\in(-\infty,-\frac{p}{q})$。设 K' 是一个勒让德 (a,b) 环面纽结，其 $tb\mathbb{Q}$ 数未达到 $(L(p,q)\ \xi_{ut})$ 中的最大值。这里，ξ_{ut} 由具有标准叶状边界的特征加厚环面的相对欧拉类 $P.D.((-q',p')-(-1,1))$ 确定。因此，K' 是某个勒让德 (a,b) 环面纽结的稳定化，故可视为某个 $tb\mathbb{Q}$ 数达到最大值的结的若干次稳定化。

证明。 证明与上述情形完全类似。唯一的区别在于 K 和 K 相对于 T 框架的扭转数。

□

引理 *6.10*。设 $-a$、b 是互素正整数，且 $\frac{b}{a}\in(-\infty,-\frac{p}{q})$。令 K 和 K' 为两个具有 (a,b) 环面纽结类型的勒让德纽结，其最大 $tb\mathbb{Q}$ 数位于 $(L(p,q)\ \xi_{ut})$ 中。这里，ξ_{ut} 由具有标准叶状边界的特征加厚环面的相对欧拉类 $P.D.((-q',p')-(-1,1))$ 决定。于是，存在一个接触同胚 ϕ，使得 $\phi(K)=K'$。作为推论，勒让德 (a,b) 环面纽结的山脉图只有一个顶点。具有最大 $tb\mathbb{Q}$ 数的勒让德 (a,b) 环面纽结的旋转数由公式 *1* 决定，相应数据可见第 *3.1* 节。

证明。 令 $-\infty=-\frac{p_0}{q_0}<-\frac{p_1}{q_1}<\cdots<-\frac{p_n}{q_n}=-\frac{p}{q}$ 为最短跳跃序列。对于每个 $i=0,1,\ldots,n$，令 q_i 和 p_i 为互素非负整数。

若对于某个 $i=1,2,\ldots,n$，有 $\frac{b}{a}\in(-\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}},-\frac{p_i}{q_i})$，那么经过小扰动后，我们可以假设 $K(K')$ 是凸海加德环面 $T(T')$ 上的一条勒让德叶状曲线，该环面上有两条斜率为 $s(T)=-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}$ 的分界曲线。注意到 $s(T)=s(T')\in[-\frac{p'}{q'},-1]$，因此 T 位于一个特征加厚环面中。因此，像之前那样逐层构造接触同胚层，即可得出结论。

因此的情形是连分数 $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$，对于某个 $i=1,2,\ldots,n$，以及从 $-\frac{p_i}{q_i}$ 到 $-\frac{p}{p-q}$ 的跳跃序列，该序列中连分数的最后一位加上 $+1$ 所诱导。若 $r_k\neq-2$，则连分数 $(r_1,\ldots,r_{k-1},r_k+1)$、连分数 $(r_1,\ldots,r_{k-1},r_k+2)$ 会出现在这个跳跃序列中，其增量斜率为连分数 $(r_1,\ldots,r_{k-1})$。这三个斜率中任意两个对应的整向量构成 $\mathbb{Z}^2$ 的一个整基。换言之，在镶嵌圆盘中，这三个斜率中任意两个之间都有一条连接弧。若 $r_k\neq-2$，$r_{k+1}=r_{k+2}=\cdots=r_l=-2$ 和 $r_{l+1}\neq-2$，其中 $l\geq k+1$，则连分数 $(r_1,\ldots,r_l,-2)$、连分数 $(r_1,\ldots,r_l,-1)$ = 连分数 $(r_1,\ldots,r_k,-2,\ldots,-2,-1)$ = $\cdots$ = 连分数 $(r_1,\ldots,r_k,-1)$ = 连分数 $(r_1,\ldots,r_k+1)$、连分数 $(r_1,\ldots,r_k+2)$

会出现在从 $-\frac{p}{p-q}$ 到 -1 的跳跃序列中，其增量斜率分别为**连分数**$(r_1,\ldots,r_l)$ 和 **连分数**$(r_1,\ldots,r_{k-1})$。将这些斜率写成对应整向量的形式后，读者可以在镶嵌圆盘中验证以下事实：

- 存在一条连接弧，将$\mathbf{cf}(r_1,\ldots,r_l,-2)$连接到$\mathbf{cf}(r_1,\ldots,r_l)$。
- 存在一条连接弧，将$\mathbf{cf}(r_1,\ldots,r_k+2)$连接到$\mathbf{cf}(r_1,\ldots,r_{k-1})$。
- 存在一条连接弧，将 $cf(r_1,\ldots,r_l,-1) = cf(r_1,\ldots,r_k,-2,\ldots,-2,-1) = \cdots = cf(r_1,\ldots,r_k,-1) = cf(r_1,\ldots,r_k+1)$ 分别连接到 $cf(r_1,\ldots,r_{k-1})$, $cf(r_1,\ldots,r_k)$, $\ldots$, $cf(r_1,\ldots,r_l)$。
- $\mathbf{cf}(r_1,\ldots,r_{k-1}),\mathbf{cf}(r_1,\ldots,r_k),\ldots,\mathbf{cf}(r_1,\ldots,r_l)$构成一个跳跃序列。

在其他情况下，$-\frac{p_i}{q_i}$ 处的镶嵌圆盘也如图所示。唯一的区别是这些点D_i的数量，但至少有一个 D_i。其正确性的验证留给读者。将上面的斜率通过 $\mathcal{A}$映射后，得到下图：

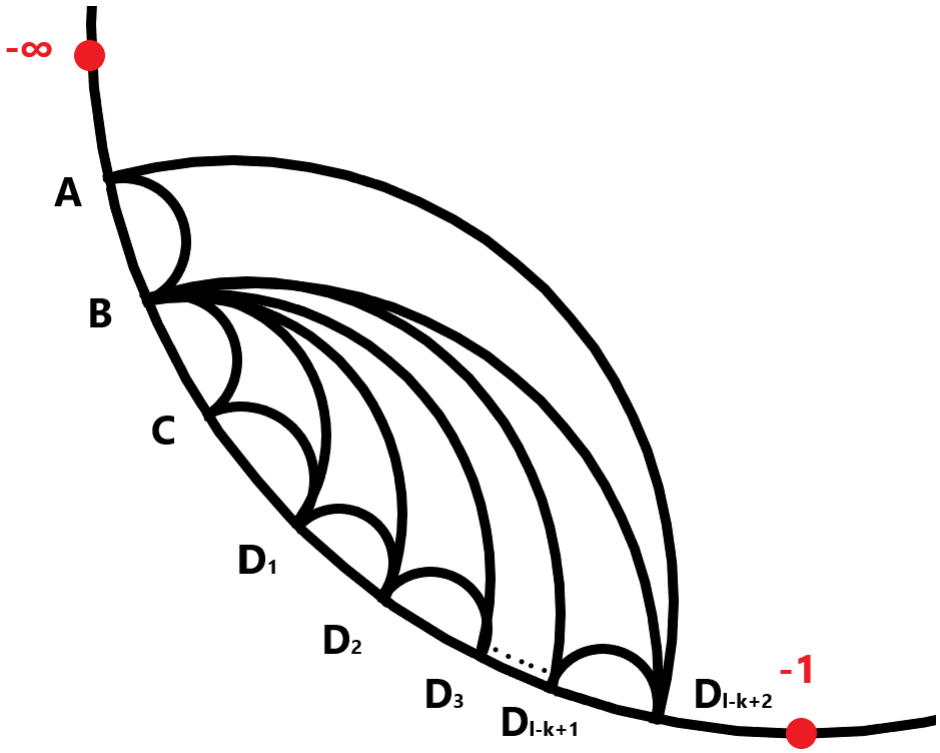


图 5：镶嵌圆盘中的斜率。

其中：

- 点 $A=-\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}=\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{cf}(r_1,\ldots,r_k+2))$,
- 点 $B=-\frac{p_i}{q_i}=\mathcal{A}(\mathbf{cf}(r_1,\ldots,r_k+1))$,
- 点 $C=-\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}=\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{cf}(r_1,\ldots,r_l,-2))$,
- 点 $D_1=-\frac{p_{i+1}-p_i}{q_{i+1}-q_i}$,
- 点 $D_{l-k+2}=-\frac{p_i-p_{i-1}}{q_i-q_{i-1}}$。

- 点 D_{l-k+2}、D_{l-k+1}、……、D_1实际上是 $\mathcal{A}$（**参见**（r_1、……、r_{k-1}））$\mathcal{A}$（**参见**（r_1、……、r_k））……、$\mathcal{A}$（**参见**（r_1、……、r_l））。

首先，每当 K 达到其最大扭转数（等价地说，$\mathrm{tb}_{\mathbb{Q}}$ 数）$\mathrm{tw}(K_{(a,b)}, \mathrm{Fr}\ T) = -1$时， $s(T)$ 的取值恰好就是这些 D_i，其中 $i = 1$、2、……、$l-k+2$。反证法假设存在另一个斜率为 $s(T)$ 的凸海加德环面 T，使得 K 位于其上，且 $\mathrm{tw}(K, \mathrm{Fr}\ T) = -1$。那么，$\frown$在镶嵌圆盘上通过点 D 表示 $s(T) \in (-\frac{p}{q}, 0)$，并且存在一条连接弧 BD，从点 B 连接到点 D。$\frown$ $\frown$ $\frown$观察镶嵌圆盘可知，这条弧 BD 不可能与连接弧 CD_1、 $D_iD_{i+1}\frown$（其中 $i = 1$、2、……、$l-k+1$）的并集在镶嵌圆盘内部不相交， AD_{l-k+2} 位于镶嵌圆盘内部。由于斜率对应的连接弧在镶嵌圆盘内部彼此不相交，因而产生矛盾。

现在假设 K 是凸海加德环面 T 上的一条勒让德母线曲线，该环面有两条斜率为 $s(T) = D_i$ 的分界曲线。相应地，假设 K' 是凸海加德环面 T' 上的一条勒让德母线曲线，该环面有两条斜率为 $s(T') = D_{i+1}$（$i = 1$，2，……，$l-k+1$）的分界曲线，且与 T 不相交。注意到存在一条从 D_i 到 D_{i+1} 的连接弧。因此，由 T 和 T' 围成的加厚环面 M 实际上是一个基本切片。设 Σ 是适当地嵌入该切片中的一个凸环带，其边界为 $K \cup K'$。我们有

$$\Gamma_\Sigma \cap K = -2\,\mathbf{tw}(K, \mathbf{Fr}\,\Sigma) = -2\,\mathbf{tw}(K, \mathbf{Fr}\,T) = 2$$

and

$$\Gamma_\Sigma \cap K' = -2\,\mathbf{tw}(K', \mathbf{Fr}\,\Sigma) = -2\,\mathbf{tw}(K', \mathbf{Fr}\,T') = 2.$$

因此， Σ 的分界集 Γ_Σ 恰好由两条连接 K 和 K' 的弧组成。见下图。经过保持边界不变的扰动后，可以使 Σ 的特征叶状结构如图所示呈线性，其方向由箭头表示。

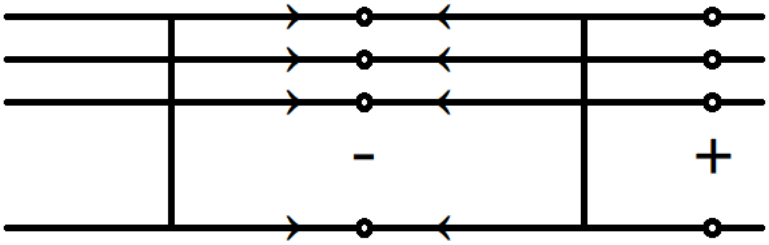


图 6：顶部的水平边界线为 K，底部为 K'。

从 K 到 K' 的 Legendrian 同痕由特征叶状结构给出。因此，我们总可以假设 $s(T) = D_1 \in [-\frac{p'}{q'}, -1]$（$K$），而剩下的工作仍是为两个具有最大 $\mathbf{tb}_{\mathbb{Q}}$ 数的 Legendrian（a， b）结逐层构造接触同胚层。 □

例 *6.11*。设 $(p, q) = (8, 5)$，且 $(a, b) = (-3, 7)$。由上一个例子可知，从 $-\infty$ 到 $-\frac{p}{q} = -\frac{8}{5}$ 的最短跳跃序列为 $-\infty < -2 < -\frac{5}{3} < -\frac{8}{5}$。其增量斜率序列为 $-1 > -\frac{3}{2}$。注意，$\frac{b}{a} = -\frac{7}{3} \in (-\infty, -2)$，因此 $tw(K_{(-3,7)}, Fr\ T) = -|det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}| = -4$。将此值代回 $tb_{\mathbb{Q}}$ 数的公式，得到 $tb_{\mathbb{Q}}(K_{(-3,7)}) = -4 + (-3)7 + \frac{7^2 5}{8} = \frac{45}{8}$。设 K 是具有最大 $tb_{\mathbb{Q}}$ 数的 *Legendrian* $(-3, 7)$ 结。那么，其旋转数由公式 *1* 给出，其中 T 是 K 所在的凸海加德环面。我们有 $s(T) = -1$，代入第 *3.1* 节中的数据，得到 $rot_{\mathbb{Q}}(K) = -\frac{7}{4}$。

注记 6.12。 此情形下的山脉图只有一个顶点。这一事实与 *Onaran* 在 *[O]* 第*4*节中的结果相符。

7 最新进展

多亏了 Min 的工作，接触映射类群（$L(p, q)$ ξ_{ut}）由以下定理刻画。它回答了 [O] 的问题1。

定理 7.1 ([M]的定理 1.1）。令 $\pi_0(Cont(L(p,q)\ \xi_{ut}))$ 为保定向接触同胚的接触同伦类群，则

$$\pi_0(Cont(L(p,q),\xi_{ut})) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, p \neq -2\ and\ q \equiv -1 (mod\ p) \\ \mathbb{Z}_2, q \not\equiv \pm 1 (mod\ p)\ and\ q^2 \equiv 1 (mod\ p) \\ 1, otherwise. \end{cases}$$

对于前两种情况，接触映射类群由对合 σ生成。在这里，对合 σ 由 σ： $S^3 \to S^3 \subset \mathbb{C}^2$ 将(z_1, z_2) 映射到 (z_2, z_1)诱导而来。

Min 指出:

推论 7.2 （M]的推论 1.4）。 对于每个普遍紧致透镜空间 （L（p,q） ξ_{ut}），包括 （L（0,1） ξ_{st}），一旦保定向接触同胚 f 光滑同伦于恒等映射， f 则接触同伦于恒等映射。

作为 M], 的推论 1.4 的推论，我们有主定理的增强版本:

定理 7.3 （增强主定理）。 对于每个普遍紧致透镜空间 （L（p,q） ξ_{ut}），包括 （L（0,1） ξ_{st}），两个 *Legendrian* 环面结是勒让德同伦的，当且仅当它们的经典不变量相同。

上述定理中，$L(0,1)$ ξ_{st}中的勒让德环面结已在 [CDL]中分类。与$L(p,q)$ ξ_{ut}不同，$L(0,1)$ ξ_{st}中勒让德环面结的经典不变量是定向结型、扭转数和旋转数。这里，勒让德环面结$\mathbf{tw}(K, \mathbf{Fr}\ T)$的扭转数是相对于海加德环面 K而言的；旋转数是 T的切向量的旋转数，由 K 的平凡化 ξ_{st}测得。

8 致谢

- 感谢我的导师 Fan Ding。在他的指导下，我读完了 Honda 的论文[H] ，这篇论文对我的工作起着非常重要的作用。此外，若不是他的建议，我甚至不会尝试研究透镜空间中的环面纽结。衷心祝愿他身体健康。

- 感谢 John. B. Etnyre 和 Hyunki Min 提供的宝贵建议。他们通读了我的手写论文。我非常感激他们愿意抽出时间审阅我的工作。这对一位年轻研究者而言意义重大。

- 感谢 XiaoLong Hu 长期提供经济支持。

参考文献

[C] Chekanov Y. 勒让德链环的微分代数。《数学发明》2002；150(3)：441-483。

[CDL] Chen F, Ding F, Li Y. $S^1 \times S^2$中的勒让德环面结。《结理论及其分支》2015；24(12)：1550064，14。

[DET] Dalton J, Etnyre JB, Traynor L. Legendrian 环面链环与缆链环。arXiv:2107.12323v1。

[DG1] Ding F, Geiges H. 由经典不变量分类的勒让德结与链环。《当代数学通讯》2007；9(2)：135–162。

[DG2] Ding F、Geiges H。接触拓扑中的微分同胚同伦群。《组合数学》2010；146(4)：1096–1112。

[EF] Eliashberg Y、Fraser M。拓扑平凡的 Legendrian 结。《辛几何杂志》2009；7：77-127。

[EH] Etnyre JB、Honda K。结与接触几何 I：环面纽结与八字结。《辛几何杂志》2001；1：63-120。

[H] Honda K。紧接触结构的分类 I。《几何与拓扑》2000；4：309-368。[M] Min H。透镜空间的接触映射类群。arXiv:2207.03590v1。[O] Onaran S。透镜空间中的 Legendrian 环面结。《土耳其数学杂志》2018；42：936-948。