arXiv:2302.04204v2 [math.AG] 3 Dec 2023

权重 11 曲线模空间的紧支撑上同调

SAM PAYNE 和 THOMAS WILLWACHER

Abstract. 我们使用图复形技术研究曲线模空间 $\mathcal{M}_{g,\ n}$的紧支撑上同调的权重 11 部分，尤其关注 $n\ =\ 0$的情形。作为应用，我们证明了 $\mathcal{M}_g$上同调新的非消失结果，以及在广泛次数范围内 g的指数增长。

1. Introduction

曲线模空间的紧支撑上同调的权重0和2分次部分 $\mathcal{M}_{g,\ n}$ 可自然地与组合定义的图复形 [7, 8, 16] 的上同调对应，这些图复形类似于代数拓扑中出现的图复形。与此同时，权重 1、3、5、7 和 9 的分次部分全部消失，因为 Deligne-Mumford 紧化$\mathcal{M}_{g,\ n}$ 的有理上同调群在这些次数上 [4]消失。本文致力于研究$\mathcal{M}_{g,\ n}$上同调中最低的非平凡奇权重分次部分，即权重 11 部分。我们的主要技术结果（命题 1.7）将 $\mathrm{gr}_{11}H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,\ n})$ 与另一个组合图复形的上同调对应起来；该图复形类似于嵌入演算[11]中出现的图复形。这在精神上类似于上述权重0和2的结果，但每个权重中的具体细节都有显著不同。

作为这一构造的一个应用，我们通过证明第 11 个权重分次部分非零，给出了 $\mathcal{M}_g$ 上同调的新非消失结果。这些结果通过将权 11 上同调与权重 0 上同调联系起来加以证明。令 $\Delta:=H^{11}(\mathcal{M}_{1,11})$，我们将其视为一个带有霍奇结构或权重为 11 的 ℓ-进伽罗瓦表示的二维 $\mathbb{Q}$-向量空间。由 [5] 可知，$\mathrm{gr}_{11}H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n})$ 同构于 Δ 的若干份直和。

定理 1.1。 令 $V^{r,k}_g$ 表示 r 重对称积中次数为 k 且亏格为 g 的部分 t

$$\mathrm{Sym}^r\left(\bigoplus_{h\geq 3} W_0H_c^\bullet(\mathcal{M}_h)\right).$$

那么存在一个单射映射

$$\left(V_{g-1}^{10,k-21}\oplus V_{g-2}^{10,k-22}\oplus V_{g-3}^{9,k-22}\oplus V_{g-5}^{6,k-22}\oplus V_{g-7}^{3,k-22}\right)\otimes\Delta\to \mathrm{gr}_{11}H_c^k(\mathcal{M}_g). \tag{1}$$

此前已知，$\dim_{\mathbb{Q}} W_0H_c^{2g+k}(\mathcal{M}_g)$ 随 g 至少呈指数增长（当$k\in\{0,3\}$ 时），并且在 $k=7$ 和 $g=10$ [7]时非零。结合此前已知的权重0和2下的非消失结果，我们得到以下推论。

推论 1.2. $H_c^{2g+k}(\mathcal{M}_g)$ 的维数随 g 至少呈指数增长，对每个固定的$0\leq k\leq 53$ 都如此，$k\in\{1,4,7,20,51\}$ 除外。

这个推论仅利用了目前关于$W_0H_c^\bullet(\mathcal{M}_g)$的非消失性和增长的已知结果；我们预期权零上同调远比目前所

SP 得到了美国国家科学基金会资助的 DMS–2001502 和 DMS–2053261 项目的支持。TW 得到了由瑞士国家科学基金会资助的 NCCR SwissMAP 的支持。

知的要大。根据 [16]和定理 1.1，我们对权零的理解每有进展，都会分别带来权 2 和 11 方面的相应进展。即使只发现一个新的权零上同调群的非消失性，也可能显著扩展 k 的取值范围，在该范围内已知 $H_c^{2g+k}(\mathcal{M}_g)$至少以 g指数增长。

猜想 1.3。 $H_c^{2g+k}(\mathcal{M}_g)$ 的维数对于除有限多个非负整数 k 之外的所有 g，至少呈指数增长。

对于 $k=4$ 和 20，我们注意到 $H_c^{10}(\mathcal{M}_3)$ 和 $H_c^{34}(\mathcal{M}_7)$ 均非零。它们各自与一个相应的 H^2 通过庞加莱对偶对应，而该 H^2 包含一个非零的上同调类 κ。对于 $k=7$，如上所述， $H_c^{27}(\mathcal{M}_{10})$ 在权重 0 中非零。然而，目前尚无 g 能使 $H_c^{2g+1}(\mathcal{M}_g)$ 已知为非零。

问题 1.4。 $H_c^{2g+1}(\mathcal{M}_g)$ 是否对所有 g 都为零?

注 1.5。 Kontsevich 图复形中环阶为 g 的部分的上同调群 $H^{2g+1}(\mathrm{GC}_0^{g\text{-loop}})$ 嵌入到 $H_c^{2g+1}(\mathcal{M}_g)$ [7], ，因此，对问题 1.4 的肯定回答将意味着该上同调群对所有 g 都消失。这等价于 $H^1(\mathrm{GC}_2)$ 的消失，即 GC_0 的次数平移版本的第一上同调群消失。这一上同调群的消失是同调代数和代数拓扑中的一个著名开放问题；它之所以受到广泛关注，是因为 $H^1(\mathrm{GC}_2)$ 是一系列问题的障碍空间，包括 Drinfeld 结合子的存在性 [10], 、变形量子化中形式性映射的存在性 [15], ，以及小圆盘歌剧的有理内在形式性 [12]。

在讨论我们研究权 11 上同调时出现的图复形之前，我们先解释推论 1.2 如何由定理 1.1 得出。

推论 *1.2* 的证明。 回想一下，当 $k\in\{0,3\}$ 时，$\dim_{\mathbb{Q}} W_0H_c^{2g+k}(\mathcal{M}_g)$ 至少随 g 指数增长，而当 $k=7$ 和 $g=10$ [7, 16]时，其值等于 1。由此可根据定理 1.1 得出，对于固定的 k 和 $r\geq 2$，只要 k 属于集合，$\dim_{\mathbb{Q}} V^r{}_{,g}{}^{2g+k}$ 就会随 g 至少指数增长

$$U_r=\{0,3,6,\dots,3r\}\cup\{7,10,13,\dots,4+3r\}.$$

注意，根据下文 §2.1 中回顾的分次向量空间的符号约定，当 $\deg(v)$ 为奇数时，$v\otimes v$ 在 $\mathrm{Sym}^2 V$ 中的像为零。特别地，由于 $W_0H_c^{27}(\mathcal{M}_{10})$ 是一维且次数为奇数，其对称幂均为零。

考虑到次数移位，单射 (1) 至少带来集合中 k 的 $\dim_{\mathbb{Q}} H_c^{2g+k}(\mathcal{M}_g)$ 的指数增长

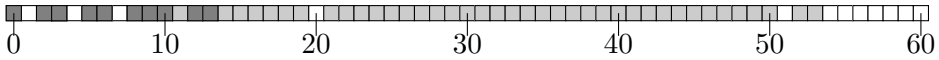
$$(19+U_{10})\cup(18+U_{10})\cup(16+U_9)\cup(12+U_6)\cup(8+U_3)\,.$$

类似地，由 [16] 我们知道，权重 2 上同调对集合中 k 的 $\dim_{\mathbb{Q}} H_c^{2g+k}(\mathcal{M}_g)$ 至少贡献指数增长

$$(3+U_2)\cup(2+U_2),$$

结果得证。 □

下图展示了目前已知 $\dim_{\mathbb{Q}} H_c^{2g+k}(\mathcal{M}_g)$ 至少随 k 指数增长时 k 的取值；深灰色方框表示此前已知的情形（来自权重 0 和 2），浅灰色方框表示权重 11 带来的新结果。

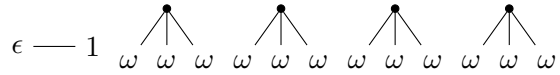


注 1.6。 推论 1.2 只是对定理 1.1 以及此前已知的权重0和2下的非消失结果所能推出结论的粗略总结。还可以得到 $H_c^{2g+k}(\mathcal{M}_g)$ 非零时亏格的具体界，以及这些群维数的下界。

上述结果是通过将 $\mathcal{M}_{g,\ n}$ 的权重11紧支撑上同调与 $\Delta = H^{11}(\mathcal{M}_{1,\ 11})$ 的张量积，以及我们现在要描述的一个图复形的上同调相对应而证明的。图复形 $B_{g,\ n}$ 是一个微分分次向量空间，由亏格为 g 的图生成；这些图有 n 条腿，编号为 1、.....、n，其中至少 11 条腿标记为 ω，另有任意数量的腿标记为 ϵ。每个连通分支都至少包含一条标记为 ϵ 或 ω 的腿。生成图的亏格等于将所有标记为 ϵ 和 ω 的腿粘合后所得连通图的环阶加一。上同调次数为：

$$22 - \#\omega + \#\text{edges} - n.$$

例如，下图是 $B_{9,1}$ 的一个次数为 22 的生成元。



在 $B_{g,n}$ 上的微分 δ 是三个部分之和，

$$\delta = \delta_\omega + \delta_s^\bullet + \delta_s^\circ.$$

部分 δ_ω 将一个 ω 标签变为 ϵ 标签，部分 $\delta_s^\bullet$ 将顶点拆分，而部分 δ_s° 将一部分 ϵ 腿与 0 条或 1 条 ω 腿连接起来，并分别接上一条标记为 ϵ 或 ω 的新腿。详见 §3.3。

命题 1.7。 $\mathcal{M}_{g,n}$ 的权重 *11* 紧支撑上同调同构于 Δ 与 B_g 的上同调的张量积：n

$$\mathrm{gr}_{11} H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n}) \cong H(B_{g,n}, \delta) \otimes \Delta.$$

当 $E(g,n) := 3g + 2n - 25$ 较小时，图复形 $B_{g,n}$ 足够简单，其上同调因而 $\mathrm{gr}_{11} H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n})$ 可以手工计算。我们在 §4 中对$E(g,n) \leq 3$进行了这一计算。我们证明，当 $E(g,n) < 0$时，$\mathrm{gr}_{11} H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,n})$ 消失。特别地，对于 $g \leq 8$，$\mathrm{gr}_{11} H_c^\bullet(\mathcal{M}_g) = 0$。在没有标记点的首个非平凡情形中，我们发现

$$\mathrm{gr}_{11} H_c^k(\mathcal{M}_9) \cong \begin{cases} \Delta & \text{for } k = 22, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们还发现了大量非平凡的图上同调类族，适用于 $n = 0$，并由此得到定理 1.1。这些类族构造于 §§5-6。

作为命题 1.7 的另一项应用，我们给出了一个生成函数公式，用于计算 $\mathrm{gr}_{11}(H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,\ n}))$ 的 $\mathbb{S}_n$-等变欧拉示性数；该公式类似于 [6] 和 [17]，分别证明的权重0和2情形下的公式。该公式以及一系列 g，n 的数值结果见 §7。对于 $g = 2$ 和 3 以及 $n \leq 14$，我们的结果与 Bergstr¨om 和 Faber 使用局部系统及弗罗贝尼乌斯迹 [3]独立获得的数据一致。对于$g = 3$，Bergstr¨om 和 Faber 的计算依赖于一份猜想性动机列表；根据 Chenevier 和 Lannes 的工作 [9]，这份列表涉及可能出现在曲线模空间中的权重至多22的动机。我们的结果无条件地证实了这些计算中权重 11 的部分。

2. Preliminaries

2.1. 分次向量空间、对称积和微分。 令 $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V^n$ 表示域 $\mathbb{Q}$ 上的分次向量空间，其中 V^n 为次数 n 的子空间。对于齐次元素 $v \in V^n$，我们记其次数为 $|v| = n$。

我们采用通常的 Koszul 符号约定。换言之，在分次向量空间 V 和 W 的张量积中交换因子的首选同构

$$V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$$

在齐次元素 $v \in V$ 和 $w \in W$ 上的作用为

$$v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v.$$

T这一约定在张量幂上诱导出对称群 $\mathbb{S}_k$ 的作用 r

$$V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k}$$

一个分次向量空间 V。我们定义

$$\mathrm{Sym}^k V := V^{\otimes k}/\mathbb{S}_k$$

为余不变量空间。对于 $v_1, \ldots, v_k \in V$，我们用 $v_1 \cdots v_k$ 表示 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ 在 $\mathrm{Sym}^k V$ 中的等价类。注意，根据 Koszul 符号约定，当 $k = 2$ 和 $v_1, v_2 \in V$ 是齐次元素时

$$v_1 v_2 = (-1)^{|v_1||v_2|} v_2 v_1.$$

特别地，如果 v 是奇数次数的齐次元素，那么 $v^2 = 0$ 在 $\mathrm{Sym}^2 V$ 中。

我们考虑的许多分次向量空间还配备了微分。对于这些分次向量空间，我们始终遵循上同调约定，即微分使上同调次数增加 1。

2.2. **Getzler-Kapranov 图复形**。曲线模空间的 Deligne-Mumford 紧化 $H^\bullet(\mathcal{M}_{g,\ n})$ 的上同调组装成一个模上余代数$H(\mathcal{M})$。模上余代数结构囊括了对称群作用以及边界拉回运算

$$\xi^* \colon H^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2}) \to H^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1}) \otimes H^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1})$$
$$\eta^* \colon H^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{g+1,n}) \to H^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}),$$

以及 这些拉回和群作用之间自然的相容关系。

按照 Getzler 和 Kapranov 的做法，可以为任意模上余代数定义其费曼变换 [13], 另见 [16, §2.4]。我们将模上余代数 $H(\mathcal{M})$ 的费曼变换定义为 Getzler-Kapranov 复形 GK

$$\mathsf{GK} := \mathcal{F}H(\overline{\mathcal{M}}),$$

并将 $\mathsf{GK}_{g,\ n}$ 中亏格为 g 、元数为 n的部分记作 $\mathsf{GK}_{g,\ n}$ ，如 [16, §2.5]所示。$\mathsf{GK}_{g,\ n}$ 的生成元是亏格为 g 、带有 n 条带编号外腿的稳定曲线的对偶图，每个顶点 v都装饰有一份 $H^{k_v}(\mathcal{M}_{g_v,\ n_v})$，其中 g_v和 n_v分别是顶点v的亏格和度数。亏格 g 等于图的环阶加上各数值 g_v之和。生成元的上同调次数等于结构边的数量（不计带编号的腿）加上装饰的次数$\sum_v k_v$之和；$\mathsf{GK}_{g,\ n}$ 上的微分 δ 由模上余代数运算 ξ^*, η^* 定义，并使上同调次数增加 1。

$\mathsf{GK}_{g,n}$ 还有一个按权重划分的分次。生成元的权重为 $\sum_v k_v$，即其装饰次数之和；微分保持权重不变。我们将 $\mathsf{GK}^k_{g,n}$ 记为由权重为 k 的图生成的子复形，因此 $(\mathsf{GK}_{g,n}, \delta)$ 可分解为直和

$$\mathsf{GK}_{g,n} \cong \bigoplus_k \mathsf{GK}^k_{g,n},$$

$\mathsf{GK}_{g,n}$ 中权重为 k 的部分的上同调，与开模空间紧支撑上同调中权重 k 的分次部分相对应

$$H^\bullet(\mathsf{GK}^k_{g,n}, \delta) \cong \mathrm{gr}_k H^\bullet_c(\mathcal{M}_{g,n}).$$

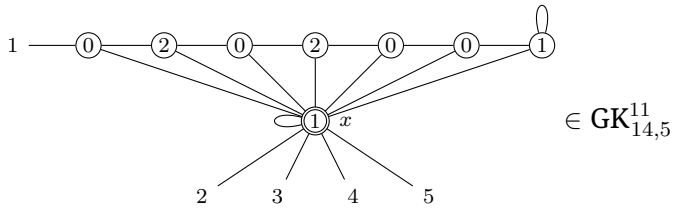
本文研究权重 11 部分 $\mathsf{GK}^{11}_{g,n}$，其上同调计算 $\mathrm{gr}_{11} H^\bullet_c(\mathcal{M}_{g,n})$。

2.3. **权重 11 的 Getzler-Kapranov 复形**。 复形 $\mathsf{GK}_{g,n}^{11}$ 的描述相对简单，因为对于所有奇数 $k \leq 9$， $H^k(\mathcal{M}_{g,n})$ 都为零，这是由 [4, 定理1.1] 得出的。因此，在 $\mathsf{GK}_{g,n}^{11}$ 的每个生成元中，都有一个顶点 v，我们称之为"特殊顶点"，其带有 $k_v = 11$；所有其他顶点都由 H^0 装饰。由于 $H^0(\mathcal{M}_{g_v,n_v}) = \mathbb{Q}$，这些后者的装饰本质上是平凡的，可以忽略不计。

特殊顶点上的装饰可能如下 [5]。设 $W_n := V_{(n-10)1^{10}}$ 是与杨图 $(n-10)1^{10}$，对应的不可约 $\mathbb{S}_n$-表示，并设$\Delta = H^{11}(\mathcal{M}_{1,11})$。那么

$$H^{11}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \cong \begin{cases} W_n \otimes \Delta & \text{for } g = 1 \text{ and } n \geq 11; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特别是，$\mathsf{GK}_{g,n}^{11}$ 的每个生成元中的特殊顶点 v 的亏格为 $g_v = 1$，度数为$n_v \geq 11$。下图描绘了一个典型生成元；特殊顶点以双圆圈标示，$x \in H^{11}(\mathcal{M}_{1,n})$ 是特殊顶点上的装饰。



$\in \mathsf{GK}_{14,5}^{11}$

每个顶点 v 的亏格 g_v 都标注在相应的节点内。注意，生成元可以有自环，即连接同一顶点的边。

3. A combinatorial graph complex for weight 11

本节将更精确地描述引言中讨论的组合图复形$B_{g,n}$并证明命题 1.7。证明由 $\mathsf{GK}_{g,n}^{11}$ 与 $B_{g,n} \otimes \Delta$之间的一串拟同构组成。这串拟同构的第一步是一个满射拟同构，它将 $\mathsf{GK}_{g,n}^{11}$ 映到一个商复形；该商复形的生成元除了特殊顶点处之外都没有圈图，并且其非特殊顶点的亏格全为 0。

定义 3.1。 令 $I_{g,n} \subset \mathsf{GK}_{g,n}^{11}$ 为由满足以下条件的图所张成的微分分次子空间：至少有一个非特殊顶点 v 带有自环或正亏格 $g_v \geq 1$。于是定义

$$\overline{\mathsf{GK}}_{g,n}^{11} = \mathsf{GK}_{g,n}^{11}/I_{g,n}.$$

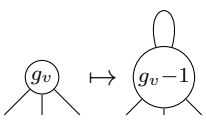
换句话说，在 $\mathsf{GK}_{g,n}^{11}$ 中，我们将所有在非特殊顶点处带有自环或正亏格的生成元都置为零。不过，特殊顶点的亏格始终为 1，并且也可以带有自环。

命题 3.2。商映射

$$\mathsf{GK}_{g,n}^{11} \to \overline{\mathsf{GK}}_{g,n}^{11}$$

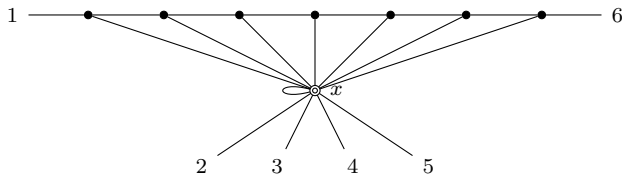
是微分分次向量空间之间的拟同构。

证明。 我们在两侧赋予按顶点数定义的下降滤过。在 $\mathsf{GK}_{g,n}^{11}$ 的伴随分次上的微分为零，而 $\overline{\mathsf{GK}}_{g,n}^{11}$ 上的微分由降低非特殊顶点亏格并添加圈图的部分给出：



该微分的上同调由这样的图给出：每个非特殊顶点的亏格均为 0，且没有自环。证明与 [16, §4]中的论证相似（且更简单）。□

在 $\mathrm{GK}^{11}_{g,n}$ 的生成元图示中，我们省略顶点的亏格。特殊顶点以双圆圈表示，其亏格为 1。其余所有顶点的亏格均为 0。例如，下图展示了 $\mathrm{GK}^{11}_{8,6}$ 的一个生成元。



总之，$\mathrm{GK}^{11}_{g,n}$ 的每个生成元都具有以下形式：

- 一个环阶为 $g-1$ 的连通图 Γ，带有一个特殊顶点 v 和 n 条带编号的腿，其中所有非特殊顶点的度数至少为 3。
- 特殊顶点的度数为 $n_v \geq 11$，并由元素 $x \in H^{11}(\mathcal{M}_{1,n_v})$ 装饰。（$\mathcal{M}_{1,n_v}$ 中的标记与特殊顶点处的半边默认视为相同。）
- 非特殊顶点处没有自环。
- 图配备了一个定向 o，该定向由结构边集合（即除带编号的腿以外的所有边）上的排序给出。

我们用 $o = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ 来表示这个定向，其中 e_1、.....、e_k 是Γ的结构边。我们对这些生成元施加两个关系。

- 首先，我们将同构图视为相同。也就是说，若 ϕ: $\Gamma \to \Gamma'$ 是一个同构，则规定

$$(\Gamma, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k, x) = (\Gamma', \phi(e_1) \wedge \cdots \wedge \phi(e_k), \phi(x)), \tag{2}$$

其中 $\phi(x)$ 按照同构 ϕ 对$\mathcal{M}_{1中的n_v}$ 穿孔重新标记。

- 其次，我们将排序视为相差一个符号。也就是说，对于一个置换 $\sigma \in \mathbb{S}_k$，规定

$$(\Gamma, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k, x) = \mathrm{sgn}(\sigma)(\Gamma, e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k)}, x)\,. \tag{3}$$

微分 通过分裂顶点作用。特殊顶点的顶点分裂使用映射

$$\xi^*\colon H^{11}(\overline{\mathcal{M}}_{1,r}) \to H^{11}(\overline{\mathcal{M}}_{1,r-s+1}) \otimes H^0(\overline{\mathcal{M}}_{0,s+1}).$$

回想一下，特殊顶点由 $W_{n_v} \otimes \Delta$ 装饰，而 $\Delta = H^{11}(\mathcal{M}_{1,\ 11})$ 是秩为 2 的 $\mathbb{Q}$-向量空间。这个向量空间没有典范基，但它具有典范的权重 11 霍奇结构。其复化 $\Delta \otimes \mathbb{C}$ 典范地分解为

$$\Delta \otimes \mathbb{C} \cong \Delta^{11,0} \oplus \Delta^{0,11},$$

其中 $\Delta^{0,\ 11}$ 是 $\Delta^{11,\ 0}$ 的复共轭，而 $\Delta^{11,\ 0}$ 由一个典范元素 ω 张成，该元素对应于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的权重 12 尖点形式。拉回映射 ξ 和 η 与复共轭相容。于是我们可以将 $\mathrm{GK}^{11}_{g,\ n}$ 分解为张量积

$$\overline{\mathrm{GK}}^{11}_{g,n} \cong \overline{\mathrm{GK}}^{11,\circ}_{g,n} \otimes \Delta$$

其中 $\overline{\mathrm{GK}}^{11,\ \circ}_{g,\ n}$ 是一个更简单、组合性更强的复形，其中特殊顶点由 W_{n_v} 装饰。为了明确写出 $\mathrm{GK}^{11,\ \circ}_{g,\ n}$ 上的微分，我们回顾 $H^{11}(\overline{\mathcal{M}_{g,\ n}})$ 的生成元、关系和边界拉回映射的描述，见 [5,§2]。

对称群 $\mathbb{S}_{11}$ 通过符号表示作用于 $H^{11,\ 0}(\mathcal{M}_{1,\ 11})$。对于 $n > 11$，$H^{11,\ 0}(\overline{\mathcal{M}}_{1,\ n})$，它由拉回生成元生成

$$\omega_A := \iota_A^* \omega$$

在遗忘映射下， $H^{11,\,0}(\mathcal{M}_{1,\,11})$的典范生成元 ω 的拉回

$$\iota_A\colon \overline{\mathcal{M}}_{1,n} \to \overline{\mathcal{M}}_{1,11},$$

由忘记集合 $A \subset \{1,\dots,n\}$ 中除基数为 11 的那些穿孔之外的所有穿孔得到。此外，拉回 $\{\omega_A\colon\ 1 \in A\}$ 构成一组基。

令 $\xi_C\colon \overline{\mathcal{M}}_{1,\,B\cup\{p\}} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,\,C\cup\{q\}} \to \overline{\mathcal{M}}_{1,\,B\cup C}$ 为边界嵌入，并令

$$\xi_C^*\colon H^{11}(\overline{\mathcal{M}}_{1,B\cup C}) \to H^{11}(\overline{\mathcal{M}}_{1,B\cup\{p\}}) \otimes H^0(\overline{\mathcal{M}}_{0,C\cup\{q\}}) \cong H^{11}(\overline{\mathcal{M}}_{1,B\cup\{p\}})$$

为相应的拉回运算。那么

$$\xi_C^*\omega_A = \begin{cases} \omega_A & \text{if } C\cap A = \emptyset \\ \omega_{(A\setminus c)\cup p} & \text{if } C\cap A = \{c\}. \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

因此，$\mathsf{GK}^{11,\,g\,n^\circ}$ 上的微分具有如下形式：

$$\delta = \delta_s^\bullet + \delta_s^\circ,$$

其中 $\delta_s^\bullet$ 表示拆分非特殊顶点，δ_s° 表示拆分特殊顶点。具体而言，我们有

$$\delta_s^\bullet(\Gamma, e_1\wedge\cdots\wedge e_k, x) = \sum_{v\in V_\bullet\Gamma}\ \sum_{\text{split v}} (\Gamma', e_0\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_k, x) \tag{5}$$

其中外层求和遍历 Γ 的所有非特殊顶点。内层求和遍历将顶点 v 替换为由新边 e_0 连接的两个顶点的所有容许方式，并将与 v 相 incident 的半边分配到新顶点上，从而形成图 Γ'。图示如下：

$$\delta_s^\bullet : \quad \mapsto \quad$$

类似地，运算 δ_s° 将特殊顶点分裂为两个顶点，

$$\delta_s^\circ(\Gamma, e_1\wedge\cdots\wedge e_k, x) = \sum_{B\subset H_*, |B|\geq 2} (\mathrm{split}_B\Gamma, e_0\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_k, \xi_B^* x), \tag{6}$$

其中求和遍历特殊顶点处半边集合的子集 B，而 $\mathrm{split}_B\Gamma$ 是通过向该图添加一个额外的非特殊顶点得到的图；将 B 中的半边连接到该顶点，并将一条新边连接到特殊顶点。图示如下：

$$\delta_s^\circ : \quad \mapsto \sum_B \quad \Big\}\, B$$

要计算特殊顶点处装饰的拉回，需使用 (4)。在 $\delta_s^\bullet$ 和 δ_s° 的定义中，新添加的边 e_0 在边序中位于首位，而其他边的相对顺序保持不变。

注 3.3。注意，对于 $A \subset \{1,\dots,n\}$，表达式 ω_A 的形式线性组合构成对称群 $\mathbb{S}_n$ 的如下表示

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{11}\times\mathbb{S}_{n-11}}^{\mathbb{S}_n} \mathrm{sgn}_{11} \otimes \mathbb{Q},$$

即由符号表示 $\mathrm{sgn}_{11} \cong V_{1^{11}}$ of $\mathbb{S}_{11}$ 与平凡表示 $\mathbb{Q} \cong V_{n-11}$ of $\mathbb{S}_{n-11}$ 的乘积诱导而来的表示。根据 Pieri 规则（或更一般的 Littlewood–Richardson 规则），该表示分解为不可约表示

$$V_{(n-10)1^{10}} \oplus V_{(n-11)1^{11}}.$$

子空间 $V_{(n-11)1^{11}}$ 在 $H^{11,0}(\mathcal{M}_{1,n})$ 中的像为零，因此 $H^{11,0}(\mathcal{M}_{1,n}) \cong \overline{V}_{(n-10)1^{10}}$。张成 $V_{(n-11)1^{11}}$ 的完备关系集为

$$\sum_{j=1}^{12}(-1)^{j+1}\omega_{\{b_1,\dots,\hat{b}_j,\dots,b_{12}\}}, \tag{7}$$

其中 $B=\{b_1,\dots,b_{12}\}\subset\{1,\dots,n\}$ 遍历基数为 12 的子集。

3.1. 无圈辅助图复形。 现在我们描述一个辅助图复形 $X_{g,\,n}$其中每个生成元都带有一个特殊顶点，该顶点由其关联半边的任意子集装饰（不必恰有 11 条）。我们将这些半边的排序纳入定向，因此对这些半边进行置换会导出符号表示，这与上文讨论的生成元 ω_A 的反对称性质一致。所得图复形无圈，因此通过按特殊顶点处标记半边的数量进行截断，可得到 $\mathsf{GK}^{11,\,g\,n^\circ,}$ 的两种分解。

X_g的生成元具有以下形式：

- 一个环阶为 $g-1$ 的连通图 Γ，带有一个指定的特殊顶点、特殊顶点处一个指定的半边子集，以及 n 条带编号的腿。
- 所有非特殊顶点的度数至少为 3，特殊顶点的度数至少为 1，且非特殊顶点上没有自环。
- 生成元的上同调次数为结构边的数量 − 带标记半边的数量。
- 图配备了一个定向 o，由集合$\{e_1,\dots,e_k,h_1,\dots,h_r\}$ 中结构边的全序 $e_1,\dots,e_k$ 以及 Γ 与特殊顶点关联的半边的指定子集的全序 $h_1,\dots,h_r$组成。

这里，结构边仍指除带编号的腿之外的所有边。我们用 $o=a_1\wedge\cdots\wedge a_{k+r}$ 来表示边集与带标记半边的指定子集上的排序，其中 $a_1,\dots,a_{k+r}$是集合 $\{e_1,\dots,e_k,h_1,\dots,h_r\}$中元素的一种排序。我们施加两个关系。

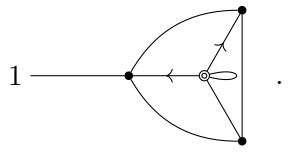
- 首先，我们将同构图视为相同：若 $\phi\colon\Gamma\to\Gamma'$ 是一个同构，则我们规定

$$(\Gamma,e_1\wedge\cdots\wedge e_k\wedge h_1\wedge\cdots\wedge h_r)=(\Gamma',\phi(e_1)\wedge\cdots\wedge\phi(e_k)\wedge\phi(h_1)\wedge\cdots\wedge\phi(h_r)). \tag{8}$$

- 其次，我们将相差一个符号的排序视为相同：对于一个置换 $\sigma\in\mathbb{S}_{k+r}$，我们规定

$$(\Gamma,a_1\wedge\cdots\wedge a_{k+r})=\mathrm{sgn}(\sigma)(\Gamma,a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(k+r)})\,. \tag{9}$$

第二条关系允许我们将边置于半边之前，$e_1\wedge\cdots\wedge e_k\wedge h_1\wedge\cdots\wedge h_r$。下图展示了 $X_{5,\,1}$的一个生成元。特殊顶点用双环表示，特殊顶点处带标记的半边用箭头表示：



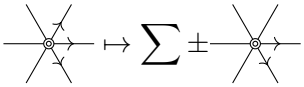
$X_{g,\,n}$ 上的微分由两部分之和构成

$$\delta=\delta_s+\delta_\omega.$$

这部分 δ_ω 只需从定向中移除一个指定半边。

$$\delta_\omega(\Gamma,e_1\wedge\cdots\wedge e_k\wedge h_1\wedge\cdots\wedge h_r)=\sum_{j=1}^{r}(-1)^{k+j-1}(\Gamma,e_1\wedge\cdots\wedge e_k\wedge h_1\wedge\cdots\hat{h}_j\cdots\wedge h_r)$$

图示如下：

$\delta_\omega :$  .

δ_s 部分通过拆分顶点发挥作用。为方便起见，我们进一步将 $\delta_s = \delta_s^\bullet + \delta_s^\circ$分解为两部分： δ_s° 用于拆分特殊顶点， $\delta_s^\bullet$ 用于拆分其他顶点。具体而言，运算 $\delta_s^\bullet$ 的定义与式 (5) 类似，

$$\delta_s^\bullet(\Gamma, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge h_1 \wedge \cdots \wedge h_r) = \sum_{v \in V_\bullet \Gamma} \sum_{\text{split v}} (\Gamma', e_0 \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge h_1 \wedge \cdots \wedge h_r)\,. \tag{10}$$

外层求和仍遍历 Γ的所有非特殊顶点 v 。内层求和遍历所有容许方式：将顶点 v 替换为由一条边连接的两个顶点，并将与 v 相连的半边分配到新顶点上，从而形成一个图 Γ'。图示如下：

$\delta_s^\bullet :$  .

类似地，我们按照式 (6) 定义 δ_s° ,

$$\delta_s^\circ(\Gamma, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge h_1 \wedge \cdots \wedge h_r) = \sum_{\substack{B \subset H_* \\ |B| \geq 2}} (\mathrm{split}_B \Gamma, e_0 \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge h_1 \wedge \cdots \wedge h_r)\,, \tag{11}$$

其中，求和遍历集合 H_* 的子集 B ；该集合由与特殊顶点相连的半边构成，并要求 $|B| \geq 2$ 和 B 各自至多包含一个指定半边。通过向图 Γ添加一个新的非特殊顶点 v ，并用一条边将其与特殊顶点相连，再将半边 B 重新连接到 v，即可构造拆分后的图${}_B\Gamma$。如果 B 包含带标记的半边，则移除该标记，并将其标记到连接特殊顶点与 v 的半边上。图示如下：

$\delta_s^\circ :$  .

引理 3.4. 微分 δ 满足 $\delta^2 = 0$，且微分分次向量空间 $(X_{g,n}, \delta)$ 是无圈的。

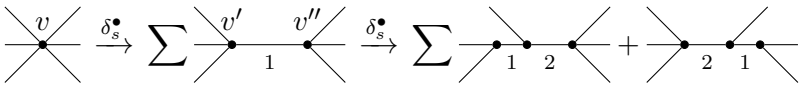
证明。 直接计算即可验证 $\delta^2 = 0$ ，如下所示。将 δ^2 展开为

$$(\delta_s^\bullet + \delta_s^\circ + \delta_\omega)^2 = (\delta_s^\bullet)^2 + (\delta_s^\circ)^2 + (\delta_\omega)^2 + [\delta_s^\bullet, \delta_s^\circ] + [\delta_s^\bullet, \delta_\omega] + [\delta_s^\circ, \delta_\omega],$$

其中 $[-,-]$ 表示反交换子。

显然，$(\delta_\omega)^2 = 0$ ，因为移除两个不同标记的运算彼此可交换，且相应项符号相反。类似地，$[\delta_s^\bullet, \delta_\omega] = 0$，因为特殊顶点处的标记不会干扰边分裂运算，且对应项的符号也相反。

为验证 $(\delta_s^\bullet)^2 = 0$，取一个图 $\Gamma \in X$并计算 $\delta_s^\bullet \delta_s^\bullet \Gamma$。设第一次应用 $\delta_s^\bullet$ 将顶点 v 分裂为顶点 v', v''，第二次应用则将顶点 w 分裂。显然，若 $w \neq v', v''$ ，那么先分裂 v 再分裂 w 所得的项，会与先分裂 w 再分裂 v所得的对应项相消。剩下的是满足 $w = v'$ 且 $w = v''$的项，示意如下：

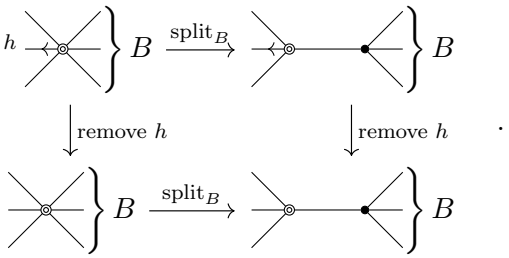
 .

边下方的数字表示该边在构成图定向的排序中的位置。右侧的两项（由拆分 v' 和 v'' 得到）除交换边的顺序所产生的符号外完全相同，因此相互抵消。

通过本质 完全相同的论证，只需将其中一个顶点替换为特殊顶点 ,

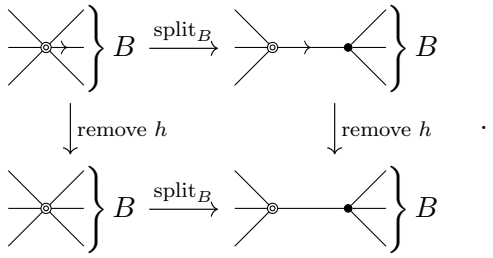
$$(\delta_s^\circ)^2 + [\delta_s^\bullet, \delta_s^\circ] = 0.$$

还需验证 $[\delta_s^\circ, \delta_\omega] = 0$。为此，固定一个图 $\Gamma \in X$，并考察 $[\delta_s^\circ, \delta_\omega]X$ 中满足以下条件的那些项：特殊顶点处的一部分半边 B 被分离出来，且半边 h 上的标记被移除。这类项可能会被生成两次，分别对应下图中从左上到右下的两条路径：

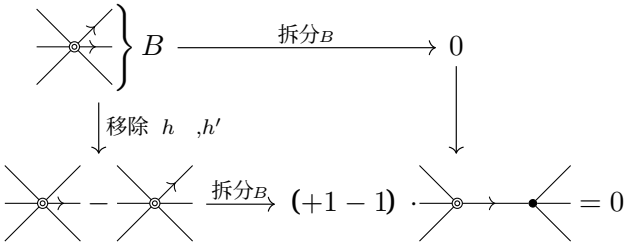


我们区分 4 种情况。

- 如果半边 h 不在 B中，如上图所示，那么由 $\delta_s^\circ\delta_\omega\Gamma$和 $\delta_\omega\delta_s^\circ\Gamma$ 产生的两项同构，但符号相反，因此相互抵消。
- 如果 $h \in B$，且 B 恰好包含一个带标记的半边，那么两项再次相互抵消：



- 如果 $h \in B$ 且 B 包含至少 3 个带标记的半边，那么分裂项中没有一项产生贡献（即，这些 B 不会出现在和式 (11) 中）。
- 最后，如果 $h \in B$ 且 B 恰好包含两个带标记的半边，设为 h 和 h'，那么与移除 h 和 h' 相对应的各项相匹配并相互抵消：

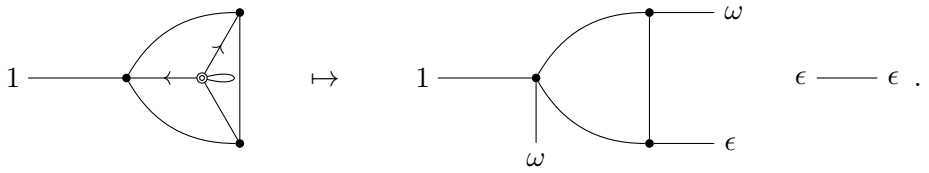


为证明无环性，我们考虑 X 上按顶点数定义的滤过。相关谱序列的 E^0页可识别为复形 $(X_{g,\ n},\ \delta_\omega)$。因此，只需验证 $H(X_{g,\ n},\ \delta_\omega) = 0$。为此，考虑次数为 -1的运算 h：$X_{g,\ n} \to X_{g,\ n}$，它对所有将一个半边添加到指定集合的方式求和，

$$h(\Gamma, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge h_1 \wedge \cdots \wedge h_r) = \frac{1}{|H_*|}(-1)^k \sum_{h \in H_* \setminus \{h_1, \ldots, h_r\}} h(\Gamma, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge h \wedge h_1 \wedge \cdots \wedge h_r).$$

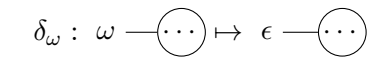
那么 $\delta_\omega h + h\delta_\omega$ 是恒等映射。因此，h 是 δ_ω的收缩同伦，且$H(X_{g,\ n},\ \delta_\omega) = 0$。由于$X_{g,\ n}$ 是有限维的，滤过有界，因此我们的谱序列收敛到上同调。由此，$H(X_{g,\ n},\ \delta_s + \delta_\omega) = 0$，如前所述。□

3.2. 膨胀图示。 现在我们介绍一种替代性的图示方法，用来表示$X_{g,\,n}$ 的生成元，我们称之为膨胀图示。这种对相同信息的等价编码通过“膨胀”特殊顶点得到，即移除特殊顶点，并将与其相连的半边变为外腿；我们根据这些半边是否带标记，分别用特殊符号 ω （若带标记）或 ϵ（若不带标记）来标记它们。例如

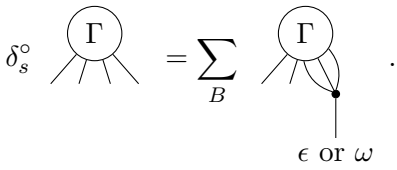


注意，右侧的图可能是不连通的，但每个连通分支都必须至少包含一条 ϵ-腿或 ω-腿。在下文 $X_{g\amalg n}$ 提到图的爆破分量时，我们指的是膨胀图示中的连通分支。

微分在膨胀图示中有如下等价描述。该部分



将一个 ω-装饰替换为 ϵ。部分 δ_s° 将 ϵ-腿和 ω-腿的一个子集 S 连接起来，其中至多包含一条 ω-腿；如果 S 包含一条 ω腿，则连接一条以 ω 装饰的新腿，否则连接一条以 ϵ 装饰的新腿：



3.3. $\overline{\mathsf{GK}^{11}_{g\,n}}$、$\overline{\mathsf{GK}^{11}_{g\,n}{}^{\circ}}$ 的截断以及 $\overline{\mathsf{GK}^{11}_{g\,n}}$、$\overline{\mathsf{GK}^{11}_{g\,n}{}^{\circ}}$ 的分解。 现在我们证明，对$X_{g,\,n}$ 的两个截断给出了 $\mathsf{GK}^{11}_{g\,n}$、$\mathsf{GK}^{11}_{g\,n}{}^{\circ}$的自然分解。

定义 3.5。 令 $C_{g,\,n} \subset X_{g,\,n}$ 为由在特殊顶点处至多具有10条指定半边的图张成的微分分次子空间，并定义

$$\widetilde{B}_{g,n} := X_{g,n}/\widetilde{C}_{g,n}.$$

作为商复形。我们也将适当的次数平移版本记为

$$B_{g,n} = \widetilde{B}_{g,n}[-22]$$
$$C_{g,n} = \widetilde{C}_{g,n}[-21].$$

现在我们证明，$B_{g,\,n}$ 和 $C_{g,\,n}$ 是 $\mathsf{GK}^{11}_{g\,n}{}^{\circ}$ 的分解。考虑映射 $P\colon B_{g,\,n} \to \mathsf{GK}^{11}_{g\,n}{}^{\circ}$，定义如下

$$P(\Gamma, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge h_1 \wedge \cdots \wedge h_r) = \begin{cases} (\Gamma, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k, \omega_{\{h_1,\ldots,h_{11}\}}) & \text{if } r = 11, \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases}$$

以及映射 $I\colon \mathsf{GK}^{11}_{g\,n}{}^{\circ} \to C_{g,\,n}$，定义如下

$$I(\Gamma, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k, \omega_{\{h_1,\ldots,h_{11}\}}) = \sum_{j=1}^{11} (-1)^{k+j-1} (\Gamma, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge h_1 \wedge \cdots \hat{h}_j \cdots \wedge h_{11}).$$

命题 3.6. 上面的映射 P 和 I 是定义良好的微分分次向量空间映射，并且在上同调上诱导同构。

证明。我们先验证 P 与微分相容。首先，我们证明 $P(\delta_\omega\Gamma) = 0$。若 Γ 有 11 个或多于 12 个指定半边，则由次数原因，这一点显然。若 Γ 恰有 12 个指定半边，则根据注 3.3，$P(\delta_\omega\Gamma) = 0$，因为 δ_ω 产生形如 (7) 的表达式，而这些表达式在 $\mathsf{GK}^{11,\circ}_{g,n}$ 中为零。接下来，由于两边对非特殊顶点的拆分相同，我们有 $P(\delta_s^\bullet\Gamma) = \delta_s^\bullet P(\Gamma)$；参见 (5) 和 (10)。最后，比较 (6) 和 (11) 可知，$P(\delta_s^\circ\Gamma) = \delta_s^\circ(\Gamma)$，因为在 δ_s° 对 $B_{g,n}$ 中处理带标记半边的方式，体现了 (4) 中的拉回运算 ξ_B^*。因此，P 与微分相容，证毕。

接下来，注意到映射 P 和 I 构成一个交换图

$$\begin{array}{ccc} B_{g,n} & \xrightarrow{P} & \overline{\mathsf{GK}}^{11,\circ}_{g,n} \\ & \searrow^{\delta_\omega} & \downarrow I \\ & & C_{g,n} \end{array} .$$

由于 P 是满射，且 P 和 δ_ω 都与微分相容，因此 I 也与微分相容。

尚需证明 P 和 I 是拟同构。由于 $X_{g,\ n}$ 无圈，δ_ω: $B_{g,\ n} \to C_{g,\ n}$ 是拟同构。由于上述图交换，因此只需证明 P 是拟同构。为此，我们首先注意到，根据注 3.3

$$\overline{\mathsf{GK}}^{11,\circ} \cong B_{g,n}/(B_{g,n,\geq 12\omega} \oplus \delta_\omega B_{g,n,12\omega}),$$

其中 $B_{g,\ n,\ 12\omega}$（分别地，$B_{g,\ n,\ \geq 12\omega}$）是由具有 12（分别地，$\geq 12$）$\omega$-条腿的图张成的 $B_{g,\ n}$ 的子空间。因此我们需要证明投影

$$B_{g,n} \to B_{g,n}/(B_{g,n,\geq 12\omega} \oplus \delta_\omega B_{g,n,12\omega}) \tag{12}$$

是拟同构。为此，我们沿用引理 3.4 的证明中证明 $X_{g,\ n}$ 无环性的论证。我们在 (12) 两侧考虑由图中顶点数给出的滤过所产生的谱序列。在谱序列的第一页，(12) 左侧的微分由 δ_ω 给出，而右侧为零。由于 ($X_{g,\ n}$，δ_ω) 无圈，且 $B_{g,\ n}$ 是截断至 11 ω-条腿的截断，因此我们有

$$H(B_{g,n}, \delta_\omega) = B_{g,n,11\omega}/\mathrm{im}(B_{g,n,12\omega} \xrightarrow{\delta_\omega} B_{g,n,1\omega}) \cong B_{g,n}/(B_{g,n,\geq 12\omega} \oplus \delta_\omega B_{g,n,12\omega}).$$

因此，式 (12) 在谱序列的 E^1 页上诱导出一个同构，并且根据谱序列比较引理，这是一个拟同构。□

推论 3.7。存在自然同构

$$H^k(B_{g,n}) \otimes \Delta \cong \mathrm{gr}_{11} H^k_c(\mathcal{M}_{g,n}) \cong H^k(C_{g,n}) \otimes \Delta.$$

4. Explicit computations in low excess

为了研究 $B_{g,\ n}$ 的上同调，我们在图生成元上引入一种称为超额的统计量。对我们的目的而言，最重要的是，超额非负，在爆破分量上可加，并且超额较小的图相对简单，易于分类。

定义 4.1。$X_{g,\ n}$ 的生成元 Γ 的超额为

$$E(\Gamma) = 3(g-1) + 2n - 2\#\omega,$$

其中 $\#\omega$ 是 Γ 的 ω 条腿的数量。

我们还定义了

$$E(g,n) := 3g + 2n - 25.$$

Γ B_g 的 n 的任意生成元都有 $\#\omega \geq 11$，因此

$$E(\Gamma) \leq E(g,n).$$

注意， $E(\Gamma) \equiv E(g,n)$ 模 2，因此，当 g 为奇数或偶数时，$B_{g,n}$ 的所有生成元的超额分别为偶数或奇数。此外，对于每个固定的 k，满足 $E(g,n) = k$ 的数对 (g,n) 只有有限多个。

将每个生成元 Γ （对应 $B_{g,n}$ ）表示为其爆破分量的并集：

$$\Gamma = C_1 \cup \cdots \cup C_k.$$

令 g_i 表示 C_i 对 Γ亏格的贡献。更准确地说，

$$g_i = h^1(C_i) + \#\epsilon + \#\omega - 1,$$

即， C_i 的环阶，加上其标记为 ϵ 和 ω 的腿的数量，再减一。则 C_i 的超额为

$$E(C_i) := 3g_i + 2n_i - 2\#\omega$$

引理 4.2. 超额在爆破分量上具有可加性，即

$$E(\Gamma) = E(C_1 \cup \cdots \cup C_k) = E(C_1) + \cdots + E(C_k), \tag{13}$$

且每个爆破分量的超额均非负。

证明。公式 (13) 对于 $E(\Gamma)$ 显然成立，因为 Γ 的亏格等于各爆破分量的亏格贡献之和，再加上一，以计入特殊顶点的亏格为一这一点。

如果 $h^1(C_i) \geq 1$ 或 $\#\epsilon \geq 1$ ，那么

$$E(C_i) = 3h^1(C_i) + 3\#\epsilon + 2n_i + \#\omega - 3 \geq 0.$$

还需证明当 $h^1(g_i) = \#\epsilon = 0$ 时， $E(C_i) \geq 0$ 。设 C_i 是一棵有 m 个叶子的树，这些叶子可以编号，也可以用 ω 装饰。如果这棵树至少有 3 个叶子，那么 $E(C_i)$ 至少为 $2n_i + \#\omega - 3 \geq 0$。任何树至少有两个叶子，其余情形如下：

$$\omega \text{ —— } \omega \quad \text{or} \quad \omega \text{ —— } j \ .$$

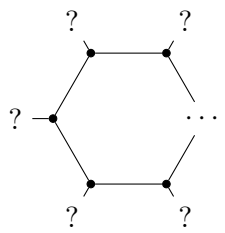
第一个图因对称性而为零；对于第二个图，我们有 $E(C_i) = 0$。 □

推论 4.3。 如果 $E(g,\ n) < 0$ 那么 $\mathrm{gr}_{11} H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,\ n}) = 0.$

证明。 根据引理 4.2，如果 $E(g,\ n)$ 为负，则复形 $B_{g,\ n}$ 为 0。 □

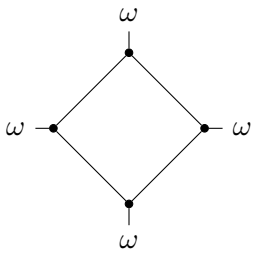
引理 4.4。若 $h^1(C_i) \geq 1$ 则 $E(C_i) \geq 5$。

证明。 论证与引理 4.2 的证明类似。首先注意，若 $h^1(C_i) \geq 3$ 则$E(C_i) \geq 5$。若 $h^1(C_i) = 2$, 则能够产生 $E(C_i) < 5$ 的图只能满足 $\#\epsilon = 2n_i = 0$ 和 $\#\omega = 1$。但不存在这样的（非零）环阶为 2 的图。最后，假设 $h^1(C_i) = 1$。一般的环阶为 1 的图具有如下形式

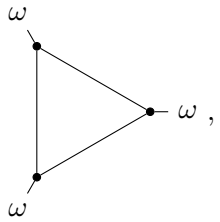


其中 ? 表示一个 ϵ、 ω、一条编号的腿，或一个待附加的树或森林。显然，如果图有 ≥ 5 条腿，则 $E(C_i) \geq 5$。还要注意，内圈的长度必须至少为

三，否则图会有一条双边并消失。如果图的环长度为 4，则唯一需要考虑的情况是全部 4 条腿都是 ω-腿。



该图具有奇对称性，因此在 $B_{g,\ n}$ 中消失。对于环长度为三的情形，我们有如下图



以及它的变体：其中一个 ω 被替换为一个数，或替换为一个带有 2 ω 条腿的森林。在每种情况下，该图都具有奇对称性，因此在$B_{g,\ n}$ 中消失。□

利用引理 4.4，只要 $E(g,\ n) \leq 4$，就可以相对容易地计算出 $B_{g,\ n}$ 的上同调，因为生成图都是森林。现在我们详细讨论 $E(g,\ n) \leq 3$。

4.1. 超额 0。 根据引理 4.2，超额为零的图的膨胀图示是若干超额为零的连通分支的并集。唯一符合这一条件的分量具有如下形式

$$\omega \text{ —— } j \quad \text{or} \quad \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \omega & \omega & \omega \end{array} .$$

因此，若 $E(g,\ n) = 0$，则 $B_{g,\ n}$ 的生成元具有如下形式：

$$\Gamma^{(0)} = \ \omega \text{ —— } 1 \ \cdots \ \omega \text{ —— } n \ \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \omega & \omega & \omega \end{array} \ \cdots \ \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \omega & \omega & \omega \end{array}$$

注意到有 n ($\omega - j$)-条边，以及 $\binom{g-1}{2}$ 个每个带有三条 ω-腿的三叉图。这类生成元的上同调次数为 $k = 11 + \frac{3}{2}(g-1)$。

因此得到以下情形列表：在这些情形中，$\mathrm{gr}_{11} H_c^k(\mathcal{M}_{g,n})$ 集中于单一次数 k，并且同构于 Δ。在每种情形中，$\mathbb{S}_n$-作用均为符号表示。

$$H^k(B_{1,11}) = \begin{cases} V_{1^{11}} & \text{for } k = 11 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad H^k(B_{3,8}) = \begin{cases} V_{1^8} & \text{for } k = 14 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H^k(B_{5,5}) = \begin{cases} V_{1^5} & \text{for } k = 17 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad H^k(B_{7,2}) = \begin{cases} V_{1^2} & \text{for } k = 20 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

4.2. 超额 1。 假设 $E(g,n) = 1$。$B_{g,n}$ 的每个生成元都具有超额 0 的连通分支，只有一个连通分支的超额为 1。超额 1 的连通图具有如下形式：

$$\omega \text{ —— } \epsilon \quad \text{or} \quad \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ j & \omega & \omega \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{cccc} & & \bullet & \\ \omega & \omega & \omega & \omega \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{cccc} & \bullet & & \bullet \\ \omega & \omega & & \omega & \omega \end{array} . \tag{14}$$

第三个图在顶点分裂微分下映射到第四个图，因此具有这些分量的图不会对上同调作出贡献；我们可以通过消去这些项来简化 $B_{g,\ n}$。

剩余的超额 1 图具有以下形式

$$\Gamma^{(1)} = \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots \ \omega \text{ — } n \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \cdots \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \omega \text{ — } \epsilon$$

or

$$\Gamma^{(1)}_j = \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots \ \omega \text{ — } n \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \cdots \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \overset{j\ \omega\ \omega}{\wedge},$$

约定在 $\Gamma^{(1)}_j$ 中不存在 $(\omega - j)$-边。忽略涉及 (14) 中第四个图的项后，微分为

$$\Gamma^{(1)} \mapsto \pm \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \Gamma^{(1)}_j. \tag{15}$$

由此可知，$B_{g,\ n}$（其中 $E(g,\ n) = 1$）的上同调在次数 $k = 10 + \frac{3}{2}g$ 上是一个不可约 $\mathbb{S}_n$-表示 $V_{21^{n-2}}$，由 (15) 的余核给出。具体而言，这适用于以下情形：

$$H^k(B_{2,10}) = \begin{cases} V_{21^8} & \text{for } k = 13 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad H^k(B_{4,7}) = \begin{cases} V_{21^5} & \text{for } k = 16 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H^k(B_{6,4}) = \begin{cases} V_{21^2} & \text{for } k = 19 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad H^k(B_{8,1}) = 0.$$

4.3. 超额 2。 设 $E(g,\ n) = 2$。超额为 2 的 $B_{g,\ n}$ 的一个生成元，要么有两个超额为 1 的连通分支，要么有一个超额为 2 的连通分支。超额为 2 的连通分支为

$$j \text{ — } \epsilon \quad \text{or} \quad \overset{\epsilon\ \omega\ \omega}{\wedge} \quad \text{or} \quad \overset{i\ j\ \omega}{\wedge} \quad \text{or trees with at least 4 leaves} \quad . \tag{16}$$

与情形 $E(g,\ n) = 1$ 一样，可以很容易验证，至少有 4 个叶子的树不会对 $B_{g,\ n}$ 的上同调作出贡献，并且可以通过链同伦将其消去。因此我们忽略这些项。$B_{g,\ n}$ 的其余约化版本由次数为 $10 + \frac{3}{2}(g-1)$、超额为 0 的单个图 $\Gamma^{(0)}$，以及以下超额为 2 的图生成：

$$\Gamma^{(2)}_{\epsilon} := \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots \ \omega \text{ — } n \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \cdots \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \overset{\epsilon\ \omega\ \omega}{\wedge}$$

$$\Gamma^{(2)}_{\epsilon j} := \ \epsilon \text{ — } j \ \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots \ \omega \text{ — } n \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \cdots \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge}$$

$$\Gamma^{(2)}_{ij} := \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots \ \omega \text{ — } n \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \cdots \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \overset{i\ j\ \omega}{\wedge}$$

$$\Gamma^{(2)}_{\omega\epsilon\omega\epsilon} = \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots \ \omega \text{ — } n \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \cdots \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \omega \text{ — } \epsilon \ \ \omega \text{ — } \epsilon$$

$$\Gamma^{(2)}_{\omega\epsilon j} = \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots \ \omega \text{ — } n \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \cdots \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \overset{j\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \omega \text{ — } \epsilon$$

$$\Gamma^{(2)}_{i;j} := \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots \ \omega \text{ — } n \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \cdots \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \overset{i\ \omega\ \omega}{\wedge} \ \overset{j\ \omega\ \omega}{\wedge}$$

消去涉及至少有 4 个叶子的树的项后，微分将 $\Gamma^{(2)}_{\epsilon}$、 $\Gamma^{(2)}_{ij}$ 和 $\Gamma^{(2)}_{i}{}_{;\,j}$ 映射为 0。在剩余生成元上，微分定义如下：

$$\Gamma^{(0)} \mapsto \sum_j \pm\Gamma^{(2)}_{\epsilon j} + (const)\Gamma^{(2)}_{\epsilon} \qquad \Gamma^{(2)}_{\epsilon j} \mapsto \sum_i \pm\Gamma^{(2)}_{ij}$$

$$\Gamma^{(2)}_{\omega\epsilon\omega\epsilon} \mapsto \pm\Gamma^{(2)}_{\epsilon} + \sum_j \pm\Gamma^{(2)}_{\omega\epsilon j} \qquad \Gamma^{(2)}_{\omega\epsilon j} \mapsto \sum_i \pm\Gamma^{(2)}_{i;j}.$$

这里需要注意，当 $n=0$ 或 $g=1$ 时，某些生成元不存在。更确切地说，当 $n=0$ 时，不存在生成元 $\Gamma^{(2)}_{\epsilon j}$、 $\Gamma^{(2)}_{\omega\epsilon j}$、$\Gamma^{(2)}_{ij}$、 $\Gamma^{(2)}_{i}{}_{;\,j}$；当 $g=1$ 时，也不存在 $\Gamma^{(2)}_{\epsilon}$、 $\Gamma^{(2)}_{i}{}_{;\,j}$、 $\Gamma^{(2)}_{\omega\epsilon\omega\epsilon}$、$\Gamma^{(2)}_{\omega\epsilon j}$。当所有生成元都存在时，上同调由 $\mathbb{S}_n$ 的一份符号表示 V_{1^n}（由 $\Gamma^{(2)}_{\epsilon}+\cdots$ 表示）和两份不可约表示 $V_{31^{n-3}}$ 组成，后者分别由形如 $\Gamma^{(2)}_{ij}$ 和 $\Gamma^{(2)}_{i}{}_{;\,j}$ 的图的线性组合表示。考虑到特殊情形 $n=0$ 和 $g=1$，我们得到：

$$H^k(B_{1,12}) = \begin{cases} V_{31^9} & \text{for } k=12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad H^k(B_{3,9}) = \begin{cases} V_{1^9} & \text{for } k=14 \\ V_{31^6}\oplus V_{31^6} & \text{for } k=15 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H^k(B_{5,6}) = \begin{cases} V_{1^6} & \text{for } k=17 \\ V_{31^3}\oplus V_{31^3} & \text{for } k=18 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad H^k(B_{7,3}) = \begin{cases} V_{1^3} & \text{for } k=20 \\ V_3\oplus V_3 & \text{for } k=21 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H^k(B_{9,0}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{for } k=22 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

4.4. 超额 3。 假设 $E(g,n)=3$。那么，对于 $B_{g,n}$，每个生成元 Γ 的超额都是 1 或 3，而爆破分量的贡献确定了 $E(\Gamma)$ 的一个分拆 λ。我们根据这些分拆的字典序对 $B_{g,n}$进行过滤，并考察相应的谱序列。在第一页，微分只关联具有相同分拆的生成元。

- $\lambda=\mathbf{1}$。超额为 1 的图及其在第一页生成的复形与 §4.2 中完全相同。特别地，上同调在次数$3\,2(g-4)+15$中为 $V_{21^{n-2}}$ 的一份拷贝，由类型为 $\Gamma_{(1)\,j}$ 的图的线性组合表示。

- $\lambda=\mathbf{1^3}$。爆破分量超额为 1 的图所作的贡献，与 §4.3 中计算的超额 2 情形类似。由此得到的第一页上同调在次数 $3\,2(g-3)+17$ 中为 $V_{41^{n-4}}$ 的一份拷贝，由图的线性组合表示

$$\Gamma^{(3)}_{i;j;k} := \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots\ \omega \text{ — } n \quad \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\bullet} \ \cdots\ \overset{\omega\ \omega\ \omega\ i}{\bullet}\ \overset{\omega\ \omega\ j}{\bullet}\ \overset{\omega\ \omega\ k}{\bullet}\ \overset{\omega\ \omega}{\bullet}$$

- $\lambda=\mathbf{21}$。这里我们需要考虑 6 种图，它们来自 3 种超额 2 的分量（16）和 2 种超额 1 的分量（14）。上同调由以下部分组成：一份 $V_{41^{n-4}}\oplus V_{321^{n-5}}$，次数为 $3\,2$（$g-4$），由图的线性组合表示

$$\Gamma^{(3)}_{ij;k} := \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots\ \omega \text{ — } n \quad \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\bullet} \ \cdots\ \overset{\omega\ \omega\ \omega\ i\ j}{\bullet}\ \overset{\omega\ k}{\bullet}\ \overset{\omega\ \omega}{\bullet}$$

– 两个 c 个 $V_{21^{n-2}}$ 在次数 $3\,2(g-4)+16$ 中的拷贝，一个由如下形式的图表示

$$\Gamma^{(3)}_{\epsilon;j} = \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots \ \omega \text{ — } n \quad \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\cdot} \ \cdots \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\cdot} \ \overset{j\ \omega\ \omega}{\cdot} \ \overset{\epsilon\ \omega\ \omega}{\cdot}$$

另一个由如下形式的图表示：

$$\Gamma^{(3)}_{\epsilon i;j} = \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots \ \omega \text{ — } n \quad \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\cdot} \ \cdots \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\cdot} \ \overset{j\ \omega\ \omega}{\cdot} \ i \text{ — } \epsilon$$

- $\lambda = \mathbf{3}$。相关的超额 3 树如下：

$$\epsilon \text{ — } \epsilon \quad \text{or} \quad \overset{\epsilon\ i\ \omega}{\cdot} \quad \text{or} \quad \overset{i\ \omega \qquad \omega\ j}{\cdot} \quad .$$

所得三项复形的上同调在次数 $3\,2(g-4)+17$ 中为 $V_{31^{n-3}}$，由如下形式图的线性组合表示

$$\Gamma^{(3)}_{i\cdot j} = \ \omega \text{ — } 1 \ \cdots \ \omega \text{ — } n \quad \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\cdot} \ \cdots \ \overset{\omega\ \omega\ \omega}{\cdot} \ \overset{i\ \omega \qquad \omega\ j}{\cdot}$$

谱序列后续页中唯一可能发生的抵消，是 $V_{21^{n-2}}$的拷贝之间的抵消。事实上 $\delta_\omega \Gamma^{(1)}_i = \sum_j \pm \Gamma^{(3)}_{\epsilon i\ ;j} + (\cdots)$，因此相应的两个 $V_{21^{n-2}}$拷贝确实在谱序列的第二页抵消。考虑低 $g \le 2$和低 $n \le 3$ 的情况后，可得 $B_{g,n}$上同调的如下表达式：

$$H^k(B_{2,11}) = \begin{cases} V_{41^7} \oplus V_{321^6} \oplus V_{31^8} & \text{for } k = 14 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H^k(B_{4,8}) = \begin{cases} V_{21^6} & \text{for } k = 16 \\ V_{41^4} \oplus V_{41^4} \oplus V_{321^3} \oplus V_{31^5} & \text{for } k = 17 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H^k(B_{6,5}) = \begin{cases} V_{21^3} & \text{for } k = 19 \\ V_{41} \oplus V_{41} \oplus V_{32} \oplus V_{31^2} & \text{for } k = 20 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H^k(B_{8,2}) = \begin{cases} V_2 & \text{for } k = 22 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

5. The case $n = 0$: first injection

现在我们将注意力限制在特殊情形 $n = 0$，此时亏格 g （因而超额 E）可以任意大。按照曲线模空间的标准记号约定，我们记作：

$$X_g := X_{g,0}, \qquad B_g := B_{g,0}, \qquad C_g := C_{g,0}.$$

在本节和下一节中，我们分别在 C_g 和 B_g 中识别出若干非平凡的上同调类族，它们由 $h < g$ 时 $\mathcal{M}_h$ 的权重 0 紧支撑上同调构造而成。

令 GC_0 为由不含圈图且每个顶点的度数至少为 3 的连通图生成的图复形。每个生成元都带有一个定向，即边的全序。与前面一样，我们将同构图视为相同，并将相差一个符号的两个定向视为相同，参见 (2)、(3) 以及 (8)、(9)。生成元的上同调次数等于边的

数目，微分 δ 由顶点分裂给出，如 (10) 所示。微分保持环阶（第一贝蒂数）不变，我们用 $\mathsf{GC}_0^{(g)}$ 表示环阶为 g 的部分。

回顾，$\mathsf{GC}_0^{(g)}$ 与模上余运算子$H^0(\mathcal{M})$的费曼变换拟同构，在 $(g,0)$ 处取值；更确切地说，它是 $\overline{\mathcal{F}H^0(\mathcal{M})}(g,0)$ 对由含有自环或正亏格顶点的图生成的无圈子复形 [7]取商所得。由此可得一个典范同构

$$W_0H_c^\bullet(\mathcal{M}_g)\cong H^\bullet(\mathsf{GC}_0^{(g)}).$$

对称积 $\mathrm{Sym}^k(\mathsf{GC}_0)$ 继承了 GC_0 的环阶分次，我们用 $\mathrm{Sym}^k(\mathsf{GC}_0)^{(g)}\subset\mathrm{Sym}^k(\mathsf{GC}_0)$ 表示环阶为 g 的部分。

定理 5.1。存在一个复形之间的映射

$$F\colon \mathrm{Sym}^{10}(\mathsf{GC}_0)^{(g-1)}[-21]\oplus\mathrm{Sym}^{10}(\mathsf{GC}_0)^{(g-2)}[-22]\to C_g$$

它在上同调层面诱导一个单射

$$H^{k-21}(\mathrm{Sym}^{10}(\mathsf{GC}_0)^{(g-1)})\oplus H^{k-22}(\mathrm{Sym}^{10}(\mathsf{GC}_0)^{(g-2)})\to H^k(C_g).$$

推论 5.2。存在一个自然单射

$$\big(H^{k-21}(\mathrm{Sym}^{10}(\mathsf{GC}_0)^{(g-1)})\oplus H^{k-22}(\mathrm{Sym}^{10}(\mathsf{GC}_0)^{(g-2)})\big)\otimes\Delta\to\mathrm{gr}_{11}H^k(\mathcal{M}_g).$$

5.1. GC_0上的同伦平凡李括号。图复形 GC_0 是一个微分分次李代数，其李括号 $[-,-]$ 由将一个图插入另一个图的顶点中定义。这个主李括号的次数为 0；它保持边数不变，并减少一个顶点。

GC_0 上还存在一个次数为 $+1$ 的次李括号，我们记作 $\{-,-\}$，其定义是通过在两个图之间连接一条新边，将它们粘合起来：

$$\{\gamma_1,\gamma_2\}:=\sum_{\substack{v\in V\gamma_1\\ w\in V\gamma_2}}(v,w)\cup\gamma_1\cup\gamma_2=\sum\ \gamma_1\!\!-\!\!\gamma_2$$

为确定符号，排序时将新添加的边放在最前面，接着是 γ_1 的边，然后是 γ_2 的边。这个次李括号 $\{-,-\}$ 在同伦意义下是平凡的。

命题 5.3 ([20])。存在一个 L_∞-同构

$$(\mathsf{GC}_0,\delta,0)\to(\mathsf{GC}_0,\delta,\{-,-\})$$

连接阿贝尔李代数 GC_0 与带有李括号 $\{-,-\}$ 的微分分次李代数 GC_0 。这个 L_∞-同构保持两侧按环阶划分的分次。

带有次数为 $+1$ 的同伦平凡李括号 $\{-,-\}$ 的微分分次李代数 GC_0 的 Chevalley–Eilenberg 复形是分次向量空间

$$CE(\mathsf{GC}_0,\delta,\{-,-\})=\mathrm{Sym}(\mathsf{GC}_0)$$

其微分为 $\delta+\delta_{\{,\}}$，满足

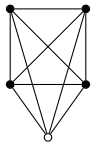
$$\delta_{\{,\}}(\gamma_1\cdots\gamma_k)=\sum_{i<j}(-1)^{|\gamma_i|(|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_{i-1}|)+|\gamma_j|(|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_{j-1}|)-|\gamma_i||\gamma_j|}\{\gamma_i,\gamma_j\}\gamma_1\cdots\hat{\gamma}_i\cdots\hat{\gamma}_j\cdots\gamma_k.$$

从组合角度看，若将乘积 $\gamma_1\cdots\gamma_k$ 视为图 γ_1、.....、γ_k的并集，那么$\delta_{\{,\}}$ 会在属于不同连通分支的任意一对顶点之间添加一条新边。任何 L_∞-态射都会在 Chevalley–Eilenberg复形上诱导一个态射。因此，由命题 5.3可得以下结果。

推论 5.4。 阿贝尔微分分次李代数 GC_0 的 ***Chevalley–Eilenberg***复形与带有括号 $\{-,-\}$的微分分次李代数 GC_0 的 ***Chevalley–Eilenberg***复形同构。

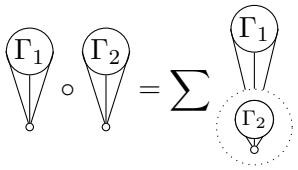
$$\Phi\colon CE(\mathsf{GC}_0,\delta,0)=(\mathrm{Sym}(\mathsf{GC}_0),\delta)\to CE(\mathsf{GC}_0,\delta,\{-,-\})=(\mathrm{Sym}(\mathsf{GC}_0),\delta+\delta_{\{,\}}).$$

5.2. **一些组合运算**。我们考虑 Kontsevich 图运算子 Graphs_0 [14] 的无自环版本。与任何运算子一样，其一元运算 $G_1:=\mathsf{Graphs}_0(1)$ 构成一个微分分次结合代数，运算子复合 $\circ$ 作为乘法。具体而言，G_1 中的元素是形如（Γ，o）的线性组合，其中 Γ 是一个带有一个特殊“外部”顶点的连通图，且其定向 $o=e_1\wedge\cdots\wedge e_k$ 由边的排序给出。



外部顶点可以有任意度数；所有其他顶点的度数都必须至少为 3。

乘积（即运算子复合）的定义是将一个图插入另一个图，并对所有将关联边重新连接到 Γ_2 的顶点上的方式求和。



δ 上的微分 G_1 由拆分图的顶点给出，如（10）、（11）所示。



接下来，我们定义向量空间

$$\underline{X}:=\mathbb{Q}\emptyset\oplus\bigoplus_{g\geq 1}X_g.$$

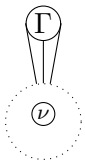
它由任意亏格的 X_g 的生成元，以及一个额外的生成元 $\emptyset$ 生成。我们将 $\emptyset$ 视为膨胀图示中的空图，或者原始图示中只有一个特殊顶点的图。

微分分次代数 G_1 在复形 X 上有一个左作用，定义如下 __ ws:

$$G_1\otimes\underline{X}\to\underline{X}$$

(17)

$$(\Gamma,\nu)\mapsto\Gamma\circ\nu=\sum$$



这里同样是将图 ν 插入 Γ 的外部顶点，并以所有可能的方式将相邻的半边重新连接到 ν 的顶点。如果将 Γ 的一条半边重新连接到 ν 的特殊顶点，则该半边会变为未标记。等价地，在膨胀图示中，与特殊顶点相邻的 Γ 的每条半边，要么重新连接到 ν 的一个内部顶点，要么标记为 ϵ。特别地，如果 $\nu=\emptyset$，那么只需将与外部顶点相邻的 Γ 的所有半边标记为 ϵ。

引理 5.5. 上面的运算 $\circ$ 是微分分次结合代数 G_1在微分分次向量空间 X上的良定义左作用。

—

证明. 首先，让我们检验对于图 $\Gamma_1, \Gamma_2 \in G_1$ 和 $\nu \in X$，有

$$\Gamma_1 \circ (\Gamma_2 \circ \nu) = (\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \circ \nu.$$

两边各自都是这样得到的图之和：将与 Γ_1 处的外部顶点相连的半边重新连接到 Γ_2 的内部顶点或 ν的顶点，并将与 Γ_2 处的外部顶点相连的半边重新连接到 ν的顶点。因此，两边相等。

接下来，我们需要检查与微分的相容性，也就是说

$$\delta(\Gamma \circ \nu) = (\delta\Gamma) \circ \nu + (-1)^{|\Gamma|}\Gamma \circ \delta\nu.$$

这一验证是直接的。我们概述其论证。首先，注意到

$$\delta_\omega(\Gamma \circ \nu) = (-1)^{|\Gamma|}\Gamma \circ \delta_\omega\nu,$$

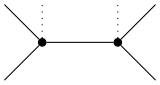
因为 $\Gamma \circ (-)$ 不与装饰 ϵ 或 ω相互作用。剩下要证明的是

$$\delta_s(\Gamma \circ \nu) = (\delta\Gamma) \circ \nu + (-1)^{|\Gamma|}\Gamma \circ \delta_s\nu. \tag{18}$$

两边出现的项分为以下四类：

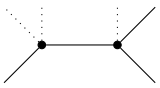
- (A) 由拆分 Γ 的内部顶点产生的项。等式两边的这些项相同，可以忽略。

- (B) 由拆分 ν 的非特殊顶点 v 产生的项。在 (18) 的左边，拆分操作是在可能已将 Γ 的某些边连接到 v 之后进行的。图示如下：

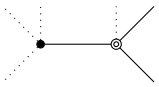


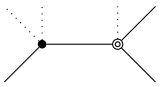
新边用虚线绘制。在 (18) 的右边也会产生相同的项，但不包括这样的图：其中有 0 条（称为类型 (B0)）或 1 条（称为类型 (B1)）旧边与其中一个顶点相接。

(B0): 

(B1): 

- (C) 在 (18) 的左边和右边，都有由拆分 ν 的特殊顶点产生的项。处理方式与上文 (B) 类似，除了以下类型的项之外，它们都能匹配：

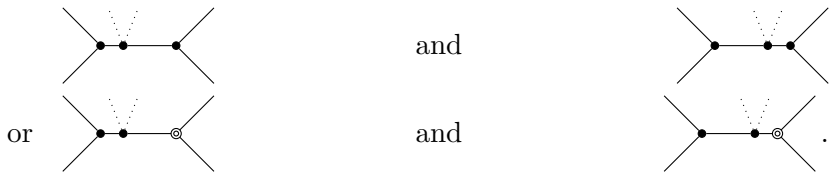
(C0)： 

(C1)： 

这些项出现在 (18) 的左边，但（先验地）不出现在右边。

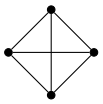
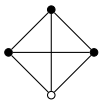
- (D) 最后，等式 (18) 右边还有一些项，它们来自对 Γ 的外部顶点进行分裂。这些项当然不会出现在左边，因为运算$\Gamma \circ (-)$ 会移除 Γ 的外部顶点。不过，仔细观察可知，右边这些类型为 (D) 的项恰好与左边上文类型为 (B0) 和 (C0) 的项相匹配。

还需证明等式 (18) 左侧尚未匹配的项 (B1) 和 (C1) 均两两抵消。注意，每个这样的项都会出现两次，分别来自连接到被分裂顶点的“旧”边的两侧：

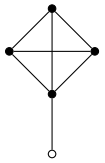
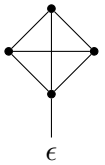
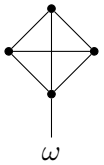


在每种情况下，这两项都会抵消。注意，分裂所产生的新边总是排序中的第一条。由此可知，这两项符号相反，引理得证。□

接下来，设 $\gamma \in \mathsf{GC}_0$ 为一个图。然后，我们通过对将 γ 的一个顶点变为外部顶点的所有方式求和，来定义元素 $\gamma^1 \in G_1$。例如：

$\gamma =$  $\mapsto \gamma^1 = 4$ 

我们还通过添加一条边和外部顶点来定义 $\gamma^\circ \in G_1$。类似地，我们通过添加一条 ϵ-腿来定义 $\gamma^\epsilon \in \underline{X}$，并通过添加一条 ω-腿来定义 $\gamma^\omega \in X$。例如，对于如上所述的 γ：

$\gamma^\circ = 4$  , $\gamma^\epsilon = 4$  ϵ , $\gamma^\omega = 4$  ω .

为确定符号，新添加的边成为边的排序中的第一条。在 γ^ω 的情形下，新的（指定半边） ω 在边的排序中紧接在新添加的边之后，并且 ω。注意， $\delta_\omega \gamma^\omega = -\gamma^\epsilon$。

引理 5.6。 上述运算满足以下相容关系，对于 γ、$\nu \in \mathsf{GC}_0$ ：

$$\delta(\gamma^1) - (\delta\gamma)^1 = \gamma^\circ \tag{19}$$

$$(\{\gamma_1, \gamma_2\})^1 = \gamma_1^\circ \circ \gamma_2^1 + (-1)^{|\gamma_1||\gamma_2|} \gamma_2^\circ \circ \gamma_1^1 \tag{20}$$

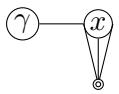
证明。对于（19），注意到标记一个顶点与顶点分裂可交换，但外部顶点的分裂可能导致外部顶点之后的度数为 1 或 2。度数为 1 的项为 γ°。度数为 2 的项通过类似于引理 5.5 证明末尾所用的论证相互抵消。

对于（20），注意到 $(\{\gamma_1, \gamma_2\})^1$ 是通过一条边连接 γ_1 和 γ_1，并将 γ_1 或 γ_2 中的一个顶点标记为外部顶点而得到的图的线性组合。外部顶点位于 γ_2 中的项与 $\gamma_1^\circ \circ \gamma_2^1$ 相同，而外部顶点位于 γ_1 中的项与 $(-1)^{|\gamma_1||\gamma_2|} \gamma_2^\circ \circ \gamma_1^1$相同。□

对于图 $x_1, \ldots, x_k \in X$，我们将它们的并集记为 $x_1 \cup \cdots \cup x_k$。对于 $\gamma \in \mathsf{GC}_0$ 和 $x \in X$，定义运算

$$\lambda(\gamma, x) := \gamma^\circ \circ x - \gamma^\epsilon \cup x.$$

具体而言，该运算通过一条边（v， w）连接 γ 和 x，并对 v 的所有顶点以及 x的所有非特殊顶点 w 求和。

$\lambda(\gamma, x) = \sum$ 

引理 5.7。 运算 $\lambda(\gamma, -)$ 是一个导子，即，

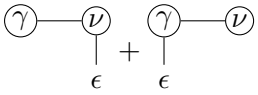
$$\lambda(\gamma, x_1 \cup \cdots \cup x_k) = \sum_{j=1}^{k} \pm x_1 \cup \cdots \cup \lambda(\gamma, x_j) \cup \cdots \cup x_k. \tag{21}$$

此外，对于 $\gamma, \nu \in \mathsf{GC}_0$

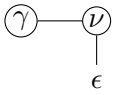
$$\{\gamma, \nu\}^\epsilon = -\lambda(\gamma, \nu^\epsilon) - (-1)^{|\gamma||\nu|} \lambda(\nu, \gamma^\epsilon), \ and \tag{22}$$

$$\{\gamma, \nu\}^\omega = \lambda(\gamma, \nu^\omega) + (-1)^{|\gamma||\nu|} \lambda(\nu, \gamma^\omega)\,. \tag{23}$$

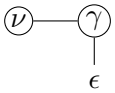
证明。 </style}从引理上方 λ 的图示描述可清楚看出，导子性质 (21) 成立。因此，我们重点讨论 (22)、(23)。元素 $\{\gamma,\nu\}^\epsilon$ 是通过一条边连接 γ 和 ν，并在 γ 或 ν 的某个顶点处添加一条 ϵ 腿得到的。

$$\{\gamma,\nu\}^\epsilon =$$ 

为确定符号，请注意，在边的隐式排序中， ϵ-边位于第一位，接着是水平边，然后是 γ 的边，最后是 ν 的边。另一方面

$$\lambda(\gamma,\nu^\epsilon) =$$ 

若边的排序为水平边位于第一位、 ϵ-边位于第二位，接着是 γ 的边，然后是 ν 的边。那么

$$\lambda(\nu,\gamma^\epsilon) =$$ 

采用类似的边排序。因此可得（22）。等式（23）同理可证，但需注意，由于 ω-装饰的次数为奇数，也就是说，赋值 $\gamma\mapsto\gamma^\omega$ 的次数为偶数零，因此会多出一个符号。□

5.3. **映射** G。 令 $J=\{j_1,\dots,j_k\}$ 表示 $\{1,\dots,n\}$ 的一个有序子集，即选择指标使得 $j_1<\dots<j_k$。我们定义一个线性映射

$$G\colon (\mathrm{Sym}(\mathsf{GC}_0),\delta+\delta_{\{,\}})\to \underline{X}$$

其定义公式为

$$\begin{aligned} G(\gamma_1\cdots\gamma_n) &= \sum_{|J|=k}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\pm\gamma^1_{j_{\sigma(1)}}\circ\cdots\circ\gamma^1_{j_{\sigma(k)}}\circ\cup_{i\notin J}\gamma_i^\omega \\ &= \cup_{i=1}^n\gamma_i^\omega+\sum_{\ell=1}^n\pm\gamma^1_\ell\circ(\cup_{\substack{i=1\\ i\neq\ell}}^n\gamma_i^\omega)+\cdots . \end{aligned}$$

符号反映了公式中符号 γ_j 的置换。带有 $J=\{1,\dots,k\}$ 且 σ 为恒等映射的项，其符号为 $+$。结合 §2.1 中关于对称积中因子置换的约定，即可确定所有其他符号。

命题 5.8. 线性映射 G 是微分分次向量空间之间的映射，即 $(\delta_s+\delta_\omega)\circ G=G\circ(\delta+\delta_{\{,\}})$。

证明。 我们有 $\delta_\omega\gamma^\omega=-\gamma^\epsilon$，因此

$$\begin{aligned} \delta_\omega G(\gamma_1\cdots\gamma_n) &= \delta_\omega\sum_{|J|=k}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\pm\gamma^1_{j_{\sigma(1)}}\circ\cdots\circ\gamma^1_{j_{\sigma(k)}}\circ\cup_{i\notin J}\gamma_i^\omega \\ &= -\sum_{|J|=k}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\pm\gamma^1_{j_{\sigma(1)}}\circ\cdots\circ\gamma^1_{j_{\sigma(k)}}\circ\sum_{\ell\notin J}\gamma^\epsilon_\ell\cup_{\substack{i\notin J\\ i\neq\ell}}\gamma_i^\omega . \end{aligned}$$

另一方面，利用上文的（19）式

$$\delta_s G(\gamma_1\cdots\gamma_n)-\sum_{r=1}^n\pm G(\gamma_1\cdots\delta\gamma_r\cdots\gamma_n)=\sum_{|J|=k}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\pm\sum_{\ell=1}^k\pm\gamma^1_{j_{\sigma(1)}}\circ\cdots\gamma^\circ_{j_{\sigma(\ell)}}\cdots\circ\gamma^1_{j_{\sigma(k)}}\circ\cup_{i\notin J}\gamma_i^\omega .$$

接下来，利用（20）式和（23）式，我们得到

$$\begin{aligned}
G(\delta_{\{,\}}(\gamma_1\cdots\gamma_n)) &= \frac{1}{2}\sum_{|J|=k}\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\pm\gamma^1_{j_{\sigma(1)}}\circ\cdots\{\gamma_{j_{\sigma(r)}},\gamma_{j_{\sigma(r+1)}}\}^1\cdots\circ\gamma^1_{j_{\sigma(k)}}\circ\cup_{i\notin J}\gamma_i^\omega \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{|J|=k}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\pm\gamma^1_{j_{\sigma(1)}}\circ\cdots\circ\gamma^1_{j_{\sigma(k)}}\circ\sum_{a,b\notin J}\{\gamma_a,\gamma_b\}^\omega\cup_{\substack{i\notin J\\ i\neq a,b}}\gamma_i^\omega \\
&=\sum_{|J|=k}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\pm\gamma^1_{j_{\sigma(1)}}\circ\cdots\gamma^\circ_{j_{\sigma(r)}}\circ\gamma^1_{j_{\sigma(r+1)}}\cdots\circ\gamma^1_{j_{\sigma(k)}}\circ\cup_{i\notin J}\gamma_i^\omega \\
&\quad+\sum_{|J|=k}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\pm\gamma^1_{j_{\sigma(1)}}\circ\cdots\circ\gamma^\circ_{j_{\sigma(k)}}\circ\cup_{i\notin J}\gamma_i^\omega \\
&\quad-\sum_{|J|=k}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\pm\gamma^1_{j_{\sigma(1)}}\circ\cdots\circ\gamma^1_{j_{\sigma(k)}}\circ\sum_{a\notin J}\gamma_a^\epsilon\cup_{\substack{i\notin J\\ a\neq i}}\gamma_i^\omega.
\end{aligned}$$

该命题可通过对上述表达式求和得出。 □

5.4. 运算 ∇. 考虑次数为 $+1$ 的运算

$$\nabla\colon \underline{X}[-1]\to\underline{X}$$

$$\nu\mapsto\sum$$  ,

其定义为对所有将一条新边连接到图 ν中任意一对顶点的方式求和。与式 (17) 比较可知，这可以视为将作用 $\circ$ 扩展到自环图

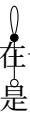
$$\tau'=$$ 

使得

$$\nabla\nu=\tau'\circ\nu.$$

如引理 5.5 所示，我们于是有

$$\delta\nabla\nu+\nabla\delta\nu=(\delta\tau')\circ\nu=0,$$

因为 $\delta\tau'=$  在一个内部顶点处有一个圈图，因此其作用为零。因此，运算 ∇与 X 上的微分反对易，并且是复形之间的映射。 —

5.5. 映射的构造 F 定理 5.1 的 我们将映射 $\mathrm{Sym}(\mathsf{GC}_0)\to X$ 定义为推论 5.4 中的同构 Φ与上述映射 G 的复合：

$$(\mathrm{Sym}(\mathsf{GC}_0),\delta)\xrightarrow{\Phi}(\mathrm{Sym}(\mathsf{GC}_0),\delta+\delta_{\{,\}})\xrightarrow{G}\underline{X}.$$

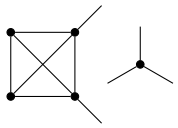
注意，若左侧的自变量属于子空间 $S^{10}(\mathsf{GC}_0)$，则其像落在由至多含 10 ω 条腿的图张成的子空间 $C[21]\subset X$ 中。因此，我们可以通过限制 $G\circ\Phi$ 来定义定理 5.1 的映射 F。更准确地说， F 是以下映射的复合

$$F:\mathrm{Sym}^{10}(\mathsf{GC}_0)^{(g-1)}[-11]\oplus\mathrm{Sym}^{10}(\mathsf{GC}_0)^{(g-2)}[-12]\xrightarrow{(G\circ\Phi)\oplus(G\circ\Phi)}C_g\oplus C_{g-1}[-1]\xrightarrow{id+\nabla}C_g.$$

5.6. 毛图复形与 (X,δ_s)。 我们的最终目标是证明定理 5.1 中的单射性断言。为此，有必要研究复形 (X,δ_s) 的上同调。这也可以等同于 $(X,\delta_\omega+\delta_s)$ 关于腿数滤过的伴随分次复形。

—

我们考虑一个图复形 fHGC，它由形如 $(\Gamma,\ o)$ 的二元组的线性组合生成，其中 Γ 是一个可能不连通、无自环且带有（未编号）外腿的图。



我们要求每个顶点的度数为 ≥ 3。定向 $o=e_1\wedge\cdots\wedge e_k$ 是结构边（即非腿边）集合的一个排序；与之前一样，我们将同构图及其排序视为相差一个符号的对象，参见 (2)、(3)。为方便起见，约定图 Γ 可以是空图，但禁止出现仅由一条边构成且不含顶点的连通分支。fHGC 上的微分 δ 仍由顶点分裂给出

$$\delta:$$  $$\mapsto\sum$$ $$.$$

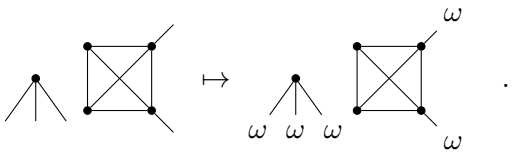
图的次数是结构边的数量。图复形 (fHGC δ) 在文献中广为人知。根据 [8]，对于 $2g+n\geq 3$，环阶为 g 且带有 n 条腿的连通部分的上同调计算了曲线模空间 $W_0H^\bullet_c(\mathcal{M}_{g,\ n})^{\mathbb{S}_n}$ 的紧支撑上同调的对称权重 0 部分。密切相关的复形也能计算长纽结空间的有理同调 [2]。

然后我们定义一个微分分次向量空间的映射

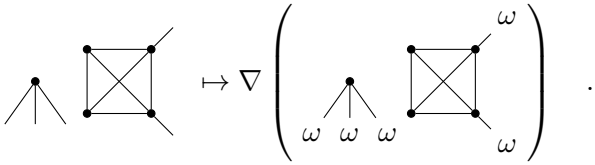
$$K:(\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\alpha\oplus\mathbb{Q}\beta\oplus\mathbb{Q}\alpha\beta)\otimes\mathsf{fHGC}\to(\underline{X},\delta_s),\tag{24}$$

其中，α 表示一条 $(\epsilon-\epsilon)$ 边，β 表示一条 $(\epsilon-\omega)$ 边。更具体地说，映射 K 在四个直和项上的作用如下：

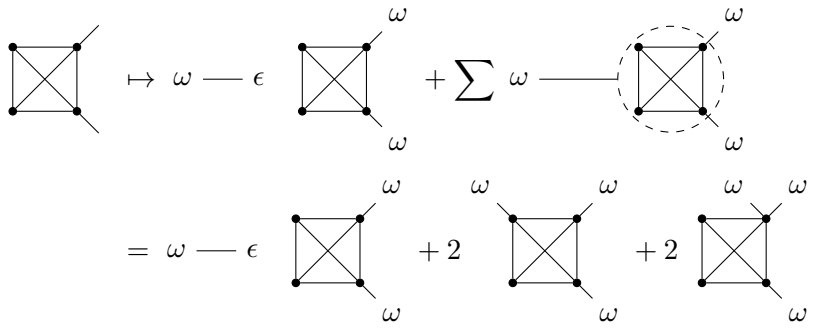
- 在第一个直和项 fHGC 上，映射 K 的作用就是自然包含：



- 在 $\mathbb{Q}\alpha\otimes$fHGC 上，映射 K 应用自然包含，再接着应用 ∇：

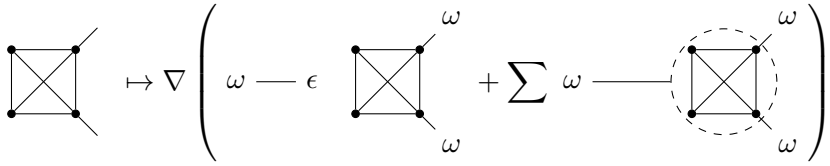


- 在 $\mathbb{Q}\beta\otimes$fHGC 上，映射 K 添加一条 $(\epsilon-\omega)$-边，并额外连接一条 ω-腿。



这里的求和遍历所有将一条新的 ω-腿连接到一个内部顶点的方式。

- 在直和项 $\mathbb{Q}\alpha\beta\otimes$fHGC 上，映射 K 的作用如上，随后再作用 ∇:



命题 5.9. 映射 K 是微分分次向量空间之间的拟同构。

证明. 首先验证 K 与微分可交换。对于直和项 fHGC 和$\mathbb{Q}\beta\otimes$fHGC，这一点显而易见。对于另外两个直和项，则利用 ∇与微分可交换这一事实。

接下来需要验证微分分次映射 K 是拟同构。也就是说，我们要验证 K 的映射锥是无圈的。我们按照图的连通分支数对定义域和值域进行过滤，因此也对映射锥进行过滤。在伴随分次上，我们只看到那些不改变连通分支数的微分部分。Turchin 和第二作者 [19]研究过所得复形的一个近似变体。我们在下文附录 A 中回顾他们的主要结果，并给出一个略微变化的版本（推论 A.2），它说明我们的谱序列的 E^1 页具有如下形式

$$E^1=(\mathbb{Q}T\otimes \mathrm{Sym}^{\geq 0}\,\mathbb{Q}L^{\omega}\oplus \mathrm{Sym}^{\geq 2}\,\mathbb{Q}L^{\omega})\otimes(\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}L^{\epsilon})\otimes H(\mathsf{fHGC})\Rightarrow H(cone(K)),$$

其中 T、L^{ϵ}、L^{ω} 是附录 A 中的图。E^1 页上的微分对应于 δ_s 中使连通分支数恰好减少一个的那些项。关键观察是，将上面的第一个张量因子映射到其自身的分量具有如下形式:

$$\mathrm{Sym}^{\geq 2}\,\mathbb{Q}L^{\omega}\to\mathbb{Q}T\otimes\mathrm{Sym}^{\geq 0}\,\mathbb{Q}L^{\omega}$$

其形式为

$$\underbrace{L^{\omega}\cup\cdots\cup L^{\omega}}_{k}\mapsto-\binom{k}{2}\underbrace{L^{\omega}\cup\cdots\cup L^{\omega}}_{k-2}\cup T.$$

这显然使第一个张量因子成为无圈的。通过一个简单的谱序列论证，可得 $H(E^1)=0$，从而 $H(cone(K))=0$，如所需。□

5.7. **上同调上的单射性与定理 5.1 的证明**。投影到由恰好具有 $10\,\omega$ 条腿的图所张成的子空间$C_{g,10\omega}\subset C_g$ 是一个微分分次向量空间的映射

$$\pi\colon (C_g,\delta_s+\delta_{\omega})\to(C_{g,10\omega},\delta_s).$$

因此，要证明 F 在上同调上诱导单射，只需证明 $\pi\circ F$在上同调上诱导单射。但 $\pi\circ F$恰好与上一

节中的映射 $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\alpha$相同，只是将其限制在直和项 $(\otimes)\ \pi\circ F$ fHGC 的 10-毛部分的一个子空间上。更准确地说，适合放入如下交换图中

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Sym}^{10}(\mathsf{GC}_0)[-11]\oplus\mathsf{Sym}^{10}(\mathsf{GC}_0)[-12] & \xrightarrow{\pi\circ F} & \bigoplus_g C_{g,10\omega} \\ & {\scriptstyle \iota\oplus\iota}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle K} & \\ & (\mathsf{fHGC}[-11]\oplus\mathbb{Q}\alpha\otimes\mathsf{fHGC}[-12])_{\text{10-毛}} & \end{array}$$

通过映射 ι 将 $\gamma_1\cdots\gamma_{10}\in\mathsf{Sym}^{10}(\mathsf{GC}_0)$ 发送到毛图



$\in(\mathsf{fHGC})_{\text{10-hair}}$

根据定理 1]，映射 ι 在上同调上诱导一个单射 [18, 。

但根据命题 5.9，映射 K （的限制）在上同调上也是一个单射，因此 $\pi\circ F$也是如此。□

6. Case $n=0$ – second injection

本节将描述 $\mathsf{gr}_{11}H_c^\bullet(\mathcal{M}_g)$ 中第二族非平凡上同调类，它们由 GC_0 中的余循环构造而成。更具体地说，我们将证明以下结果。

定理 6.1。 存在一个微分分次向量空间之间的映射

$$E\colon \mathrm{Sym}^9(\mathsf{GC}_0)^{(g-3)}[-22]\oplus\mathrm{Sym}^6(\mathsf{GC}_0)^{(g-5)}[-22]\oplus\mathrm{Sym}^3(\mathsf{GC}_0)^{(g-7)}[-22]\to B_g$$

它在上同调上诱导一个单射

$$E\colon H^{k-22}(\mathrm{Sym}^9(\mathsf{GC}_0))^{(g-3)}\oplus H^{k-22}(\mathrm{Sym}^6(\mathsf{GC}_0))^{(g-5)}\oplus H^{k-22}(\mathrm{Sym}^3(\mathsf{GC}_0))^{(g-7)}\to H^k(B_g).$$

本节余下部分将构造映射 E，并证明它在上同调上诱导一个单射。

由于这一构造相当技术化且带有临时性，我们先在此描述其思路。回顾上一节，我们构造了图复形（$C_g,\ \delta_s+\delta_\omega$）中的显式余循环（例如 $x\in C_g$），该复形由至多含十条 ω腿的图组成。为证明 x 确实代表一个非平凡的上同调类，其思路是考虑投影$\pi\colon (C_g,\ \delta_s+\delta_\omega)\to(C_{g,\ 10\omega},\ \delta_s)$，并利用后一个复形的上同调是可计算的。具体而言，根据命题 5.9，它与亏格 g 的 10-毛部分一致，属于

$$(\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\alpha\oplus\mathbb{Q}\beta\oplus\mathbb{Q}\alpha\beta)\otimes H(\mathsf{fHGC}), \tag{25}$$

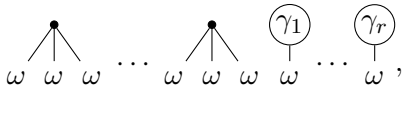
而且，我们从先前的文献中已知带毛图上同调 H(fHGC) 中有许多非平凡的上同调类。

我们将 $x=\sum_{j=0}^{10}x_j$ 拆分为具有 x_j j 个 ω-腿的分量 x_{10}，那么顶层部分 x_{10}在$C_{g,\ 10\omega}$（即在（25）中）表示一个非平凡的上同调类。反过来，对于给定的余循环 $x_{10}\in C_{g,\ 10\omega}$我们可以问它是否能够延拓为余循环 $x_{10}+x_9+\cdots+x_0\in(C_g,\ \delta_s+\delta_\omega)$。遗憾的是，这个延拓问题并不平凡；在上一节中，我们只能为特定类型的 x_{10} 提供解，而这些解来自（25）中的直和项$\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\alpha$。定理 6.1 背后的思路是改为考虑直和项 $\mathbb{Q}\alpha\beta$。在这种情况下，最自然的方法不是尝试构造 $x_0,\ \ldots,\ x_9$，而是构造一个余循环 $x_{12}+x_{11}\in(B_g,\ \delta_s+\delta_\omega)$，使其在映射 $\delta_\omega\colon B_g\to C_g$ 下的像为所需的 x_{10}。这就是本节构造的思路。其优点在于，我们只需考虑两个直和项，即 x_{12} 和 x_{11}，并且它们将比 $\delta_\omega(x_{12}+x_{11})$具有更自然的组合形式。

6.1. 一些组合构造。 我们的映射 E 将是若干部分的线性组合，下面我们将依次介绍这些部分。首先，对于 $k = 0,\ 1,\ \ldots$ 我们考虑映射

$$\Phi_k \colon \mathrm{Sym}(\mathsf{GC}_0) \to \underline{X}$$

$$\Phi_k(\gamma_1 \cdots \gamma_r) = \underbrace{\tau \cup \cdots \cup \tau}_{k} \cup \gamma_1^\omega \cup \cdots \cup \gamma_r^\omega =$$



with

$$\tau =$$

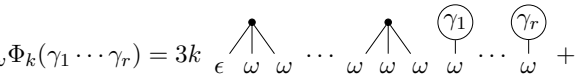


三叉图。由于只要不存在 ϵ-腿，微分 δ_s 就会分配到运算 $\cup$ 上，因此我们有

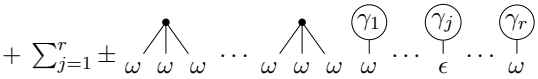
$$\delta_s \Phi_k(\gamma_1 \cdots \gamma_r) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_{j-1}|} \Phi_k(\gamma_1 \cdots (\delta\gamma_j) \cdots \gamma_r). \tag{26}$$

另一方面，我们有

$$\delta_\omega \Phi_k(\gamma_1 \cdots \gamma_r) = 3k$$



$$+ \sum_{j=1}^{r} \pm$$

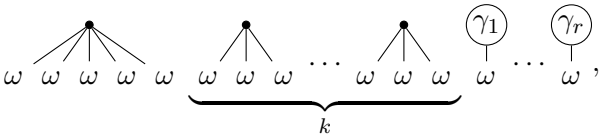


(27)

我们还定义类似的运算

$$\hat{\Phi}_k \colon \mathrm{Sym}(\mathsf{GC}_0) \to \underline{X}$$

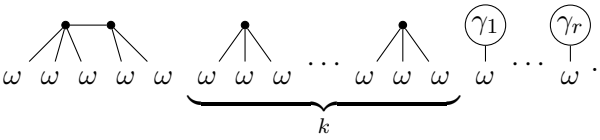
$$\hat{\Phi}_k(\gamma_1 \cdots \gamma_r) =$$



它满足

$$\delta_s \hat{\Phi}_k(\gamma_1 \cdots \gamma_r) - \sum_{j=1}^{r} (-1)^{|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_{j-1}|} \hat{\Phi}_k(\gamma_1 \cdots (\delta\gamma_j) \cdots \gamma_r)$$

$$= 10$$

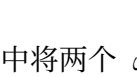


(28)

接下来我们定义零次运算

$$\Psi \colon \underline{X} \to \underline{X}$$

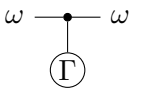
$$\Gamma \mapsto \sum$$



其中，我们对在膨胀图示中将两个 ω-腿连接到图 Γ 的所有方式求和。这意味着半边连接到一个内部顶点，或变成一条 ϵ-腿。（这可以看作是连接到特殊顶点。）

引理 6.2。 如果图 $\Gamma \in X$ 不包含任何 ϵ-腿，那么我们有

$$\delta_s \Psi(\Gamma) - \Psi(\delta_s \Gamma) = -\sum$$



$$=: -\Xi(\Gamma),$$

其中右侧再次对将腿连接到 Γ 的所有方式求和，而将腿连接到特殊顶点等同于在腿上引入一个 ϵ-标记。

证明。 计算过程与引理 5.6 的证明类似。 □

此外，我们在 GC_0 上使用前李乘积 $\bullet$。对于 $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \mathsf{GC}_0$

$$\gamma_1 \bullet \gamma_2 = \sum$$ 

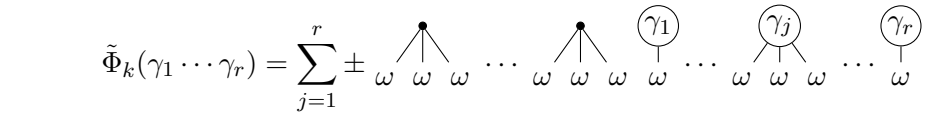
$$\in \mathsf{GC}_0,$$

其中求和遍历将 γ_2 插入 γ_1的某个顶点的所有方式。我们只需要使用 $\bullet$的以下性质，它是命题 5.3 的一个特例（证明见 [20]）：

$$\delta(\gamma_1 \bullet \gamma_2) - (\delta\gamma_1) \bullet \gamma_2 - (-1)^{|\gamma_1|}\gamma_1 \bullet (\delta\gamma_2) = \{\gamma_1, \gamma_2\}. \tag{29}$$

最后，我们定义运算

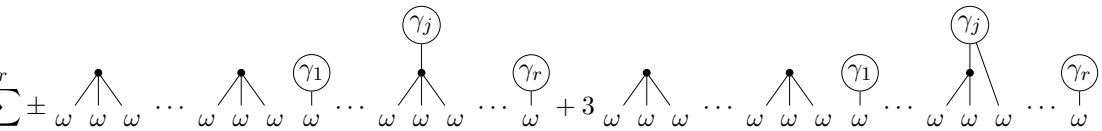
$$\tilde{\Phi}_k \colon \mathrm{Sym}(\mathsf{GC}_0) \to \underline{X}$$

$$\tilde{\Phi}_k(\gamma_1 \cdots \gamma_r) = \sum_{j=1}^{r} \pm$$ 

.

˜换言之， Φ_k 的定义与 Φ_k类似，只不过我们将 3 ω条腿连接到其中一个γ_j上，而不是一个。

引理 6.3。 表达式 $\delta_s\tilde{\Phi}_k(\gamma_1 \cdots \gamma_r) - \sum_{j=1}^{r}(-1)^{|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_{j-1}|}\tilde{\Phi}_k(\gamma_1 \cdots (\delta\gamma_j) \cdots \gamma_r)$ 等于：

(30)
$$\sum_{j=1}^{r} \pm$$ 

.

证明。该 验证过程与上述图形计算类似。我们省略细节 s. □

6.2. **映射的定义** E。 接下来，我们定义分次向量空间之间的映射

$$E_k \colon \mathrm{Sym}(\mathsf{GC}_0) \to \underline{X}$$

$$\gamma_1 \cdots \gamma_r \mapsto \Phi_k(\gamma_1 \cdots \gamma_r) + k\tilde{\Phi}_{k-1}(\gamma_1 \cdots \gamma_r) + \frac{3k}{10}\hat{\Phi}_{k-1}(\gamma_1 \cdots \gamma_r) + 3k\Psi(\Phi_{k-1}(\gamma_1 \cdots \gamma_r))$$
$$- \sum_{i=1}^{r} \gamma_i^1 \circ \Phi_k(\gamma_1 \cdots \hat{\gamma}_i \cdots \gamma_r) + \sum_{i<j} \pm\Phi_k(\gamma_1 \cdots (\gamma_i \bullet \gamma_j) \cdots \gamma_r).$$

映射 E_k 不是微分分次向量空间之间的态射；它与微分不交换。不过，我们有以下结果：

引理 6.4。 对于 $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \mathsf{GC}_0,$， E_k 与微分的交换子

$$\delta E_k(\gamma_1 \cdots \gamma_r) - \sum_j \pm E_k(\gamma_1 \cdots \delta\gamma_j \cdots \gamma_r)$$

是由至多含有 $r + 3k - 2$ 条腿（由 ω 装饰）的图构成的线性组合。

证明。 首先注意， $\Phi_k(\gamma_1 \cdots \gamma_r)$ 是 E_k 的定义中唯一含有 $r + 3k$ ω 条腿的项。其余各项暂记为 $X(\gamma_1 \cdots \gamma_r)$，都含有 $r + 3k - 1$ 条 ω 腿。由（26）可知，该引理的断言因此等价于以下陈述：

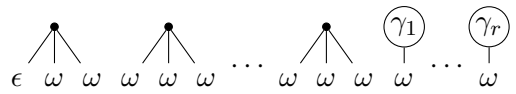
$$[\delta_s, X](\gamma_1 \cdots \gamma_r) := \delta_s X(\gamma_1 \cdots \gamma_r) - \sum_j \pm X(\gamma_1 \cdots \delta\gamma_j \cdots \gamma_r) = -\delta_\omega \Phi_k(\gamma_1 \cdots \gamma_r). \tag{31}$$

为证明这一点，我们分别考察对 $[\delta_s, X]$ 有贡献的各项。首先，由引理 6.2

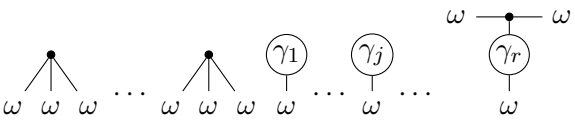
$$[\delta_s, \Psi \circ \Phi_{k-1}](\gamma_1 \cdots \gamma_r) = -\Xi(\Phi_{k-1}(\gamma_1 \cdots \gamma_r)).$$

对 $\Xi(\Phi_{k-1}(\gamma_1 \cdots \gamma_r))$ 有贡献的项分为三类：(Ξ_1) 含有一个新三叉图腿的项；(Ξ_2) 新腿连接到一个三叉图的某个顶点的项；以及 (Ξ_3) 新腿连接到另一个三叉图的某个顶点的项。

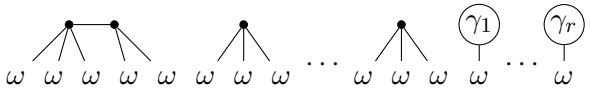
$$\Xi_1 =$$



$$\Xi_2 = \sum$$



$$\Xi_3 = (k-1)$$



项 Ξ_1 抵消了式 (27) 中 $\delta\Phi_k(\cdots)$ 左侧的项，其中一个 ϵ 被放在三叉图的ˆ 腿上。项 Ξ_3 根据式 (28) 与项 $[\delta_s, \Phi_{k-1}](\gamma_1 \cdots \gamma_r)$ 抵消。

接下来暂时记作

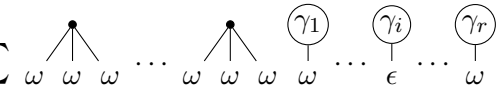
$$Y(\gamma_1 \cdots \gamma_r) := \sum_{i=1}^{r} \gamma_i^1 \circ \Phi_k(\gamma_1 \cdots \hat{\gamma}_i \cdots \gamma_r).$$

然后我们用式 (19) 计算得

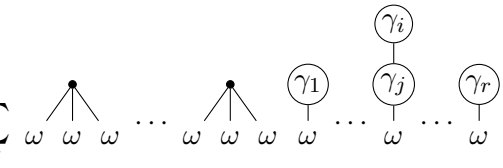
$$[\delta_s, Y](\gamma_1 \cdots \gamma_r) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i^\circ \circ \Phi_k(\gamma_1 \cdots \hat{\gamma}_i \cdots \gamma_r).$$

右侧的项还可以进一步分为：(Y_1) 中 γ_i 连接到一条 ϵ腿上的项；(Y_2) 中 γ_i 连接到另一个γ_j 的某个顶点上的项；以及 (Y_3) 中 γ_i 连接到某个三叉图的顶点上的项。

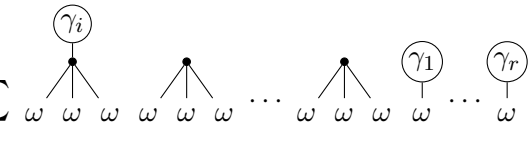
$$Y_1 = \sum_i$$



$$Y_2 = \sum_{i,j}$$



$$Y_3 = \sum_i$$



项 Y_1 抵消了 $\delta\Phi_k(\cdots)$ 中剩余的项，见 (27)，其中一条 ϵ腿连接到γ_i。项 Y_2 抵消了由 $\sum_{i<j} \Phi_k(\gamma_1 \cdots (\gamma_i \bullet \gamma_j) \cdots \gamma_r)$ 与微分的交换子所产生的项，见 (29)。

交换子 $[\delta_s, Z]$ 中计算了 $\Phi_k(\gamma_1 \cdots \tilde{\gamma}_r)$，我们将（30）右端的第一直和项记为 Z_1，第二直和项记为 Z_2。然后第二

直和项 Z_2 抵消了上面的项 Ξ_2 。与此同时，项 Z_1 抵消了上面的项 Y_3。因此，所有项都已处理完毕，且（31）以及引理得证。□

由此立即可得，我们终于可以定义定理 6.1 的映射 E 。

推论 6.5. 映射

$$E\colon \mathrm{Sym}^9(\mathsf{GC}_0)^{(g-3)}[-22]\oplus \mathrm{Sym}^6(\mathsf{GC}_0)^{(g-5)}[-22]\oplus \mathrm{Sym}^3(\mathsf{GC}_0)^{(g-7)}[-22]\to B_g$$

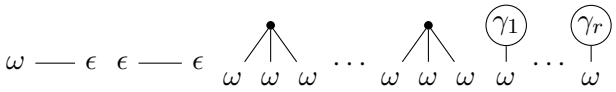
定义为使得

$$(\gamma_1\cdots\gamma_9)\oplus(\mu_1\cdots\mu_6)\oplus(\nu_1\nu_2\nu_3)\mapsto \pi\left(E_1(\gamma_1\cdots\gamma_9)+E_2(\mu_1\cdots\mu_6)+E_3(\nu_1\nu_2\nu_3)\right)\in B_g\,,$$

其中 $\pi\colon\ X_g[-22]\to B_g$ 是投影，且为微分分次向量空间的映射。

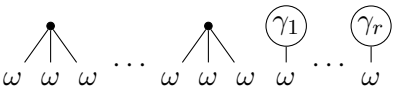
证明。 由引理 6.4， E_k 与微分的交换子中只含有带 ≤ 10 ω腿的项，而这些项会被 π消去。□

6.3. **定理 6.1 的证明**。 剩下需要验证的是，定理 6.1 中映射 E 的上同调映射（定义见推论 6.5）实际上是单射。与上文定理 5.1 的证明类似，只需验证映射 $\pi\circ\delta_\omega\circ E$ 与映射 E 的复合$\pi\colon\ H(C_g,\delta)\ \to H(C_{g.10\omega},\delta_s)$以及拟同构 $\delta_\omega\colon\ B_g\to C_g$的复合是单射。然而，与定理 5.1 的证明不同，复合 $\pi\circ\delta_\omega\circ E$ 不能经由命题 5.9 的上同调同构 K 分解。因此，我们需要追溯命题 5.9 的证明，其中计算了上同调 $H(C_{g,10\omega},\delta_s)$，并找出上同调中属于 $\pi\circ\delta_\omega\circ E$的像的子空间。与该证明一样，我们考虑按图中连通分支数目定义的滤过，以及相应的谱序列。我们需要追踪像 $\pi\circ\delta_\omega\circ E(\gamma_1\cdots\gamma_r)$在此谱序列中的变化。因此，我们考察 $\pi\circ\delta_\omega\circ E(\gamma_1\cdots\gamma_r)$的首阶项，即连通分支数目最多的项。不难看出它是



但这个首阶项与命题 5.9 中的映射 K 作用在 (24) 左侧的直和项 $\mathbb{Q}\alpha\beta\otimes\mathsf{fHGC}$ 上所得到的相同，具体来说，是作用在元素

$$\iota(\gamma_1\cdots\gamma_r):=$$



$$\in \mathsf{fHGC}.$$

但由于映射 ι 在上同调上是单射，且映射 K 在上同调上是单射，因此 $\pi\circ\delta_\omega\circ E$ 也必然是单射。因此， E 在上同调上也如所声称的那样是单射。□

6.4. **定理 1.1 的证明**。为证明引言中的定理 1.1，我们需要验证定理 6.1 和定理 5.1 中映射 E 和 F 的像在 $(C_g,\delta_s+\delta_\omega)$ 的上同调中线性无关。与前面的证明一样，只需验证 $\pi\circ E$ 和 $\pi\circ F$ 的像在 $H(C_{g,10\omega},\delta_s)$ 中线性无关。但命题 5.9 计算了后者的上同调，并将其识别为亏格 g 部分的

$$H(\mathsf{fHGC})_{10\text{-hair}}\oplus\mathbb{Q}\alpha\otimes H(\mathsf{fHGC})_{10\text{-hair}}\mathbb{Q}\beta\otimes H(\mathsf{fHGC})_{9\text{-hair}}\oplus\mathbb{Q}\alpha\beta\otimes H(\mathsf{fHGC})_{9\text{-hair}}.$$

在这一识别下，我们在定理 5.1 的证明中看到，映射 $\pi\circ F$ 的像是前两个直和项构成的子空间

$$H(\mathsf{fHGC})_{10\text{-hair}}\oplus\mathbb{Q}\alpha\otimes H(\mathsf{fHGC})_{10\text{-hair}}.$$

同样，我们在定理 6.1 的证明中看到， $\pi\circ E$ 与到直和项 $\mathbb{Q}\alpha\beta\otimes H(\mathbf{fHGC})_{9\text{-hair}}$ 的投影的复合是一个单射。因此，由于前两个子空间根据命题 5.9 线性无关， $\pi\circ E$ 和 $\pi\circ F$ 的像也必定线性无关。□

7. 欧拉示性数

$\mathbb{S}_n$-等变欧拉示性数所对应的复形与 $X_{g,n}$ 非常相似，已在[17]中计算过；此处的区别在于，ω-腿是奇的，而非偶的。我们回顾 [17]中的结果，然后作必要的修改，以处理这一次数平移。

首先，我们引入函数

$$E_\ell := \frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)\frac{1}{u^d}, \qquad\qquad \lambda_\ell := u^\ell(1-u^\ell)\ell,$$

$$B(z) := \sum_{r\geq 2}\frac{B_r}{r(r-1)}\frac{1}{z^{r-1}},$$

以及 $U_\ell(X,u)$，使得

$$\begin{aligned}\log U_\ell(X,u) &= \log\frac{(-\lambda_\ell)^X\Gamma(-E_\ell+X)}{\Gamma(-E_\ell)}\\ &= X\left(\log(\lambda_\ell E_\ell)-1\right)+(-E_\ell+X-\tfrac{1}{2})\log(1-\tfrac{X}{E_\ell})+B(-E_\ell+X)-B(-E_\ell).\end{aligned}$$

~记 $X^{ev}_{g,n}$ 为一个分次向量空间，其定义方式与 $X_{g,n}$ 相同，但采用偶的 ω-~ ~装饰而非奇的装饰，且所有边（无论是否为结构边）均为奇。令 $X^{ev}_{g,n,r\omega}\subset X^{ev}_{g,n}$ 为由以 ω装饰的 r 条腿所构成的子空间。根据 [17, §4.3], , 等变欧拉示性数的生成函数为[1]

$$\sum_{g,n,r}u^{g+n-1}w^r\chi_{\mathbb{S}_n}(\tilde{X}^{ev}_{g,n,r\omega}) = \prod_\ell\frac{U_\ell(\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)(p_d+1+w^d),u)}{U_\ell(\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)p_d,u)}-1\,,$$

其中， w 形式变量负责记录 ω腿的数量，而 u 形式变量负责记录亏格与穿孔数量之和。考察所引文献中的导子可知，从偶数装饰改为奇数 ω 装饰，唯一需要的改变就是改变项 w^d前的符号。由此得到

$$\sum_{g,n,r}u^{g+n-1}w^r\chi_{\mathbb{S}_n}(\tilde{X}_{g,n,r\omega}) = \prod_\ell\frac{U_\ell(\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)(p_d+1-w^d),u)}{U_\ell(\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)p_d,u)}-1,$$

~其中，$X_{g,\ n}$ 是对$X_{g,\ n}$ 的略微修改版本：所有边都视为奇数，而不只是结构边。可以通过替换$p_d\to -p_d$来纠正对非结构边的这种错误处理；在特征上，这相当于将底层的对称群表示乘以一个经过次数平移的符号表示。因此我们得到:

$$\sum_{g,n,r}u^{g+n-1}w^r\chi_{\mathbb{S}_n}(X_{g,n,r\omega}) = \prod_\ell\frac{U_\ell(\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)(-p_d+1-w^d),u)}{U_\ell(\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)(-p_d),u)}-1.$$

我们是 关注复形 $X_{g,n}$ 的截断，具体来说是由以下图构成的子复形

$$C_{g,n} = \bigoplus_{r=0}^{10}X_{g,n,r\omega}[-21]$$

[1]与所引文献相比，我们减去 1，因为我们的复形中不包含空图。

其由至多包含十条 ω-腿的图张成。令

$$T_{\leq 10}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j w^j\right) = \sum_{j=0}^{10} a_j$$

成为算子　　将形式幂级数的前 10 个系数相加的算子。因此我们得到　　：

$$\sum_{g,n} u^{g+n}\chi_{\mathbb{S}_n}(C_{g,n}) = -u\ T_{\leq 10}\left(\prod_{\ell}\frac{U_\ell(\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)(-p_d+1-w^d),u)}{U_\ell(\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)(-p_d),u)}-1\right),$$

其中因子 $-u$ 计入了特殊顶点导致的总次数和亏格偏移。

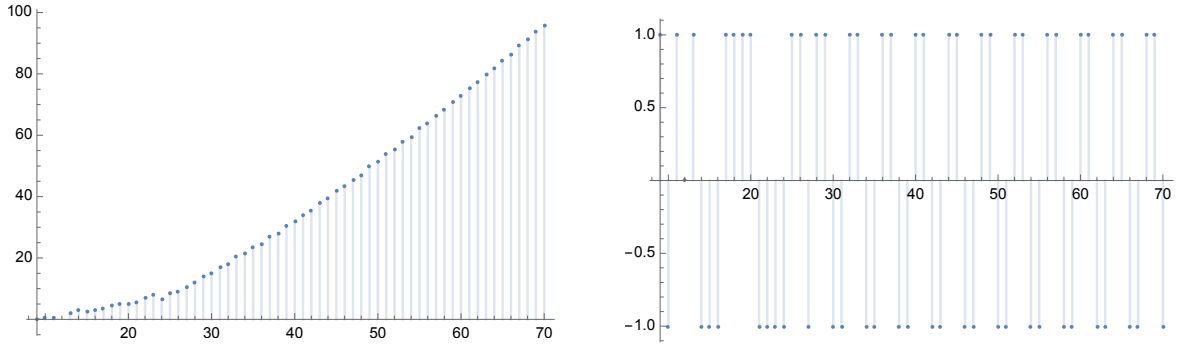
定理 7.1。 曲线模空间的权重 *11* 紧支上同调的等变欧拉示性数由以下生成函数计算：

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{g,n\geq 0\\ 2g+n\geq 3}} u^{g+n}\chi_{\mathbb{S}_n}(\mathrm{gr}_{11}H_c(\mathcal{M}_{g,n})) = \sum_{g,n} u^{g+n}\chi_{\mathbb{S}_n}(C_{g,n})$$
$$= -u\ T_{\leq 10}\left(\prod_{\ell\geq 1}\frac{U_\ell(\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)(-p_d+1-w^d),u)}{U_\ell(\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)(-p_d),u)}-1\right).$$

令 $n=0$，我们得到：

$$\frac{1}{2}\sum_{g\geq 2} u^g\chi(\mathrm{gr}_{11}H_c(\mathcal{M}_g)) = u^9 - 2u^{10} + 2u^{11} + 8u^{13} - 17u^{14} - 14u^{15} - 20u^{16} + 29u^{17} + 85u^{18}$$
$$+ 178u^{19} + 123u^{20} - 311u^{21} - 1049u^{22} - 2443u^{23} - 776u^{24} + 6027u^{25} + 7200u^{26} - 34892u^{27}$$
$$+ 196735u^{28} + 1215236u^{29} - 3230856u^{30} - 26415680u^{31} + O(u^{32})$$

以下图表展示了 $\frac{1}{2}|\chi(\mathrm{gr}_{11}H_c(\mathcal{M}_g))|$的对数和 $\mathrm{sgn}(\chi(\mathrm{gr}_{11}H_c(\mathcal{M}_g)))$ 对于 g 不超过 70 时的数值。



我们还得到了关于 $n>0$ 的有趣数值数据。回顾一下，根据推论 4.3，对于$g\leq 4$ 和 $n\leq 6$, $\mathrm{gr}_{11}H_c^\bullet(\mathcal{M}_{g,\,n})$ 为零。图1中，我们给出了 $\mathbb{S}_n$ 的等变欧拉示性数，针对 $5\leq g\leq 16$ 和 $n\leq 6$, 并以对称函数的 Schur 多项式基表示。正如引言中所述，我们的计算结果与 Bergstr¨om 和 Faber 针对$g=2$ 和 3 的结果一致。图2中，我们给出了 $g=4$ 和 $7\leq n\leq 15$ 的欧拉示性数。更详尽的 $g+n\leq 24$ 数据可在 https://github.com/wilthoma/weight11mgn 查阅。

Appendix A. Recollection and variant of [19]

我们用 $X^{conn}\subset X$ 表示由在展开后的图示中连通的图所张成的子复形。我们用 X^{tp} 表示一个定义方式与 X 相同的图复形，只是允许所有　　—

g,n	0	1	2	3	4	5	6
5	0	0	0	0	0	$-s_{1,1,1,1,1}$	$-s_{1,1,1,1,1,1} + 2s_{3,1,1,1}$
6	0	0	0	0	$-s_{2,1,1}$	$-s_{2,1,1,1} + s_{3,1,1} + s_{3,2} + 2s_{4,1}$	$-4s_{1,1,1,1,1,1} - 2s_{2,1,1,1,1} - 3s_{2,2,1,1} - 3s_{2,2,2} + s_{3,1,1,1} - 2s_{3,2,1} - 2s_{3,3} + 2s_{4,1,1} - 3s_{4,2} - 2s_{5,1} - 3s_6$
7	0	0	$s_{1,1}$	$s_{1,1,1} - 2s_3$	$2s_{2,2} - 2s_{3,1}$	$-s_{1,1,1,1,1} - 7s_{2,1,1,1} - 6s_{3,1,1} + 2s_{3,2} + s_{4,1} + 4s_5$	$-3s_{1,1,1,1,1,1} - 14s_{2,1,1,1,1} + 3s_{2,2,1,1} - 5s_{2,2,2} + 2s_{3,1,1,1} + 11s_{3,2,1} + 10s_{3,3} + 20s_{4,1,1} + 3s_{4,2} + 6s_{5,1}$
8	0	0	s_2	$4s_{1,1,1}$	$10s_{1,1,1,1} + 2s_{2,1,1} - 2s_{2,2} - 10s_{3,1} - 3s_4$	$16s_{1,1,1,1,1} - s_{2,1,1,1} + 8s_{2,2,1} - 29s_{3,1,1} + 7s_{3,2} + 13s_5$	$15s_{1,1,1,1,1,1} - 18s_{2,1,1,1,1} + 4s_{2,2,1,1} - 8s_{2,2,2} - 75s_{3,1,1,1} + s_{3,2,1} + 35s_{3,3} - 8s_{4,1,1} + 23s_{4,2} + 51s_{5,1} + 14s_6$
9	s	s_1	$4s_2$	$s_{1,1,1} + 11s_{2,1} + 4s_3$	$9s_{1,1,1,1} + 25s_{2,1,1} - 6s_{2,2} - 9s_{3,1} - 26s_4$	$37s_{1,1,1,1,1} + 45s_{2,1,1,1} + 26s_{2,2,1} - 32s_{3,1,1} - 21s_{3,2} - 60s_{4,1} - 19s_5$	$90s_{1,1,1,1,1,1} + 40s_{2,1,1,1,1} + 10s_{2,2,1,1} + 95s_{2,2,2} - 223s_{3,1,1,1} - 63s_{3,2,1} + 56s_{3,3} - 199s_{4,1,1} + 100s_{4,2} + 73s_{5,1} + 94s_6$
10	$-2s$	$-6s_1$	$-9s_{1,1} - 2s_2$	$-14s_{1,1,1} + 8s_{2,1} + 30s_3$	$-s_{1,1,1,1} + 57s_{2,1,1} - 18s_{2,2} + 59s_{3,1} + 7s_4$	$30s_{1,1,1,1,1} + 177s_{2,1,1,1} - 18s_{2,2,1} + 104s_{3,1,1} - 188s_{3,2} - 177s_{4,1} - 138s_5$	$133s_{1,1,1,1,1,1} + 422s_{2,1,1,1,1} + 145s_{2,2,1,1} + 331s_{2,2,2} + 41s_{3,1,1,1} - 3s_{3,2,1} - 170s_{3,3} - 456s_{4,1,1} + 72s_{4,2} - 134s_{5,1} + 85s_6$
11	$2s$	s_1	$-12s_{1,1} - 18s_2$	$-64s_{1,1,1} - 8s_{2,1} + 33s_3$	$-138s_{1,1,1,1} - 36s_{2,1,1} + 55s_{2,2} + 239s_{3,1} + 127s_4$	$-196s_{1,1,1,1,1} + 176s_{2,1,1,1} - 81s_{2,2,1} + 667s_{3,1,1} - 138s_{3,2} + 2s_{4,1} - 285s_5$	$-124s_{1,1,1,1,1,1} + 624s_{2,1,1,1,1} + 190s_{2,2,1,1} + 138s_{2,2,2} + 1548s_{3,1,1,1} - 199s_{3,2,1} - 965s_{3,3} - 62s_{4,1,1} - 1132s_{4,2} - 1456s_{5,1} - 590s_6$
12	0	$3s_1$	$-6s_{1,1} - 59s_2$	$-38s_{1,1,1} - 162s_{2,1} - 85s_3$	$-231s_{1,1,1,1} - 433s_{2,1,1} + 114s_{2,2} + 185s_{3,1} + 418s_4$	$-586s_{1,1,1,1,1} - 504s_{2,1,1,1} - 145s_{2,2,1} + 1023s_{3,1,1} + 847s_{3,2} + 1441s_{4,1} + 475s_5$	$-1308s_{1,1,1,1,1,1} - 713s_{2,1,1,1,1} - 430s_{2,2,1,1} - 2126s_{2,2,2} + 3745s_{3,1,1,1} - 447s_{3,2,1} - 1780s_{3,3} + 2713s_{4,1,1} - 3378s_{4,2} - 2540s_{5,1} - 2111s_6$
13	$8s$	$48s_1$	$83s_{1,1} + 25s_2$	$111s_{1,1,1} - 228s_{2,1} - 400s_3$	$-93s_{1,1,1,1} - 830s_{2,1,1} + 131s_{2,2} - 705s_{3,1} - 2s_4$	$-719s_{1,1,1,1,1} - 3101s_{2,1,1,1} - 328s_{2,2,1} - 1608s_{3,1,1} + 2717s_{3,2} + 3077s_{4,1} + 2311s_5$	$-2258s_{1,1,1,1,1,1} - 5169s_{2,1,1,1,1} - 963s_{2,2,1,1} - 3914s_{2,2,2} + 2600s_{3,1,1,1} + 4429s_{3,2,1} + 3361s_{3,3} + 10416s_{4,1,1} + 2197s_{4,2} + 3934s_{5,1} - 973s_6$
14	$-17s$	$11s_1$	$169s_{1,1} + 188s_2$	$598s_{1,1,1} + 26s_{2,1} - 458s_3$	$1259s_{1,1,1,1} + 35s_{2,1,1} - 833s_{2,2} - 3024s_{3,1} - 1759s_4$	$1347s_{1,1,1,1,1} - 4226s_{2,1,1,1} - 853s_{2,2,1} - 9176s_{3,1,1} + 1051s_{3,2} - 143s_{4,1} + 3440s_5$	$432s_{1,1,1,1,1,1} - 9102s_{2,1,1,1,1} - 2017s_{2,2,1,1} + 53s_{2,2,2} - 15086s_{3,1,1,1} + 12424s_{3,2,1} + 16880s_{3,3} + 10326s_{4,1,1} + 25310s_{4,2} + 26059s_{5,1} + 10237s_6$
15	$-14s$	$-34s_1$	$123s_{1,1} + 499s_2$	$740s_{1,1,1} + 1676s_{2,1} + 825s_3$	$2623s_{1,1,1,1} + 3353s_{2,1,1} - 1733s_{2,2} - 3869s_{3,1} - 4669s_4$	$6680s_{1,1,1,1,1} + 6159s_{2,1,1,1} + 3305s_{2,2,1} - 10919s_{3,1,1} - 7565s_{3,2} - 14792s_{4,1} - 4291s_5$	$11039s_{1,1,1,1,1,1} - 8455s_{2,1,1,1,1} - 18627s_{2,2,1,1} + 10104s_{2,2,2} - 71325s_{3,1,1,1} - 28303s_{3,2,1} + 15022s_{3,3} - 49340s_{4,1,1} + 26884s_{4,2} + 28282s_{5,1} + 25714s_6$
16	$-20s$	$-268s_1$	$-491s_{1,1} + 55s_2$	$-317s_{1,1,1} + 2881s_{2,1} + 3441s_3$	$2482s_{1,1,1,1} + 9040s_{2,1,1} - 429s_{2,2} + 4942s_{3,1} - 1635s_4$	$11500s_{1,1,1,1,1,1} + 34542s_{2,1,1,1,1} + 8547s_{2,2,1} + 10598s_{3,1,1} - 27078s_{3,2} - 36549s_{4,1} - 24154s_5$	$26795s_{1,1,1,1,1,1,1} + 37235s_{2,1,1,1,1} - 16753s_{2,2,1,1} + 23971s_{2,2,2} - 85912s_{3,1,1,1} - 113620s_{3,2,1} - 43822s_{3,3} - 163569s_{4,1,1} - 58533s_{4,2} - 55546s_{5,1} + 11555s_6$

FIGURE 1. $\mathbb{S}_n$等变欧拉示性数为$C_{g,\ n}$。

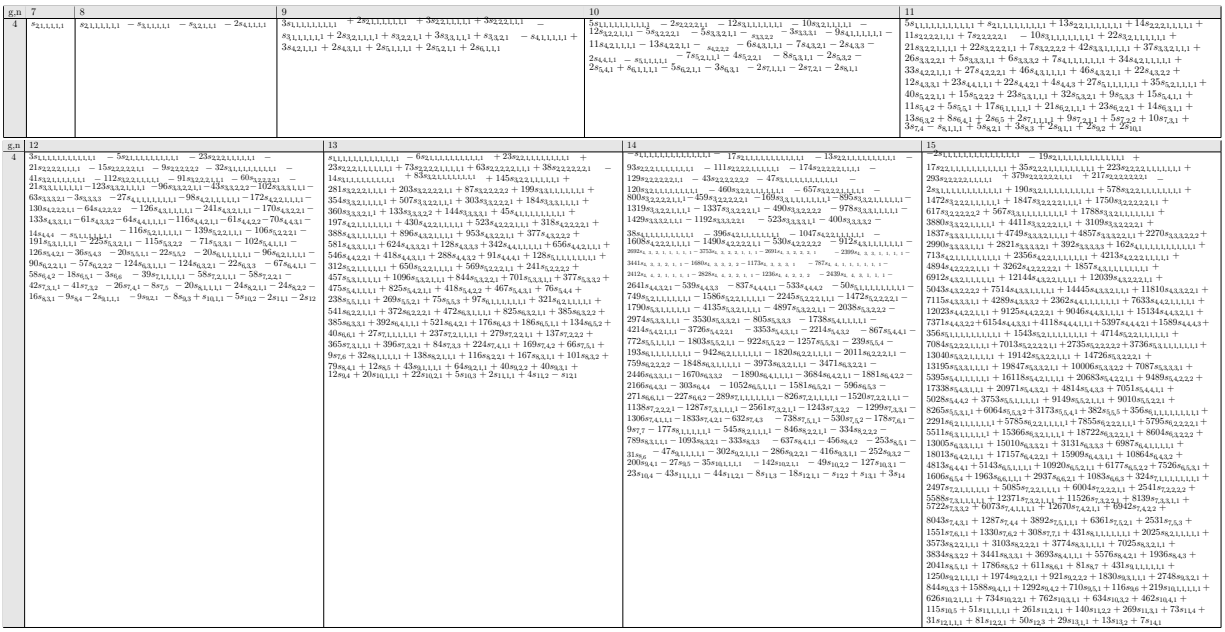


FIGURE 2. C_g的 $\mathbb{S}_n$等变欧拉示性数，n 针对 $g=4$ 和 $n\leq 15$。

顶点，并且通过 $\underline{X}^{tp,\ conn}$ 表示其连通子复形。类似地，我们用 HGC $\subset$ fHGC 表示连通部分，因此

$$\mathsf{fHGC} = \mathrm{Sym}(\mathsf{HGC})$$

是一个对称积。我们用 HGC^{tp} 表示毛图复形 HGC 的一个变体，它由允许顶点上带有自环的图生成。我们将回顾以下结果：

定理 A.1（定理 3.1，见 [19]）。 包含映射 $\mathsf{HGC}^{tp} \to (X^{tp,\ conn}, \delta_s)$ 的映射锥具有二维上同调，其由一个上同调类张成，该上同调类在 HGC^{tp} 上的投影为

$$D = \quad$$



以及一个上同调类，其在 $(X^{tp,\ conn}, \delta_s)$ 上的投影为

$$T = \quad$$



$$\epsilon \quad \omega \quad \omega \ .$$

由此可以轻易推出以下无自环变体：

推论 A.2。 包含映射 HGC $\to (X^{conn}, \delta_s)$ 的映射锥具有三维上同调，由三个上同调类张成，它们在 (X^{conn}, δ_s) 上的投影分别为上述的 T，以及

$$L^{\omega} = \ \epsilon \longrightarrow \omega \qquad\qquad L^{\epsilon} = \ \epsilon \longrightarrow \epsilon \ .$$

分别。

证明。 我们首先比较复形的无自环版本与带自环版本，也就是说，我们研究以下投影的映射锥

$$\mathsf{HGC}^{tp} \to \mathsf{HGC} \qquad\qquad \underline{X}^{tp,conn} \to \underline{X}^{conn}.$$

在每种情况下，该映射都是满射，因此映射锥与核拟同构，而核由至少含有一个圈图的图张成。沿用 [1，引理 5] 中的论证

可以看出，这个复形的上同调由只有一个顶点且该顶点带有一个度数为 3 的圈图的图张成。这类图的完整列表如下：

$$D = \quad \bigcirc\!\!-\!\!\bullet \qquad\qquad D^{\omega} = \ \omega \ \bigcirc\!\!-\!\!\bullet \qquad\qquad D^{\epsilon} = \ \epsilon \ \bigcirc\!\!-\!\!\bullet \ .$$

余循环 D 在 HGC^{tp}中不是恰当的。因此，HGC^{tp} 的上同调比 HGC 的上同调多一维，这一新增维度由 D^{ω} 的上同调类张成。

上循环 D^{ω} 和 D^{ϵ} 在 $X^{tp,conn}$ 中都是恰当的，因为 $D^{\omega} = \delta_s L^{\omega}$ 和 $D^{\epsilon} = \delta_s L^{\epsilon}$。因此，HGC 的上同调比 HGC^{tp}的上同调多两维，新增的生成元为 L^{ω} 和 L^{ϵ}；它们在 X^{conn} 中是闭元素，但在 $X^{tp,conn}$中不是。

考虑到这些（较小的）差异，该推论便可由定理 A.1 轻松得到。 □

References

[1] Assar Andersson、Thomas Willwacher 和 Marko ˇZivkovi´c。《定向毛图与曲线模空间》。arXiv:2005.00439，2020。[2] Gregory Arone 和 Victor Turchin。《计算高维长纽结空间类比对象有理同伦的图复形》。《Ann. Inst. Fourier》65（2015），第 1 期，1–62。[3] Jonas Bergstr¨om 和 Carel Faber。《借助 Chenevier 和 Lannes 的一个结果研究模空间的上同调》。《Epijournal G´eom. Alg´ebrique》7（2023），第 20 号文章，共 14 页。[4] Jonas Bergstr¨om、Carel Faber 和 Sam Payne。《稳定曲线模空间上的多项式点计数与奇次上同调消失》。arXiv:2206.07759，2022。即将在《Ann. Math.》发表。[5] Samir Canning、Hannah Larson 和 Sam Payne。《$\mathcal{M}_{g,n}$的第十一上同调群》。《Forum Math. Sigma》11（2023），论文编号 e62，共 18 页。[6] Melody Chan、Carel Faber、Soren Galatius 和 Sam Payne。《$\mathcal{M}_{g,n}$的 $\mathbb{S}_n$-等变顶权欧拉示性数》。《Amer. J. Math》145（2023），第 5 期，1549–1585。[7] Melody Chan、Soren Galatius 和 Sam Payne。《热带曲线、图复形与 $\mathcal{M}_g$的顶权上同调》。《J. Amer. Math. Soc.》34（2021），第 2 期，565–594。[8] Melody Chan、Soren Galatius 和 Sam Payne。《带标记点的热带曲线模空间的拓扑》。《代数几何前沿》。第 I 卷，77–131，London Math. Soc. Lecture Note Ser.，472，Cambridge Univ. Press，Cambridge，2022。[9] Ga¨etan Chenevier 和 Jean Lannes。《自守形式与偶自对偶格》。Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics 69，Springer，Cham，2019。xxi+417 页。[10] Vladimir Drinfeld。《拟三角拟 Hopf 代数及与 Gal($\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$) 密切相关的一个群》。《Leningrad Math. J.》2（1991），第 4 期，829–860。[11] Benoit Fresse、Victor Turchin 和 Thomas Willwacher。《流形在 $\mathbb{R}^n$ 中的嵌入空间的有理同伦类型》。预印本，arXiv:2008.08146，2020。[12] Benoit Fresse 和 Thomas Willwacher。《 E_n-运算子的内在形式性》。《J. Eur. Math. Soc. (JEMS)》22（2020），第 7 期，2047–2133。[13] Ezra Getzler 和 Mikhail Kapranov。《模运算子》。《Compos. Math.》110（1998），第 1 期，65–126。[14] Maxim Kontsevich。《变形量子化中的运算子与动机》。《Lett. Math. Phys.》48（1999），35–72。[15] Maxim Kontsevich。《形式性猜想》。载于：D. Sternheimer 等编，《变形理论与辛几何》，Kluwer，1997，139–156。[16] Sam Payne 和 Thomas Willwacher。《曲线模空间的权二紧支撑上同调》。预印本，arXiv:2110.05711，2021。[17] Sam Payne 和 Thomas Willwacher。《曲线模空间的权二紧支撑欧拉示性数》。预印本，arXiv:2112.13155，2021。即将在《Pure Appl. Math. Q.》纪念 Enrico Arbarello 的特别卷中发表。[18] Victor Turchin 和 Thomas Willwacher。《交换毛图与

$Out\ F_r$ *J. Topol-* ( )

ogy 10 2017 2, 386 411
的表示》。《 》. ( )，第 – 期。[19] Victor Turchin 和 Thomas Willwacher。《 $\mathbb{R}^n$ 中球结空间的同伦类型》。预印本，arXiv:2012.09965，2021。[20] Thomas Willwacher。《Pre-Lie 对与扭曲毛图复形上李括号的平凡性》。《Int. Math. Res. Not. IMRN》2022，第 23 期，18205–18255。

UT Department of Mathematics, 2515 Speedway, RLM 8.100, Austin, TX 78712, USA
Email address: sampayne@utexas.edu

Department of Mathematics, ETH Zurich, Rämistrasse 101, 8092 Zurich, Switzerland*Email address*: thomas.willwacher@math.ethz.ch